

國立交通大學
工業工程與管理學系

碩士論文

兩個多品質特性製程能力
指標 C_{pm} 差異的複式信賴區間之構建

Constructing Bootstrap Confidence Interval for the
Difference between Two

Multivariate Process Capability Indices C_{pm}

研 究 生：湯盛全

指 導 老 師：唐麗英 教授

中華民國九十三年六月

第一章 緒論

1.1 研究動機

在傳統個人自掃門前雪的時代，每一個公司都要採用自己的資源與方法，來認可某些合格供應商。這對買賣雙方而言，都是勞民傷財且浪廢資源的事。為了提昇評估供應商的效率，「品質公共認證」的制度與機構就從 1980 年代逐漸興起，其中已蔚為風尚的代表者首推「ISO-9000」。這種公共認證制度之所以能奠定其權威地位是因為他們非常重視產品生產的「過程」與「系統」。因為只有穩定而一貫（consistent）的「過程」與「系統」，才能保證供應商能長期做出合格的產品。然而，要檢核此一貫「過程」與「系統」是否能維持，就必須仰賴統計製程管制（Statistical Process Control, SPC）來發揮功能。基於上述主客觀的因素，SPC 已成為影響企業生存的關鍵制度；然而衡量 SPC 表現的最好方法之一，就是製程能力指標（Process Capability Indices, PCI）。



製程能力分析的目的是排除所有造成製程不穩定的非機遇性因素後將製程的平均、變異以及規格間的關係，量化成指標，然後利用這些指標來評估製程實際的績效與改善方向。因此，製程能力指標值即是包含了製程平均數、製程變異數、製程規格、以及製程目標值的函數，由於製程能力指標可以表現製程的優劣，因此常被業界用來當作與供應商或是與顧客間互訂契約的依據。

以往的製程能力指標都只針對產品的單一品質特性做研究分析，但以消費者的角度而言，有關品質的印象並非恆久不變的，且品質的優劣也往往不是由單一的品質特性所左右 Bothe et al. [5]，要創造產品的魅力(attractive)品質，就應由消費者的角度來思考，重視產品的多項品質特性，因此製造工業對於產品的多品質特性製程能力評估的問題就日漸重要。

近年來有許多國內外的學者陸續提出了一些多品質特性的製程能力指標如：
Chan et al.[6] C_{pm} ，*Taam et al.*[21] MC_{pm} ，*Chen.*[9] MC_p ，*Shahriari et al.*[20]
[C_{pM} , PV , LI]，*Wang and Chen*[15] MC_p ， MC_{pc} ，*Bothe et al.*[5] MC_{pk} 等指標，
他們以產品的單一品質特性指標為基礎，將之推廣至多品質特性，這些多品質
特性製程能力指標可以做為多品質特性製程改善的方向以及衡量製程能力表現
的標準。由於在實務上建構製程能力指標時，基於時間及成本的考量，根本無
法以全檢的方式收集產品之資料來估計製程母體中的未知參數，故常用抽樣
的方式由樣本資料來估計製程參數，以求得製程能力指標中參數之估計值，然
而，有抽樣就會產生誤差，製程能力指標之點估計值並無法提供真實之製程能
力，因此，必須以信賴區間來估計真實之製程能力指標值，才能反應出抽樣時
所產生的誤差大小。當製程能力指標之機率分配太複雜時，欲建立這些真實指
標值的信賴區間就非常困難，單一品質特性製程能力指標如此，構建多品質特
性製程能力指標信賴區間之難度就更高。



Franklin et al.[16] 使用複式模擬法 (Bootstrap simulation) 中的標準複式區間
(Standard Bootstrap Method, SB)、百分位數複式區間 (Percentile Bootstrap
Method, PB) 及修正偏度百分位數複式區間 (Biased-Corrected Percentile
Bootstrap Method, BCPB) 信賴區間估計法來估計製程能力指標 C_p 、 C_{pk} 及 C_{pm}
的 95% 信賴下限及 90% 信賴區間。許慧先[4]、戴裕芳[2]、周聖慧[1] 分別以複
式模擬法中的 BCPB 複式信賴區間估計法及加速修正偏誤法 (Bias-Correct and
Accelerated Method, BCa) 複式信賴區間估計法構建數個不同單一品質特性製程
能力指標之信賴下限或兩個製程能力指標差異的信賴區間；朱哲成[3]。以複式
模擬法中的 BCPB 信賴區間估計法來建構五位學者所提出的五個多品質特性製
程能力指標 (C_{pm} , MC_{pm} , MC_p , [C_{pM} , PV , LI], MC_{pk}) 之信賴區間，並指出多品質
特性製程能力指標 C_{pm} 的估計式是五個指標中準確性最高的指標估計式。以上

