

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

以 The modification of the Newtonian
dynamics

來探究星系距離

To Calibrate Galaxy's Distance By The Modification of The
Newtonian Dynamics

研究生：謝玉真

指導教授：高文芳 教授

中華民國九十四年七月

致 謝

兩年的碩士生涯中，很高興在交大這宜人的環境裡度過，而物理所也提供了我們在學業上和生活上相當好的資源和空間。感謝指導老師高文芳一直耐心且溫和地指導我們，督促我和工作伙伴陳偉軒去循序漸進地完成論文，這當中即便我或偉軒有時偷懶怠惰，老師也不曾苛責我們，仍然苦口婆心的叮嚀工作，像個好爸爸般地對待學生，令我由衷欽佩。本論文中最困難且最重要的工作乃由容震軒幫我們執行，他也熱心地、不厭其煩地教我和偉軒如何使用 Matlab 程式，相信我們都很難忘懷這段學習的過程！



Abstract

The modified Newtonian dynamics is a new physical theory which attempts to explain the rotation curve problem of galaxies by changing Newton's law of motion.

MOND was proposed by Mordehai Milgrom in 1983. The new theory can explain well why the galaxies' rotation curve is "flat " and don't need to take account of "Dark Matter".



『修正的牛頓力學』(Modified Newtonian Dynamics) 是一個新的物理理論，企圖改變牛頓運動力學以解釋星系自轉的速度問題。

於 1983年由Mordehai Milgrom提出，在以沒有暗物質的假設前提下，計算出與觀測現象相符的星系盤上的自轉曲線 (rotation curve)。

而這套 MOND 的理論，將可以幫助我們從已知的星系自轉速度的分布，與目前觀測到星系的表面亮度的分布(surface brightness)，去反推算出星系所在的距離。

目 錄

一、前言	5
二、介紹	7
三、理論基礎	11
(一)Modified Newtonian dynamics (MOND)	11
(二)星光的起源	13
1. 氫原子的 21 公分譜線	13
2. 測量星系的速度 與 其自轉速度	14
3. 一般測量星系距離的方法	17
4. 視星等、絕對星等 與 Luminosity	19
4-1. Stefan-Boltzmann Law	19
4-2. 星體的 luminosity	19
4-3. Luminosity 與 magnitude 之關係	20
4-3-1. 視星等(apparent magnitude) m_v	20
4-3-2. 絕對星等(absolute magnitude) M_v	21
4-3-3. m_v 與 M_v 的關係	21
4-3-4. Luminosity與 M_v 的關係	21
5. 質光比 M/L	23
6. Color index 的轉換(溫度校正)	23
四、計算結果	24
(一)程式計算	24
(二)計算結果	27
一、星系介紹：NGC 3198	27
二、以不同距離和 M/L 的參數去算出 RC	29
三、星系介紹：NGC 2903	33
四、以不同距離和 M/L 算出 RC	34
五、以 MOND 來探究星系距離的方法	37
五、討論	42
六、結論	43
七、[References]	43

以 MOND (Modified Newtonian Dynamics) 來探究星系距離

一、前言

目前量測星系距離的方法有:造父變星,超新星爆炸,Tully-Fisher relation,哈伯定律等等,但每一種測量法得到的距離結果仍有相當的差異,而距離的量測其不準度常在 30%左右。當各個龐大的星系距我們的距離也都有幾百萬個光年以上,所以如何分析和解讀來自遙遠星系給予我們的訊息,將變成一門重要課題。遙遠的星系射放出的光子,經過了百萬年以上的時間傳遞到地球讓我們觀測到,這些光的訊息可以透露出星系的資料如:表面密度、表面溫度、亮度、星系的視角大小、星系自轉週期等等,從這些資料中我們將可估算: 星系的大小、總能量輸出、運行速度、與我們的距離、質量分布、組成的化學成分等等。而 modified Newtonian dynamics (MOND)的方法,將可能提供作為估算 ”其他星系與本銀河系(Milky Way)的距離”。

A modification of the Newtonian dynamics (MOND)是一個新的物理理論,藉由改變牛頓運動定律,企圖解釋星系自轉的問題 (以往在此問題所提出的主要解釋是『 Dark Matter 』)。自 1983 年,以色列天文學家 Mordehai Milgrom,發表一系列文章強調牛頓力學僅是從太陽系天體的觀測資料推導出來的,它是否適用於更廣闊的天體尺度是有疑問的。他提出一套 『修正的牛頓力學』 MOND (Modified Newtonian Dynamics), 或稱重力變論

(alternative theory of gravity), 當中先假設: 在遠離銀河中心的外區,是 『加速度的平方』(而不是加速度本身)與產生引力物體的質量成正比,與距離的平方成反比。在此假設的前提下可

計算出：無需引進暗物質便可獲得與觀測相一致的星系盤外區的自轉曲線(rotation curve)。

而這套 MOND 的理論，將可以幫助我們從已知的星系自轉速度的分布(rotation curve) 與目前觀測到星系的表面亮度的分布(surface brightness)，去反推算出星系所在的距離。



二、Introduction

在 1970 年代，發現旋渦星系的重力牽引高速旋轉的星球，保持快速運行而不至脫離。這星系的質量可由力學理論推算，當星球在旋渦星系的邊緣以高速環繞時，這個星系的總質量可由此星球的質量和旋轉速率估算出來。另一方面，由觀測星球和星系的絕對亮度，依據星體的絕對亮度調查星體的質量，再乘上測量的數量，之後再做積分，即能推算出星系中看得見的物質之總質量。即實際以天文望遠鏡觀測星系的全部星球，所估算的星系質量比由力學理論估算的總質量小非常之多。對此以往我們宣稱：星系似乎隱藏著大量看不見的質量（Missing Mass）。

也就是根據目前觀測得到所有星系的 Rotation Curves，在離中心的外部並沒有如牛頓力學所預期的下降，曲線反倒呈現平坦，亦即星體(star、dust or gas)在星系的外圍繞中心做圓周運動的速度並沒有變慢，反而維持高速在運行。但問題是我們所觀測的物質(指發亮的部分)質量遞減的很快，經過估算，內部質量(inner mass)所能提供的萬有引力，是無法讓外部的星體維持目前觀測的運行速度。

以銀河系為例，由維繫銀河系運行所需的引力，計算銀河系的質量，與由觀測到的恆星數，計算銀河系的全體物質總質量比較，相差十倍以上。而岩石星塵或近年來發現的木星型行星（稱為棕矮星）在星際間的比例都相當低，可以忽略。又根據觀測氦、氦-3、氦-4 及其他元素與豐存量所得，指出以質子和中子型態存在的物質，其密度小於由星系動力學所導出總物質的百分之十。根據宇宙論，理論上宇宙存在的物質，其中發光天體只占了 4%，

暗物質占 23%，暗能量占 73%(dark energy)。只是 20 多年來，在天文物理學上仍沒有進展的一個重大問題就是黑暗物質。

暗物質的形式：有熱暗物質和冷暗物質。前者大多指向『微中子』，近 20 年，有許多實驗都在尋找微中子的質量。後者則是『超對稱中性重粒子，Neutralino』被認為是最佳候選者。只是現今，對於暗物質卻一直未有充分而直接的證據。

而面對目前的處境，天文學家有兩種解決方案：

(1)努力尋找黑暗物質(dark matter)，

(2)提出對引力作用的修正，即假設在大尺度空間下的重力規則並不遵守牛頓力學。

而在 1976 年科學家確實觀測到星系有從成群或成團的中心向四面八方散開的現象。推論在這些星系群和星系團內就沒有必要假設存在著大量的暗物質，以提供額外的引力來保持星系群或星系團的動力學平衡狀態。又如美國貝爾實驗室 J.AnthonyTyson 等人利用『引力透鏡效應』測定一些星系的質量，其結果比按軌道動力學研究方法所得的質量值要小。還有一些科學家，如美國費米加速器實驗室的奧利夫 (Keith Olive)等人則認為：由於光速是有限值，我們今天所觀測到的星系團實際是過去的星系團，其質量比它們目前實際擁有的質量要大。

MOND (Modified Newtonian Dynamics) 於 1983 年由 Milgrom 提出，理論認為像星系外圍這樣的區域，沒有隱藏的質量(hidden mass)或暗物質，只要修正重力定律，便可以解釋異常

的星系自轉速率（未隨距離而降低）的現象。在 MOND 的計算裡，星系所具有的質量(inner mass)和 light to mass ratio(M/L)將重新被導出，對幾種典型的星系做分析，得出 M/L 的值在 1 至 10 之間。假若 MOND 可行的話，便將能消除有大量黑暗物質(dark matter)存在的需要了。

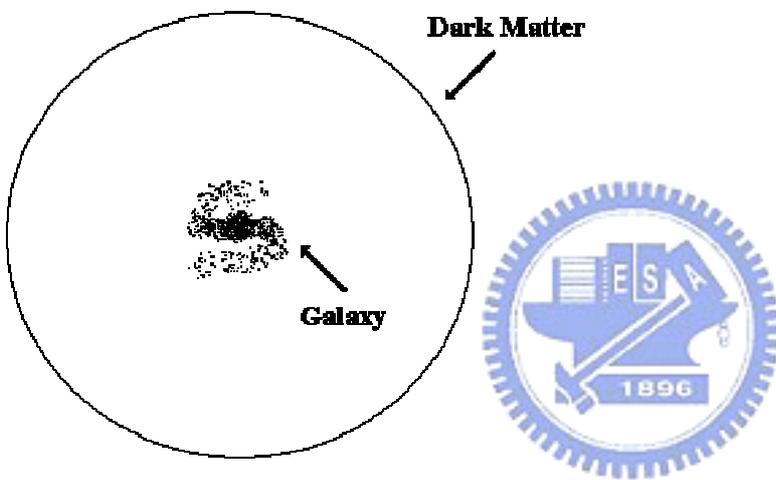


Figure 1: An ideal about dark matter

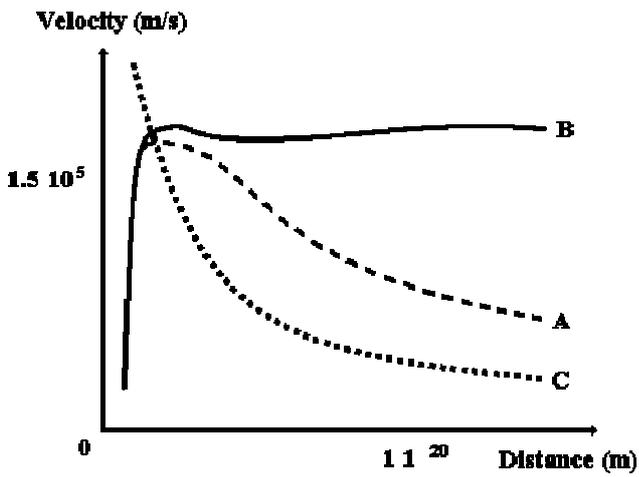


Figure 2:

天文學家們稱 curve B 現象為 "flattening of galaxies' rotation curve"，curve A 則為牛頓力學計算結果，curve C 則是描述太陽系情形(但非真實 scale)。

