

國立交通大學

物理學研究所

碩士論文

Bianchi Type I 以及 Bianchi Type V 宇宙模型

在 Brane 時空下的演化

Evolution of Bianchi Type I and Bianchi Type V
Model on Brane Space-Time

研究生：陳正彬 (Cheng-Pin Chen)

指導教授：高文芳 教授 (Prof. Win-Fun Kao)

中華民國九十三年七月

Bianchi Type I 以及 Bianchi Type V 模型在 Brane 時空下的演化

Evolution of Bianchi Type I and Bianchi Type V Model on Brane
Space-Time

研究生：陳正彬

Student : Cheng-Pin Chen

指導教授：高文芳

Advisor : Win-Fun Kao

國立交通大學

物理學研究所



A Thesis

Submitted to Institute of Physics

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Physics

July 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

誌謝

兩年的時光，隨著論文的完成我的研究生生涯也將告一段落。我感到相當慶幸，在我的人生旅途中我又往前邁了一大步。回首這兩年的時光，我的回憶歷歷在心頭。對於我的碩士論文的完成，我要感謝許多人的幫助以及照顧。我想，在這兩年中若沒有這些人的鼓勵，我也不會完成我的碩士論文，在此我要獻上我最深的致意。首先，我要感謝我的爸爸-陳世龍先生以及媽媽-陳吳笑美女士，感謝他們讓我在求學時期不用擔憂生活上的物質需求，也要感謝他們對我無微不至的照顧，如果沒有父親與母親的栽培與照顧，我想我不會這樣順利的完成我的學業也不會有今天的這份喜悅。再次的感謝我的父母，謝謝您們。雅莉，我想你是繼我父母之後我最想感謝的人。在這幾年的時光裡，我要謝謝你對我的包容以及照顧，在我無助需要人安慰的時後你第一個來到我身邊，讓我重獲跨越障礙的信心進而解決我眼前的難題。在我沮喪的時候持續的給我鼓勵讓我支持下去，並完成學業，真的感謝妳。

高文芳教授是我的論文指導老師，我要感謝高教授適時的指正我研究上的缺失以及錯誤。如果沒有他的教誨，我的論文不會有今天的成果，在此我要深深的感謝他。他也讓我明白，唯有團結的力量才能跨越重重的難關。林貴林教授在課業上的教導使得我在理論物理的學習上，得到許多幫助，在這裡我也要感謝他。鍾旻峰同學在研究上給了我很大的幫助，我們一起解決問題思考問題，一步一步的將我們的研究完成。與他相處的研究時光中，我了解到團結的力量。如果沒有鍾旻峰同學的幫助，我想這篇論文不會那麼順利完成。許書豪學長是我另一個想要感謝的人，他在我剛進研究室的時期，給了我非常多的意見以及鼓勵，讓我更加確定我研究的決心。蔡明燃以及蔡岳霖同學在我研究所最後的時間給了我許多研究上的寶貴意見，這些寶貴的意見造就了我論文的完整性，在此我由衷的感謝他。然而在心靈的層面上，我要特別感謝黃祺荃同學，他時常與我談論許多心靈層面的話題以及給予我許多建議，這使得我在心靈成長方面有了不同的觀點，在此我也要特別的感謝他。容震軒同學在數值程式方面給予了我許多幫助，沒有他的幫助我絕對會更加的辛苦，所以我在此要深深的感謝他。

最後，我要感謝弟弟以及妹妹，你們是我最親愛的家人。與你們相處的時光中，讓我感到相當的溫暖以及愉快，謝謝你們。還有許多同學的幫忙，我也要在這對你們致上最深的謝意，我相信認識你們將會是我這一生中珍貴的回憶，謝謝你們。

摘要

本論文主要探討兩個非各向同性的宇宙模型, Bianchi type I 以及 Bianchi type V. 探討它們在 Brane 時空下的宇宙演化, 並找出當 $3\Lambda V^2$, $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 以及 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 分別為主要影響的時候其近似解與數值解的關係. 藉由理論推導 我們可以找出在 Brane 時空下, Bianchi type I 模型當 $\gamma = 1$ 以及 2 的體積演化方程式. 它們可以以通解的方式表示出來. 並且藉由數值計算我們發現當宇宙演化的時間點越晚 $3\Lambda V^2$ 這一項對於整個宇宙的影響越重要, 當宇宙演化的時間終點取的越早 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 這一項效應的影響越重要.

而 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 這一效應為主的時間間隔相當的短, 也表示著這一效應對於宇宙的整體演化影響不大. 最後由非各向同性演化圖中了解到在 Brane 時空下以及廣義相對論時空下其非各向同性演化趨勢不同. Brane 時空一開始是各向同性並在某一時間達到最大非各向同性且最後皆演化到各向同性. 但是對於 $\gamma = 1$ 的情況下, Brane 時空的非各向同性是不同於其他 γ 值的. 而在廣義相對論時空下, 當 $\gamma = 2$ 的情況下, 它會具有與其他 γ 值不同的現象. 由不同時空下的非各向同性演化圖的比較中我們了解到廣義相對論時空一開始是非各向同性再演化到各向同性, 與 Brane 時空有不同的特性. 最後我們討論減速因子的演化, 證明了宇宙演化是漸漸在加速膨脹的.

Contents

1	緒論	7
1.1	廣義相對論的起源	8
1.2	Randall-Sundrum 理論的起源	10
1.3	研究動機	13
2	計算與理論推導	15
2.1	Bianchi Type I 的宇宙	15
2.1.1	廣義相對論的觀點	15
2.1.2	Brane 效應的觀點	18
2.2	Bianchi Type V 的宇宙	21
2.2.1	廣義相對論的觀點	21
2.2.2	Brane 效應的觀點	22
3	研究討論與分析	24
3.1	Brane 宇宙演化的探討	24
3.1.1	Bianchi Type I	24
3.1.2	Bianchi Type V	31
3.2	非各向同性(Anisotropy) 的討論	36
3.3	減速因子(Decelerating Parameter) 的討論	39

4 結論與展望	42
A Bianchi Type I 模型的推導	44
A.1 廣義相對論的假設	44
A.2 Brane 效應的觀點	46
B Bianchi Type V 模型的推導	47
B.1 廣義相對論的觀點	47
B.2 Brane 效應的觀點	48



List of Figures

- 1 Brane 時空下, Bianchi type I 模型之宇宙演化圖 : 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 26
- 2 Brane 時空下, Bianchi type I 模型當 $3\Lambda V^2$ 為主之宇宙演化 圖 : 實線 (數值分析), 圓圈 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 26
- 3 Brane 時空下, Bianchi type I 模型當 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析) , 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 27
- 4 Brane 時空下, Bianchi type I 當 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主之宇宙演化圖: 參數設定為 : 實線 (數值分析) , 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 27
- 5 Brane 時空下, Bianchi type V 模型之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 32
- 6 Brane 時空下, Bianchi type V 模型當 $3\Lambda V^2$ 為主之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析), 圓圈 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 32
- 7 Brane 時空下, Bianchi type V 模型當 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析), 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 33
- 8 Brane 時空下, Bianchi type V 當 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主之宇宙演化圖: 參數設定為 : 實線 (數值分析), 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 33
- 9 廣義相對論下Bianchi type I 模型的非各向同性演化圖 : 虛-點線 ($\gamma = 2$) , 虛線 ($\gamma = 4/3$), 點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$). 參數 設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 37

- 10 Brane 宇宙下 Bianchi type I 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 37
- 11 廣義相對論下 Bianchi type V 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 38
- 12 Brane 宇宙下 Bianchi type V 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 38
- 13 廣義相對論下 Bianchi type I 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 39
- 14 Brane 宇宙下 Bianchi type I 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 40
- 15 廣義相對論下 Bianchi type V 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 40
- 16 Brane 宇宙下 Bianchi type V 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。 41

1 緒論

自從1965年 Penaiias 與 Wilson 發現了宇宙微波背景輻射 (Cosmology Microwave Background) 後, 這微小的輻射源如果換算成溫度大約為 2.7 度 K, 且會以均勻的分佈形式存在於宇宙之間. 而藉由宇宙背景輻射成功的觀察數據得到證明, 我們現今的宇宙在物質能量與動量分布上具有很高精 準度的均勻性 (Homogeneity) 以及各向同性 (Anisotropy). 但是對於宇宙學研究最根本的目的-宇宙的 演化以及宇宙的來源, 我們還是無法明確的給予解釋. 所以我們試著藉由兩個不同的理論, 想要去討論 整個宇宙的演化, 這兩個理論便是 (1).General Relativity(G.R) 以及 (2).Randall-Sundrum 理論 (R-S).希望藉由這兩個不同的理論探討, 能帶給我們更多有關於宇宙演化的訊息.

三十多年來對於宇宙背景輻射的觀測得知, 我們的宇宙事實上並非如先前假設的那樣非各向同性, 的確存在著些微的差異性, $\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}$.這時候我們便開始思考 宇宙在一開始的時後是否依然是各向同性, 或著在一開始的時候是非各向同性, 而現今宇宙的各向同 性的證據只是經由演化而來的結果. 所以我們嘗試著在不同的幾何模型下以不同的假設來探討宇 宙的演化. 在我們的研究中, 我們將專注在 G-R 以及 R-S 的理論架構, 而 R-S 理論架構的詳細介紹 以及基礎概念可以在 [1] [2] 這兩篇論文中找到. 進一步, 我們爲了要證明宇宙 事實上在早期時並非各向同性, 故我們選用Bianchi Type I 以及 Bianchi Type V 這兩種不同 的非各向同性幾何模型當作我們研究的基礎, 並引入理想流體模型,

$$p = (\gamma - 1)\rho; \quad 1 \leq \gamma \leq 2$$

來當做我們在愛因斯坦方程式中物質能量, 也就是所謂的能量-動量張量 (Energy-Momentum Tensor- T_{μ}^{ν}).這裡的 p 代表宇宙中物質的動量通量, ρ 代表宇宙間物質 的能量密度. 接著我們嘗試著找出在不同 γ 值時其宇宙演化的通解, 希望能藉由通解 的形式來找出宇宙演化的訊息. 假如我們能推倒出宇宙演化的通解, 我們將可以找出我們宇 宙的完整演化情況, 並能確定在不同時期得時候, 我們的宇宙是以怎樣的行爲在發展. 整個宇宙 演化的非各向同性 (Anisotropy) 對時間做圖 (A-t) 以及減速因子 (Deceleration parameter) 對時間做圖 (q-t) 也將會被我們放在文中作爲我們一項重要的討論.

我們利用數值分析來當做我們研究的方法, 藉由數值分析我們希望能找出我們宇宙演化的 情況. 然而在做這些研究之前, 我們必須先了解 General Relativity 以及 R-S 理論的基本知 識, 接下來我們便先介紹 G-R 以及 R-S 的理論背景以及做一些簡單的介紹.

1.1 廣義相對論的起源

大約在西元1900年之前, 牛頓的動力系統可以解釋一些巨觀的宇宙觀測現象. 然而 隨著科技的發展, 天文觀測技術的日新月異也使我們在星系以及整個宇宙的認識上, 有更進一步的發現. 這時候牛頓所建立的重力理論已經不能為我們所獲得的宇宙資訊做更多的解釋. 幸運的在西元1916年之後, 也就是愛因斯坦提出所謂的狹義相對論 (Special Relativity) 之後, 他更進一步的將空間與時間結合起來並提出我們所謂的廣義相對論 (General Relativity). 對天文學家以及物理學家來說, 廣義相對論是一門嶄新的學科以及對於宇宙學研究來說, 提供了一個新的思維並讓物理學進入了另一個新的領域.

首先, 我們必須先了解愛因斯坦方程式 (Einstein Equation) 的整體架構與概念. 愛因斯坦方程式是由作用量定理 (Action Principle) 中得出. 而作用量 S 的廣義形式可以表示為

$$S = - \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{R}{16\pi G} + L_{matter} \right) \quad (1)$$

在這裡 R 所代表的是黎曼曲率張量 (Riemann Curvature Tensor), G 所代表的是重力常數 (Gravitational Constant) 以及 L_{matter} 是所謂物質場的 Lagrangian. 然而, 愛因斯坦方程式可以藉著對方程 (1) 中的 $g_{\mu\nu}$ 做變分而得, 且可以表達成

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi GT^{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2)$$

在方程式 (2) 中的 $T_{\mu\nu}$ 是所謂的能量-動量張量 (Energy-Momentum Tensor), 他在真空宇宙中將會消失. 我們稱 Λ 為宇宙常數 (Cosmological Constant), 當初這項常數 在愛因斯坦方程中原本是不存在的, 但是他如果不存在, 我們的宇宙最後將會塌縮. 如此一來便與觀測的證據有所出入, 於是愛因斯坦最後將他加到方程式中以便於抵抗整個宇宙塌縮的影響. 此時我們 便可以將物質場的 Lagrangian 帶入方程式 (1) 中進而得到非真空中的作用量, 可以表示為

$$S = - \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) \right] \quad (3)$$

在方程式 (3) 中的 A_μ 以及 ϕ 分別所指的是物質所感受的向量場以及純量場. 而式子中的 $F_{\mu\nu}$ 是所謂的向量場強 (Strength of Vector Field), 它可以被定義為下列表 示式.

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

於是在愛因斯坦方程式中的能量-動量張量 $T^{\mu\nu}$ 將會以下列形式表示

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_\alpha^\mu F^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + V(\phi) \right) \quad (4)$$

根據方程式 (2,3,4) 的關係可以導出在真空宇宙狀況下的愛因斯坦方程式，只要我們將方程式 (2) 中的 T_{μ}^{ν} 令為零並只留下宇宙常數 (Λ) 即可獲得。

然而對於在大尺度時空結構下，我們可以藉由宇宙背景輻射 (CMB) 的觀測以及星系在星空中的分布資料了解到我們的宇宙是具有高度的均勻性以及各向同性。對於具有這樣特性的宇宙，我們想要用某種特別的宇宙模型來表示它，進而可以對它有更深一層的了解。以現今而言，Friedmann-Robertson-Walker (F.R.W) 宇宙模型可以為我們帶來相當好的描述。而這也是因為對於 F.R.W 模型而言，他本身的幾何特性便是均勻且各向同性。我們可以清楚的從下面的式子看到他的形式

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (5)$$

在上式中，我們大略的了解到此模型的幾何結構，但是其中的一些參數卻需要進一步的介紹。 $a(t)$ 是我們宇宙的尺度因子，他代表的是整個宇宙幾何結構的演化性質。然而對於觀測而言座標是相當重要的依據，在這裡我們將觀測座標表示為 (t, r, θ, ϕ) 。另一個重要的變數 k ，我們必須知道他代表的是整個宇宙的空間曲率 (Spatial Curvature)。對於空間曲率的物理意義來說，它們依據不同的曲率值具有不同的宇宙空間定義。當 $k = 1$ 時所代表的是開放的宇宙， $k = 0$ 代表的是平直的宇宙以及 $k = -1$ 代表的是封閉的宇宙。而它們所為之代表的宇宙模型分別為 Kantowski-Sach, Bianchi Type I 以及 Bianchi Type III 宇宙模型。而根據方程式 (5)，我們可以藉由計算 Christoffel symbol (Γ_{jk}^i)，Ricci 張量 (R_{ij}) 以及 Ricci 純量 (R) 得到愛因斯坦方程式的微分形式。而對於詳細的計算我們將會在附錄中詳加介紹，這裡我們只寫出他們的簡化形式。經由簡單的推導，我們得到非零的 Christoffel symbol (Γ_{jk}^i)，它們分別為

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} [\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}] \quad (6)$$

$$\Gamma_{ij}^t = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} g_{ij}, \quad \Gamma_{ti}^i = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}; \quad i = 1 \sim 3 \quad (7)$$

而非零的 Ricci 張量以及 Ricci 純量可以從非零的 Christoffel symbol 中得出，它們將表示為

$$R_{tt} = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{2k}{a^2(t)} \right] g_{ij} \quad (8)$$

最後我們可以從方程式 (8) 中得到 Ricci 純量的表示形式。

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} \right] \quad (9)$$

最後我們可以由方程式 (8,9) 以及愛因斯坦方程式 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$ 得到微分型態的愛因斯坦方程。此時我們將我們宇宙的能量-動量張量視為理想流體，其中可以分成兩部分，一部分是與

時間有關的能量密度 (energy density); 另一部分是與空間有關的動量張量 (momentum tensor). 如此一來我們便可將微分形式的愛因斯坦方程分成兩部分, 一部分是與時間有關另一部分是與空間有關, 可以表示成下列關係.