這些研究結果顯示，複式模擬法及複式信賴區間估計法能夠有效地評估真實之製程指標值。

Efron (1987)指出 SB、PB、BCPB 信賴區間估計法的估計誤差皆為 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ，而 BCa 信賴區間估計法估計誤差為 $\frac{1}{n}$ ，所以當樣本數增加時，BCa 信賴區間估計法誤差以較大的速率趨近於零，因此 BCa 信賴區間估計法為一種較佳的估計法。

因此，本研究利用複式模擬法中的 BCa 信賴區間估計法來建構兩個多品質特性製程能力指標 C_{pm} 差異值之複式信賴區間，在利用製程能力指標 C_{pm} 來評選兩個製程（或供應商）的製程能力時，由於指標之機率分配過於複雜。因此，本研究依據多變量製程能力指標 C_{pm} ，以複式模擬法來建構兩個製程能力指標 C_{pm} 差異值（ $C_{pm1} - C_{pm2}$ ）之複式信賴區間，並利用此信賴區間來取代假說檢定以評估兩個製程（或供應商）製程能力之優劣，其判定原則如下：

1. 當信賴區間屬於正向區間時，顯示製程 1（或供應商 1）優於製程 2（或供應商 2）。
2. 當信賴區間屬於負向區間時，顯示製程 2（或供應商 2）優於製程 1（或供應商 1）。
3. 當信賴區間包含 0 時，顯示兩個製程（或供應商）之製程能力無顯著差異。

1.2 研究目的

本研究的主要目的有以下兩項：

1. 以複式模擬法來建構兩個多品質特性製程能力指標 C_{pm} 差異值之信賴區間；利用此信賴區間來取代傳統之假說檢定，以作為廠商在評選兩個製程

(或供應商)時之參考依據。

2. 將本研究所提出的流程，彙整成工程師可輕易使用的標準作業程序，使得沒有太多統計背景的工程人員在評選多品質特性製程（或供應商）時，能夠快速地作出正確的判斷。

1.3 研究範圍

本研究所探討的範圍是根據以下的限制來進行分析：

1. 本研究範圍限定為雙邊格規格、規格為對稱的製程容差範圍，本研究不包含單邊規格特性的製程。
2. 假設所有產品之多個品質特性值皆呈多元常態分配，且其目標值即為規格中心值。



1.4 研究架構

本研究共分為四章，第一章為緒論，說明本研究之動機、目的、範圍與架構；第二章為文獻探討，主要是介紹單一品質特性的製程能力指標、多品質特性的製程能力指標、複式模擬抽樣法以及其他相關文獻。第三章說明將如何以複式模擬法建構兩個製程能力 C_{pm} 指標差值之 95% 信賴區間，並以蒙地卡羅模擬法進行有效性及敏感性分析。第四章為實例說明，以業界之實際案例來驗證本研究方法之可行性；第五章為本研究之結論。

第二章 文獻探討

本章介紹中外文獻中的各種製程能力指標，包括單一及多品質特性之製程能力指標、複式模擬法及其它以複式模擬法建構指標信賴區間或差異值的相關文獻。

2.1 單一品質特性製程能力指標

2.1.1 常態製程能力指標

現今常見的製程能力指標依序為 C_p 、 C_{pk} 、 C_{pm} 及 C_{pmk} 四個製程能力指標，此四個指標分別是由最早的 Juran [17] 所提出的製程能力指標 C_p ，接著 Kane [18] 提出了製程能力指標 C_{pk} ， C_{pk} 比製程能力指標 C_p 多考慮了製程平均值偏移的程度，他在同年亦提出了當目標值不等於規格中心時， C_p 及 C_{pk} 指標的修正公式。Chan et al. [7] 提出 C_{pm} 製程能力指標，他在分母加入了田口損失函數的觀念，考慮到目標值對於製程能力的影響。接著 Pearn et al. [19] 結合了製程能力指標 C_{pk} 及 C_{pm} 的優點，定義出一個製程能力指標 C_{pmk} ，可同時將製程平均值偏離規格中心及製程平均值偏離目標值的影響考慮到製程能力指標中。此四個製程能力指標之計算公式分別如表 2-1 所示。

表 2-1 基本製程能力指標 C_p 、 C_{pk} 、 C_{pm} 、 C_{pmk} 計算公式

	對稱規格 (T=M)	非對稱規格 (T≠M)
C_p	$\frac{USL - LSL}{6\sigma}$	$\min\left\{\frac{USL - T}{3\sigma}, \frac{T - LSL}{3\sigma}\right\}$
C_{pk}	$\min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\}$	$\min\left\{\frac{USL - T - T - M }{3\sigma}, \frac{T - LSL - T - M }{3\sigma}\right\}$
C_{pm}	$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$	$\min\left\{\frac{USL - T}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{T - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}\right\}$
C_{pmk}	$\frac{\min\{USL - \mu, \mu - LSL\}}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$	$\frac{\min\{USL - \mu, \mu - LSL\} - \mu - T }{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$