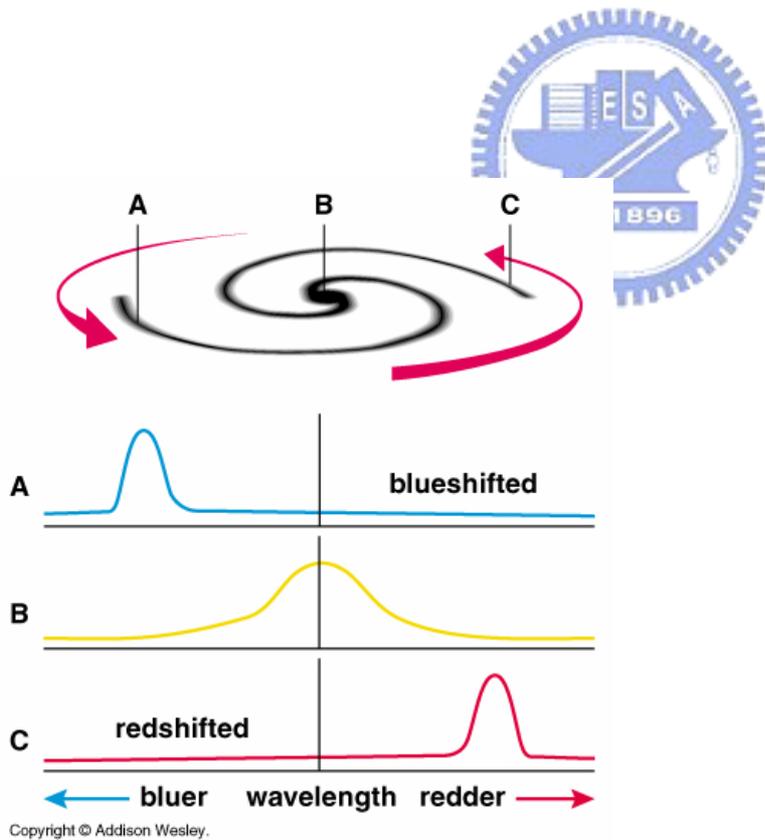


Figure 3

三、理論基礎

(一、) Modified Newtonian dynamics (MOND)

假若暗物質不存在，則從觀測星系自轉的運動顯示出，在十萬光年以上的尺度下，重力加速度 g 正比於 $\frac{1}{r}$ ，也就是指在星系的外圍表現會像是一個典型的二維引力場。而在尺度小的距離， g 則正比於 $\frac{1}{r^2}$ ，正是典型的三維引力場。這概念就很類似『M理論』所提的，在M理論中，空間共有九維或十維，不過其中六維或七維捲成非常小，例如：日常生活中我們觀察一條棉線時，會認為線是一維的，但由棉線上的細菌來看這條線，牠應該會認為棉線的空間有三維。意思是說，在大尺度下所觀測的維度會減少，有這個概念後，在觀看一個星系的外型時，內部像球體，外部像圓盤，也就不那麼令人意外了。



Milgrom(1983)認為牛頓力學的重力場需要被修正，他提議：重力場的強度減弱到一個極限值(a critical acceleration) g_0 時，將不再繼續變小，而 $g_0 = 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ ，所以新的重力場加速度被建議為：

$$\vec{F} = m \cdot \mu\left(\frac{g}{g_0}\right) \cdot \vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{GM}{r^2} = g_N = \mu\left(\frac{g}{g_0}\right) \cdot g \quad (2)$$

G 是重力常數， M 是整個星系的質量， m 是星球的質量， r 是星球

與星系中心的距離， g 為星球所受的重力加速度，亦即 $g = \frac{v^2}{r}$ ； g_N 是牛頓的重力加速度，上式為 g 和 g_N 的關係式，而 g_0 是一個新的物理參數，單位為加速度的單位。Milgrom 主張

$$\mu\left(\frac{g}{g_0}\right) = \mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3)$$

$$\text{if } x \gg 1, \text{ then } \mu(x) = 1$$

$$\text{if } x \ll 1, \text{ then } \mu(x) = x$$

可以推論出關於速度 v 的形式為

$$(I) \text{ when } g \gg g_0, \mu\left(\frac{g}{g_0}\right) = \mu(x) \approx 1 \Rightarrow g = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow v \propto \sqrt{\frac{1}{r}} \quad (4)$$

$$(II) \text{ when } g \ll g_0, \mu\left(\frac{g}{g_0}\right) = \mu(x) \approx x \Rightarrow g \cdot \mu\left(\frac{g}{g_0}\right) = \frac{g^2}{g_0} = \frac{GM}{r^2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{g_0} = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow v^4 = GMg_0$$

亦即在重力場 g 大的時候，是與沒有修正的結果相同，但若重力場小到極限 g_0 以下，修正才發揮功用。

比較(4)式、(5)式，後者修改後速度將不再因半徑的增加而遞減了。這就是目前我們觀察 rotation curve 所得到的現象，當星系的外部看起來物質越來越稀疏，甚至已經沒有發光物質時，但我們探測到的星體運動速度是趨於一個穩定值。

這結果也符合 Tully & Fisher (TF) law (1977)：漩渦星系 (spiral galaxy) 旋轉的快慢與星系絕對亮度的關係為 $L \sim v^\alpha$ ，而 α 接近 4，也就是 $L \propto v^4$ 。這說明了越亮的星系旋轉的越快。

由(5)式，我們可以從觀測的 v 和 M 值代入求出 g_0 ，Milgrom 指出 $g_0 = 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ ，與 $c \cdot H_0 \approx 5 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ 相接近。在重力場中，一個粒子質量為 $m = 200 \text{ MeV}$ ，可以得到 $g_{200 \text{ MeV}} = Gm/\lambda = Gm^3 c^2/h^2 \approx 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ 。

Milgrom 當初是想讓星系外部的重力加速度 g 不要減弱到小於 g_0 ，而我們可以以 g_0 去計算本銀河系 (Milky Way) 的臨界重力加速度 g_0 所落的位置 r_0 ，

$$g_0 \equiv \frac{GM_0}{r_0^2} \quad (6)$$

Milky Way 的總質量(可見光部分) M_0 約為 $2 \times 10^{11} M_{\text{sun}}$ ，計算所得 $r_0 \approx 49700 \text{ ly}$ ，此長度恰恰好約等於 Milky Way (可見部分) 的半徑長。



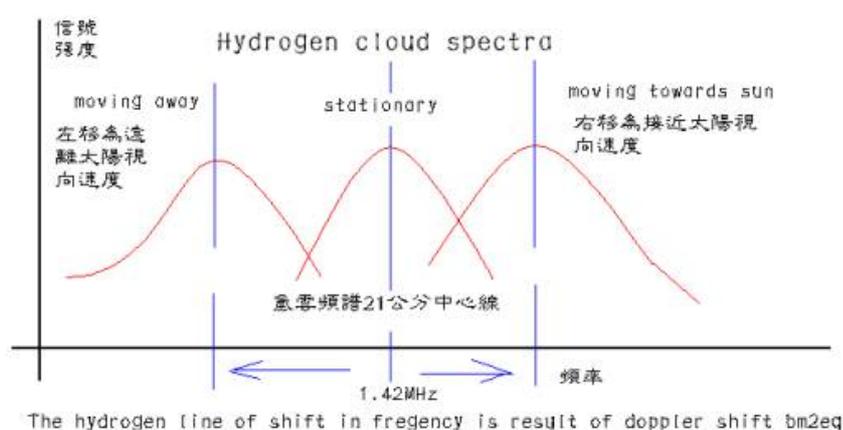
(二、) 星光的起源

星光(或稱電磁輻射)是天體內部核反應的產物，或帶電電荷加速運動所發出的輻射。

1. 氫原子的 21 公分譜線

中性氫原子之電子與氫核皆有 spin ，當兩者各別產生的磁矩因彼此間方向的變換(即由高能躍遷至低能)，會發出頻率為 1420.406 MHz 的光子，這就是波長為 21 公分的氫譜線輻射，由於此種譜線是星際空間中低溫低密度之氫原子所發出，而其波長比光的波長長了許多，故不會被星際物質如塵埃等吸收，通過對 21 公分譜線強度的觀測，可以得到銀河系各處氫雲的密度、溫度及視向速度等資料，

就可描繪出銀河系的結構，因此它是探索銀河系甚至星系有力的工具。21 公分譜線原由荷蘭天文學家 Van de Hulst 於 1944 年提出。在 1951 年美國物理學家 Purcell 利用「核磁共振」(NMR - Nuclear Magnetic Resonance)找到在太空中的氫原子所釋放出來波長 21 cm 的微波。這項發現開拓了一個嶄新的天文研究領域，讓天文學家在不依賴可見光的情況下也可探索宇宙。



上圖:氫雲團的波長在 21 公分位置.因測量發射源有移動速度，所以有 Doppler Effect，其氫雲團能量峰值不會停在 21 公分譜帶中心位置，都隨其徑向速度分佈於左、右兩邊，故我們可依其特有的偏移和中央距離，計算出徑向速度及和太陽距離。

2. 測量星系的速度與其自轉速度

氫原子21公分的譜線可以告訴天文學家關於星體的許多資訊，徑向速度(Radial Velocity)就是其中之一，需要高解析光譜再以Doppler Effect來計算出星體移動速度。

當星體的徑向速度遠小於光速時，

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V_r}{C} \quad (7)$$

光源遠離視測者，波長增加，頻率變小，紅位移。

光源趨近觀測者，波長減少，頻率變大，藍位移。

在 1868 年英國天文學家赫金斯 (Sir William Huggins, 1824-1900)，便應用都卜勒效應，由分光鏡中光譜線的位置遷移 $\Delta \lambda$ ，計算出天狼星 (Sirius) 正以每秒 46.6 公里速度遠離地球。在現代精密儀器的支助下，天文學家已經可以測量遙遠星球的光譜線位移相當精確的值；當星球對觀測者遠離時，會產生紅移 (red shift)，也就是譜線上光波的波長增長，即向較長的波長區域 (紅光) 位移，此顯示星球遠離；當星球趨近觀測者時，光波的頻率變高，譜線會向藍光或紫光區域位移，這就是所謂的藍移。

美國天文學家 Edwin Powell Hubble 利用他所觀測銀河和銀河系外的星球光譜「紅移」現象的結果，進一步研究所有的銀河都在彼此加速地遠離中，而距離愈遠，遠離的速度愈高，而星系後退速度 v 與距離 d 有直線性關係，即

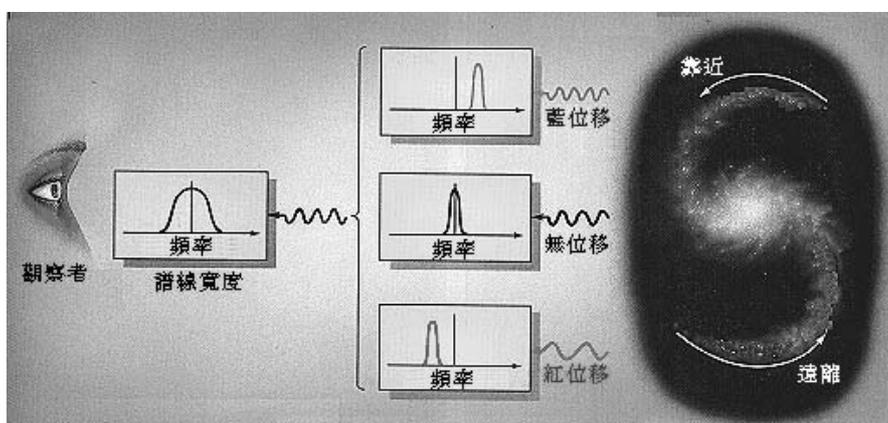
$$v = H_0 d \quad (8)$$

H_0 為赫伯常數，該關係即所謂赫伯定律 (Hubble's Law)。赫伯與蓋莫 (George Gamow, 1904-1968) 以此發展出宇宙膨脹的假設，在現代宇宙學的領域裡，允稱為重要的基礎理論之一，但加以修改後，並稱之為「大爆炸學說」(Big-bang theory) 及「大爆炸宇宙演化論」(Big-bang cosmogony)。

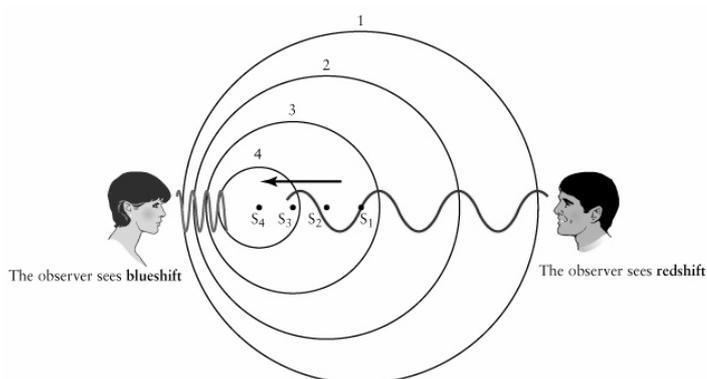
1926 年 哈伯注意到遙遠星體的光譜，不管光線來自哪個星系，各個光譜上面暗線的相對位置和相對亮度都相同，如同太陽光譜的全套暗線，但卻整個向紅端移位。更