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (10)$$

$$2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} = -8\pi G\rho + \Lambda \quad (11)$$

如果我們在這裡只考慮能量-動量張量的影響, 那宇宙常數 (Λ) 便可以忽略. 此時藉由對方程式 (10;11) 做簡單的推導, 我們可以得到當處於平直宇宙 ($k = 0$) 時 F.R.W 模型的真空解 (de-sitter solution). 而其中相當重要的物理參數, 例如: 真空能量密度 (Vacuum Energy Density ρ_{vac}), 哈柏常數 (Hubble constant H) 以及宇宙的尺度因子 ($a(t)$) 等, 它們可以得到下列的關係式

$$\rho_{vac} = \frac{\lambda}{8\pi G} = constant ; H = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{vac}\right)^{1/2} = constant ; a(t) \propto exp(Ht) \quad (12)$$

哈柏常數可以被定義成 $H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, 且由方程式 (12) 可以清楚的了解我們的宇宙在一開始的時間, 其尺度因子是相當的小. 而且它將會以指數的形式隨著時間的演化擴大到無窮大. 以上的分析直接的告訴我們宇宙是處於膨脹狀態的, 而這樣的結論也進一步的滿足了觀測上的結果.

1.2 Randall-Sundrum 理論的起源

對於 Randall-Sundrum 理論的基本概念來說, 我們便要從五維時空的起源開始講起. 早在 1919 年, 俄羅斯的年輕數學家 Kaluza 理解到重力可以用四維空間的時空連續體的曲率來予以詮釋, 那麼電磁作用力一樣也可以用五維空間的時空連續體的曲率來表明. 表達在五維時空架構下的廣義相對論方程式賦予重力一如往常的描述, 與其同時出現的另一組方程式在數學上的意義則相當於馬克士威的電磁學方程組. 我們稱四維時空為: 3-Brane, 即是四維時空被壓縮成一個五維的一個面內, 而那第五維則在那五維時空 (我們稱為 bulk) 內. 然而, 為了不違反重力的實驗結果, 這第五維應該要極為微小的 (小到 Planck Scale 的尺度) 和幾乎觀測不到的. 這時我們又必須解釋一下何謂 bulk, 它指的是第五維的空間. 在這樣的空間中, 所以的物理意義以及訊息都存在其中. 但是有一個重要的觀念是, 根據重力實驗的證據在這個空間中物質以及規範場 (gauge field) 幾乎只存在我們所認知的四維時空, 其他部分幾乎只允許重力場的存在, 也就是指 bulk 的影響應該要非常的小. 而在後來, 瑞典物理學家 Klein 則是把量子物理學的觀點合併於 kaluza 的五維空間的理論中, 他重新寫了薛丁格方程式, 以五個變數代替原來的四個, 從而證明該方程式的解釋可以被詮釋為粒-波在重力場與電磁場二者影響下之運動的描述. 不過此方法後來是被認為行不通.

但是在1980年代期間，由於統一理論的 Kaluza-Klein 觀點重新被提出來，一些物理學家認為強作用力與弱作用力是可以被概括起來的。而近十多年來在討論五維時空的論文中，以 Randall-Sundrum 所提出的 brane world scenario 想法最為重要。它們發現當 brane 宇宙演化到晚期的時候，事實上與我們所認知的四維宇宙在晚期的時後是相同的。而且它們也發現如果能量-動量張量的形式是理想流體，那麼就只有一些特別的均勻性宇宙模型可以被允許。

如果你們想要再多了解許多有關於 brane world scenario 的詳細介紹與研究，可以參考附錄中的論文。當初 brane world scenario 的最原始概念是由 Randall 以及 Sundrum 所提出的，它們描述四維的時空事實上是被嵌在五維 anti de-sitter 時空中的一個幾何面。它們提出一種力學系統，藉由探討一些很小的超維度 (extra dimension) 現象，進而去解決四維中無法解決的問題。緊接著 Shiromizu, Maeda and Sasaki 等人算出了在低能量近似下 (在此我們忽略能量-動量張量的二次方貢獻項 $S_{\mu\nu}$ 以及單純的 bulk 效應 $E_{\mu\nu}$ 的影響)，具有 brane 概念的有效重力方程式。而在 brane 概念下的有效重力方程式可以表示為：

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + k_4^2 T_{\mu\nu} + k_5^4 S_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \quad (13)$$

在這裡的 $G_{\mu\nu}$ 指的是廣義的愛因斯坦重力方程式。其中的 Λ, k_4^2 以及 k_5^4 分別定義為宇宙常數，四維的重力常數以及五維的重力常數。在這裡的 $g_{\mu\nu}$ 稱之為在 brane 效應下的度規張量 (metric tensor)。 $S_{\mu\nu}$ 以及 $E_{\mu\nu}$ 分別稱為能量-動量張量的二次方貢獻項以及單純的 bulk 效應，它可以由在 brane 效應下的 Weyl 張量定義出來。 $S_{\mu\nu}$ 可以表示為

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_{\mu}^{\alpha} T_{\nu\alpha} + \frac{1}{24} g_{\mu\nu} (3T^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} - T^2) \quad (14)$$

方程式 (13) 中的總宇宙常數可以表示為 $\Lambda = k_5^2 (\Lambda_5 + k_5^2 \lambda^2 / 6) / 2$ 。而四維重力常數與五維重力常數將會有關聯， $k_4^2 = k_5^4 \lambda / 6$ 。事實上在五維時空中，對於重力方程影響最大的是 bulk 效應 ($E_{\mu\nu}$) 的產生，由五維的 Weyl 張量可以得到相關形式

$$E_{\mu\nu} = C_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\alpha} n^{\beta}$$

$C_{\mu\alpha\nu\beta}$ 是在 bulk 中的五維 Weyl 張量，而 λ 是在 brane 上的真空能量。 $T_{\mu\nu}$ 則是在 brane 上物質的能量-動量張量，它可以表示為

$$T_0^0 = -\rho, \quad T_i^j = \delta_i^j p; \quad i, j = 1 \sim 3$$

在方程式 (14) 中還有一個重要的變數 T ，我們稱它為能量-動量張量的 trace，可以表示為 $T = T_{\mu}^{\mu}$ 。

由方程式 (13) 中我們可以清楚的了解到愛因斯坦的廣義相對論以及 Randall-Sundrum 的 brane world scenario 理論在兩部分有很大的差別，第一部分是所謂局部的能量-動量張量之二

次方修正項 (Quadratic Correction Term), 它是由 $S_{\mu\nu}$ 所影響的; 第二部分是所謂的廣義的 bulk 效應 ($E_{\mu\nu}$), 它是由一些並未被限定在 brane 上的場經由 bulk 效應下的 Weyl 張量所推導得出. 如果我們將以上這兩種差異分別的令他們為下列關係式

$$E_{\mu\nu} = 0 ; k_5^4 \rightarrow 0$$

那愛因斯坦的廣義相對論將會由 brane world scenario 中得出. 在我們的這一篇論文中 我們只將我們的討論專注在所謂平直的幾何 bulk, 這是因為這樣的幾何空間可以有較簡單的重力方程式. 也就是我們使 $C_{\mu\alpha\nu\beta} = 0$, 如此一來 bulk 效應將會消失 $E_{\mu\nu} = 0$. 進一步來說, 我們也了解到在 brane 上物質的能量-動量張量守恆定律 (conservation of energy-momentum tensor) 依然成立, 並可表示為

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (15)$$

接下來我們將研究兩種可以由時空幾何中得到的宇宙模型, 分別是 (a). Bianchi Type I 以及 (b). Bianchi Type V. 而且這樣的時空幾何必須要可以允許一個簡單且可以轉換的三維 isometric 群 G_3 存在類空超空間 (Space-Like Hyperspace) 中. 我們所考慮的這兩個宇宙模型在空間特性上是均勻的, 但卻不一定是各向同性. 我們所知道的是, 它們的尺度因子以及幾何特性只會隨著時間改變, 不會因為不同的觀測者而有不同的性質. 這樣一來我們的愛因斯坦重力方程將會由複雜的偏微分方程變為較為簡單的常微分方程. 首先, 我們必須先知道在 brane 上廣義的度規 (metric) 該如何表示. 所以我們先將 Bianchi Type I 以及 Bianchi Type V 宇宙模型的 line element 表示如下

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a_1^2(t) dx^2 + a_2^2(t) e^{-2\xi x} dy^2 + a_3^2(t) e^{-2\xi x} dz^2 \quad (16)$$

在方程式 (16) 中我們了解到 Bianchi Type I 以及 Bianchi Type V 宇宙模型的分別. 當方程式中的 $\xi = 0$ 時, 我們得到 Bianchi Type I 模型; 當 $\xi = 1$ 的時候, 我們可以得到 Bianchi Type V 模型. 接下來我們便將開始探討這兩個模型在 brane 上的現象 以及差異. 在此為了研究討論上更為方便以及能更清楚的了解宇宙的演化. 我們在這裡先引入一些物理變量, 它們具有下列的形式.

$$V = \prod_{i=1}^3 a_i, \text{ (volume scale factor)} \quad (17)$$

$$H_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}, \quad i = 1 \sim 3, \text{ (directional Hubble parameters)} \quad (18)$$

$$H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 H_i, \text{ (mean Hubble parameter)} \quad (19)$$

$$\Delta H_i = H_i - H, \quad i = 1 \sim 3 \quad (20)$$

藉由以上的關係, 我們可以藉由方程式 (17), (18) 以及 (19) 來導出哈柏常數與體積尺度因子之間的關係式, $H = \dot{V} / 3V$. 最後被我們引入的兩個在宇宙觀測上常用的物理變量是 (1). 減速因子

(Deceleration Parameter- q); 以及 (2). 平均非各向同性參數 (Mean Anisotropic Parameter- A). 它們具有下列的關係式

$$A = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta H_i}{H} \right)^2 \quad (21)$$

$$q = \frac{d}{dt} H^{-1} - 1 = -H^{-2} (\dot{H} + H^2) \quad (22)$$

經由方程式 (21)(22), 我們可以透過我們的非各向同性模型來確定我們的宇宙正在暴漲或是收縮. 如果我們得到正的 q 值, 我們就可以確定宇宙正在收縮. 如果得到負的 q 值, 我們的宇宙就是在暴漲. 如此一來我們便可以清楚的了解宇宙的演化狀態.

1.3 研究動機

當我們讀到有關於 brane world scenario 的相關論文 [1] [2] [5] [6] [7]時, 我們深深認為在宇宙演化的研究上, brane 的效應是一個相當重要的概念以及想法. 事實上還有一些研究也在探討 brane 效應下之宇宙演化 [3] [4]. 經由這些論文研究的介紹以及思考 我們想要去了解對於愛因斯坦的廣義相對論下之宇宙和 brane 效應下的宇宙, 它們在理想流體的 假設下是否有任何的不同, 若有不同則其差異性在哪裡.

我們主要的研究方向著重在宇宙演化的非各向同性 (A), 減速因子 (q) 以及體積尺度因子等方面. 透過數值分析方法的研究, 我們想要找出在不同效應重要的時期它們彼此的體積尺度因子近似解, 我們也將我們找出的近似解與數值分析作近似, 試著將誤差控制在 20% 以下為我們此研究的理想 誤差, 希望透過這樣的研究能找出一些在宇宙演化上新的資訊. 我們想再次重申一次, 我們研究的 宇宙模型是 Bianchi type I 以及 Bianchi type V. 先前 C.M Chen, T.Harko and M.K.Mak [3]已經做過了有關此模型的研究, 我們依據此篇論文的基礎進而加入一些新的 方法以及觀點來作為新的結論. 而 C.M Chen and W.F Kao [4] 也研究過了 Bianchi type I 在整個 brane 效應下宇宙演化的穩定性討論. 以上兩篇論文便是作為我們研究的主要參考 資料. 當然, 我們依然需要更多新的知識以及新的概念來當作我們想法的來源, 如果你們對 於這方面的研究有興趣, 可以參閱以下論文. Brane 時空的基本概念可以參考論文 [1] [2], Brane 效應下的愛因斯坦有效重力方程式的推導以及研究可以參閱論文 [5] [6] [7]. 以上便是我們整各研究的動機以及想法.

最後我們想介紹一下整篇論文的主要架構; Bianchi type I 以及 Bianchi type V 模型在 brane 效應下的詳細理論推導以及計算將會被放在 Section 2, 在這一部分我們將會說明如何由我們愛因斯坦的重力方程式進而得到一些通解以及列出通解的形式. 對於 Bianchi type I 模型在廣義相對

論以及 brane 效應下求得的體積尺度因子通解將會被列在這一部分, 但是我們只能找出當 $\gamma = 1, 2$ 下特定的通解. 而 section 3 將介紹我們研究分析以及討論, 我們會寫出我們整個研究的分析過程以及起始條件. 我們的結論將會被放在 section 4. 若你想清楚知道 Bianchi type I 以及 Bianchi type V 在愛因斯坦方程式上的推導, 請參閱附錄 A 以及 B.



2 計算與理論推導

2.1 Bianchi Type I 的宇宙

在這一章節中, 我們將開始討論 Bianchi type I 的宇宙模型. 我們可以由方程式 (16) 中令 $\xi = 0$ 去得到這樣的一個宇宙模型. 而我們所引入的理想流體假設可以將能量-動量張量以下列形式表示之

$$T_0^0 = \rho; T_i^i = (\gamma - 1)\rho, 1 \leq i \leq 3, \gamma = \text{constant} \quad (23)$$

在理想流體的假設下, 能量密度 ρ 以及動量流量 p 遵守一種線性的 barotropic 狀態方程, 而這樣的狀態方程已經被表示於方程式 (23). 接著我們必須要先知道 Bianchi type I 宇宙模型的線元素關係式 (line element) 是怎樣的表示法. 如此一來我們才可以利用線元素關係中度規 ($g_{\mu\nu}$) 來得到愛因斯坦的重力方程式. 線元素關係式可以表示為

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2 \quad (24)$$

一開始我們先在 section (2.1.1) 中推導廣義相對論假設下的愛因斯坦方程式. 接著在 section (2.1.2) 中我們再繼續推導具有 brane 效應下的愛因斯坦有效重力方程式.

2.1.1 廣義相對論的觀點

事實上, 廣義相對論可以由 brane 效應的有效重力場方程式 (13) 中求得, 只要我們將 k_5^4 以及 $E_{\mu\nu}$ 這兩個物理變量令他們為零. 而愛因斯坦方程式以及能量-動量守恆定律可以表式成下列關係

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + k_4^2 T_{\mu\nu}, \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (25)$$

方程式 (25) 中的 $G_{\mu\nu}, \Lambda$ 以及 k_4^2 分別代表的是愛因斯坦的重力張量 (gravitational tensor), 宇宙常數以及重力常數. 將上一章節中所介紹的物理變量 (17)~(19) 以及 (24) 引用到 Bianchi type I 宇宙模型以及廣義相對論中, 我們可以得到在愛因斯坦的重力場方程式以及所謂的 Bianchi 特性, 可以表示成

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho \quad (26)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H_i) = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho, i = 1 \sim 3 \quad (27)$$

$$\dot{\rho} + 3\gamma H \rho = 0 \quad (28)$$

根據方程式 (28), 我們可以得到物質能量密度的時間演化函數 ($\rho(t)$), 它可以寫成

$$\rho = \rho_0 V^{-\gamma}, \quad \rho_0 = \text{constant} > 0 \quad (29)$$

接下來, 我們將方程式 (29) 帶入程式 (26) 以及 (27) 中, 並將方程式 (27) 中的變數 $i = 1 \sim 3$ 作數學的疊加, 這時候我們便可以獲得一個微分形式的方程式, 這是愛因斯坦方程式在廣義相對論假設下的微分簡化形式.