在表 2-1 中 USL 表規格上限，LSL 表規格下限，T 表製程的目標值，M 表規格中心值， μ 表製程平均數， σ 表製程標準差。

2.1.2 非常態製程能力指標

Clement [8]發展出非常態製程能力指標 C_{Np} 及 C_{Npk} ，他提出當製程母體為非常態分配時計算製程能力的方法，就是以品質特性分配中的第 99.865 百分位數與第 0.135 百分位數之間的距離來取代 6σ ，且以中位數(Me)取代製程平均數(μ)，將這些百分位數應用在製程能力指標 C_p 及 C_{pk} 上即得 C_{Np} 及 C_{Npk} 。Pearn et al.[19] 則把 Clement 的方法應用在 C_{pm} 與 C_{pmk} 上，發展出非常態製程能力指標 C_{Npm} 及 C_{Npmk} ，上述非常態製程能力指標之計算公式如表 2.2 所示，其中 USL 為產品製程規格上限，LSL 為產品製程規格下限， Me 為中位數， T 為製程的目標值。

表 2.2、非常態製程能力指標之計算公式

	計算公式
C_{Np}	$\frac{USL - LSL}{F_{99.865} - F_{0.135}}$
C_{Npk}	$\frac{\text{Min}\{USL - Me, Me - LSL\}}{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{2}\right]}$
C_{Npm}	$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right]^2 + (Me - T)^2}}$
C_{Npmk}	$\frac{\text{Min}\{USL - Me, Me - LSL\}}{3\sqrt{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right]^2 + (Me - T)^2}}$

在表2.2中 $F_{99.865}$ 為品質特性中第99.865百分位數， $F_{0.135}$ 為品質特性的第0.135百分位數，以 $F_{99.865}-F_{0.135}$ 來取代 6σ ，且以品質特性的中位數 Me 取代 μ 。

製程能力指標中的製程平均值與製程標準差均為實際製程母體中的未知參數，在實務應用上，基於時間及成本的考量，無法以全檢的方式來獲得母體參數值，只能對產品進行抽樣，由樣本資料估計這些製程參數，以求得製程能力指標之估計值。

表 2-3 製程能力指標估計式

	常態分配	非常態分配
\hat{C}_p	$\frac{USL - LSL}{6S}$	$\frac{USL - LSL}{\hat{F}_{99.865} - \hat{F}_{0.135}}$
\hat{C}_{pk}	$\min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3S}, \frac{\bar{x} - LSL}{3S} \right\}$	$\min \left\{ \frac{USL - \hat{M}e}{\hat{F}_{99.865} - \hat{M}e}, \frac{\hat{M}e - LSL}{\hat{M}e - \hat{F}_{0.135}} \right\}$
\hat{C}_{pm}	$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{S^2 + (\bar{x} - T)^2}}$	$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{((\hat{F}_{99.865} - \hat{F}_{0.135})/6)^2 + (\hat{M}e - T)^2}}$
\hat{C}_{pmk}	$\min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3\sqrt{S^2 + (\bar{x} - T)^2}}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\sqrt{S^2 + (\bar{x} - T)^2}} \right\}$	$\frac{\min(USL - \hat{M}e, \hat{M}e - LSL)}{3\sqrt{((\hat{F}_{99.865} - \hat{F}_{0.135})/6)^2 + (\hat{M}e - T)^2}}$

譬如以樣本平均值 \bar{X} 與樣本標準差 S 當作母體參數 μ 及 σ 的估計值，代入各製程能力指標公式中求得 C_p 、 C_{pk} 、 C_{pm} 、 C_{pmk} 的估計值 \hat{C}_p 、 \hat{C}_{pk} 、 \hat{C}_{pm} 、 \hat{C}_{pmk} 。

2.2 多品質特性製程能力指標

Wang et al. [22]指出一般學者在建構多品質特性製程能力指標時主要根據

以下三個概念：

- (a) 製程容差區域與製程變異大小的比率；
- (b) 產品的不合格率；

(c) 田口的二次損失函數期望值的概念。

在實務上產品通常具有多項品質特性，而傳統的製程能力指標都只能針對產品的單一品質特性進行分析，忽略了產品的其它品質特性及其間的相關性，使得製程能力指標值失真，甚至使決策者做出錯誤決定；多品質特性製程能力指標則考慮到產品多品質特性間的相關性。再者，產品品質的優劣也往往受到多項品質特性的影響，當產品中某一項品質的特性超出製程容差區域外時，這個產品就無法被消費者所接受。因此，在衡量整個製程能力的量化指標時，必須同時考慮產品製程的多項品質特性。