叫人詫異的是，星系愈遠，光譜暗線向紅端移位的量也愈大。這便是所謂『Doppler effect』。

假如光源往後退，光波的頻率也會降低。不過，光速高達每小時 6 億 7 千萬英里，所以即使光線是來自一輛急駛的火車，它光頻率的改變也微不足道。但是，如果某星系光譜暗線向紅端的移位量，指出光的頻率降低百分之十，那麼，該星系一定是以每小時 6700 萬英里的高速，離我們而去！



◎ 推導 Doppler Formula



考慮一單色(單頻)光源，其頻率 f 、波長 λ ，與光速 c 的關係是 $c = \lambda \cdot f$ ，假設光源與觀察者距離為 d ，而光源與觀察者都相對靜止，則光波傳遞到觀察者有 n 個週期， $n = d / \lambda$ 。假使光源會移動，若遠離觀察者的速度記為 v ，若接近觀察者則記為 $-v$ ，則需要傳遞的距離從 d 變為

$$d \rightarrow d \cdot \left(\frac{c \pm v}{c} \right),$$

而波數 n 不變，則波長改變為

$$\lambda_r = \lambda \cdot \left(\frac{c \pm v}{c} \right)$$

或寫為 $\lambda_r - \lambda = \lambda \cdot \frac{v}{c}$ ，即為(7)式 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ 。

波長的變化比率是 v/c 。在光速是常數的情況下，

$$c = \lambda \cdot f = \lambda_r \cdot f_r$$

則觀察者所得光的頻率 f_r 為

$$f_r = f \cdot \left(\frac{c}{c \pm v} \right) \quad (9)$$

所以我們可將運動光源的頻率 f_r 與靜止光源頻率 f 作比較，則光源的速度 v 便可求得。例如我們已知氫原子頻率 $f=1420\text{MHz}$ ，光速 $C=30$ 萬公里/秒，則若在頻譜分析上有位移 0.05MHz 的位移，其觀測物體須有 10.5 公里/每秒的徑向速度(Radial velocity)。

3. 一般測量星系距離的方法

星系距離我們非常遙遠，再加上由於星際物質的影響會造成誤差，因此測定星系距離比測定恆星距離還要困難，其距離的單位通常以光年(light year) 或秒差距(parsec, 簡稱 pc) ($1\text{pc}=3.26$ 光年)。

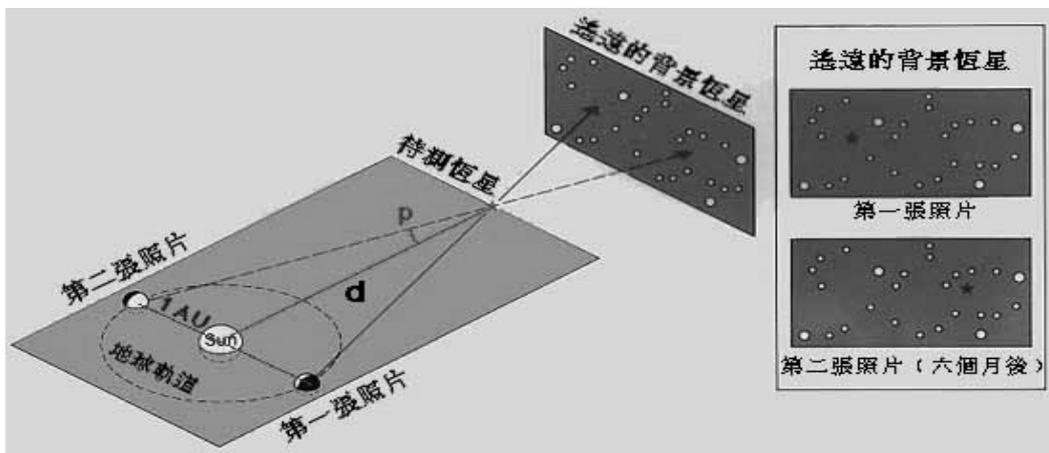
對天空中模糊的光斑-星雲，分辨其為銀河系內的天體還是與我們銀河系同量級的星系，1926年哈柏(Edwin Hubble) 利用 Henrietta Leavitt 女士發現的造父變星的週期與光度關係，測出仙女座大星雲和其他一些星雲的距離後，才使人們了解本銀河內星雲和銀河外星系之分。

◎ 恆星視差法(stellar parallax)

因為恆星很遙遠，地球與太陽的平均距離 1AU，可近似為圓心角 π 所對應的圓弧，故 $1AU = \pi d$

π 的量度單位為徑度(radian)，而 1π 徑度= $180 \times 60 \times 60$ 角秒，所以 $1 \text{ rad} = 206264.806$ 角秒。如以角秒來量度視差角 π ，則恆星與地球的距離， $d = 206,265.806/\pi$ (AU)。

天文學中把 206,265.806 AU 定為 1 秒差距(parsec, 簡稱 pc)，而稱能造成視差角為 1 角秒的距離為 1pc。而 $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ light year}$ 。



測距方法	適用範圍
1. 恆星視差法(stellar parallax)	~ 1k pc
2. 光譜視差法(spectroscopic parallax)	~ 7Mpc
3. 變星	~ 17 Mpc
4. 超新星	> 1000 Mpc
5. Tully-Fisher 關係	> 100 Mpc
6. 哈柏定律	宇宙邊緣

4. 視星等、絕對星等 與 Luminosity

4-1. Stefan-Boltzmann Law

天體會發射電磁輻射，其波長與強度大小，是與天體的表面溫度高低有關。

$$I = \sigma T^4 \quad (10)$$

物體單位時間(sec)之內從表面的單位面積(m^2)所輻射出的能量(Intensity, I : $J/sec \cdot m^2$) 正比於物體的表面溫度(T)之 4 次方。其比例常數 $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} J/sec$ 稱為『Stefan-Boltzmann 常數』。實際上只有黑體輻射曲線才符合此方程式。一般假設來自星體的輻射也具有黑體輻射的特性。



4-2. 星體的 luminosity(每秒由其表面所輻射出的總能量， L ，單位： J/sec)

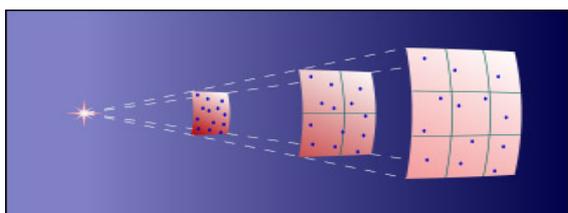
星體的光度，單位是 watt，可將星體看成超級大型的燈泡。

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (11)$$

R : 星體半徑， T : 星體表面溫度。如星體與地球的距離為 d ，星體的 Intensity (單位時間內，通過單位面積的光) 為

$$I = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (12)$$

即 Intensity 與星體的距離平方成反比關係，故計算星體的 luminosity 時，須知道其 Intensity 與距離。



4-3. Luminosity 與星等 (magnitude) 之關係

(convert apparent magnitudes to solar luminosities) :

探究天體 Surface Brightness 和 Luminosity 時，常取用的波段有 U (365nm)、B(440 nm)、V(550 nm)、R(640 nm)、I(790 nm)、J (1250 nm)、H(1660 nm)、K (2220 nm)、L(3450 nm)、M(4650 nm)，選用波長越長的 band，可以減少星際塵埃物質的吸收效應，使電磁波的穿透力增高，可以使量測的數據更準確。不過在選用波段時，最重要還是依照星系的特點來做選擇，例如有些 O、B stars (年輕的星星)較多，所放射出的光也會以 U、B、V band 居多。

4-3-1. 視星等 (apparent magnitude) m_v :

下標的 V 是指 visible(可見光部分，V band)，天文學家常將 apparent magnitude 做精確的量化，以星體的 Intensity 為定義的基礎，所以對星體 A 與星體 B :

$$\frac{I_2}{I_1} = 100^{(m_{v1}-m_{v2})/5} = 10^{2/5*(m_{v1}-m_{v2})}$$

$$m_{v1} - m_{v2} = \frac{5}{2} \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

以織女星 (Vega) 為參考星：視星等為『0 等』，也就是 $m_{v(Vega)} = 0$ 。

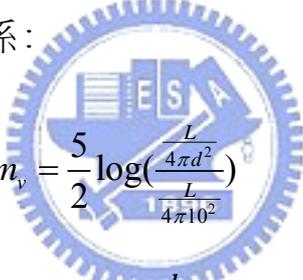
任何星體的 apparent magnitude 定義為 m_v ，

$$m_v = m_v - m_{v(Vega)} = \frac{5}{2} \log \left(\frac{I_{Vega}}{I} \right) \quad (13)$$

所以 Intensity 差 100 倍，星等差 5 等。視星等愈小的星體亮度愈高，如太陽 $m_v = -26.8$ ，北極星 $m_v = 2$ 。 m_v 代表以主觀視覺觀察的星體亮度，忽略星體遠近的因素。

4-3-2. 絕對星等 (absolute magnitude) M_v :

假設將星體都放到距地球 10pc 處，所得的亮度稱為絕對星等。每差 5 個星等亮度差 100 倍。如星體在 10 pc 的亮度為 $\frac{L}{4\pi 10^2}$ ，在原來距離 d (d 是星體與地球的距離，單位:pc) 時的亮度為 $\frac{L}{4\pi d^2}$ ，則 m_v 與 M_v 的關係：



$$M_v - m_v = \frac{5}{2} \log \left(\frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{L}{4\pi 10^2}} \right)$$

$$m_v - M_v = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) \quad (14)$$

如：太陽的 $M_v = +4.8$ ，而北極星的 $M_v = -4.6$ 。

4-3-3. m_v 與 M_v 的關係 :

由(15)式中將 D 以 10pc 代入可得結果是

$$m_v - M_v = 5 \log d - 5 \quad (15)$$

4-3-4. Luminosity 與 M_v 的關係 :

一般常將 Luminosity 與 M_v 交互使用，因為 Luminosity 與 M_v 之間，有下列之關係

$$\log\left(\frac{L_{galaxy}}{L_{sun}}\right) = \frac{2}{5}(M_{sun} - M_{galaxy}) \quad (16)$$

不過因爲有效溫度需要修正，我們須先將 M_v 轉換成 M_{bol}

$$\text{Bolometric Correction} \quad M_{bol} = M_v + B.C. \quad (17)$$

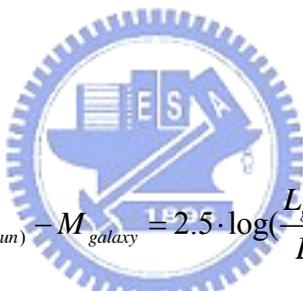
◎ Convert B-V to effective Temperature

- $B-V = -3.684 \log(T) + 14.551$ for $\log(T) < 3.961$
- $B-V = 0.344 [\log(T)]^2 - 3.402 \log(T) + 8.037$ for $\log(T) > 3.961$ (18)

◎ Bolometric Correction

$$(B.C.) = -8.499 [\log(T) - 4]^4 + 13.421 [\log(T) - 4]^3 - 8.131 [\log(T) - 4]^2 - 3.901 [\log(T) - 4] - 0.438 \quad (19)$$

最後可得



$$M_{bol(sun)} - M_{galaxy} = 2.5 \cdot \log\left(\frac{L_{galaxy}}{L_{sun}}\right)$$

$$10^{\frac{2}{5}(M_{bol(sun)} - M_{galaxy})} = \left(\frac{L_{galaxy}}{L_{sun}}\right) \quad (20)$$

$$\Rightarrow \frac{L_{galaxy}}{L_{sun}} \propto d^2$$

而 $L_{sun} = 3.826 \times 10^{26} \text{ J/sec}$ 與 $M_{bol(sun)} = +4.74$ 爲已知，所以知道星體溫度修正後的絕對星等 M_{bol} ，即可找出 L_{galaxy} 。

5. 質光比 M/L

星系質量和光度的比值，通常以太陽質量 M_{sun} 和太陽光度 L_{sun} 為單位，即 M_{sun}/L_{sun} 。通過對星系的觀測，可求出各種不同類型星系的質光比。一般而言， M/L 約在 1~15 之間。一般根據星系的光度資料，大約能估計星系的質量。