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(VH) = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho, \quad (30)$$

如果我們將方程式 (30) 以及方程式 (27) 一起對照一下, 我們將會發現 總哈柏常數 (H) 與各別哈柏常數 (H_i) 將會有特定的關係, 可以表示為

$$H_i = H + \frac{K_i}{V}, \quad i = 1 \sim 3 \quad (31)$$

在方程式 (31) 中的 K_i 它是在比較方程式 (30) 以及 (27) 之後, 所產生出來的積分常數. 接下來我們便可以藉著計算方程式 (30) 進而求得非各向同性宇宙 其在廣義相對論下的動力演化方程式, 可以表示成如下

$$\ddot{V} = 3\Lambda V - \frac{3(\gamma - 2)}{2} k_4^2 \rho_0 V^{1-\gamma} \quad (32)$$

事實上我們得到的這個二階動力演化方程式並無法帶給我們太多的物理意義, 我們希望能計算出宇宙的尺度因子本身的動力方程式, 也就是所謂的廣義的精確解. 於是我們便將方程式 (32) 中的體積尺度因子對時間做積分, 我們發現可以求得較為簡單且清楚的一階動力方程式, 可以表示如下.

$$\dot{V} = \left(3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + C \right)^{1/2} \quad (33)$$

在上式中有一個常數 C , 而這個常數是方程式 (32) 對時間積分後所得到的積分常數. 在我們得到方程式 (34) 後, 事實上這是一條非常繁雜的式子, 為了以後的計算方便 我們在這裡定義一個體積尺度因子的函數, 它可以表示為

$$T(V) = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + C \quad (34)$$

依循著方程式 (34) 的定義, 我們便可以重新定義出尺度因子 (a_i), 非各向同性 (A) 以及減速因子 (q), 它們都適合時間有關的物理量並可以表示成以下關係

$$a_i = a_{0i} V^{1/3} \exp \left[K_i \int (3\Lambda V^4 + 3k_4^2 \rho_0 V^{4-\gamma} + C V^2)^{-1/2} \right] \quad (35)$$

$$A = 3K^2 T(V)^{-1} \quad (36)$$

$$q = \frac{(18\gamma - 12)k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} - 12\Lambda V^2 + 8C}{4T(V)} \quad (37)$$

在這裡的 a_{0i} , K^2 以及 C 都是各自表述的積分常數, K^2 與先前的積分常數 K_i 有特定的關係, $K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i^2$. 將 K^2 與 K_i 的關係式帶入 方程式 (35) 以及 (36) 中我們可以進而的求出 K^2 與 C 的關係式, $K^2 = \frac{2}{3}C$.如此一來我們便得到了每個積分常數彼此之間的關係, 我們也就可以 開始繼續計算廣義相對論下非各向同性宇宙的廣義演化解 ($V(t)$). 接著我們便試著帶入不同的 γ 值, 並嘗試解出宇宙的通解. 但是經由我們的嘗試後, 我們發現在 Bianchi type I 的宇宙模型下, 我們只能求出當 γ 值等於1或是2的時候才能得到所謂的通解. 所以我們只能求得特定 γ 值下的體積尺度因子的通解. 對於 $\gamma = 2$ 的通解可以表示 成下列式子

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\sqrt{3\Lambda V^2 + C}} \quad (38)$$

而在 $\gamma = 2$ 下, 廣義相對論假設下宇宙演化的體積尺度因子的完整解可以表示成

$$V(t) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \left(e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{C}{3\Lambda} \right) \quad (39)$$

從方程式 (39) 中, 我們發現我們的體積尺度因子的初始值將會時間參數具有以下形式時 變為零.

$$t = t_s = t_0 + \frac{1}{2\sqrt{3\Lambda}} \ln \frac{C}{3\Lambda}$$

於是我們將它做一些轉換, 使得 t_0 有下列關係時可以得到當時間參數為零的時候其體積尺度因子為零

$$e^{-2\sqrt{3\Lambda}t_0} = \frac{C}{3\Lambda}$$

重新將方程式 (39) 帶入 (35) ~ (37) 中, 我們可以得到另一形式的非 各向同性以及減數因子.

$$A = 9\Lambda K^2 \left[\left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{C}{6\Lambda}e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \right)^2 + \frac{C + \alpha}{3\Lambda} \right] \quad (40)$$

$$q = 2 - \frac{9\Lambda \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{C}{3\Lambda}e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \right)^2}{C + \alpha + 3\Lambda \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{C}{3\Lambda}e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \right)^2} \quad (41)$$

我們令 $3k_4^2\rho_0 = \alpha$, 以便得到更簡化的函數形式. 接著我們可以利用相同的計算過程得到當 $\gamma = 1$ 時的宇宙演化, 它們可以表示成

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\sqrt{3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0 V + C}} \quad (42)$$

在此我們令 $\alpha = 3k_4^2\rho_0$, 如此一來體積尺度因子的通解將可以被解出

$$V(t) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \left[\left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{\alpha}{6\Lambda} \right)^2 - C \right] \quad (43)$$

方程式 (43) 依然告訴我們, 我們可以藉由將時間參數以下面的形式表示以便於得到 初始值為零的體積尺度因子

$$t = t_s = t_0 + \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \ln \left(\sqrt{C} + \frac{1}{6\Lambda} \right)$$

我們也可以換各觀點來看, 假如我們令 $e^{-\sqrt{3\Lambda}t_0} = \sqrt{C} + \frac{\alpha}{6\Lambda}$, 我們將可以得到當時間參數為零的時候其體積尺度因子為零. 而假如我們做這樣的轉換, 非各 向同性以及減速因子將會在 $\gamma = 1$ 的時候具有以下的形式.

$$A = 3CK^2 + \frac{9\Lambda K^2}{4} e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \left[\left(e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - C + \frac{\alpha}{3\Lambda} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{3\Lambda} \right)^2 \right] \quad (44)$$

$$q = -1 - \frac{3 \left(\alpha J(t) + 4C e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \right)}{3\Lambda J(t)^2 + 2\alpha J(t) + 4C e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)}} \quad (45)$$

$$J(t) = \left[\left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{\alpha}{6\Lambda} \right)^2 - C \right] \quad (46)$$

我們嘗試著去找出真正的通解, 也就是不用考慮 γ 的值. 但是我們始終無法解決令人 繁雜的數學問題.

2.1.2 Brane 效應的觀點

接下來我們要從 Randall-Sundrum 理論的觀點進行探討, 我們可以由 T.Shiromizu, K.Maeda and M.Sasaki 的論文中[5][6] 得到所謂五維空間下的有效重力方程式, 詳細形式可參閱方程式(13,14). 在此我們將我們的五維空間假設是存在所謂的 anti de-sitter 空間中並使其五維空間的影響近似於零 ($E_{\mu\nu}$). 而宇宙中物質能量-動量的分布是以理想流體 的形式存在, 如方程式 (23). 如此一來我們便可藉由方程式 (17~19) 以及 Bianchi type I 模型的線元得到重力方程以及能量-動量守恆定律, 可以表示如下

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho - \frac{3\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 \quad (47)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H_i) = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho - \frac{\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 ; i = 1 \sim 3 \quad (48)$$

$$\dot{\rho} + 3\gamma H \rho = 0 \quad (49)$$

接下來我們比較一下方程式 (47,48) 和 (26,27), 我們可以清楚的發現 廣義相對論以及 brane 的不同在於多出了能量-動量張量的二次方項 $S_{\mu\nu}$. 所以我們了解到 若令 $k_5^4 = 0$, 則可以得到廣義相對論下的重力方程. 而能量-動量守恆定律對兩者而言都無 任何差別, 都以方程式 (29) 表示. 接下來我

們利用與得到方程式 (30) 一樣的計算過程 將方程式 (48) 進行改寫, 可得到重力方程簡化形式.

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(VH) = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho - \frac{\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 \quad (50)$$

將方程式 (48) 以及 (50) 比對一下, 我們便可得到與方程式 (31) 一樣的關係式. 最後, 宇宙演化的二階形式可以表示為

$$\ddot{V} = 3\Lambda V - \frac{3(\gamma - 2)}{2} k_4^2 \rho_0 V^{1-\gamma} - \frac{\gamma - 1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{1-2\gamma} \quad (51)$$

將方程式 (51) 對時間做一次積分, 宇宙演化的一階形式便可以被得到.

$$\dot{V} = \left(3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + C \right)^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

在這裡的 C 依然是積分常數, 近一步的將方程式 (52) 對時間在做一次積分, 我們便可發現 演化時間以及體積尺度因子的關係式, $t - t_0 = \int G(V)^{-1/2} dV$. 而這裡的函數 $G(V)$ 是以體積尺度因子為變數

$$G(V) = 3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + C \quad (53)$$

最後對於 Bianchi type I 模型來說, 重力場方程的通解可以表示成以下的參數形式

$$a_i = a_{0i} V^{1/3} \exp \left[K_i \int \frac{1}{V} G(V)^{-1/2} dV \right]; \quad i = 1 \sim 3 \quad (54)$$

$$A = 3K^2 G(V)^{-1} \quad (55)$$

$$q = 2 - \frac{36\Lambda V^2 + 18(2 - \gamma)k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + 3(1 - \gamma)k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}}{12\Lambda V^2 + 12k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4C} \quad (56)$$

在這裡 $K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i^2 = \frac{2}{3}C$ 並且 $\sum_{i=1}^3 K_i = 0$. 此時, 我們無法計算體積尺度因子的通解但是我們可以在 $\gamma = 1$ 以及 $\gamma = 2$ 的前提下得到特別條件下的通解. 如果我們令 $\gamma = 2$ (宇宙充斥著氣體), 我們可以將方程式 (52) 改寫為

$$t - t_0 = \int \frac{V dV}{\sqrt{3\Lambda V^4 + \lambda V^2 + \alpha}} \quad (57)$$

在這裡的 λ 具有某種關係, $\lambda = 3k_4^2 \rho_0 + C$, α 也可以表示為 $\alpha = \frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2$. 如此一來, 體積尺度因子的通解 ($V(t)$) 便可被解出

$$V(t) = \frac{1}{2\sqrt{3\Lambda} e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)}} \sqrt{\left(e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \lambda \right)^2 - 12\Lambda\alpha} \quad (58)$$

接下來我們計算出當體積尺度因子為零的時候, 當時的演化時間必須表示為

$$t = t_b = t_0 + \ln \left(2\sqrt{3\Lambda\alpha} + \lambda \right) / 2\sqrt{3\Lambda}$$

但是這樣的起始條件似乎不太合理，於是我們想使得當演化時間為零的時候，體積尺度因子也為零的起始條件，於是我們便將 t_0 以下列形式取代，

$$\exp(-2\sqrt{3\Lambda}t_0) = \lambda + 2\sqrt{3\Lambda\alpha}$$

將上述方程式帶入非各向同性以及減速因子中，我們可以得到當 $\gamma = 2$ 時的表示形式

$$A(t) = \frac{12K^2 e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \left[\left(e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \lambda \right)^2 - 12\Lambda\alpha \right]}{\left(e^{4\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \lambda^2 + 12\Lambda\alpha \right)^2} \quad (59)$$

$$q(t) = 12e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \frac{\lambda e^{4\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} + (\lambda^2 - 12\Lambda\alpha) (\lambda - 2e^{2\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)})}{\left[e^{4\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \lambda^2 + 12\Lambda\alpha \right]^2} - 1 \quad (60)$$

令一方面，當我們令 $\gamma = 1$ 的時候（物質充斥在宇宙中），方程式(52)可以表示為

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\sqrt{3\Lambda V^2 + \alpha V + \beta}} \quad (61)$$

這裡的 $\alpha = 3k_4^2\rho_0$ 以及 $\beta = \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 + C$ ， C 是積分常數。將方程式(61)解出後，體積尺度因子的通解便可以表示為如下

$$V(t) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} \left[\left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{\alpha}{6\Lambda} \right)^2 - \beta \right] \quad (62)$$

同樣的，我們發現當體積尺度因子為零的時候，起演化時間事實上不是由零開始，它具有下列關係

$$t_s = t_0 + \frac{\ln(\sqrt{\beta} + \frac{\alpha}{6\Lambda})}{\sqrt{3\Lambda}}$$

於是我們將 t_0 換個方式表示，就可以得到當體積尺度因子為零的時候，宇宙是由時間為零開始演化， t_0 的表示是如下

$$e^{-\sqrt{3\Lambda}t_0} = \sqrt{\beta} + \frac{\alpha}{6\Lambda}$$

如此一來我們便可以得到當時間為零的時候，體積尺度因子的初始值為零。這也代表在這個情況之下的宇宙一開始是不存在的，其體積尺度因子為零。而當 $\gamma = 1$ 時的非各向同性以及減速因子可以表示成

$$A(t) = \frac{4K^2 e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)}}{\Lambda \left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \beta + \frac{\alpha}{6\Lambda} \right)^2 + \frac{4\beta}{3} e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \frac{\alpha^2}{9\Lambda}} \quad (63)$$

$$q(t) = 2 - \frac{3 \left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \beta - \frac{\alpha}{6\Lambda} \right) \left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \beta + \frac{\alpha}{6\Lambda} \right)}{\left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \beta - \frac{\alpha}{6\Lambda} \right) \left(e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)} - \beta + \frac{\alpha}{6\Lambda} \right) + \frac{4\beta}{3\Lambda} e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_0)}} \quad (64)$$

在這裡的 $K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i^2$ ， $\alpha = 3k_4^2\rho_0$ 以及 $\beta = \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 + C$ 。事實上對於 brane 宇宙下的演化通解，我們一樣無法得到。但是令人欣慰的是，特殊條件下的通解依然是可以解的。

2.2 Bianchi Type V 的宇宙

我們令方程式 (16) 中的 $\xi = 1$, 以便於求得 Bianchi type V 模型的線元形式. 而對於 Bianchi type V 宇宙模型而言, 其線元的表達式可如下

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)e^{-2x}dy^2 + a_3^2(t)e^{-2x}dz^2 \quad (65)$$

接下來我們將在 section (2.2.1) 中探討廣義相對論下宇宙的動力演化, 試著去找出它們在數學形式上的通解; 以及在 section (2.2.2) 中探討在 brane 時空下宇宙的動力演化通解. 而它們在能量-動量分布的上依然使用理想流體 (23).

2.2.1 廣義相對論的觀點

由附錄B中, 我們了解到 Bianchi type V 與附錄 A 中的 Bianchi type I 它們在幾何形式上的表示是不相同的. 由方程式 (135~138) 中可知, 愛因斯坦的重力方程式以及能量-動量守恆定律可以表示成如下

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho \quad (66)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(V H_i) - \frac{2}{a_1^2(t)} = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho; \quad i = 1 \sim 3 \quad (67)$$

$$2H_1 - H_2 - H_3 = 0 \quad (68)$$

$$\dot{\rho} + 3\gamma H \rho = 0 \quad (69)$$

方程式 (69) 告訴我們在廣義相對論觀點下的宇宙物質分布 ρ 可以有下列關係

$$\rho = \rho_0 V^{-\gamma}$$

而方程式 (68) 告訴我們宇宙演化的尺度因子在 Bianchi type V 模型下彼此擁有下列關係, $a_2 a_3 = a_1^2$, 如此一來體積尺度因子便可以改寫為 $V = a_1^3$. 將上述的條件 帶入方程式 (67) 中, 重力方程的微分形式可以表示為

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(V H) = \Lambda + 2V^{-2/3} - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho \quad (70)$$

將方程式 (67) 以及 (70) 相減, 我們依然可以得到 H_i 與 H 之間的關係, $H_i = H + \frac{K_i}{V}$, 在這裡的 K_i 所代表的是兩方程式相減後所得到的積分常數, 而它必須符合以下關係, $\sum_{i=1}^3 K_i = 0$. 將以上關係式帶入方程式 (70) 中, 我們就可以得到廣義相對論下宇宙的二階演化方程.

$$\ddot{V} = 3\Lambda V + 6V^{1/3} - \frac{3(\gamma - 2)}{2} k_4^2 \rho_0 V^{1-\gamma} \quad (71)$$

進而將方程式 (71) 對時間做積分, 一階微分形式的體積尺度因子就可以被表達成

$$\dot{V} = \left[3\Lambda V^2 + 9V^{4/3} + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + C \right]^{1/2} \quad (72)$$

由於方程式 (72) 右方的形式有點繁雜, 我們定義一個函數 $\Omega(V)$ 來代表, 它可以表示成

$$\Omega(V) = \left[3\Lambda V^2 + 9V^{4/3} + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + C \right] \quad (73)$$

最後宇宙的尺度因子, 非各向同性以及減速因子便可以寫成以下形式

$$a_i = a_{0i} V^{1/3} \exp \left[K_i \int \frac{1}{V} \Omega(V)^{-1/2} dV \right], i = 1 \sim 3 \quad (74)$$

$$A = 3K^2 \Omega(V)^{-1} \quad (75)$$

$$q = \frac{-2V^\gamma (8 + 3\Lambda V^{2/3}) + k_4^2 \rho_0 V^{2/3} (-6 + \gamma)}{6V^\gamma (3 + \Lambda V^{2/3}) + 6k_4^2 \rho_0 V^{2/3}} \quad (76)$$

由以上關係可知, $K^2 = 2C/3 = \sum_{i=1}^3 K_i^2$ 以及 $\sum_{i=1}^3 K_i = 0$. 我們發現在 Bianchi type V 模型下, 我們無法得到所謂的演化通解, 甚至連特殊 γ 值 也無法求出, 這是與 Bianchi type I 有所不同之處, 因為它多出了一項, $9V^{4/3}$.