Chan et al. [6] 根據損失函數期望值的概念，根據單一品質特性的 C_{pm} 提出了多品質特性的製程能力指標 C_{pm}^* 及其估計式 \hat{C}_{pm}^* 如下：

$$C_{pm}^* = \left[\frac{v}{E[(X-T)'V_0^{-1}(X-T)]} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{1 + v^{-1}(\mu-T)'V_0^{-1}(\mu-T)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{C}_{pm}^* = \sqrt{\frac{nv}{\sum_{i=1}^n (X_i - T)' \hat{V}_0^{-1} (X_i - T)}}$$

其中， v 代表 v 項品質特性、 V_0^{-1} 是多變量（即 v 項品質特性）常態母體的共變異數矩陣的反矩陣、 μ 是多變量常態母體的平均數向量、 T 是目標值向量。在製程為二元常態分配的假設下，即 $X \sim N_v(\mu, V_0)$ ， \hat{C}_{pm}^* 是 C_{pm}^* 的估計式，其中 $\hat{V}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$ 是 V_0 的不偏估計式。

Taam et al.[21]延續 C_{pm}^* 的概念，假設品質特性為常態分配下，同時考慮了製程變異偏離目標值的程度，建立了一個多品質特性製程能力指標 MC_{pm}

$$MC_{pm} = \frac{vol.(R_1)}{vol.(R_2)}$$

其中 R_1 為修正規格範圍 (Modified tolerance region)。 R_2 為 99.73% 的製程範圍。假若製程服從多變量常態分配時， R_2 的橢圓形範圍為： $(X - \mu)' \Sigma_T^{-1} (X - \mu) \leq K(v)$ 其中 $\Sigma_T = E[(X - T)(X - T)']$ ， $K(v)$ 為 99.73 百分位數的卡方分配值， v 為品質特性的個數。由圖 2.1 可知，修正規格範圍是工程規格範圍內最大的橢圓形面積，而修正規格範圍的形狀及大小則是由工程規格決定。因此 R_2 的體積可改寫為：

$$vol.(R_2) = vol. \left[(X - \mu)' \Sigma_T^{-1} (X - \mu) \leq \chi_{v,0.9973}^2 \right] = vol.(R_3) \times \left[1 + (\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T) \right]^{1/2}$$

其中 R_3 為包含 99.73% 量測值的範圍，則 MC_{pm} 公式可改寫為：

$$MC_{pm} = \frac{vol.(R_1)}{vol.(R_2)} = \frac{vol.(R_1)}{vol.(R_3)} \times \frac{1}{\left[1 + \frac{n}{n-1} (\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T) \right]^{1/2}} = C_p \times D^{-1}$$

而 MC_{pm} 指標的估計式為：

$$\hat{MC}_{pm} = \frac{vol.(R_1)}{vol.(R_3)} \times \frac{1}{\left[1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - T)' \hat{\Sigma}^{-1} (\bar{X} - T) \right]^{1/2}} = \hat{C}_p \times \hat{D}^{-1}$$

\hat{MC}_{pm} 指標的優點是可由 \hat{C}_p 及 \hat{D}^{-1} 來判定異常的來源是來自製程的變異過大還是製程已偏離目標值太遠；但 \hat{MC}_{pm} 之缺點則是因為要計算橢圓的體積，須靠積分而得，故計算相當複雜。