6. Color index 的轉換 (溫度校正)

星系亮度的數據來源：“2-Micron All-Sky Survey” (簡稱 2MASS)，其中 surface brightness 的波段是 J 、 H 、 K band，color index 是為 $(J - K)$ ，此時利用 Conversion Formulas of the “2MASS” data: J and K Photometry Conversion to $V-Rc$ and $V-Ic$:

$$V - Rc = 0.8567 \cdot (J - K) + 0.0313 \quad (21)$$

經由上列關係，我們先將 $(J-K)$ band 轉成 $V-Rc$ ，再參照文獻 [Pickles A.J., PASP, 110, 863 (1998)] 所提供的溫度與 color index 之間的關係，將 $V-Rc$ 轉成 $(B-V)$ ，或直接換算成溫度後，就可以由(19)式得到 $B.C.$ 值，而後由(17)式做溫度的修正。

四、計算結果

(一、) 程式計算

根據文獻分析的V band表面亮度(surface brightness, 簡稱SB), 即觀測星系的視角(arcsec)與單位面積入射星光的星等大小(magnitude/arcsec²)之相對應數據, 作為r與 m_v 的矩陣列, 代入 m_v 與 M_v 的關係式(15)式, 求得星系的絕對星等 M_v , 在經過熱校正*Bolometric Correction* (17)式, 求出 M_{bol} , 再代入Luminosity與 M_{bol} 的關係(20)式, 得 L_{galaxy} 的值。這當中我們需將視角arcsec換算強度單位(rad)後, 乘上星體與地球的距離d(單位pc), 得到的才是星系的實際長度。相同地, 單位面積arcsec²則換算成pc², 最後我們得到的就是『星系光度分布』, 表示成r與 L_{galaxy} 的矩陣列, r單位為kpc, L_{galaxy} 單位為 L_{sun}/pc^2 。

我們將Luminosity光度分布關係乘上mass to light ratio(M/L), 即為『質量密度的分布』, 表為 $\sigma(r')$ 。其中 M/L , 即質光比(單位為 M_{sun}/L_{sun}), 我們將分為 $(M/L)_{bulge}$ 和 $(M/L)_{disk}$ 兩部分, 分別給予相同或不同值, 以數值計算允許積分誤差範圍1%內。

質量密度 $\sigma(r')$ 為光度的函數, 我們表為

$$\sigma(r') = L(r') \cdot \frac{M}{L}$$

則圓盤的質量表為

$$dm = \sigma(r') r' dr' d\theta = \left[L(r') \cdot \frac{M}{L} \right] \cdot r' dr' d\theta$$

而重力位能 $U(r)$ 為

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r') r' dr' d\theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r') r' dr' d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \end{aligned}$$

而重力場強度為

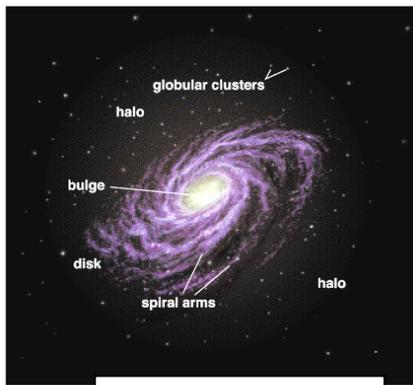
$$g(r) = -\vec{\nabla} U(r)$$

推導重力場強度 g

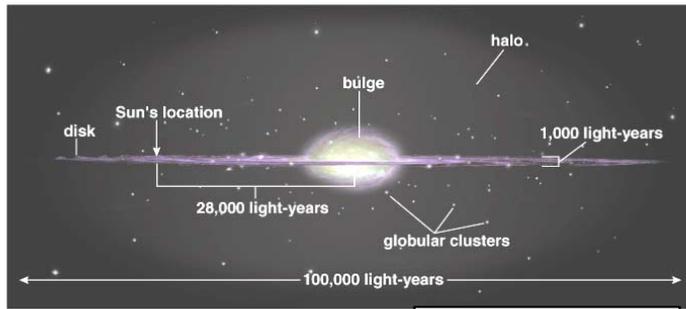


$$\begin{aligned} g(r) &= -\vec{\nabla} U(r) = -\vec{\nabla} \left[\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\vec{\nabla} \left[\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r') r' dr' d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \right] \\ &= -\int_0^R \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2r - 2r' \cos \theta) \cdot \sigma(r') r' dr' d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2r - 2r' \cos \theta) \cdot \left[L(r') \cdot \frac{M}{L} \right] \cdot r' dr' d\theta \end{aligned}$$

再經由 MOND 和牛頓力學計算出星系自轉速度的分布圖，即[圖三]，以比較 MOND 與牛頓力學分析星體運動的差異。



(a) 圖(a)星系俯視圖



(b) 圖(b)星系側面

而針對星系中心隆起的部份，我們將星系內部的核心 (bulge) 視做一個圓球，外部為一個圓盤 (disk)，所以在計算圓盤重力場強度 $g(r)$ 或重力位能 $U(r)$ 時，我們多加一個球體的質量分布在星系中心，求球體的重力場強度 $g(r)$ 的計算比圓盤簡化許多，因為球體的分布是特殊的對稱，所以在算重力場時，只需要考慮內部質量就好，

$$\frac{GM_{inner}}{r^2} = \mu \cdot g = \mu \cdot \frac{v^2}{r}$$

其中

$$\text{if } g \gg g_0, \text{ then } \mu \approx 1$$

$$\text{if } g \ll g_0, \text{ then } \mu \approx \frac{g}{g_0}$$

而球體的內部質量 M_{inner} 為

$$M_{inner} = 2\pi \left(\frac{M}{L} \right) \int_0^{r'} r' L(r') dr'$$

(二、) 計算結果

一、星系介紹：NGC 3198

NGC 3198是一個螺旋狀星系(spiral galaxy)，位於大熊星座(Ursa Major，Great Bear/ Big Dipper)

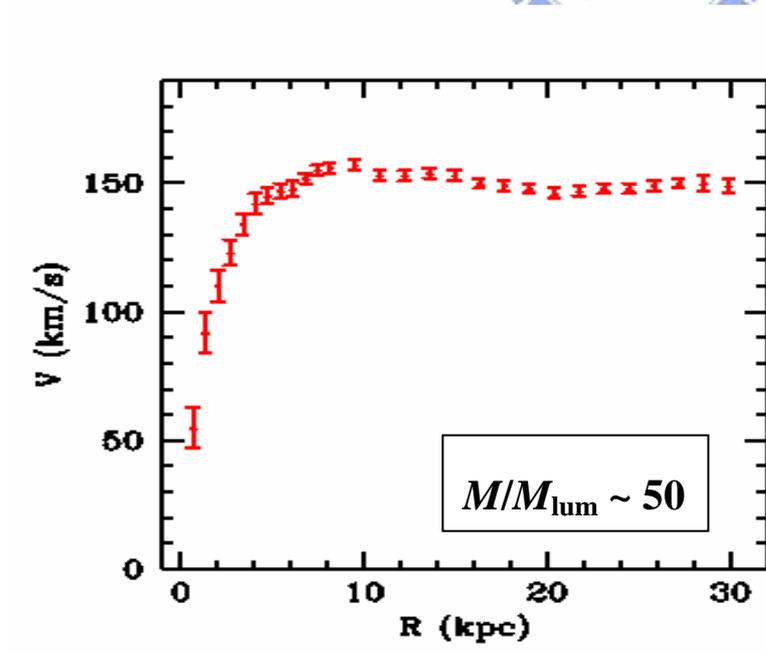
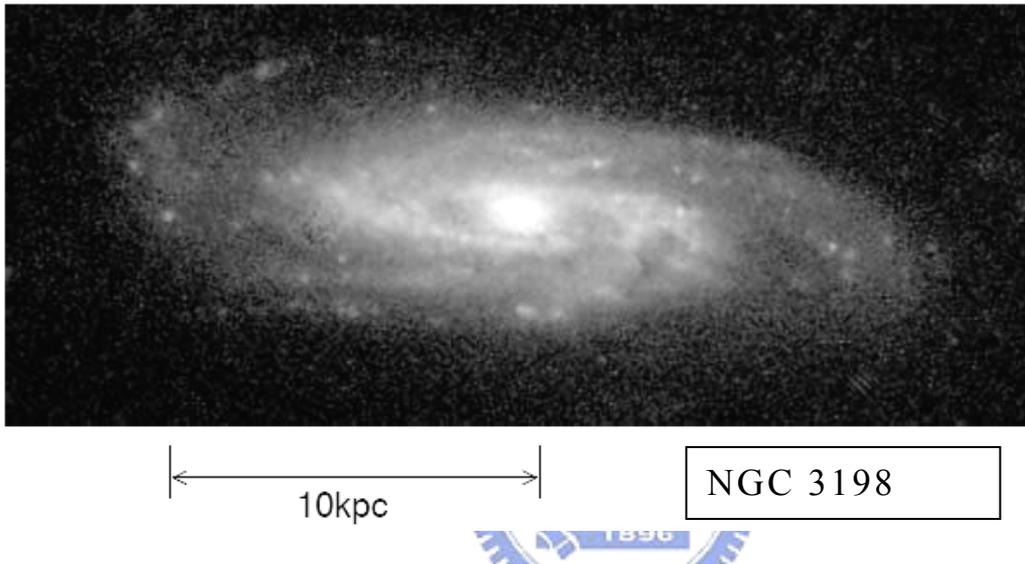


fig.4-1 : This is rotation curve of NGC 3198 from Begeman 1989

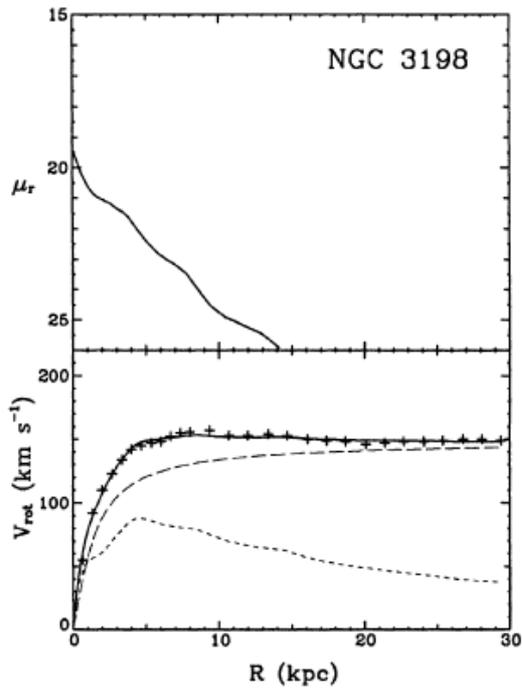


fig.4-2 : This is surface brightness of NGC 3198 from Kent 1987.



Table 4-1:此星系與我們的距離

Galaxy	distance (Mpc)	references for distance values
NGC3198	10 Mpc	Hubble law ($h_0 = 75 \text{ km/sec.Mpc}$)
	$13.8 \pm 0.5 \text{ Mpc}$	Cepheid by Freedman (2001), TF(2002) SINGS(2001)

二、以不同距離和M/L的參數去算出RC

Case.1.