2.2.2 Brane 效應的觀點

在這一個 section 中, 我們想要探討在五維時空下 Bianchi type V 宇宙的演化通解. 首先愛因斯坦重力方程的維分形式可以在附錄 B 中被找到. 在這裡我們直接推導出重力方程的微分簡化式, 它們可以被寫成

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho - \frac{3\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 \quad (77)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H_i) - \frac{2}{a_1^2(t)} = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} - \frac{\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 \quad (78)$$

$$2H_1 - H_2 - H_3 = 0 \quad (79)$$

方程式 (79) 也告訴我們體積尺度因子可以被轉換成 $V = \prod_{i=1}^3 a_i = a_1^3$. 如此一來物質的能量密度便可以表示成

$$\dot{\rho} + 3\gamma H \rho = 0 \quad (80)$$

經由計算, 能量密度的通解形式可以表示為 $\rho = \rho_0 V^{-\gamma}$. 接下來我們將方程式 (80) 帶入 (80) 中, 五維宇宙下的二階演化通解便可以求出

$$\ddot{V} = 3\Lambda V + 6V^{1/3} - \frac{3(\gamma - 2)}{2} k_4^2 \rho_0 V^{1-\gamma} - \frac{\gamma - 1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{1-2\gamma} \quad (81)$$

而其對 t 積分後的形式如下

$$\dot{V}^2 = 3\Lambda V^2 + 9V^{4/3} + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + C \quad (82)$$

假如我們將參數 i 由 1 加到 3, 重力方程的維分是可以被修改成

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(VH) = \Lambda + 2V^{-2/3} - \frac{\gamma-2}{2} - \frac{\gamma-1}{12} k_5^4 \rho_0^2 \quad (83)$$

在這個模型中, H 以及 H_i 依然有相同的關係,

$$H_i = H + \frac{K_i}{V}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (84)$$

而上式中的 K_i 這個積分常數也有相同的關係, $\sum_{i=1}^3 K_i = 0$. 如此一來五維時空下的宇宙演化通解便可以表示成

$$t - t_0 = \int \left(3\Lambda V^2 + 9V^{4/3} + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + C \right)^{-1/2} dV \quad (85)$$

在這裡的 C 表示的是積分常數. 最後我們可以得到五維時空下宇宙的尺度因子, 非各向同性以及減速因子. 它們可以有下列的參數表示式.

$$a_i = a_{0i} V^{1/3} \exp \left[K_i \int \frac{1}{V} H(V)^{-1/2} dV \right]; \quad i = 1, 2, 3 \quad (86)$$

$$A = 3K^2 H(V)^{-1} \quad (87)$$

$$q = 2 - \frac{72V^{4/3} + 36\Lambda V^2 + 18(2-\gamma)k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + 3(1-\gamma)k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}}{36V^{4/3} + 12\Lambda V^2 + 12k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 4C} \quad (88)$$

在上式中, 我們觀察到 K^2 與 K_i 有關係, $K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i^2$. 而式子中的 $H(V)$ 式我們所新定義出來的, 它具有以下表示式

$$H(V) = \left(3\Lambda V^2 + 9V^{4/3} + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma} + C \right) \quad (89)$$

最後我們依然試著去推導宇宙演化的通解, 但是令人失望的是我們無法得到通解甚至連特定 γ 值也無法得到.

在這一個 section 的最後, 我們所要敘述的是在這兩個宇宙模型上, 利用數學推導的方法粗略看來是不可能得到真的的演化通解, 只有 Bianchi type I 在特定 γ 值上會有特別的解, 所以在下一 section 我們將改用數值分析的方法去看 Bianchi type I 以及 Bianchi type V 這兩個模型的演化, 以及設法找出它們分別在 brane 效應為主, $3\Lambda V^2$ 為主, $\frac{1}{4}k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主以及 $3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主時期的近似演化解. 而我們也會針對在不同狀況下近似解與數值解所產生的誤差予以探討, 選取最為可靠的誤差 (最少要小於 25%) 來當作為主時期的條件. 而在最後一個 section, 我們便將所有討論做最後的總結來作為本篇論文的結論.

3 研究討論與分析

我們將在這一章節中探討兩個宇宙模型其 brane 宇宙演化的行爲，並引入數值分析方法來找出各個時期爲主的近似方程式。在章節 (3.1.1)，以及 (3.1.2) 中我們將探討 Brane 宇宙演化的行爲，也就是 Bianchi type I 以及 Bianchi type V 在 $\gamma = 3/2$ 時由數值分析中找出近似體積尺度因子的近似解。畫出 brane 宇宙演化的圖並且給出在合理誤差範圍內的演化時間點，最後討論當 $3k_4^2\rho_0$ 在不同倍數時對於宇宙演化的行爲有什麼影響。章節 (3.2.1) 中我們將討論不同宇宙模型在不同 γ 值時對其非各向同性有何影響，並將廣義相對論下的行爲與 brane 宇宙下的行爲給予解釋。章節 (3.2.2) 中，我們進而討論減速因子其在不同宇宙模型且不同 γ 值下的差別，當然我們還是在最後對廣義相對論以及 brane 宇宙不同時空的行爲進行分析，看看有何不一樣的地方。

在進行討論之前，我們先要知道體積尺度因子的微分表示式，可以表示爲

$$\dot{V}(t)^2 = 3\Lambda V^2 + 9fV^{4/3} + 3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} + C \quad (90)$$

當在 Bianchi type I 模型時， $f=0$ ；在 Bianchi type V 模型時， $f=1$ 。我們利用方程式 (90) 來當作我們找出近似解的基準，並利用近似解與數值分析得出的解作近似，進而找出演化的時間點以及誤差值。在每個模型的討論中我們將會畫出近似的圖形，利用圖形所帶給我們的訊息來作爲我們討論的證據。而我們所考慮的誤差具有下列關係

$$Error(\%) = \left| \frac{V_N - V_A}{V_N} \right| \times 100\% \quad (91)$$

這裡的 V_N 以及 V_A 所指的是數值分析下的體積尺度因子以及丟掉其他不重要的項數後所得到的近似解體積尺度因子，有了以上的方程式後，我們便可對這兩個模型進行討論了。

3.1 Brane 宇宙演化的探討

3.1.1 Bianchi Type I

對於 Bianchi type I 模型來說，我們使用數值分析來對它進行討論。我們假設體積尺度因子的初始值爲 $V(t=0) = 10^{-3}$ ，以及各項參數設定爲 $3\Lambda = 1$ ， $3k_4^2\rho_0 = 1$ 以及 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1$ 。最後我們會改變 $3k_4^2\rho_0$ 的大小，使其增大 10^2 ， 10^3 倍，看看是否會有任何影響。此時我們發現在方程式 (90) 中有好幾項函數，分別是 $3\Lambda V^2$ ， $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 以及 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 。故我們便對這幾項函數做各自爲主的近似，令他們爲主時至少大於其他項 $10 \sim 10^4$ 倍，甚至更大直到我們找出合理的誤差範圍爲止。首先我們先找出各項爲主時的近似解，再對於各個近似解找出其合理的演化時間範圍以及合理的演化初始值，最後我們將會把整個宇宙的演化圖以及各個爲主時的演化圖放在一起做比較。

1. 圖形與比較

在這一章節中，我們將宇宙的演化圖以及各項為主的演化圖放上，在此我們只將近似效果最好的部分（當 $3k_4^2\rho_0 = 10^3$ ）列出，並最後對其做詳細的解說及分析。我們以下的圖皆是由數值分析所畫出來的，在數值分析的起始值以及參數上，我們採用以下設定

$$V(0) = 10^{-3}; 3\Lambda = 1; 3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} = 10^3; \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} = 1$$

- Figure 1所代表的是 Bianchi type I 模型在 brane 時空下的體積演化圖，我們發現它在時間點小的時候演化的並不明顯，但是當時間越來越大之後，體積尺度因子會膨脹的越來越快。這表示了 Bianchi type I 模型在 brane 時空下會有膨脹的越來越快的趨勢。也就代表宇宙在 Brane 時空下的演化具有越來越快的趨勢。
- Figure 2所表示的是當 $3\Lambda V^2$ 為主的時期（虛線），它與數值分析的圖形（點線）做近似以及誤差的演化圖（點線）。其演化近似時間約為 $t_i = 3.05$ ，體積尺度因子起始值為 $V(t_i) = 2154.89$ 。我們發現兩者的近似行為相當的好，經由誤差計算得知其誤差率約為 $E\% = 0.34\%$ 。
- Figure 3代表的是數值分析的體積演化圖（點線）與 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主時宇宙的演化近似圖（虛線）以及誤差的演化圖（點線）。由圖中我們了解到這兩者的近似效果沒有 $3\Lambda V^2$ 為主時來的好，但是其誤差率只有約 $E\% = 4.15\%$ 。由圖中了解到數值解的演化較快也是合理的，因為它還有其他項的影響，就算可以丟掉但還是會有影響。
- Figure 4中所描述的是 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主的宇宙演化圖（虛線）與數值分析體積演化圖（點線）的近似以及誤差的演化圖（點線）。由圖中也是可以看出還是有所誤差，其誤差約為 $E\% = 13.85\%$ 。這樣的近似效果還算可以接受，但是我們必須要了解到 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主的宇宙其時間間隔相當短。這也就代表 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 的效應在 Brane 時空宇宙的演化上並不是重要的影響。

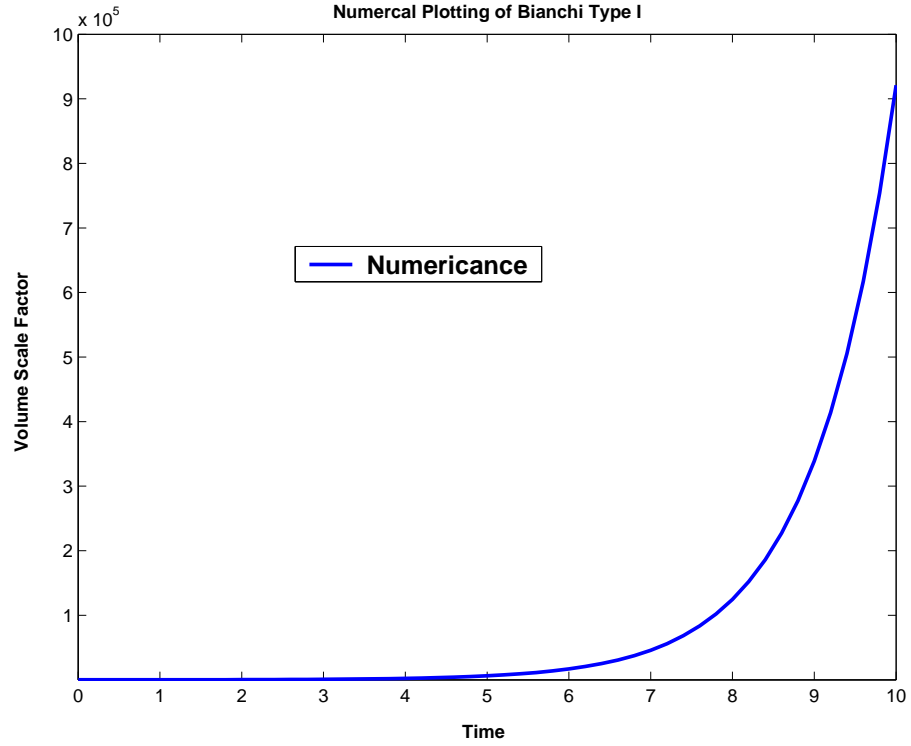


Figure 1: Brane 時空下, Bianchi type I 模型之宇宙演化圖：參數設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

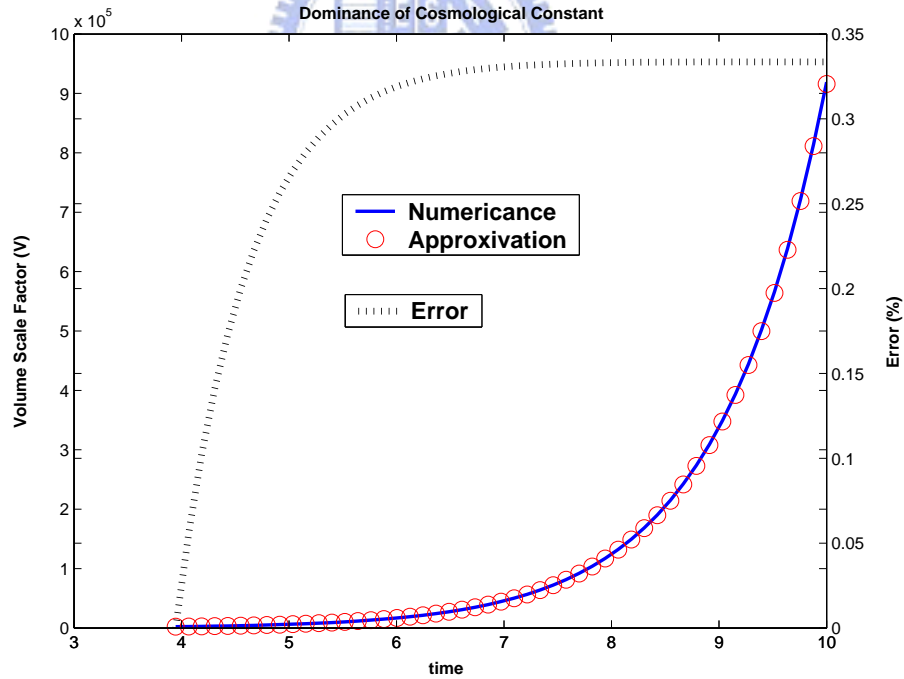


Figure 2: Brane 時空下, Bianchi type I 模型當 $3\Lambda V^2$ 為主之宇宙演化圖：實線 (數值分析), 圓圈 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

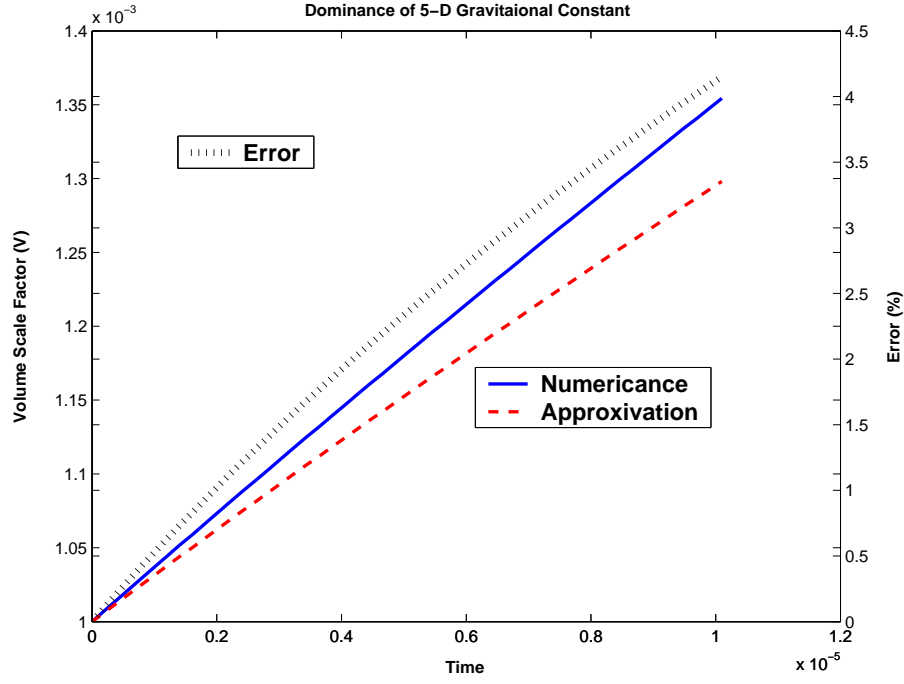


Figure 3: Brane 時空下, Bianchi type I 模型當 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主之宇宙演化圖: 實線 (數值分析), 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