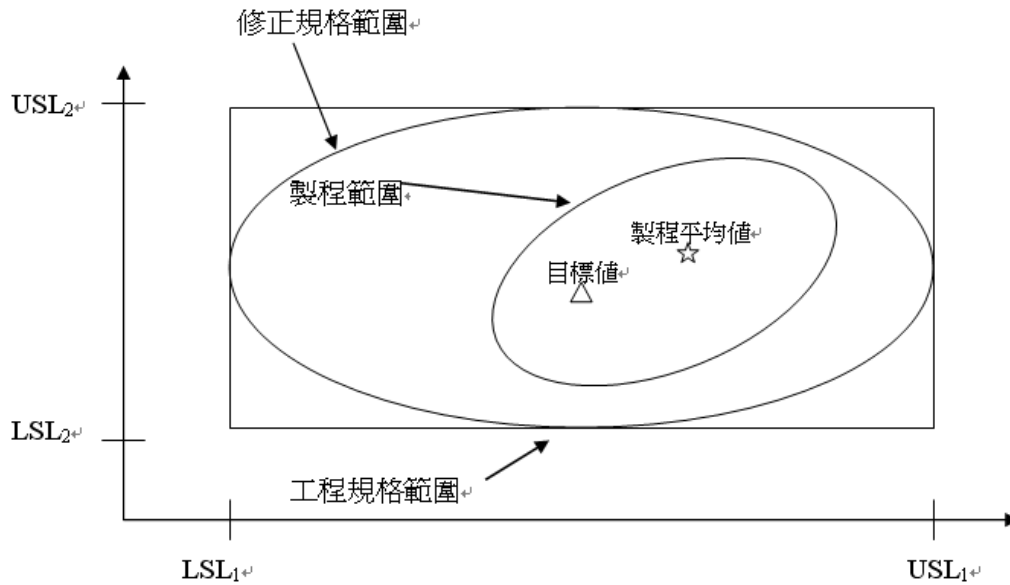


圖 2.1 製程修正規格範圍與工程規格範圍

Shahriari et al. [20]提出多變量能力向量，此向量包含三個部份： C_{pM} ，PV，LI。第一及第二部份假設資料是來自多變量常態分配，第三部份則是以幾何的觀點來瞭解製程範圍（process region）和工程規格範圍（engineering tolerance region，即 USL-LSL）間的相對關係。

就幾何的觀點而言，單變量製程能力指標 C_p 為製程的六倍標準差（ 6σ ）範圍和工程規格範圍的比值。應用在多變量製程能力指標時，可將 C_{pM} 視為面積（兩個品質特性）或體積（三個或多個品質特性）的比值。因此，向量的第一部份 C_{pM} 可定義為：

$$C_{pM} = \left[\frac{\text{工程規格範圍的體積}}{\text{修正製程範圍的體積}} \right]^{\frac{1}{v}}$$

其中 v 表示品質特性的數量；工程規格範圍的體積（volume of engineering tolerance region）為產品規格所建構的面積或體積；修正製程範圍的體積（volume

of modified process design) 為根據製程範圍所建構出類似於工程規格範圍的最

小面積或是體積。現以兩個品質特性所建構的製程範圍來說明 C_{pM} ，如圖 2.2

所示。圖中的橢圓形為兩個品質特性所建構的製程範圍，其製程範圍的方程式

為： $(X-T)' \sum (X-T) = \chi^2_{(v,\alpha)}$ ，其中 X 為 $v \times 1$ 的樣本各品質特性矩陣： $X = [X_1$

$X_2 \cdots X_v]$ ； T 為各品質特性 $v \times 1$ 的目標值矩陣： $T = [T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_v]$ ； \sum

為各品質特性的共變異數矩陣： $\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1v} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{v1} & \cdots & \cdots & \sigma_{vv}^2 \end{bmatrix}$ ， σ_i^2 為第 i 個品質特性的