距離 $d = 10.0 \text{ Mpc}$, $g_0 = 0.9 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$, $(M/L)_{\text{disk}} = 2.1$

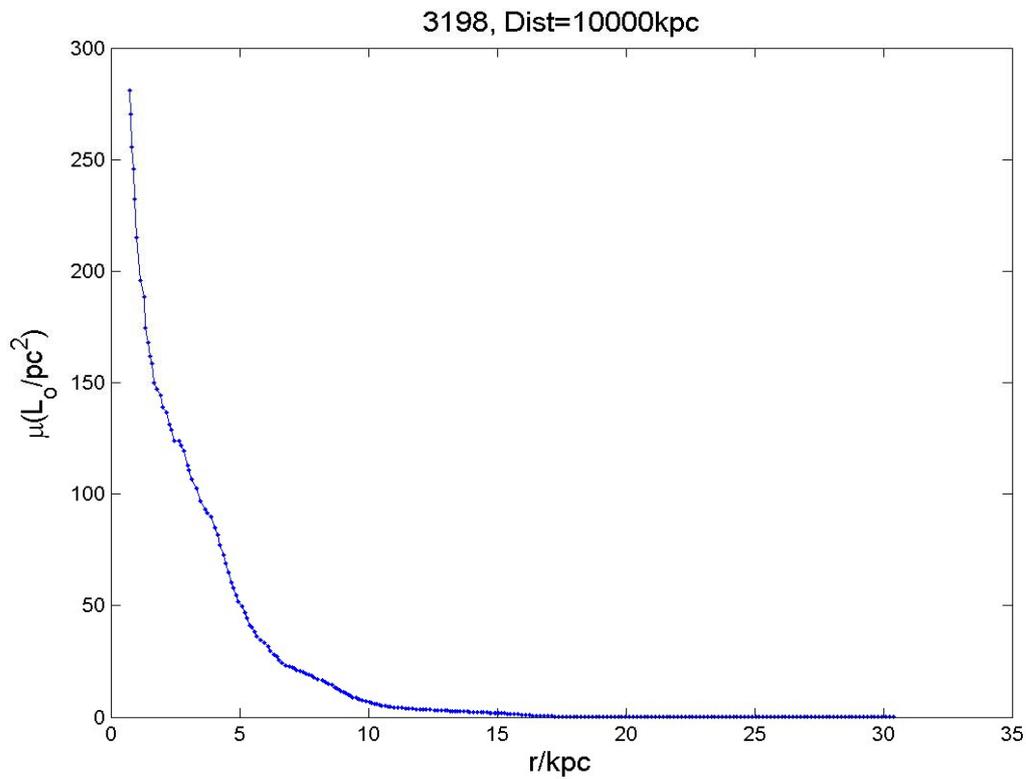


fig. 4-3. NGC3198 單位面積所發出光的總能量分布，即 $L_{\square} / \text{pc}^2$ 與 r 的關係

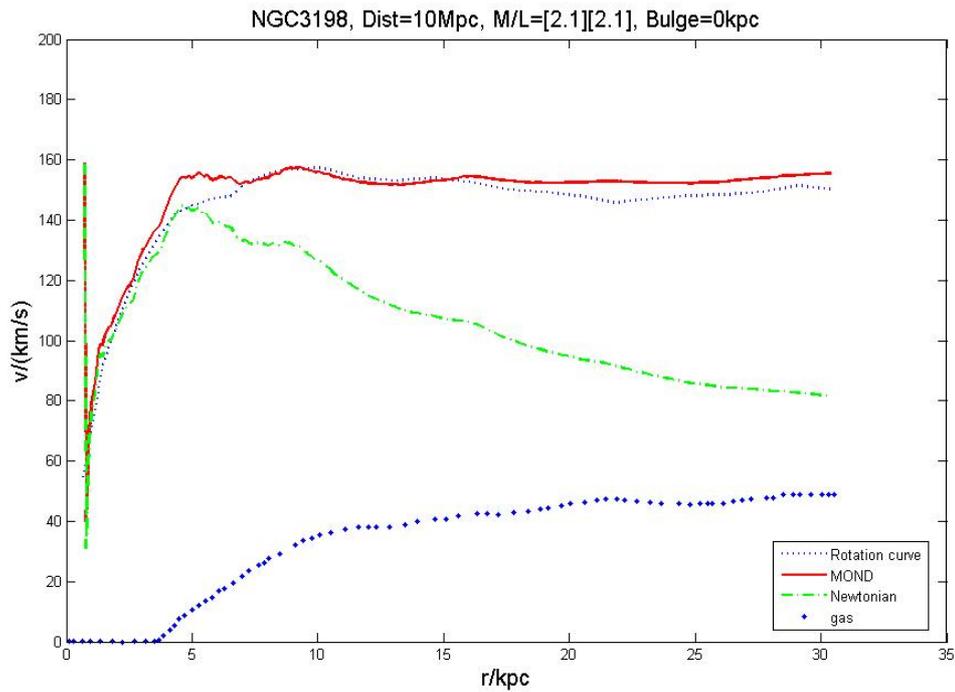


fig. 4-4. NGC3198 自轉速度的分布

Case.2.

距離 $d = 13.8\text{Mpc}$, $g_0 = 0.9 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$, $(M/L)_{\text{disk}} = 1.1$

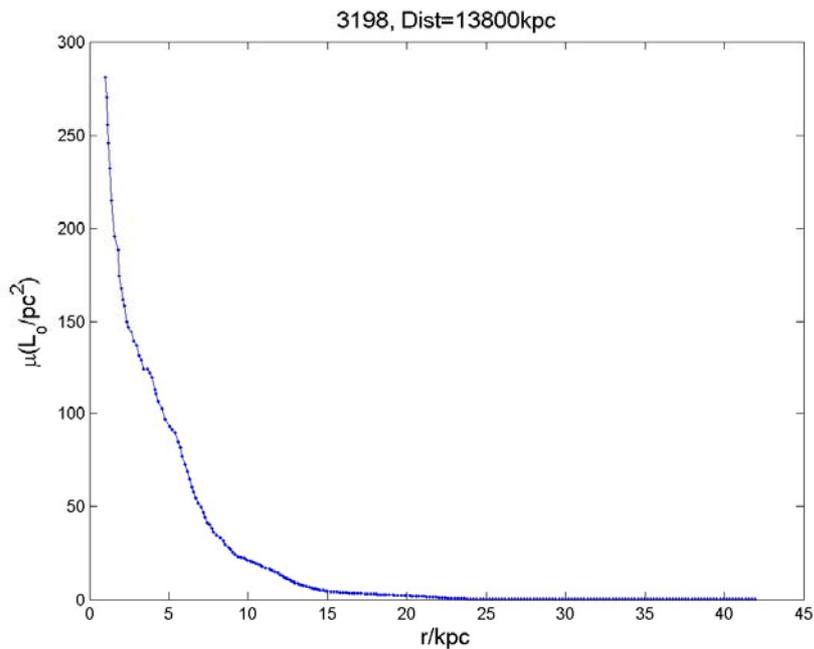


fig4-5. NGC3198 單位面積所發出光的總能量分布，即 L_{\square} / pc^2 與

r 的關係

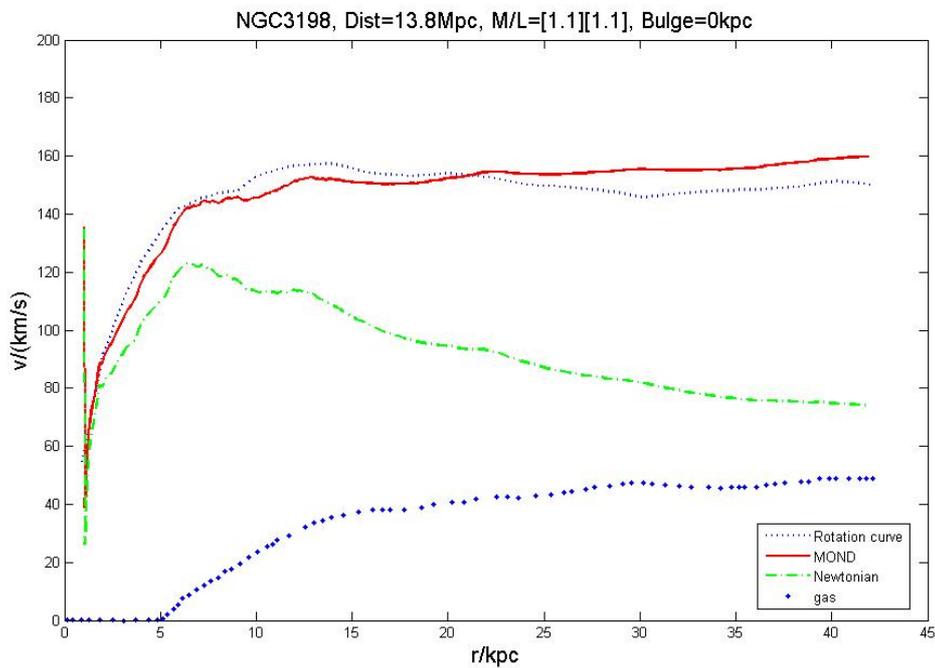


fig4-6. NGC3198 自轉速度的分布



以上 Rotation curve 算法是將可見的物質質量所產生的加速度，和 HI gas 所產生的加速度，兩者相加後的加速度以 MOND 和 Newtonian 兩種不同方法計算出速度的分布，分別是 solid line 和 dash-dot line。而 dot line 代表 gas 所產生的速度，是以 Newtonian 方法計算出的。