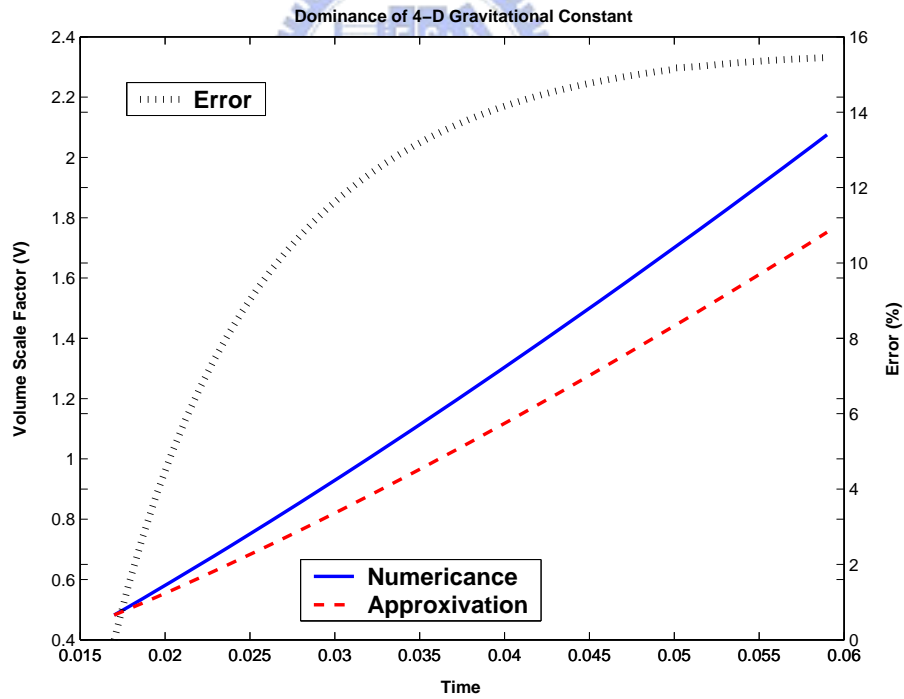


Figure 4: Brane 時空下, Bianchi type I 當 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 為主之宇宙演化圖: 參數設定為: 實線 (數值分析), 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

2. $3\Lambda V^2$ 為主時的宇宙

由方程式 (90) 可以得知當 $3\Lambda V^2$ 這項效應為主時, 宇宙的體積方程式可以表示為

$$V(t) = V_i e^{\sqrt{3\Lambda}(t-t_i)} \quad (92)$$

V_i 以及 t_i 分別代表體積尺度因子的初始值以及這項為主時的初始時間. 我們利用以下關係式 試著找出合理且準確的初始時間點, 它可以表示為

$$\frac{3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}}{3\Lambda V^2} \leq M$$

這裡的 M 所代表的是所謂的倍數, 也就是其他項必須小於我們想要看他是否為主的那一項的倍數. 因為其他項必須夠小我們才能丟掉它們. 進一步我們也考慮改變 $3k_4^2 \rho_0$ 的大小, 使其 變大看看是否會對宇宙演化有所影響, 在此我們最大增加到 10^3 倍, 我們在這裡的增加倍數必須符合 數值分析的起始值假設. 由先前的圖示以及研究中, 我們可以歸納幾點要點. 由 Figure (2) 以及研究數據中得知, 對於 $3\Lambda V^2$ 為主的宇宙演化我們可以歸納出以下幾 點結論.

- 我們發現當固定 $3k_4^2 \rho_0$ 的大小時, 隨著 M 值的變小我們可以得到越準確的近似解, 而其 演化時間點也就越晚, 所以我們了解到宇宙晚期的演化會以 $3\Lambda V^2$ 這一 效應為主, 且時 間點越晚 $3\Lambda V^2$ 越重要.
- 由研究數據中我們了解到, 當 $3k_4^2 \rho_0$ 的值越大的時候, 我可以在 M 值較大的時候將 其他 項丟掉, 而使得整個宇宙以 $3\Lambda V^2$ 這一項為主. 也就是說 $3k_4^2 \rho_0$ 的 值越大, $3\Lambda V^2$ 不必比 其他項大很多即可將其他項丟掉.
- 當 $3k_4^2 \rho_0$ 增大的時候, $3\Lambda V^2$ 效應為主的合理演化時間點會延遲.

3. $\frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主時的宇宙

我們可以由方程式 (90) 中得知, 當 $\frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 這一效應為 主時, 宇宙的體積尺度因子可以 表示為

$$V(t) = \left[\sqrt{w} \gamma (t - t') \right]^{1/\gamma} \quad (93)$$

這裡的 w 所代表的是 $\frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2$, 而 t' 所代表的是 $t' = t_0 - \frac{v_0^2}{\gamma \sqrt{w}}$. 所以當我們考慮 γ 值為 $3/2$ 時, 我們可以得到在此條件下的演化近似解, 可以表示如下

$$V(t) = \left[\frac{2}{3} \sqrt{w} (t - t') \right]^{2/3} \quad (94)$$

接下來我們利用以下關係式企圖找出當 $\frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主時宇宙的演 化形式.

$$\frac{3\Lambda V^2 + 3k_4^2 \rho_0 V^{2-\gamma}}{\frac{1}{4} k_5^4 \rho_0^2 V^{2-2\gamma}} \leq M$$

經由數值分析的計算，我們希望 M 能夠越小越好但是大約小到多少是可以接受的數值，這卻是我們不能立刻決定的。所以我們嘗試做 M 可由 $10^{-1} \sim 10^{-4}$ 甚至更多，但如果能找到合理的近似範圍，我們便不再繼續往下做。藉由以下演化圖形我們可以試著找出一些宇宙演化的訊息以及每個參數所帶來的影響。此一效應重要的時間是由 $t = 0 \sim t_f$ ， t_f 代表我們所找出的合理演化時間終點。所以我們知道這個演化時間是在比較早期的宇宙。在這裡我們的體積尺度因子起始值依然為 $V_0 = 10^{-3}$ ，將此值帶入數值分析中，希望能得到一些演化的訊息。

由 Figure (3) 以及研究結果得知，對於 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主的宇宙演化我們可以找出幾點結論。

- 在研究數據中，我們發現 $3k_4^2\rho_0$ 的大小事實上對於 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主時的宇宙演化近似影響不大，也就是說當 $3k_4^2\rho_0$ 大到 10^3 時，對於 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主時宇宙的演化時間點並不會造成重大的影響。
- 當我們固定 $3k_4^2\rho_0$ 的值時，隨著 M 值越小，演化近似的越準確且時間點也越早。這就告訴我們 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 這一項的效應會在宇宙早期表現出來，時間越早效應越明顯。
- 當我們固定 M 的大小時，隨著 $3k_4^2\rho_0$ 的變大，宇宙的演化近似越準確。這也就代表著如果 $3k_4^2\rho_0$ 這一項的值很大，我不用讓 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 比其他項大很多即可找到不錯的近似解。

4. $3k_4^2\rho_0$ 為主的宇宙

由方程式 (90) 得知，當宇宙是以 $3k_4^2\rho_0$ 效應為主的時候，宇宙演化的體積尺度因子可以表示為

$$V(t) = \left[\frac{\gamma\sqrt{Q}}{2}(t-t') \right]^{2/\gamma} \quad (95)$$

這裡的 Q 代表的是 $3k_4^2\rho_0$ ，而 t' 所代表的是 $t_0 - \frac{2}{\gamma\sqrt{Q}}V_0^{\gamma/2}$ 。在這裡我們只做當 $\gamma = 3/2$ 時的探討，將 $\gamma = 3/2$ 帶入方程式 (95) 我們可以得到近似的體積尺度因子方程式，可表示為

$$V(t) = \frac{3^{4/3}(Q)^{2/3}(t-t')^{4/3}}{2^{8/3}} \quad (96)$$

以上方程式只有在滿足下列關係時才会有較好的近似，不然會產生很大的誤差。此關係式可以表示為

$$\frac{3\Lambda V^2 + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}}{3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}} \leq M$$

在此我們了解到只有在當 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 這一項比其他項大的時候，我們才能將方程式 (95) 拿來當做近似解，並拿它來跟在相同演化時間的數值分析解比較。在此我們針對演化行為的圖形來進行討論。由 Figure (4) 以及研究數據得知，在 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 為主時的宇宙，我們可以找的

例子 不多並且找出來的近似解其誤差也不夠小，但都是在誤差的範圍內。我們要注意的是我們不能讓 $3k_4^2\rho_0$ 這一項無限制的變大，因為這樣會造成我們在數值方法的初始值上產生不合理的現象。所以我們必須取符合初始值條件的倍數，如此一來才能做出有意義的數據。但是如果將初始值變的 更小，或許我們可以使 $3k_4^2\rho_0$ 的值更大，但是這樣就必須改變我們的整個數值分析的架構，在此我們先不探討。然而由 Figure (4) 以及研究數據我們可以看出幾項結論。

- 我們發現當 $3k_4^2\rho_0$ 的值不夠大的時候，無法得到較準確的近似解。所以 $3k_4^2\rho_0$ 的大小會影響 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 是否能在宇宙演化的過程中 獲得主導的地位。
- $3k_4^2\rho_0$ 的大小不能無限制增加，必須符合數值分析方法的初始值限制，不然會造成 在意義上的嚴重錯誤。
- $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 效應為主的宇宙演化，其演化時間點介於 $3\Lambda V^2$ 以及 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主宇宙之間。



3.1.2 Bianchi Type V

我們繼續對 Bianchi type V 模型做和 Bianchi type I 模型相同的探討, 進而希望能找出它們彼此間的不同之處. 然而我們依然使用和 Bianchi type I 模型相同的初始條件, $V(0) = 10^{-3}$ 以及相同的參數設定. 我們將方程式 (90) 中的 f 令他為 1 則可以得到 Bianchi type V 模型的體積尺度因子關係式, 接著並改變 $3k_4^2\rho_0$ 的大小來看是否有何影響, 藉由以上關係式我們可以就 $3\Lambda V^2$, $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 以及 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主的效應進行探討, 以下我們便進行各項的討論.

1. 圖形與比較

在此章節中, 我們將畫出 Bianchi type V 模型在 Brane 時空下的演化圖以及近似比較圖. 而其體積尺度因子以及參數設定皆以下列形式表示.

$$V(0) = 10^{-3}; 3\Lambda V^2 = 1; 3k_4^2\rho_0^2 V^{2-\gamma} = 10^3; \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} = 1$$

- 在 Figure 5 中, 我們看到整個宇宙的演化行爲. 發現到 Bianchi type V 模型的宇宙其演化相當的快, 在相同的時間點演化的比 Bianchi type I 模型來的快, 但重要的是晚期的宇宙依然是整個宇宙演化的重要時期, 它會膨脹的相當快.
- Figure 6 所透露出來的訊息是, 當 $3\Lambda V^2$ 此效應為主的時候是宇宙較晚期的時期. 圖中近似解 (虛線) 所畫出來的曲線與數值解 (實線) 畫出來的曲線近似的沒有 Bianchi type I 模型的好. 此時期的演化時間點約為 $t_i = 4.58$ 且誤差率約只有 $E\% = 2.04\%$. 所以我們了解到在 Bianchi type V 模型中, 宇宙的演化是能夠以 $3\Lambda V^2$ 此效應為主的.
- 在 Figure 7 中, 我們發現 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主時的近似 (虛線) 與數值分析 (實線) 的演化有些出入, 其演化時間終點約為 $t_f = 1.037 \times 10^{-5}$ 且誤差只有 $E\% = 3.78\%$. 在這樣的近似下, 當演化時間在 $t = 0 \sim t_f$ 間我們都可以說宇宙演化是以 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主.
- Figure 8 所代表的是 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主的宇宙與數值分析宇宙的近似. 我們可以清楚的看到, Bianchi type V 模型在這一效應的近似下並沒有很好的效果. 我們試著將這樣的現象解釋為 Bianchi type V 模型演化的太快, 導致在 $3k_4^2\rho_0$ 為 10^3 時還無法得到主導的地位. 我們試著做出近似的關係圖, 但都得到不可取的誤差值, 故我們在此便不再討論此現象.

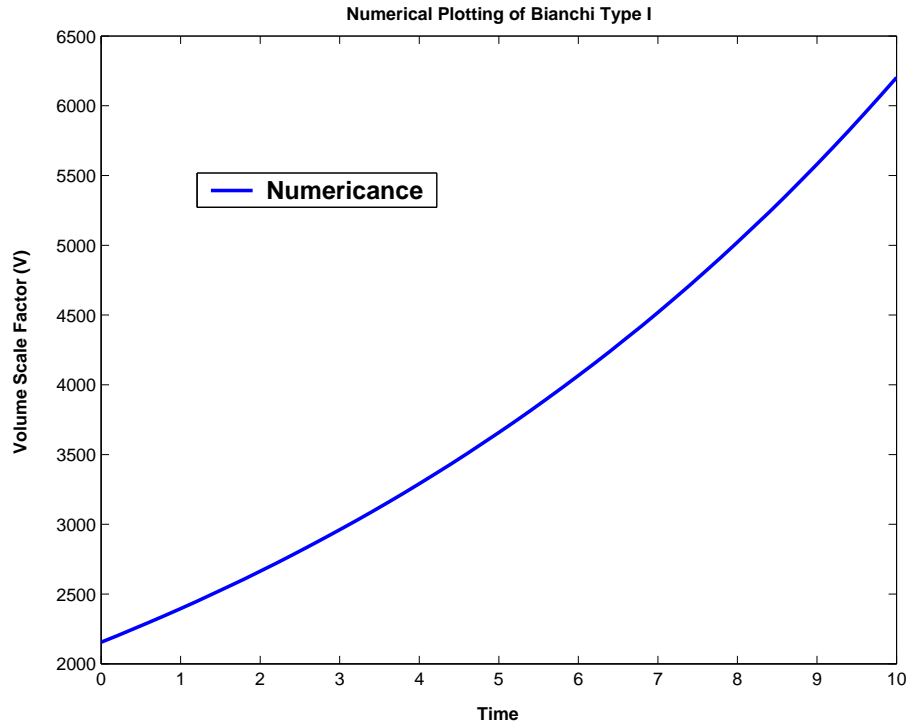


Figure 5: Brane 時空下, Bianchi type V 模型之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

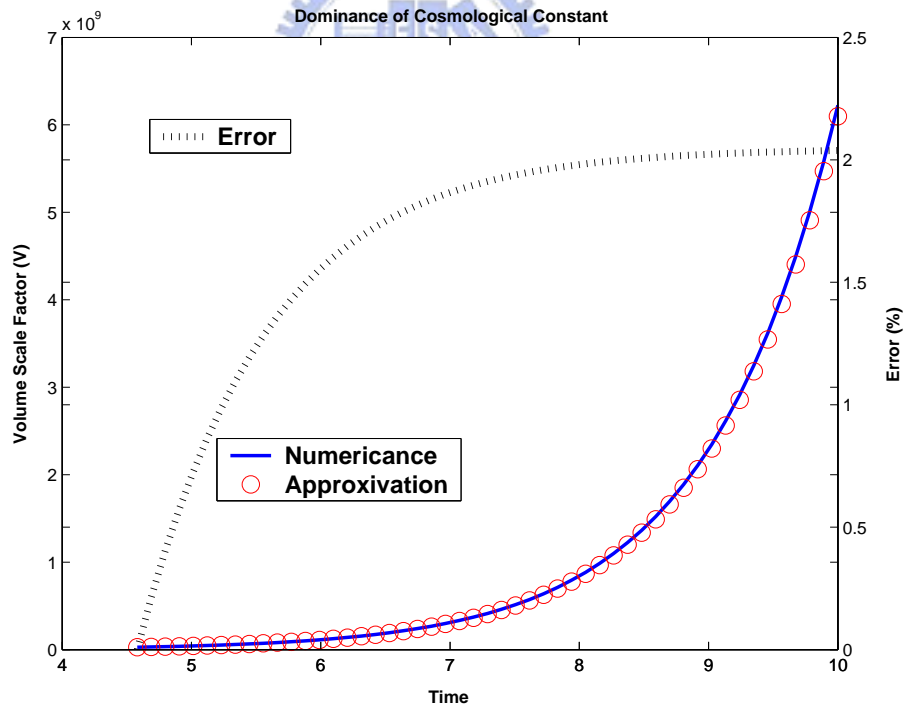


Figure 6: Brane 時空下, Bianchi type V 模型當 $3\Lambda V^2$ 為主之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析), 圓圈 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