變異數， σ_{ij} 為第 i 個品質特性和第 j 個品質特性的共變異數； $\chi^2_{(v,\alpha)}$ 表自由度為

v ，型 I 誤差為 α 的卡方分配值。

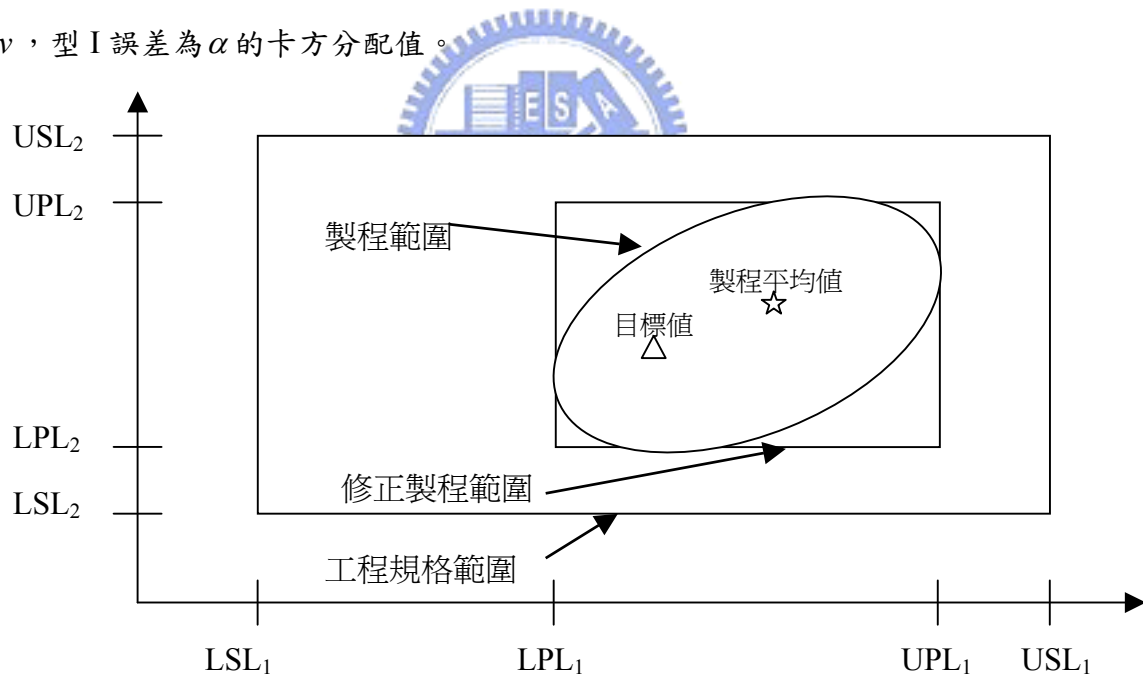


圖 2.2 修正製程範圍圖

由圖 2.2 可知，其製程範圍的大小和相關位置，是由製程範圍所可包含產

品之品質特性值的百分比所決定，因此修定製程範圍在工程規格範圍內並非呈

比例的改變，須將 C_{pM} 修改為：

$$C_{pM} = \left[\frac{\prod_{i=1}^v (USL_i - LSL_i)}{\prod_{i=1}^v (UPL_i - LPL_i)} \right]^{\frac{1}{v}}$$

當 C_{pM} 的值大於 1 時，表示所建構的修正製程範圍小於工程規格範圍，而修正製程範圍必然受到橢圓的形狀和橢圓的大小影響。實際上，UPL 和 LPL 為橢圓外形投影在個別品質特性座標上的界限。

向量的第二部分的假設為真實的製程平均將會在工程規格範圍的中間點上，可分為兩個部分計算：(i) 計算 Hotelling T^2 統計量；(ii) 計算 PV 值。其公式分別如下所示：

$$T^2 = n(\bar{X} - T)' S^{-1} (\bar{X} - T)$$

$$PV = P\left(T^2 > \frac{v(n-1)}{n-v} F_{(v, n-v)}\right)$$

其中 $F_{(v, n-v)}$ 為自由度 v 和 $(n-v)$ 的 F 分配值。PV 可視為觀測值偏離目標值的顯著程度，因 PV 為機率值，故 $0 \leq PV \leq 1$ ，當 PV 值愈接近 0 時，表示樣本均值愈偏離目標值。

第三部分 LI 表示修正製程範圍的位置和工程規格範圍的位置的比較。當修正製程範圍完全包含於工程規格範圍內時， $LI=1$ ，其餘則設為 0。

$$LI = \begin{cases} 1, & \text{修正製程範圍完全包含於工程規格範圍內時} \\ 0, & \text{其他狀況} \end{cases}$$

Shahriari et al. [20] 提出的多變量能力向量是以幾何的觀點來衡量多品質特
 的製程能力，除易於瞭解其概念也便於計算，但向量的第一部份僅衡量製程變
 異的程度，並未將偏離目標值的影響納入計算，故必須由向量的第二部分單獨
 衡量製程偏離目標值的程度。

Bothe [5] 認為對產品購買者而言，產品中有許多品質特性都是購買者所重視
 的，換言之，消費者所在乎的並非只有產品的單一品質特性，但傳統的製程能
 力分析都針對製程的單一品質特性進行製程能力分析。為了改善這樣的情況，
 Bothe 提出一個多品質特性製程能力分析指標 MC_{PK} ：

$$P_i = P(\text{第 } i \text{ 個品質特性製程分析位於容差區域內})$$

$$= P\left(\frac{LSL_i - \mu_i}{\sigma_i} < Z < \frac{USL_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

$$MC_{PK} = \frac{Z_{p^*}}{3}$$

其中 $P^* = \prod_{i=1}^v P_i$ 。分別求得各別品質特性之製程分析位於容差區域內的機率值，
 然後將這些機率值相乘，再利用Z分配表求出 MC_{PK} 。要估計 MC_{PK} ，以 \bar{X}_i 來估
 計母體平均數 μ_i ，樣本變異數 S_i 來估計母體變異數 σ_i 。

2.3 複式模擬法

複式模擬法可以藉由少量的樣本，經由多次電腦模擬抽樣後，完整表達整個母體的分配，不但可以節省實際抽樣的成本與時間，且可以經由模擬次數的增加來提高與母體近似的程度。Efron[11] [12]所提出的複式模擬法，就是一種利用樣本作重複抽樣的方法，來減少一次抽樣可能造成的抽樣誤差。