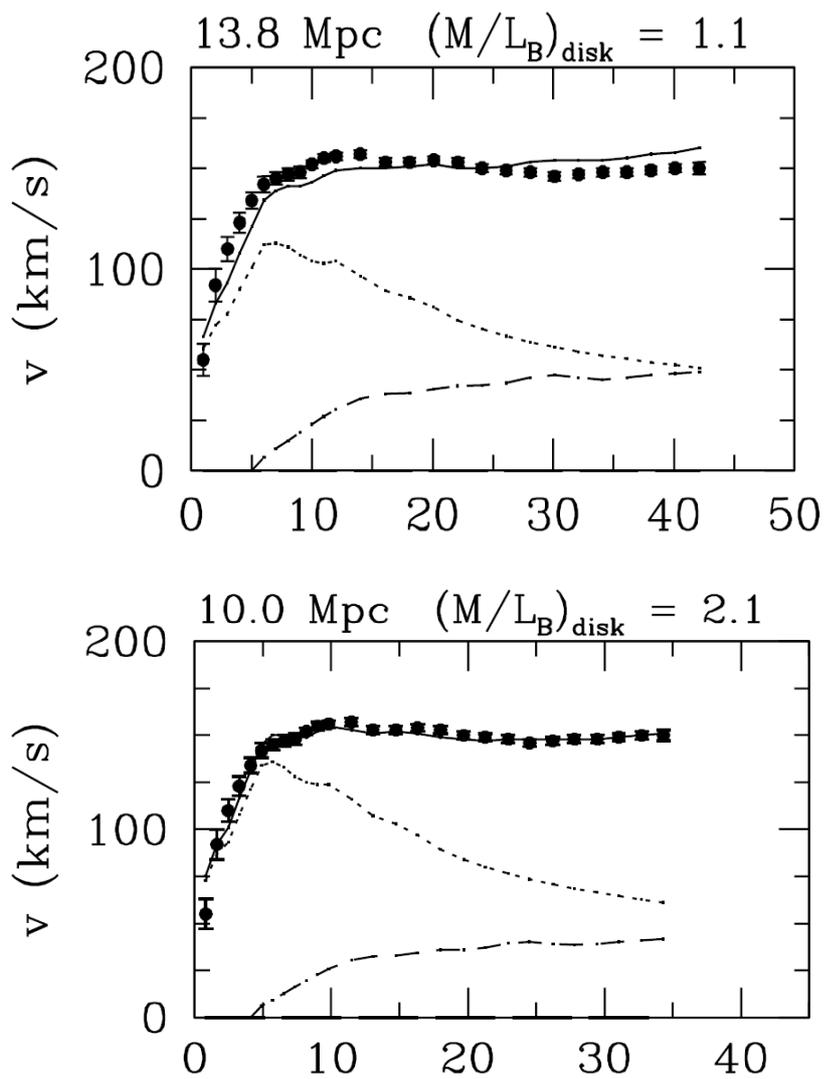


fig4-7. 比較Sanders 2002，對NGC 3198的RC所做的fitting，solid line是Sanders以MOND方式所得。

三、星系介紹：NGC 2903

NGC 2903是一個明亮的螺旋狀星系(spiral galaxy)，位於獅子座(Leo)中。

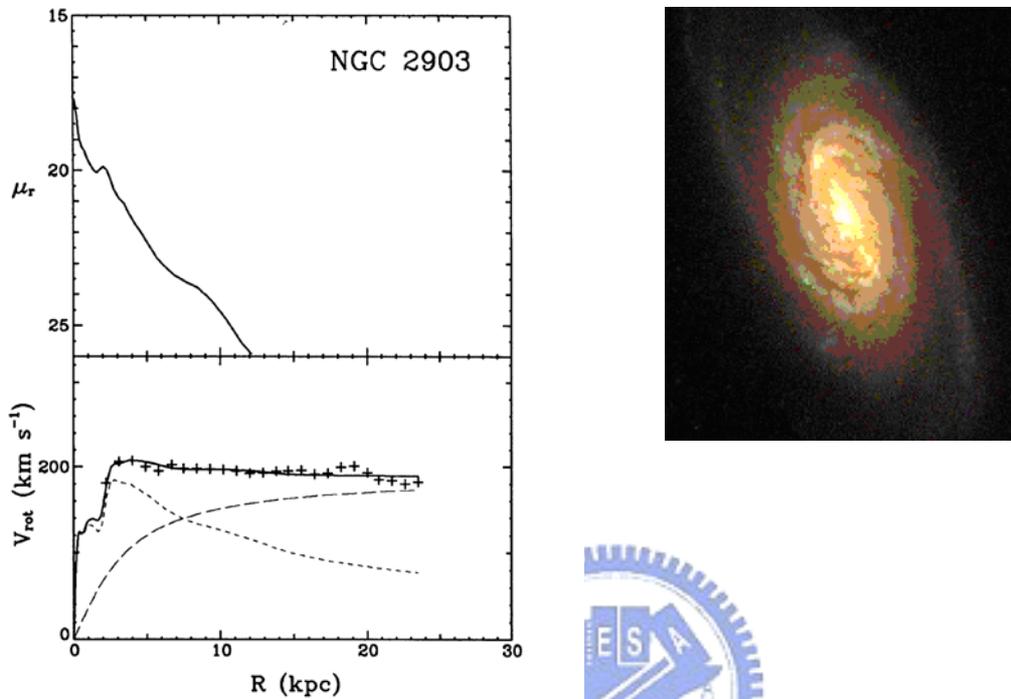


fig4-7. : **This is surface brightness of NGC 2903 from Kent 1987.**

Table 4-2: 此星系與我們的距離

Galaxy	distance (Mpc)	references for distance values
NGC 2903	6.40 Mpc	Hubble law ($h_0 = 75$ km/sec.Mpc)
	8.87Mpc	Tully Fisher relation (2002)

四、以不同距離和M/L算出RC

Case.1.

距離 $d = 6.4 \text{ Mpc}$, $g_0 = 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$, $(M/L)_{\text{disk}} = \mathbf{1.9}$

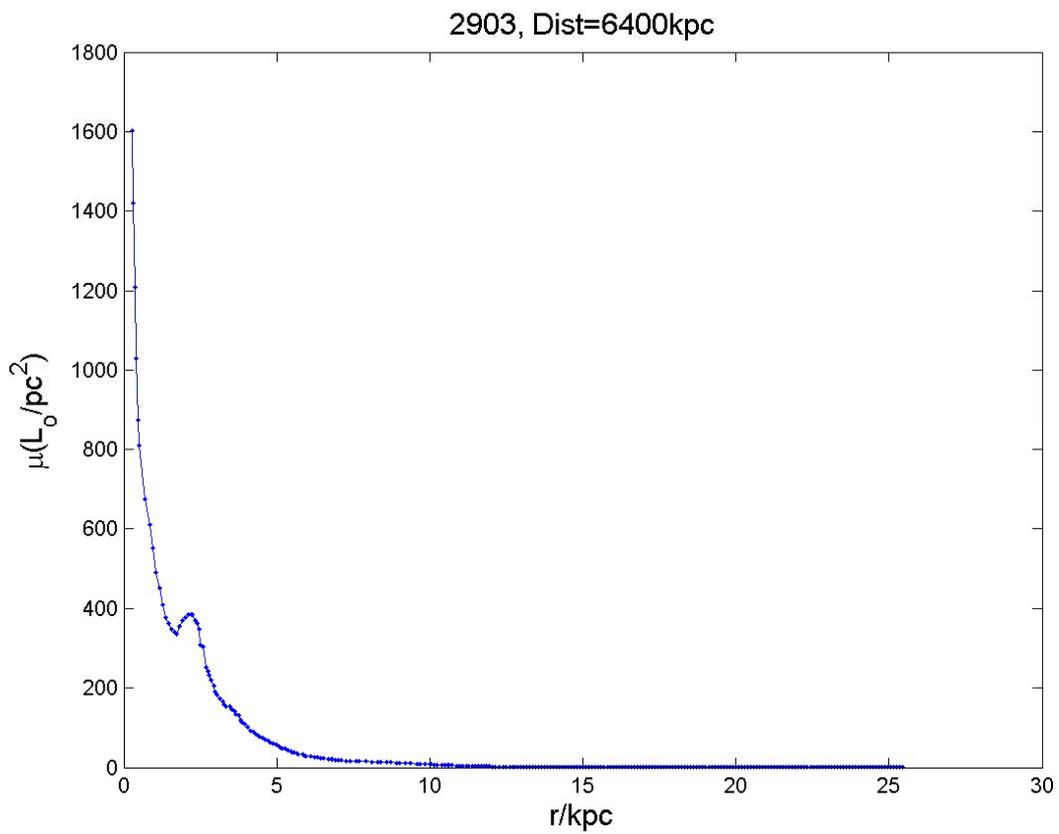


fig4-8. NGC 2903 單位面積所發出光的總能量分布，即 L_0 / pc^2 與 r 的關係

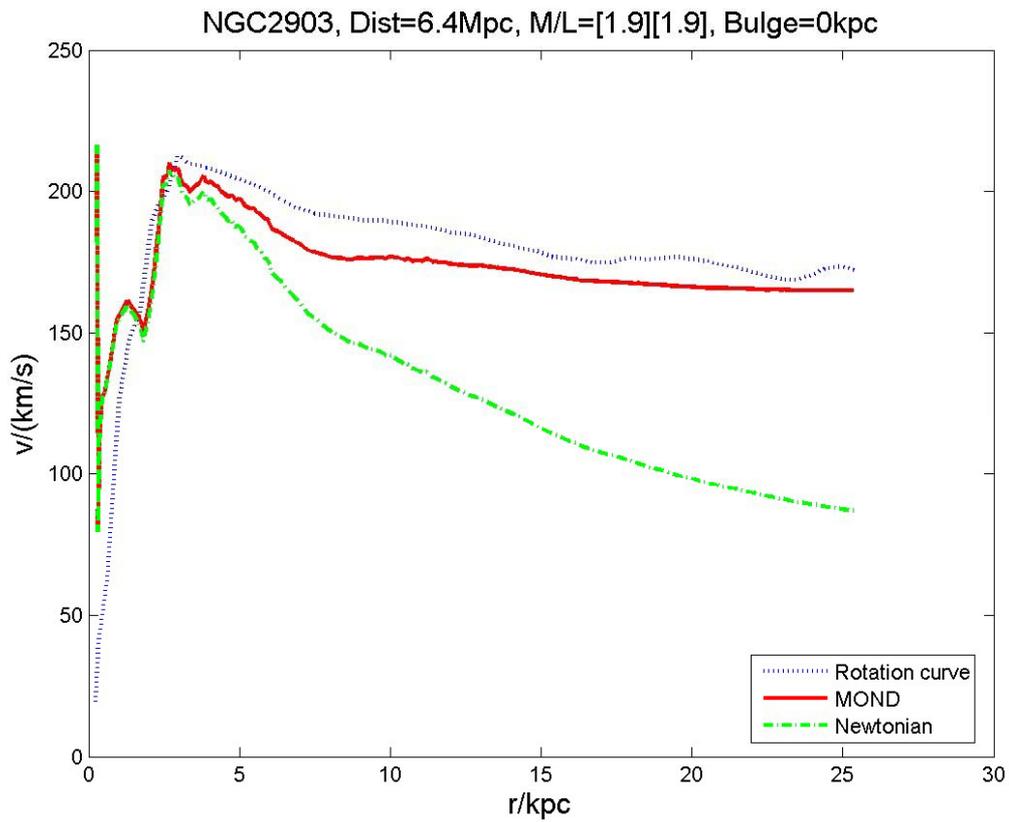


fig4-9. NGC 29038 自轉速度的分布

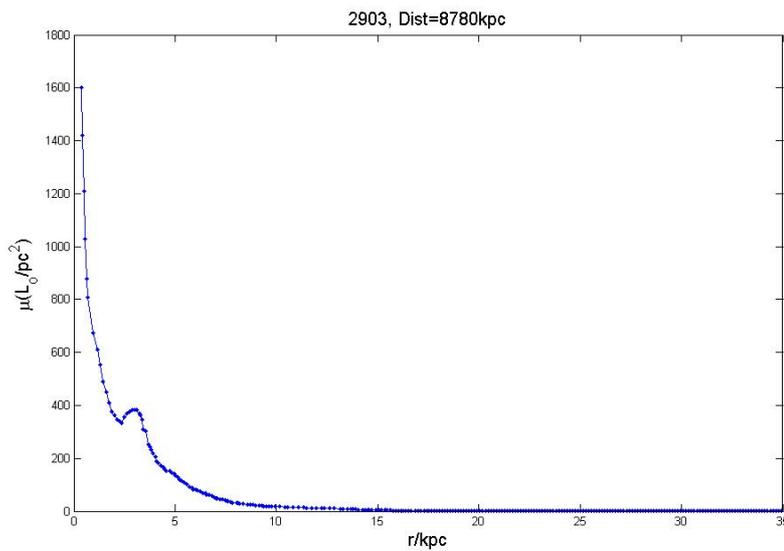


fig4-10.

NGC 2903 單位面積所發出光的總能量分布，即 L_{\square} / pc^2 與 r 的關係

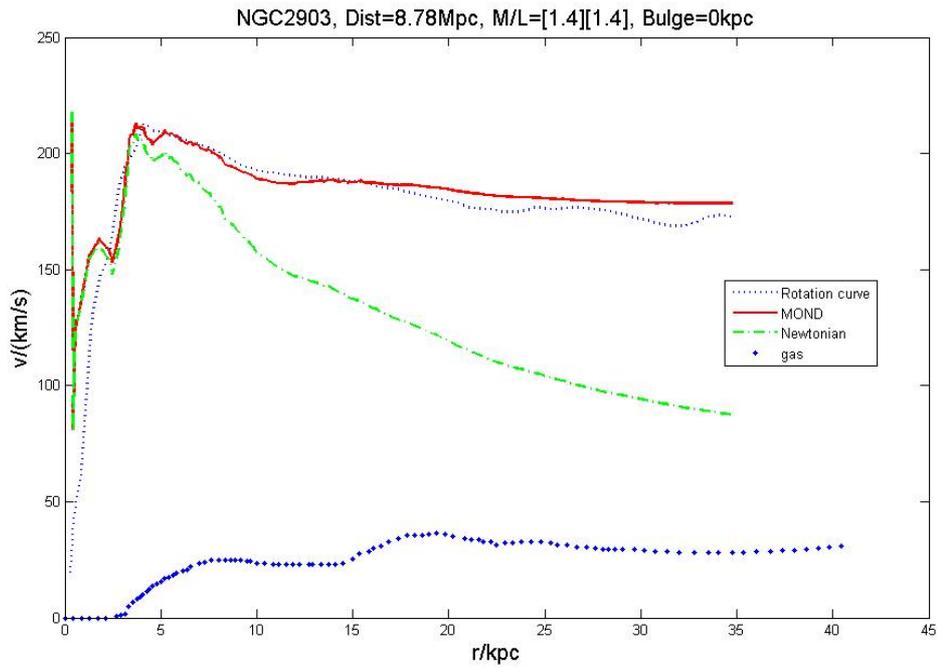
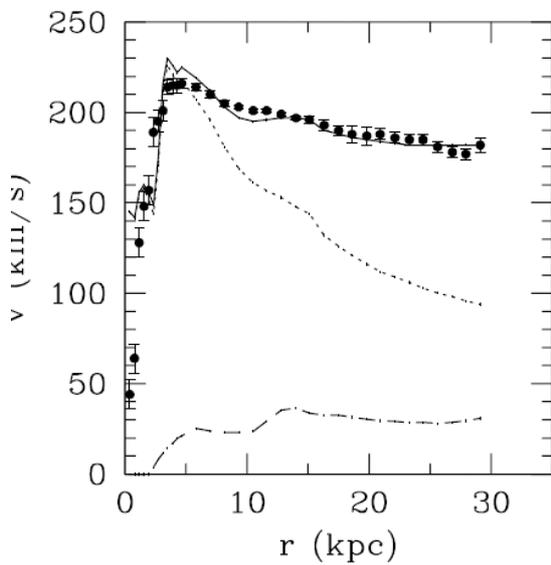