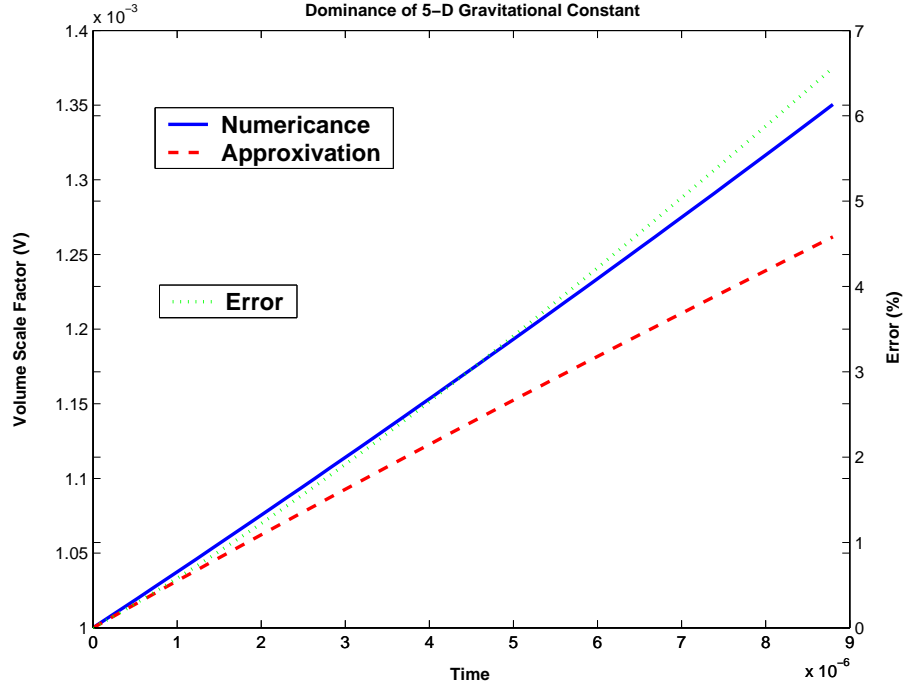


Figure 7: Brane 時空下, Bianchi type V 模型當 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma}$ 為主之宇宙演化圖 : 實線 (數值分析), 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); 參數設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

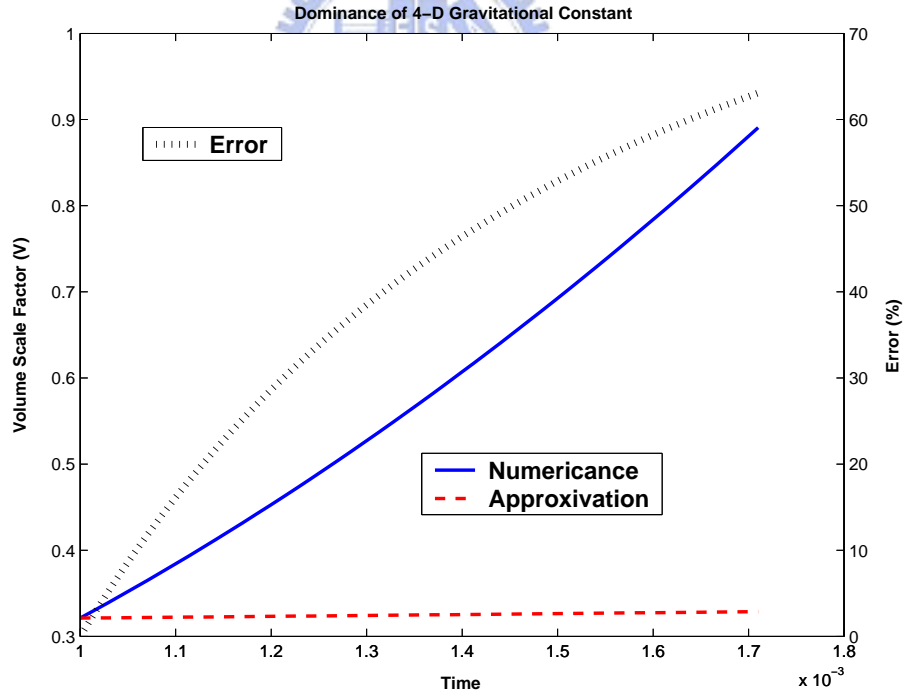


Figure 8: Brane 時空下, Bianchi type V 當 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 為主之宇宙演化圖: 參數設定為: 實線 (數值分析), 虛線 (近似解) 以及點線 (誤差演化); $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

2. $3\Lambda V^2$ 為主時的宇宙

在此項為主的時間內，其近似解與方程式 (92) 的形式一樣，也就是說模型的不同並不會影響近似解的形式，故我們引用方程式 (92) 來進行探討。我們發現如果我們要得到此項為主的宇宙時，必須滿足以下不等式。

$$\frac{3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma} + 9V^{4/3}}{3\Lambda V^2} \leq M$$

M所代表的意義依然是一個小於1的值，但是我們無法決定其到底是多少，最後我們要由誤差值來決定合理的近似解。由 Figure (5) 以及研究數據可知，對於 Bianchi type V 模型而言可以發現一些與 Bianchi type I 模型不同的結論

- 由 Figure (5) 以及研究數據可知 $3k_4^2\rho_0$ 的大小對於其演化的時間點，並無太大的影響。我們也可以說 Bianchi type V 模型在演化上是相當快速的，而演化時間點取的越大，對於近似解的近似效果越好。所以依據上述特質，我們發現宇宙在晚期的時候，會以 $3\Lambda V^2$ 這一項效應為主。
- 對於此數值分析條件下，我們發現當 $3\Lambda V^2$ 時的宇宙演化時間約4.58，其誤差率約為2.04%。

3. $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主時的宇宙

當宇宙演化是以 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主時，我們經由理論計算可以得到它的體積尺度因子關係式是和方程式 (94) 一樣的。當這一項為主時，演化時間點的選取必須滿足下述關係式。

$$\frac{3\Lambda V^2 + 3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma} + 9V^{4/3}}{\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}} \leq M$$

藉著 M 值的不同，我們找出近似的演化點並改變 $3k_4^2\rho_0$ 的大小去探討時間點與誤差值的影響。由 Figure (6) 以及研究數據中了解到 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 這一項在 BV 模型中為主時，將有以下幾點結論。

- 當 M 值越小的時候，我們可以得到越好的近似效果誤差也越小而其演化時間點也越小。代表著 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主的效應是發生在宇宙早期。
- 當 $3k_4^2\rho_0$ 的值越大的時候，我們發現近似解的效果會變好，這也就代表 $3k_4^2\rho_0$ 的大小會影響早期宇宙的演化行為，但並不是絕對的影響。
- 我們發現在此模型下，數值分析所得到的演化時間點約為 9×10^{-6} ，而誤差值約為 6%。且當 $3k_4^2\rho_0$ 的值越大時，我們可以在 M 值不那麼小的時候將其他項視為不重要。

4. $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 爲主時的宇宙

當宇宙演化是以 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 爲主的時候，我們可以找出演化的近似解與方程式 (96) 有相同的形式。透過相同的初始條件以參數設定，我們可以求得數值上的分析。而當此效應爲主的時期，必須要滿足以下關係式

$$\frac{3\Lambda V^2 + \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2V^{2-2\gamma} + 9V^{4/3}}{3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}} \leq M$$

M值的選取依然決定著我們要在何時丟掉其他項的影響。但是我們發現，在 Bianchi type V 模型中， $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 爲主的宇宙數值解與近似解的近似效果非常的差，當 M 值小到約 10^{-3} 且 $3k_4^2\rho_0$ 的值已經增大了 10^3 ，誤差值竟然還有60%左右。在此我們無法繼續往下做，因爲在之前已經說明 $3k_4^2\rho_0$ 的大小必須符合數值分析的初始值假設，除非我們改變整個分析的架構。不過我們相信對於 Bianchi type V 模型來說，其 $3k_4^2\rho_0V^{2-\gamma}$ 爲主時的宇宙演化，應該具有與 Bianchi type I 模型一樣的結論，只不過 Bianchi type V 的演化太快，以至於在我們的假設下這一項爲主的宇宙無法找到合理的近似誤差，故 Brane 宇宙的演化我們便討論到此，此一部份的總結論將會放在章節 4 中。



3.2 非各向同性(Anisotropy) 的討論

我們可以由方程式 (21) 得知宇宙非各向同性的關係式, 並利用數值分析來畫出不同 γ 值的演化情形. 在此, 我們令 $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C = 1$. 在 γ 值的選取上, 我們選擇 $\gamma = 2$ (虛-點線), $3/2$ (點線), $4/3$ (虛線) 以及 1 (實線). 對於 整個的宇宙的非各向同性來說, 我們畫出廣義相對論下以及 Brane 時空下的演化圖, 並對它們的圖形 特性予以解釋, 接著我們可以歸納成以下幾點結論.

- 由 Figure 9, Figure 10, Figure 11 以及 Figure 12 得知, 非各向同性對於不同的宇宙模型 來說並沒有在演化的趨勢上有所不同, 但是對於廣義相對論以及 Brane 這兩個時空來說, 具有不同的演化形式. 我們發現在廣義相對論時空下, 宇宙的演化是由非各向同性開始並隨著時間的演化使得宇宙慢慢變成各向同性, 而對於 Brane 時空來說宇宙的演化是由各向同性開始隨著時間演化慢慢變成非各向同性, 直到到達 t_a 時間點時非各向同性達到最大, 在慢慢的變成各向同性.
- 我們發現再廣義相對論時空下, $\gamma = 2$ 式一個特殊的情況, 它與其他 γ 值的非各向同性演化起始值不同. 我們可以了解到這是因為 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為零所造成的現象. 所以我們推論當在廣義相對論時空下的時候, $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 的效應會在早期宇宙 造成重大的影響.
- 我們發現在 Brane 時空下且不同 γ 值的選取上, $\gamma = 1$ 是一個奇異的情況. 其他的 γ 值都會使非各向同性由同一個值演化起, 但是 $\gamma = 1$ 的值卻不同. 所以我們推論 當在 Brane 時空下的時候, $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 的效應是早期宇宙的主要影響效應.
- 我們發現宇宙的非各向同性演化在宇宙晚期時都會變成各向同性, 於是我們便了解到我們的宇宙最終會演化成各向同性的宇宙.

如果想要了解更多關於非各向同性宇宙的研究以及更詳細的理論推導可以參閱論文 [3]以及 [4].

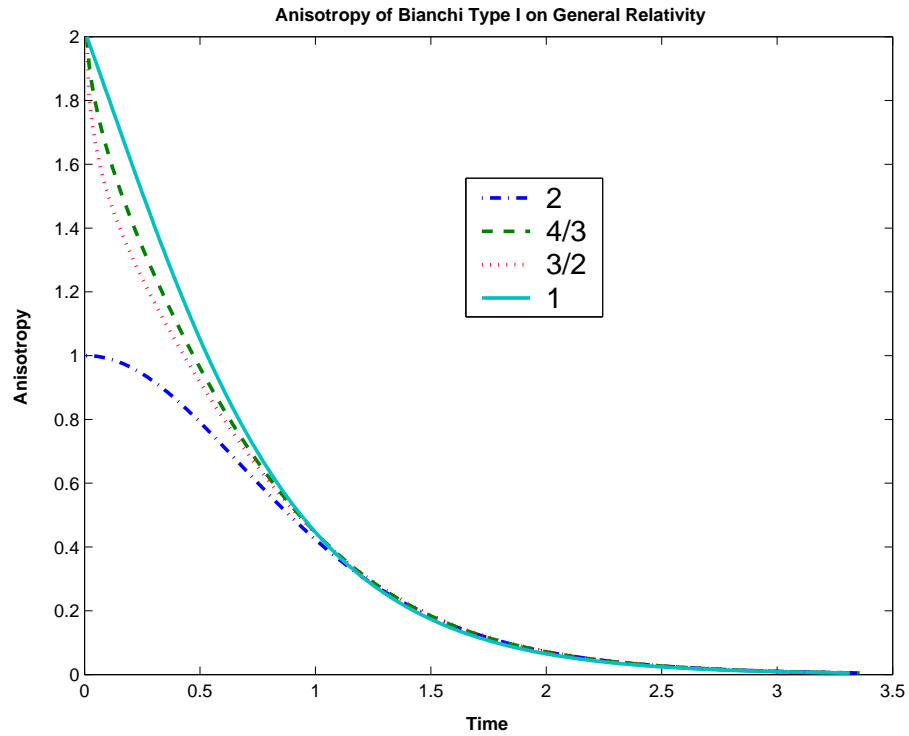


Figure 9: 廣義相對論下 Bianchi type I 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

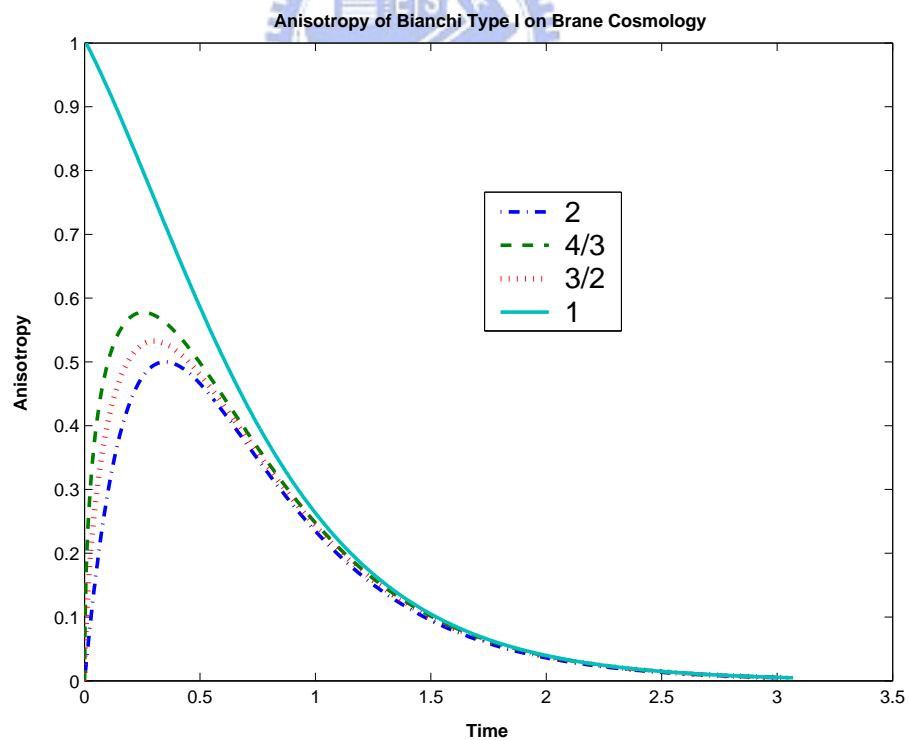


Figure 10: Brane 宇宙下 Bianchi type I 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

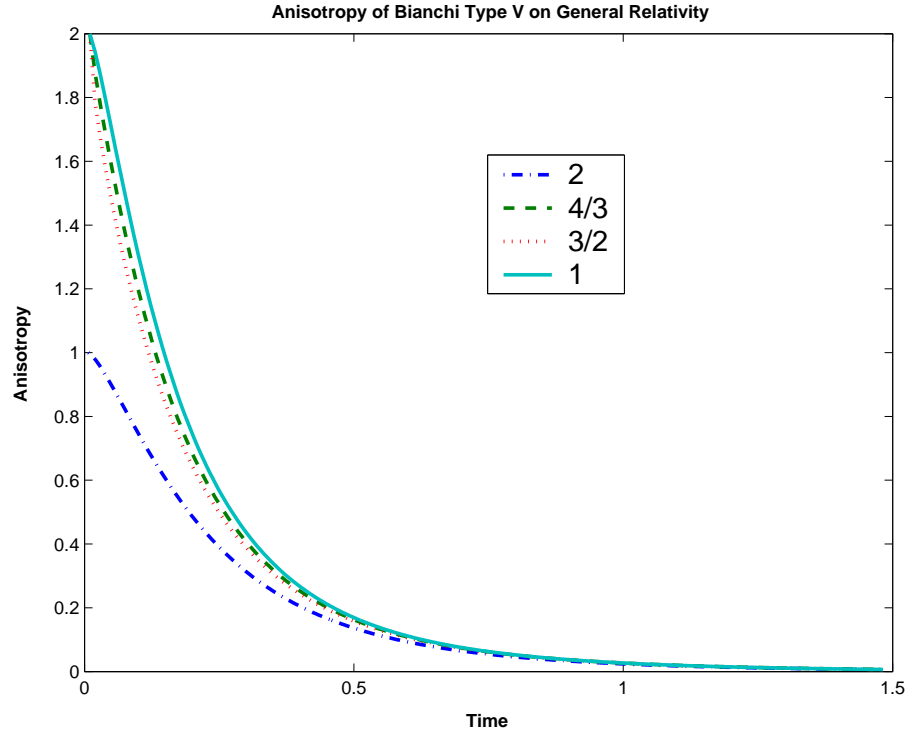


Figure 11: 廣義相對論下 Bianchi type V 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

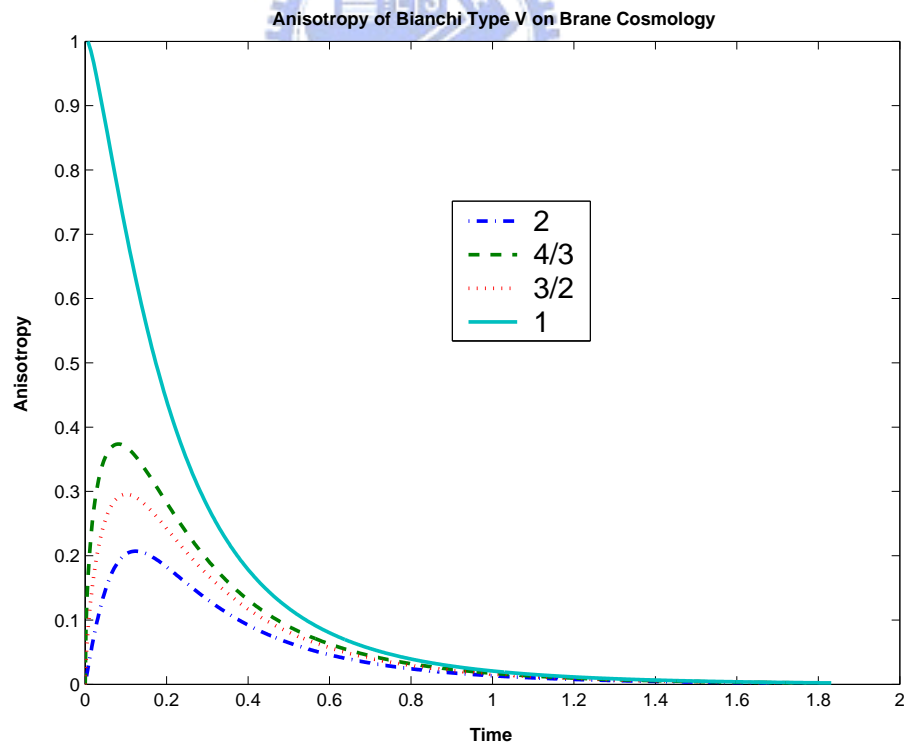


Figure 12: Brane 宇宙下 Bianchi type V 模型的非各向同性演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

3.3 減速因子(Decelerating Parameter) 的討論

由方程式 (22) 可以得到宇宙演化的減速因子關係式, 藉由數值分析畫出不同 γ 值的演化 圖形. 我們令 γ 值為2(虛-點線),3/2(點線),4/3(虛線) 以及1(實線), 並設相關參數為 $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C = 1$. 由 Figure 13,Figure 14,Figure 15,Figure 16中可以得到重要的結論.