複式模擬法的作法為從母體中先抽出一組樣本數為 n 的樣本，稱此樣本為原始樣本，接著針對原始樣本以抽出後放回再抽的方式，抽取 n 次後，得到一組樣本數為 n 的樣本，稱此樣本為複式樣本，根據此複式樣本計算所欲得知的特徵值。以上述方式重複抽取多組複式樣本後，將每組複式樣本所計算出來的特徵值由小到大依序排列，可以得到一複式分配 (Bootstrap distribution)，此一複式分配即可代替母體中特徵值的分配，來進行特徵值的統計檢定或是區間估計。

Efron[13] [14]指出，若要估計標準差，只要重複抽出 200 組複式樣本即可得到良好的估計效果，若是要進行信賴區間的估計，則最好抽取超過 1000 組的複式樣本才會得到比較好的估計效果。

2.3.1 複式信賴區間

在以複式模擬法建立信賴區間方面，Efron[11] [12]提出了四種以複式模擬法建立信賴區間的方法。假設我們的目標是求得母體特徵值 C 的信賴區間，那麼首先使用上節所述的複式模擬法，由母體中抽取出一組原始樣本，定義此原始樣本所算出的特徵值 C 的估計值為 \hat{C} ，再由原始樣本中以抽出後放回的方式抽出 B 組複式樣本，並求算出每一組複式樣本的特徵值估計值分別為 $\hat{C}_1^*, \hat{C}_2^*, \dots, \hat{C}_B^*$ 。四種複式信賴區間估計法分別敘述如下：

1. 標準複式區間 (Standard Bootstrap Method, SB)

計算由 B 個複式樣本所求算出特徵值的平均數及標準差分別如下：

$$\hat{C}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{C}_i^*$$
$$S_c^* = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{C}_i^* - \hat{C}^*)^2}$$

母體特徵值 C 的 $100(1-2\alpha)\%$ 信賴區間可推導如下：

$$(\hat{C}^* - Z_{\alpha} S_c^*, \hat{C}^* + Z_{\alpha} S_c^*)$$

2. 百分位數複式區間 (The Percentile Bootstrap Method, PB)

將 B 組複式樣本所求算出的特徵值估計值 $\hat{C}_1^*, \hat{C}_2^*, \dots, \hat{C}_B^*$ 由小到大排列，並以 $\hat{C}_{(1)}^*, \hat{C}_{(2)}^*, \dots, \hat{C}_{(B)}^*$ 表示之，取其第 α 與第 $(1-\alpha)$ 百分比這兩點，由這兩個百分位數點，母體特徵值 C 之 $100(1-2\alpha)\%$ 信賴區間可推導如下：

$$(\hat{C}_{(P_L \times B)}^*, \hat{C}_{(P_U \times B)}^*)$$

其中 P_L 等於 α ， P_U 等於 $(1-\alpha)$ ， $\hat{C}_{(P_L \times B)}^*$ 表將 \hat{C}_i^* 由小到大排序後第 $(P_L \times B)$ 個 \hat{C}_i^* 值， $\hat{C}_{(P_U \times B)}^*$ 表將 \hat{C}_i^* 由小到大排序後第 $(P_U \times B)$ 個 \hat{C}_i^* 值。

3. 修正偏度百分位數複式區間 (The Biased-Corrected Percentile Bootstrap Method, BCPB)

令 P_0 為 B 個 \hat{C}_i^* 中會小於等於 \hat{C} 的個數比，即

$$P_0 = \frac{\#(\hat{C}_{(i)}^* \leq \hat{C})}{B}$$

則偏誤修正因子為 $Z_0 = \Phi^{-1}(P_0)$ 。

修正 PB 複式信賴區間法中的 P_L 及 P_U 則可推導如下：

$$P_L = \Phi(2Z_0 - Z_{\alpha})$$
$$P_U = \Phi(2Z_0 + Z_{1-\alpha})$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示標準常態分配機率值。則母體特徵值 C 之 $100(1-2\alpha)\%$ 信賴區間可推導如下：

$$\left(\hat{C}_{(P_L \times B)}^*, \hat{C}_{(P_U \times B)}^* \right)$$

其中 P_L 等於 α ， P_U 等於 $(1-\alpha)$ ， $\hat{C}_{(P_L \times B)}^*$ 表將 \hat{C}_i^* 由小到大排序後第 $(P_L \times B)$ 個 \hat{C}_i^* 值， $\hat{C}_{(P_U \times B)}^*$ 表將 \hat{C}_i^* 由小到大排序後第 $(P_U \times B)$ 個 \hat{C}_i^* 值。

4. 加速修正偏誤法 (Bias-Correct and Accelerated Method, BCa)