fig4-11. NGC 2903自轉速度的分布



NGC 2903

$$\langle \mu_B \rangle = 20.5 \text{ mag/arcsec}^2$$

$$(M/L_B)_{\text{disk}} = 1.9$$

fig4-12. 比較Sanders 2001，對NGC 2903的RC所做的fitting，solid line是Sanders以MOND方式所得。

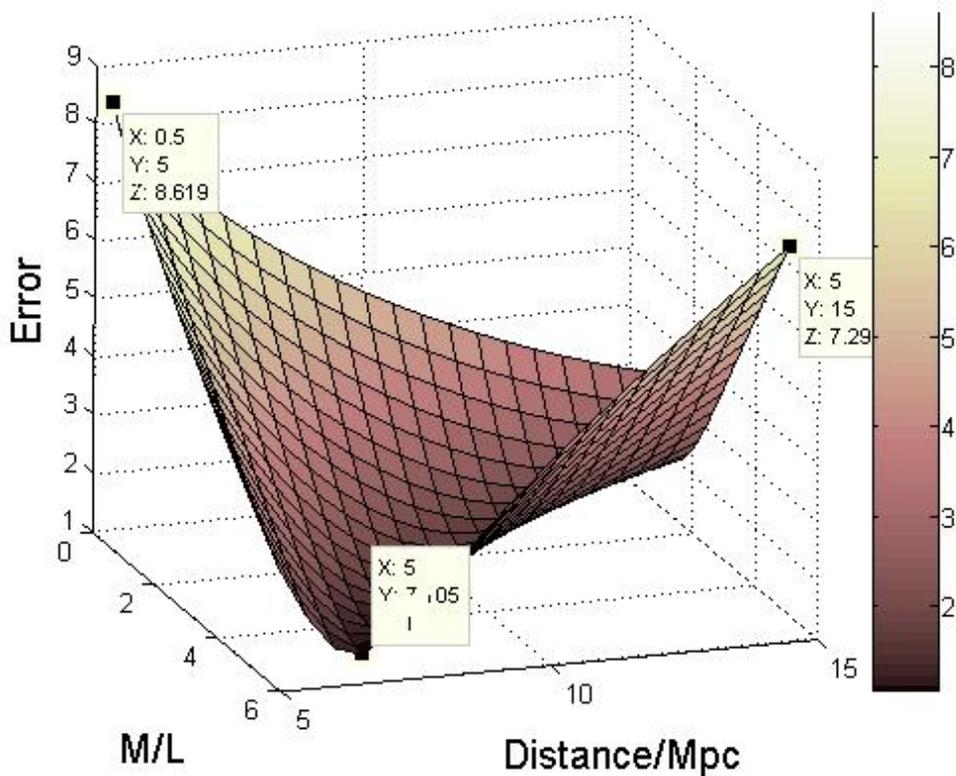
五、以 MOND 來探究星系距離的方法

我們想以現有的 rotation curve，依各個星系特有的速度分布曲線 RC，和大量的星系亮度分布曲線，經由計算找出適當的星系距離。所以我們帶入大量距離參數，配合適當 M/L 算出 RC，以找出誤差最小，亦即最接近測量 RC 的兩個重要參數：距離(Mpc)、M/L。

以下是座標分別為 M/L、Distance 和 Error 的 3-D 圖。

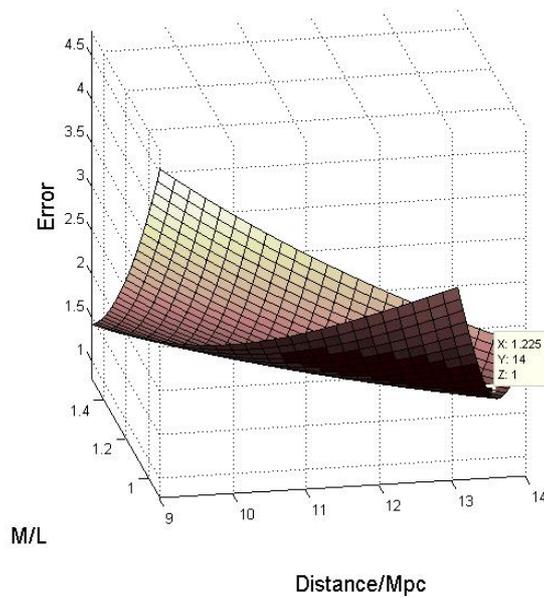
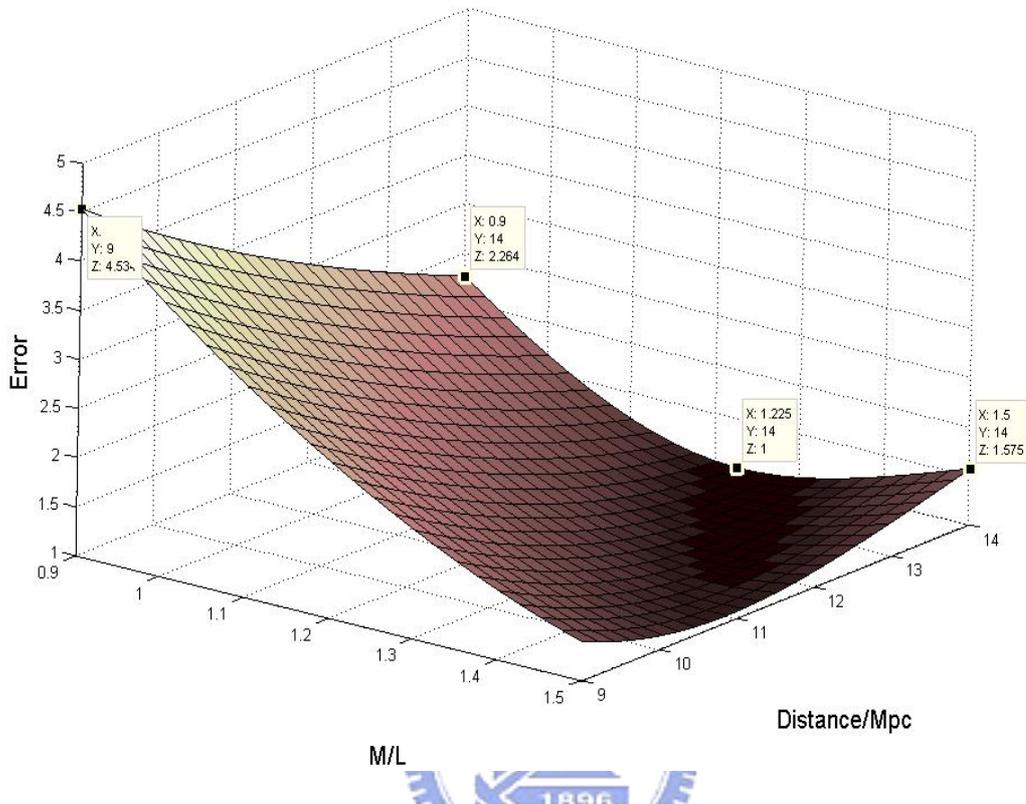
星系 NGC 3198：變數為距離(Mpc)、M/L，共四百個點去計算誤差。

- (1) M/L = 0.5 至 5；依間隔取 20 等分；
距離 = 5 至 15；依間隔取 20 等分；



(2) $M/L = 0.9$ 至 1.5 ; 依間隔取 20 等分 ;

距離 = 9 至 14 ; 依間隔取 20 等分 ;



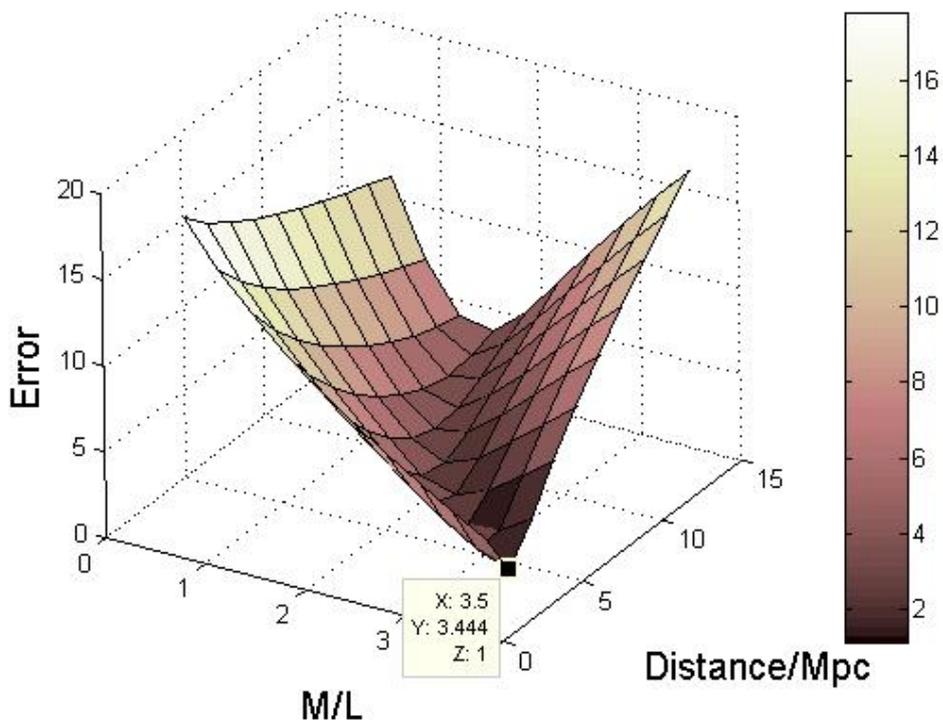
誤差最小的座標為 : $Error=1, M/L=1.225, Distance=14$ 。