- 宇宙演化的趨勢由圖形中可以知道是漸漸變快, 也就是宇宙會膨脹的越來越快, 這樣 結論也可以由宇宙演化的體積尺度因子中獲得證明, 請參閱 Figure 1以及 Figure 5.
- 宇宙在演化的過程中, 我們發現若將時間點一直往後, 則他的減速因子最後會趨近同一個值, 這也就告訴我們, 宇宙的演化不是無窮止盡的加速膨脹下去, 他最後會以一個定值的加速度來進行膨脹演化.

我們可以在論文 [3], [4] 中找到關於減速因子的理論推導.

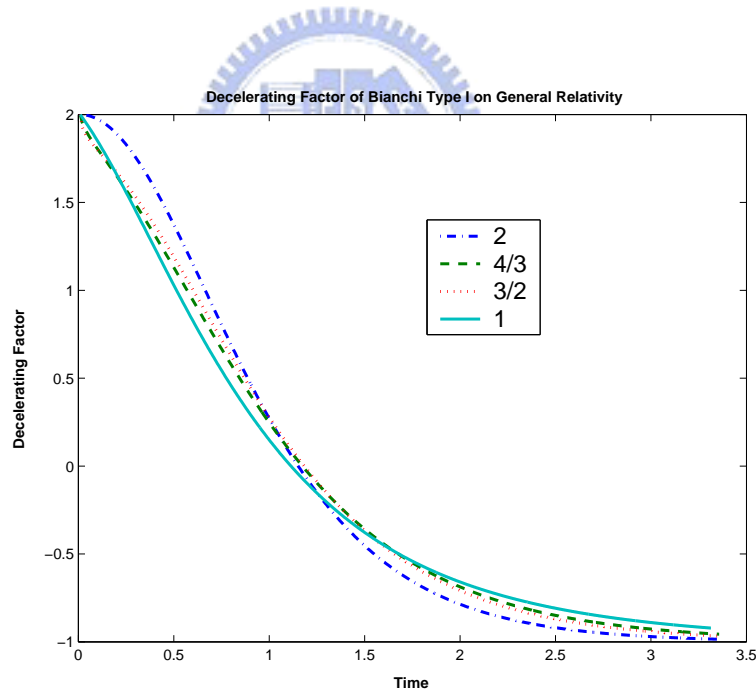


Figure 13: 廣義相對論下Bianchi type I 模型的減速因子演化圖 : 虛-點線 ($\gamma = 2$), 虛線 ($\gamma = 4/3$), 點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$). 參數 設定為: $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$.

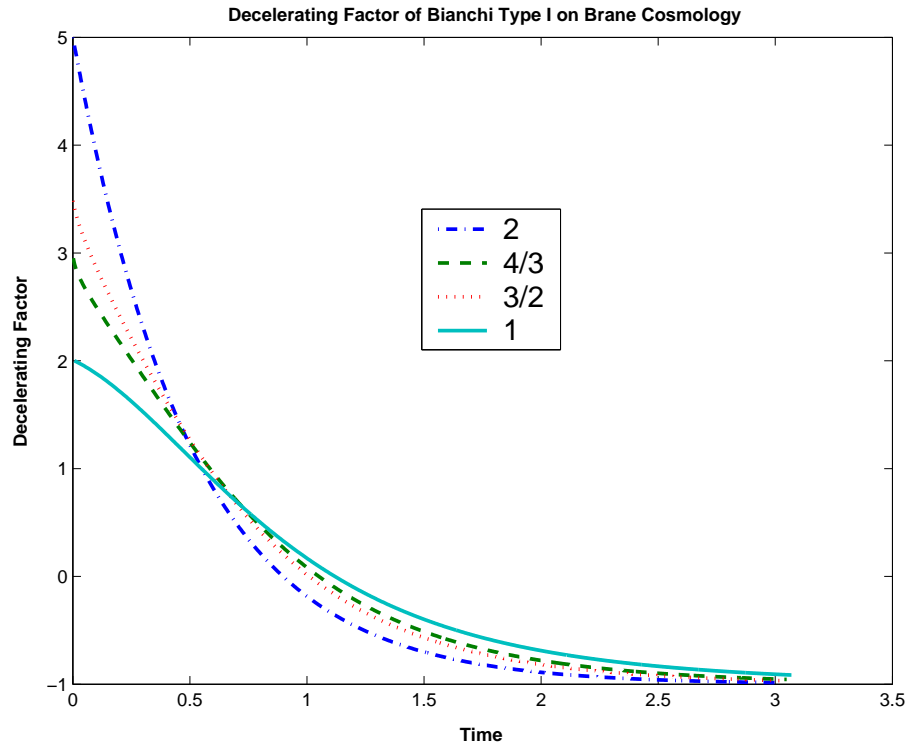


Figure 14: Brane 宇宙下 Bianchi type I 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

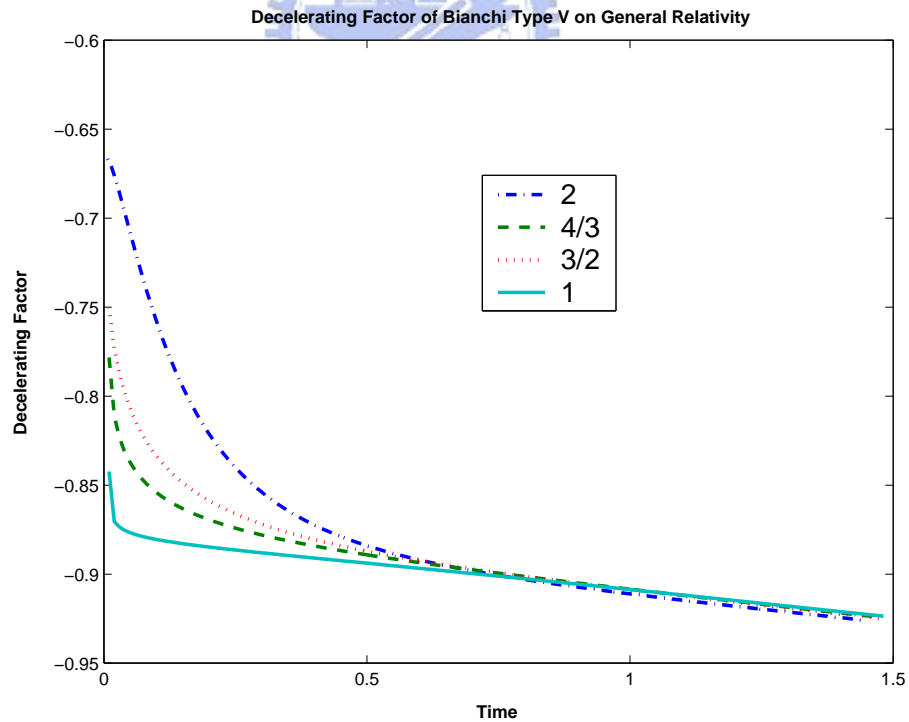


Figure 15: 廣義相對論下 Bianchi type V 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

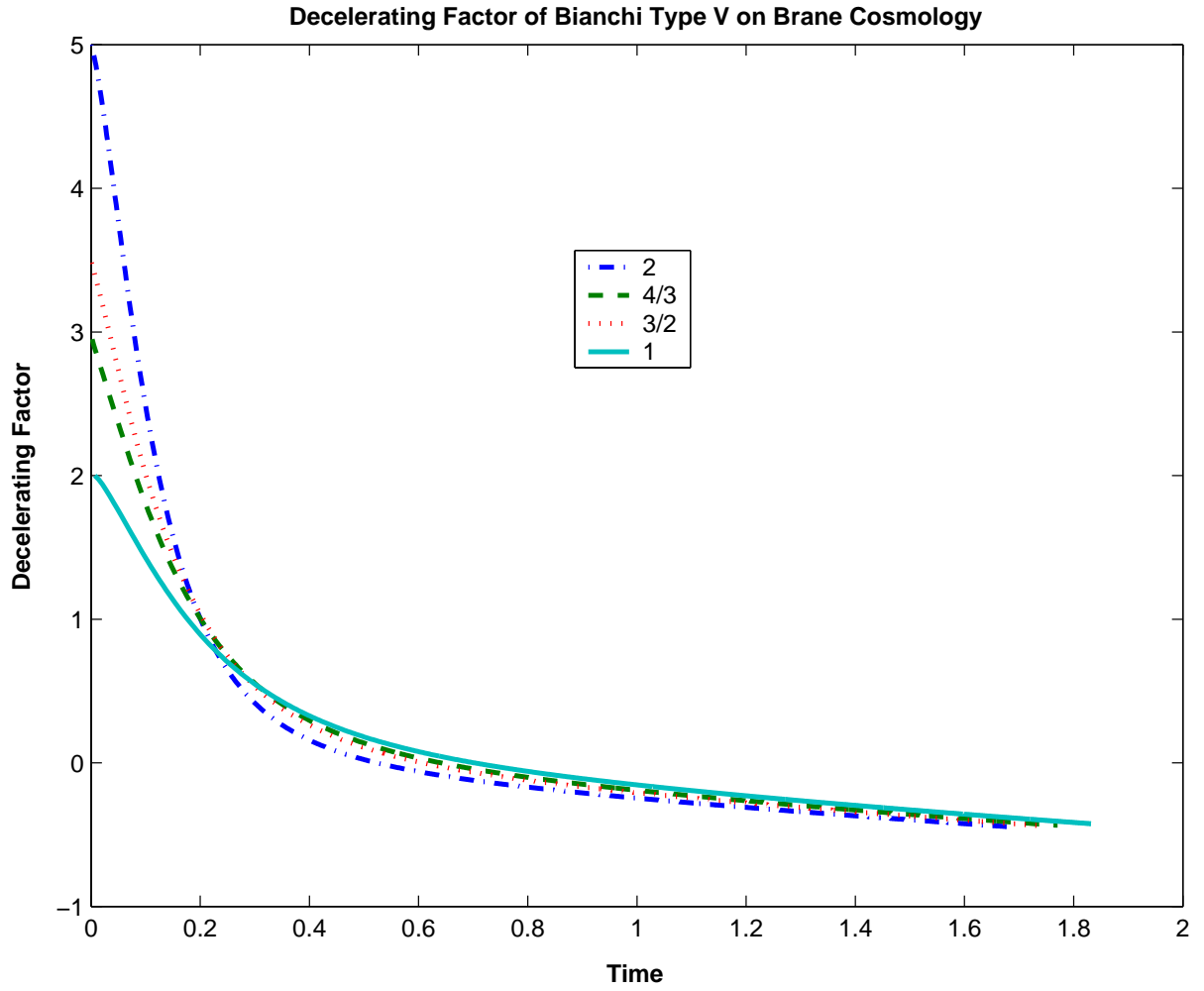


Figure 16: Brane 宇宙下 Bianchi type V 模型的減速因子演化圖：虛-點線 ($\gamma = 2$)，虛線 ($\gamma = 4/3$)，點線 ($\gamma = 3/2$) 以及實線 ($\gamma = 1$)。參數 設定為： $3\Lambda = 1, 3k_4^2\rho_0 = 1, \frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 = 1, K^2 = 2C/3$ 以及 $C=1$ 。

4 結論與展望

在本節中，我們將對本篇論文做個總結。對宇宙演化的情形給予解釋並說明廣義相對論下以及 Brane 時空下在非個向同性以及減速因子上的差別，以下我們便分幾個要點當作本篇論文的結論。

- 在 Brane 宇宙的演化上，如果我們使得 $3\Lambda V^2$ 為主，則在 Bianchi type I 模型中的演化時間（約兩秒為可靠的時間）會比在 Bianchi type V 模型（約四秒）中來的早。也就是說 Bianchi type V 下，當 $3\Lambda V^2$ 為主時的演化時間會延遲。這也是因為 Bianchi type V 模型的體積尺度因子會演化的較快，所以才使得近似時間點延遲。隨著 M 值變小且 $3k_4^2\rho_0$ 越大，得到的近似效果越好。
- 如果宇宙演化在 $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0 V^{2-2\gamma}$ 為主的時期時，我們了解到這必須要 在非常早期的宇宙才會發生。且隨著 M 值變小且 $3k_4^2\rho_0$ 越大，得到的近似效果越好。
- 當宇宙以 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主的時候，此時間間隔相當的短，甚至在一些情況下 不存在，所以我們了解到 $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 這一項的影響對整個宇宙的演化並不重要。
- 在非各向同性方面 (Figure 9, Figure 10, Figure 11 以及 Figure 12)，我們看到對於廣義相對論下的宇宙 (Figure 9 以及 Figure 10) 其一開始是由非各向同性開始演化而變為 各向同性，但是 Brane 時空下的宇宙 (Figure 11 以及 Figure 12) 一開始是由各向同性開始演化，在某時間點的時候會達到最大非各向同性，然後在慢慢的變為各向同性。這也就證明了我們宇宙在 Brane 時空的演化一開始有可能是各向同性的。與現今宇宙的特性一樣。
- 減速因子的演化圖 (Figure 13, Figure 14, Figure 15 以及 Figure 16) 告訴我們，不管在哪種時空以及哪種宇宙模型下，我們的宇宙都是慢慢在加速膨脹的。這也印證了宇宙膨脹的說法。
- 最後我們要對宇宙演化做個總結， $3\Lambda V^2$ 為主的宇宙其時間點越晚則演化近似的越準確； $\frac{1}{4}k_5^4\rho_0^2 V^{2-2\gamma}$ 為主的宇宙其時間點越早則演化近似的越準確； $3k_4^2\rho_0 V^{2-\gamma}$ 為主的宇宙其準確的時間區域相當的短，也就是說這一項在宇宙 演化上不是那麼重要，就算具有影響，其演化時間對宇宙整體時間來說也是相當的短。

相信經由以上對於 Brane 時空的研究我們可以更加了解 Brane 時空對於宇宙演化的重要性，但還有許多 困難必須要克服，例如在數值分析起始點的選取上我們或許應該令他更趨近與零，這樣我們便可以令 當時間點為零的時候，體積尺度因子為零。這樣我們就可以更精準的將 Bianchi type V

的演化近似出來. 而我們也變能更加的清楚了解宇宙的演化行爲是否具有一致的相同特性. 若能將以上的困難排除, 我們便 可以將數值分析與觀測上所得到的減速因子來進行比對, 進而判斷我們的參數設定要如何才是合理的, 並可以得到更精確的宇宙演化.