以下另一星系M/L、Distance和 Error 的3-D圖

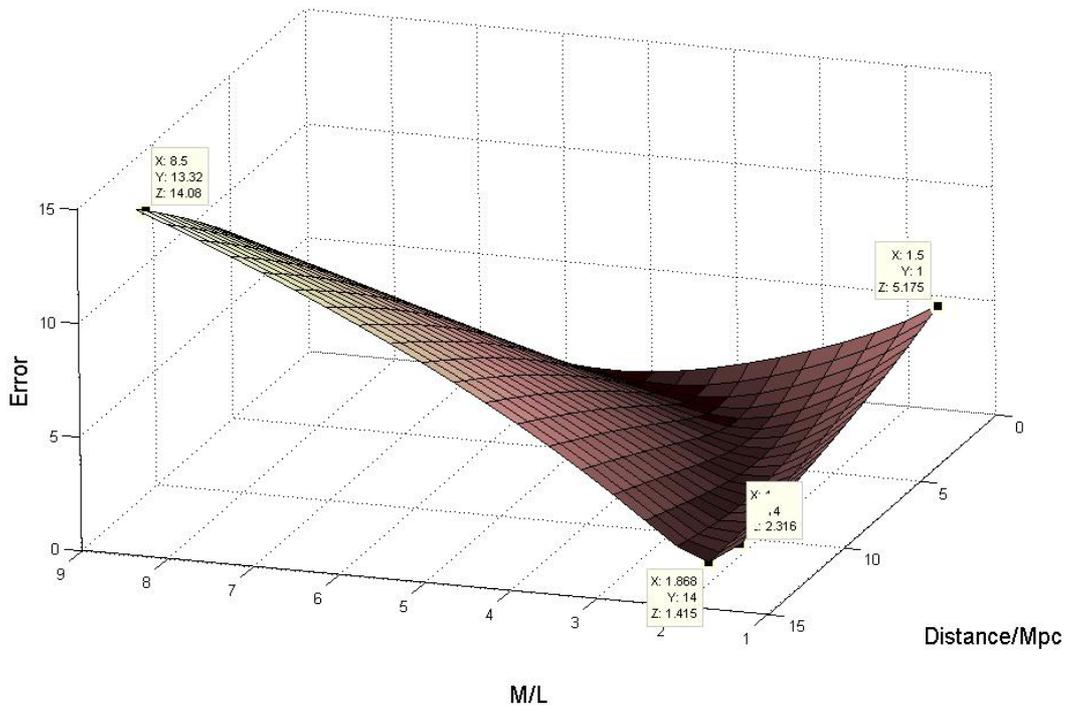
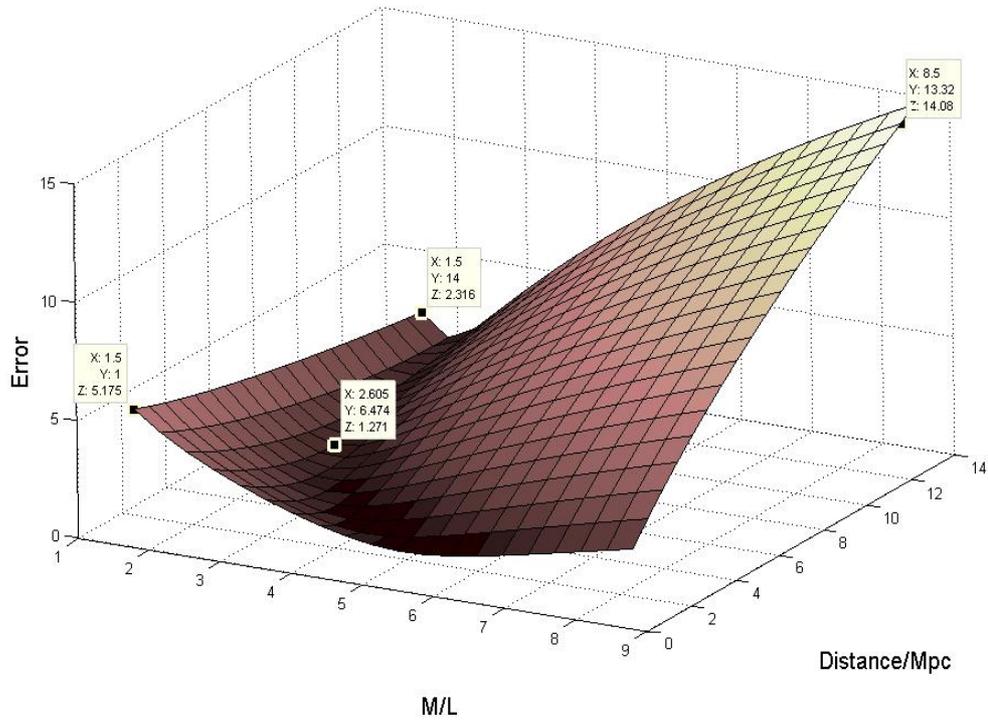
星系 NGC 2903：變數為距離(Mpc)、M/L。

(1) M/L =0.5 至 3.5；依間隔取10等分；

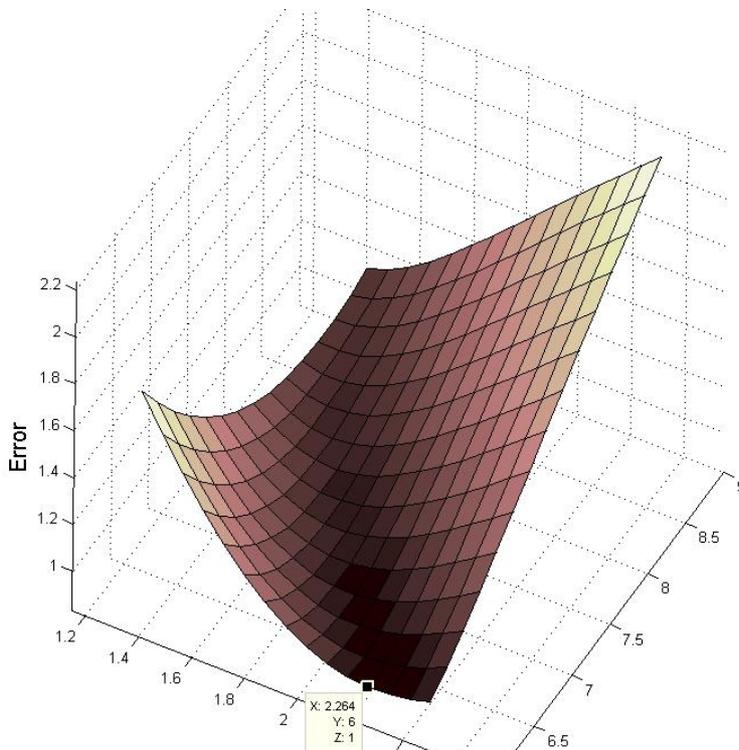
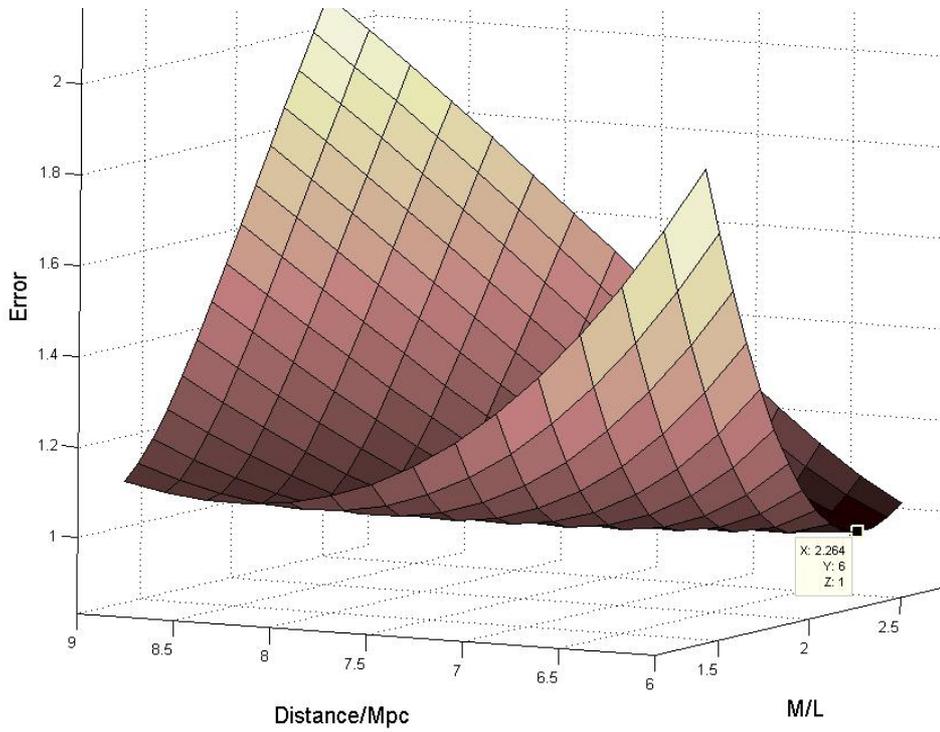
距離= 2 Mpc 至 15Mpc；依間隔取10等分；



- (2) $M/L = 1.5$ 至 8.5 ; 依間隔取20等分;
 距離 = 1Mpc 至 14pc ; 依間隔取20等分;



- (3) M/L =1.4 至 2.5 ； 依間隔取15等分；
 距離= 6Mpc 至 9Mpc ； 依間隔取15等分；



Error是以MOND計算所得之速度與測量之速度差值之平方後開根號的值。Error= $\Sigma (V_{MONDi}-V_i)^{1/2}$

五、討論

計算亮度時，將此式 $M_v = m_v - 5 \log d + 5$

代入
$$10^{\frac{2}{5}(M_{sun} - M_v)} = \left(\frac{L_{galaxy}}{L_{sun}} \right)$$

可以得到 Luminosity 與距離的關係為
$$\frac{L_{galaxy}}{L_{sun}} \propto d^2$$

也就是當我們預設星系的距離越遙遠時，其光的總能量會隨距離平方的倍數增加，不過計算所得的單位面積所受光的總能量（單位為 L_{sun} / pc^2 ）卻是不變。因為我們觀測亮度所得的數據是單位 $arcsec^2$ 的面積所接受亮度的大小 magnitude，而星系亮度的大小 magnitude 換算為多少個太陽的能量大小 L_{sun} 時，光的總能量 luminosity 會隨距離平方增加，但單位面積 $arcsec^2$ 換算為實際星系表面面積 pc^2 時（因為 $r = d\theta$ ），也會隨距離平方增加，所以兩個隨距離平方增加的效應便相消了

再來看自轉速度的分布 rotation curve 隨距離參數的變化。由上一段推論出光的總能量 luminosity 會隨距離的平方增加，而且所代入的質光比固定（在常用的範圍內 $M/L = 1 \sim 10$ ），那麼換算所得的 M_{inner} (inner mass) 也會與距離平方成正比，則

$$g_N = \frac{GM_{inner}}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

當給予不同的參數 d 時，因 $r = d\theta$ ，所以 M_{inner} (inner mass) 和 r^2 都會與 d^2 成正比，則星系自轉的速度 v 便與 \sqrt{r} 成正比，也就是當參數 d

改成為 2 倍時，速度會增為 $\sqrt{2}$ 倍。

根據以上推論，我們可以從某星系的觀測亮度，和該星系的自轉速度分布，利用 MOND 理論推測出該星系之距離。

六、結論

物理學的基本規律的確立，經常是由現象而本質，有經驗後再由實體論歸納為理論的。實體往往隱藏在現象之中，需要特別加以注意，才能發掘出運動中的物質，或運動的載體是什麼。物理學常是在理論與實驗的交錯中發展出的。所以，當人們在用實驗或觀測研究宇宙時，還要不斷完善的更新理論定律。



七、References

- [1] Milgrom, M. 1983a, ApJ, 270, 365
- [2] Milgrom, M. 1983b, ApJ, 270, 371
- [3] Milgrom, M. 1983c, ApJ, 270, 384
- [4] Milgrom, M. 1984 ApJ, 287, 571
- [5] Begeman K.G., Broeils A.H. and Sanders R.H., 1991, Royal Astronomical Society, Monthly Notices, vol. 249, p. 523-537.
- [6] Sanders R.H., 1996, A J, v.473, p.117
- [7] Roelof Bottema, Jose L. G. Pestana, Barry Rothberg, and Robert H. Sanders, 2002, A&A, astro-ph/0207469 v1 22
- [8] Sanders, R.H. 1998, MNRAS, 296, 1009
- [9] Sanders, R.H., Verheijen M.A.W. 1998 ApJ, 503, 97 (astro-ph/9802240)
- [10] Sanders, R.H., 2001, astro-ph/0106558 v1 29 Jun

- [11] Begeman, K.G. 1987, PhD Dissertation, Univ. of Groningen
- [12] Freedman, W.L., Madore, B.F., Gibson, B.K., et al. 2001, ApJ, 553, 47
- [13] Kent, S.M. 1987, AJ, 93, 106
- [14] W. F. Kao, 2005, astro-ph/0504009 v1.1.
- [15] W. F. Kao and R.-T. Yu, 2000, astro-ph/0008268 v1 17
- [16] Y. Sofue, Y. Tutui, M. Honma, A. Tomita, T. Takamiya, J. Koda and Y. Takeda, 1999, Astrophysical Journal, Vol. 523, pp136-146,
- [17] <http://astro.ph.unimelb.edu.au/~ctrott/thesis/node24.html>
- [18] 2-Micron All-Sky Survey (簡稱 2MASS)
<http://www.ipac.caltech.edu/2mass/gallery/largegal/atlas.html>
- [19] M. A. Hughes, 2005, astro-ph/0503693 v1 31
- [20] 成功大學物理系天文實驗室 <http://www.phys.ncku.edu.tw/~astrolab/>
- [21] <http://www.nro.nao.ac.jp/~sofue/>, Yoshiaki SOFUE
- [22] Pickles A.J., 1998, PASP, 110, 863 (about color index)
- [23] <http://www.journals.uchicago.edu/ApJ/journal/issues/ApJS/v116n1/35636/figs.html>