附 錄

A Binachi Type I 模型的推 導

A.1 廣義相對論的假設

Here, we want to complete the procedure of deriving Einstein equation by Christoffel connection symbol Γ_{jk}^i , Riemann curvature tensor $R_{\alpha\beta\gamma}^\sigma$, Ricci curvature tensor $R_{\mu\nu}$ and Ricci scalar tensor R . Starting from the line element of Bianchi type I model

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a_1(t)^2 dx^2 + a_2(t)^2 dy^2 + a_3(t)^2 dz^2 \quad (97)$$

The metric tensor $g_{\mu\nu}$ can be show as below forms, without no-diagonal terms.

$$g_{00} = -1 ; g_{11} = a_1(t)^2 ; g_{22} = a_2(t)^2 ; g_{33} = a_3(t)^2 \quad (98)$$

$$g^{00} = -1 ; g^{11} = \frac{1}{a_1^2} ; g^{22} = \frac{1}{a_2(t)^2} ; g^{33} = \frac{1}{a_3(t)^2} \quad (99)$$

The Christoffel connection symbol Γ_{jk}^i can be expressed as

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ih} [\partial_j g_{hk} + \partial_k g_{hj} - \partial_h g_{jk}] \quad (100)$$

By ways of simple calculation, we will acquire the non-zero Christoffel curvature symbol Γ_{jk}^i as below terms.

$$\Gamma_{ii}^0 = -\frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)} g^{00} g_{ii} ; i = 1 \sim 3 \quad (101)$$

$$\Gamma_{0i}^i = \frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)} g^{ii} g_{ii} ; i = 1 \sim 3 \quad (102)$$

Hence, by relation of Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ and Riemann tensor $R_{\mu\nu\beta}^\alpha$, we can obtain the non-zero Ricci tensor from the non-zero Christoffel symbol(101)(102). And from the character of geometry we only get the diagonal elements.

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\sigma \quad (103)$$

$$R_{00} = g_{00} \sum_{i=1}^3 \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} \quad (104)$$

$$R_{ii} = g_{ii} \left(\frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} + \sum_{j \neq i; j=1}^3 \frac{\dot{a}_i(t) \dot{a}_j(t)}{a_i(t) a_j(t)} \right) ; i = 1 \sim 3 \quad (105)$$

$$R = \sum_{i=1}^3 g^{ii} R_{ii} = 2 \sum_{k=1}^3 \frac{\ddot{a}_k(t)}{a_k(t)} + \sum_{j \neq i; j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{a}_j(t) \dot{a}_i(t)}{a_j(t) a_i(t)} \quad (106)$$

The Einstein field equation could be represented as differential forms via Ricci tensor(104)(105), scalar tensor(106). But, we must figure out the right part of below equation in the $G.R$.

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + k_4^2 T_{\mu\nu} \quad (107)$$

Now, we must discuss this issue as two parts with different energy-density assumptions, (a) the perfect cosmological fluid, $p = (\gamma - 1)\rho$, $\gamma = \text{constant}$ and $1 \leq \gamma \leq 2$; (b) the scalar field, $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + U(\phi)$ and $p_\phi = \dot{\phi}^2/2 - U(\phi)$.

⊙ The Perfect Cosmological Fluid

By the assumption of perfect cosmological fluid model obeying the barotropic form, $p = (\gamma - 1)\rho$, we could show the complete Einstein field Eq(107) as much simpler form by substituting Eq(18)(19) in Eq (107) neglecting the second order term of γ . First, the non-zero energy-momentum terms could be showed as

$$T_{00} = -\rho ; T_{ii} = p = \rho(\gamma - 1) , i = 1 \sim 3 \quad (108)$$

Then we could substitute above equation into the Einstein equations as below forms.

$$H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3 = \Lambda + k_4^2 \rho \quad (109)$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_2 H_3 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \quad (110)$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1 H_3 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \quad (111)$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_1 + H_1^2 + H_2 H_1 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) \quad (112)$$

In order to let the analysis much simpler, we could sum equation (110)(111)(112) then minus(109) to obtain (26) and sum equation (109)(111)(112) then minus (110) to get (313) as $i = 1$. Finally, we had derived the complete procedure of Einstein field equation in the G.R so that we could use them to analyze the dynamical evolution of our Universe. We could show the equations representing the dynamical evolution as below forms.

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho \quad (113)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H_i) = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho , i = 1 \sim 3 \quad (114)$$

$$\dot{\rho} + 3\gamma H \rho = 0 \quad (115)$$

A.2 Brane 效應的觀點

In fact, we can connect the G.R and Brane world scenario by adding the additional brane effect term, $k_5^4 S_{\mu\nu}$ and $E_{\mu\nu}$, into the gravitational field equation ($G_{\mu\nu}$) then the Einstein field equation with brane effect can be show as

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda + k_4^2 T_{\mu\nu} + k_5^4 S_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \quad (116)$$

The terms of $G_{\mu\nu}$, representing the geometrical structure, are still the same with the left parts of equation (109)(110)(111)(112). In my analysis, I don't consider the bulk Weyl tensor, $E_{\mu\nu}$, in the course of concise mathematical form.

(♣). The Perfect Cosmological Fluid

We still make the same assumption of perfect cosmological fluid. So that we can get the Einstein field equations easily through equation (18)(19). First, the non-zero energy-momentum ($T_{\mu\nu}$) and nero-zero quadratic forms ($S_{\mu\nu}$) could be expressed as

$$T_{00} = -\rho ; T_{ii} = p = \rho(\gamma - 1) , i = 1 \sim 3 \quad (117)$$

$$S_{00} = \frac{1}{12}\rho^2 ; S_{ii} = \frac{1}{12}\rho^2(1 - 2\gamma) , i = 1 \sim 3 \quad (118)$$

From above equations, we could get the Einstein's equation as below forms.

$$H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3 = \Lambda + k_4^2 \rho + \frac{1}{12} k_5^4 \rho^2 \quad (119)$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_2 H_3 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12} k_5^4 \rho^2(1 - 2\gamma) \quad (120)$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1 H_3 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12} k_5^4 \rho^2(1 - 2\gamma) \quad (121)$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_1 + H_1^2 + H_2 H_1 = \Lambda + k_4^2 \rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12} k_5^4 \rho^2(1 - 2\gamma) \quad (122)$$

We still can sum equation (120)(121)(122) then minus (119) to acquire equation (47); sum (119)(120)(121) then minus (122) to gain (48) when $i = 3$. They could be showed as below forms.

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho - \frac{3\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 \quad (123)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H_i) = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} k_4^2 \rho - \frac{\gamma - 1}{12} k_5^4 \rho^2 ; i = 1 \sim 3 \quad (124)$$

$$\dot{\rho} + 3\gamma H \rho = 0 \quad (125)$$

Equation (125) is the differential form of energy-momentum conservation law.

B Bianchi Type V 模型的推導

B.1 廣義相對論的觀點

The line element of Bianchi type V is more complicate that Bianchi type I. Then we still obtain the non-zero Christoffel connection symbol Γ_{ij}^k , Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ and scalar tensor R via the line element of Bianchi type I in order to derived the gravitational field equation. First, the metric tensor was expressed as the forms.

$$g_{00} = -1 ; g_{11} = a_1^2(t) ; g_{22} = a_2^2(t)e^{-2x} ; g_{33} = a_3^2(t)e^{-2x} \quad (126)$$

$$g^{00} = -1 ; g^{11} = \frac{1}{a_1^2(t)} ; g^{22} = \frac{1}{a_2^2(t)e^{-2x}} ; g^{33} = \frac{1}{a_3^2(t)e^{-2x}} \quad (127)$$

The non-zero Christoffel connection symbol Γ_{ij}^k (100) take the form

$$\Gamma_{ii}^0 = -g^{00} g_{ii} \frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)} , \Gamma_{0i}^i = \frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)} ; i = 1 \sim 3 \quad (128)$$

$$\Gamma_{jj}^1 = g^{11} g_{jj} , \Gamma_{1j}^j = g_{00} ; j = 2 , 3 \quad (129)$$

Comparing with equation (128)(129) and (101)(102) we understand that geometrical mode of Bianchi type V is more complicate with Bianchi type I. Replacing equation (128)(129) for (103), the non-zero Ricci scalar tensor $R_{\mu\nu}$ and scalar tensor R take the forms, the diagonal terms.

$$R_{00} = g_{00} \left(\frac{\ddot{a}_1(t)}{a_1(t)} + \frac{\ddot{a}_2(t)}{a_2(t)} + \frac{\ddot{a}_3(t)}{a_3(t)} \right) \quad (130)$$

$$R_{11} = g_{11} \left(\frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)} + \frac{\dot{a}_1(t)\dot{a}_2(t)}{a_1(t)a_2(t)} + \frac{\dot{a}_1(t)\dot{a}_3(t)}{a_1(t)a_3(t)} - \frac{2}{a_1^2(t)} \right) \quad (131)$$

$$R_{22} = g_{22} \left(\frac{\dot{a}_2(t)}{a_2(t)} + \frac{\dot{a}_1(t)\dot{a}_2(t)}{a_1(t)a_2(t)} + \frac{\dot{a}_2(t)\dot{a}_3(t)}{a_2(t)a_3(t)} - \frac{2}{a_1^2(t)} \right) \quad (132)$$

$$R_{33} = g_{33} \left(\frac{\dot{a}_3(t)}{a_3(t)} + \frac{\dot{a}_1(t)\dot{a}_3(t)}{a_1(t)a_3(t)} + \frac{\dot{a}_2(t)\dot{a}_3(t)}{a_2(t)a_3(t)} + \frac{2}{a_1^2(t)} \right) \quad (133)$$

$$R = R_{\mu}^{\mu} = 2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} + \sum_{j \neq i}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{a}_i(t)\dot{a}_j(t)}{a_i(t)a_j(t)} + \frac{-1}{a_1^2(t)} \right) \quad (134)$$

Using variables (18,19) Substituting equation (130~134) for (107) with the supposition of perfect fluid and neglecting the Weyl tensor, flat Universe $E_{\mu\nu} = 0$. We still discuss this issue for two different models, as the explaining in the Bianchi type I model.

(⊙) The Perfect Cosmological Fluid

We still neglected the quadratic term of γ in the Einstein field equation and took the forms by the variables of (17~19).

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 - \frac{1}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho \quad (135)$$

$$\dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_2^2 + H_3^2 + H_2H_3 + \frac{1}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) \quad (136)$$

$$\dot{H}_1 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_3^2 + H_1H_3 + \frac{1}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) \quad (137)$$

$$\dot{H}_2 + \dot{H}_1 + H_2^2 + H_1^2 + H_2H_1 - \frac{3}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) \quad (138)$$

Sum equation (136 ~ 138) and minus (135), we could obtain equation (a). Equation (b) in the situation of $i = 1$ still can be gotten by summing (137,138) and (135) then minus (136). They can be expressed as below forms.

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2} k_4^2\rho \quad (139)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(VH_i) - \frac{2}{a_1^2(t)} = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2}; \quad i = 1 \sim 3 \quad (140)$$

$$2H_1 - H_2 - H_3 = 0 \quad (141)$$

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = 0 \quad (142)$$

We could understand that the energy-momentum conservation law of Bianchi type V is the same with it of Bianchi type I cosmology.

B.2 Brane 效應的觀點

The Christoffel connection symbol Γ_{ij}^k , Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ and scalar tensor R are the same with G.R under Bianchi type V cosmology. So we still use the same quantity of Einstein field equation, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. We still discussed two different models of matter field assumptions for analysis.

(♠). The Perfect Cosmological fluid

According to the perfect cosmological fluid and the geometrical forms of space-time under the Bianchi type V cosmology, we could express the equations as below forms. The non-zero energy-momentum tensor ($T_{\mu\nu}$) and non-zero quadratic forms ($S_{\mu\nu}$) are the same as

the derivations in appendix A, the perfect cosmological fluid.

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 - \frac{1}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2 \quad (143)$$

$$\dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_2^2 + H_3^2 + H_2H_3 + \frac{1}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2(1 - 2\gamma) \quad (144)$$

$$\dot{H}_1 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_3^2 + H_1H_3 + \frac{1}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2(1 - 2\gamma) \quad (145)$$

$$\dot{H}_2 + \dot{H}_1 + H_2^2 + H_1^2 + H_2H_1 - \frac{3}{a_1^2(t)} = \Lambda + k_4^2\rho(1 - \gamma) + \frac{1}{12}k_5^4\rho^2(1 - 2\gamma) \quad (146)$$

We still could derive equations (77), (78) and (79) by using some mathematical technique. Equation (77) could be derived by summing (144~ 146) and subtracting (143). Equation (78) whose $i = 1$ could be shown when we sum (145), (146) and (143) then minus (144). We can obtain the relation of $H_1 = H_2$ by expanding equation (78) with $i = 1$ and $i = 2$. The same processes could be operated to get the equation (79), $2H_1 - H_2 - H_3 = 0$. The general forms of dynamical evolution of Bianchi type V in our brane anisotropic universe could be showed as

$$3\dot{H} + \sum_{i=1}^3 H_i^2 = \Lambda - \frac{3\gamma - 2}{2}k_4^2\rho - \frac{3\gamma - 1}{12}k_5^4\rho^2 \quad (147)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt}(VH_i) - \frac{2}{a_1^2(t)} = \Lambda - \frac{\gamma - 2}{2} - \frac{\gamma - 1}{12}k_5^4\rho^2 \quad (148)$$

$$2H_1 - H_2 - H_3 = 0 \quad (149)$$

We could find the evolution of our anisotropic universe from solving equation (147) ~ (149).

References

- [1] L.Randall and R.Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Let, Vol.**83**, 3370-3373, 1999. hep-ph/9905221.
- [2] L.Randall and R.Sundrum, *An alternative to compactification*, Phys.Rev.Let, Vol.**83**, 4690-4693, 1999. hep-th/9906064.
- [3] Chiang-Mei Chen, T.Harko and M.K.Mak, *Exact anisotropy brane cosmologies*. Phys.Rev.D**64**,044013,2001. hep-th/0103240.
- [4] Chiang-Mei Chen and W.F.Kao. *Stability of the Anisotropic Brane Cosmology*. 2004. CJP, 42 (2004) 45. hep-th/0201188.
- [5] T.Shiromizu, K.Maeda and M.Sasaki. *The Einstein equation on the 3-brane world*. Phys.Rev D**62**, 024012, 2000. gr-qc/9910076.
- [6] M.Sasaki, T.Shiromizu and K.Maeda. *Gravity, stability and energy conservation on the Randall-Sundrum brane world*. Phys.Rev D**62**,024008, 2000. hep-th/9912233.
- [7] D.Langlois, R.Maartens, M.Sasaki and D.Wands. *Large scale cosmological perturbations on the brane*. Phys.Rev D**63**, 084009, 2001. hep-th/0012044.
- [8] T.Harko and M.K.Mak. *Anisotropy in Bianchi-type brane cosmologies*. gr-qc/0401069.
- [9] Charles W.Misner, Kip S.Thorne and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W.H Freeman and Company Publishers. 1973
- [10] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press Ltd. Fourth English Edition. 1975
- [11] Edward W.Kolb and Michael S.Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company. 1993
- [12] Samuel Byland and David Scialom. *Evolution of the Bianchi type I, Bianchi type III and Kantowski-Sachs Universe*. Phys.Rev D**57**. 106065. 1998
- [13] H.B.Kim and H.D.Kim. *Inflation and gauge hierarchy in Randall-Sundrum compactification*. Phys.Rev.D**61**, 064003 (2000); hep-th/9909053

- [14] P.Binetruy, C.Deffayet, U.Ellwanger and D.Langlois . *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*. Phys.Lett.B477,285-291 (2000); hep-th/9910219
- [15] H.Stoica,S.-H.H.Tye and I.Wasserman. *Cosmology in the Randall-Sundrum brane world scenario*. Phys.Lett.B482,205-212 (2000);hep-th/0004126
- [16] Chiang-Mei Chen, T. Harko, W. F. Kao and M. K. Mak. *Rotational perturbations of high density matter in the brane cosmology*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 0311 (2003) 005, hep-th/0208033
- [17] Chiang-Mei Chen, W.F. Kao. *Stability Analysis of Anisotropic Inflationary Cosmology*. Phys. Rev. D64 (2001) 124019. hep-th/0104101
- [18] W.F. Kao. *Bianchi type I space and the stability of inflationary Friedmann-Robertson-Walker space*. Phys. Rev. D64 (2001) 107301. hep-th/0104166
- [19] J.D.Barrow. and H.Kodama. *The isotropy of compact universe*. gr-qc/0012075
- [20] 許書豪. 關於 *Bianchi type I, Bianchi type III* 以及 *Kantowski-Sachs* 的宇宙之研究. 交通大學物理學研究所碩士論文 (2003)