令偏態修正因子 a ，其公式定義如下：

$$a = \frac{\sum_{i=1}^B (\hat{C}_p^* - \hat{C}_{p_i}^*)^3}{6 \left(\sum_{i=1}^B (\hat{C}_p^* - \hat{C}_{p_i}^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

利用偏態修正因子 a 以及 BCPB 信賴區間估計法中的偏誤修正因子 Z_0 ，修正 PB 複式信賴區間法中的 P_L 及 P_U 如下：

$$P_L = \Phi \left(Z_0 + \frac{Z_0 + Z_\alpha}{1 - a(Z_0 + Z_\alpha)} \right)$$

$$P_U = \Phi \left(Z_0 + \frac{Z_0 + Z_{1-\alpha}}{1 - a(Z_0 + Z_{1-\alpha})} \right)$$

母體特徵值 C 之 $100(1-2\alpha)\%$ 信賴區間可推導如下：

$$\left[\hat{C}_{p(P_L B)}^*, \hat{C}_{p(P_U B)}^* \right]$$

其中 $\hat{C}_{p(P_L B)}^*$ 表將 \hat{C}_i^* 由小到大排序後第 $(P_L B)$ 個 \hat{C}_i^* 值， $\hat{C}_{p(P_U B)}^*$ 表將 \hat{C}_i^* 由小到大排序後第 $(P_U B)$ 個 \hat{C}_i^* 值。

BCa 複式信賴區間估計法利用樣本資料估計其偏態修正因子 (a) 與偏誤修正因子 (Z_0) 來修正百分位數複式區間法 (BP) 中的 P_L 及 P_U 值，因此可以

降低資料偏誤所造成的估計誤差。Efron [12]指出 BCa 複式信賴區間估計法因樣本數 n 的不同，其估計誤差約為 $1/n$ ，而 SB、PB 及 BCPB 複式信賴區間估計法其估計誤差皆為 $1/\sqrt{n}$ ，隨著樣本數的增加，BCa 複式信賴區間估計法的估計誤差遠小於其他三種複式信賴區間估計法之估計誤差。

2.4 其他相關文獻探討

Franklin 與 Wasserman[16]使用複式模擬法中的 SB、PB 及 BCPB 等三種區間估計法來建構常態假設下之製程能力指標 C_p 、 C_{pk} 及 C_{pm} 的 95%信賴下限及 90%的信賴區間，經過 1000 次的模擬後，討論實際製程能力指標落在這 1000 個信賴區間中的比例，得到以下結論：BCPB 複式信賴區間估計法的信賴區間平均長度以及平均變異顯著地小於 SB 及 PB 估計法，SB 估計法的績效最為良好，但與其他兩種估計法沒有顯著的差別，即這三種複式信賴區間估計法皆能有效估計兩個製程能力指標差異值的信賴區間。此外，朱哲成[3]，以複式模擬法中的 BCBP 方法建構多變量製程能力指標的信賴區間，其中結論：

1. 當樣本數大於 20 時，以複式模擬法建立多品質特性製程能力指標估計量之修正偏度百分位數複式信賴區間(BCBP)具有相當高的可信度。
2. 多品質特性製程能力指標 C_{pm} 的估計式是多品質特性指標中準確性最高的指標估計式；而多品質特性製程能力指標 MC_{pm} 則是最差的指標估計式，尤其是當品質特性具有高度相關時。

至目前為止，仍有許多學者陸續以不同的複式信賴區間估計法估計單一製程能力指標的信賴區間

在建構兩個製程能標差異值的信賴區間研究方面，許慧先[4]以複式模擬法中的 BCPB 複式信賴區間估計法構建單一製程能力指標 C_{pmk} 之信賴下限及兩個

製程能力指標 C_{pmk} 差異值的信賴區間。戴裕芳[2]以複式模擬法中的 BCa 複式信賴區間估計法建構對稱規格區間下，兩個非常態製程之製程能力指標 C_{Npmk} 差異之信賴區間。周聖慧[1]以複式模擬法建構兩個製程能力指標 S_{pmk} 差異值之信賴區間。

以上之研究結果顯示，利用複式信賴區間估計法能夠有效地評估製程能力。綜合前人的研究，本研究決定採用 BCa 複式信賴區間估計法來建構兩個多品質特性製程能力指標 C_{pm} 差異值的信賴區間。然後根據此區間來取代假說檢定以合理正確地評估兩個製程或製程改善前後以及判斷兩個供應商的優劣。



第三章 研究方法

C_{pm} 指標經過比較分析後發現其估計式是目前多品質特性製程能力指標中準確性最高的[3]；但由於此指標估計式之相關信賴區間及假說檢定並非以 BCa 的方法推導出，因此本研究希望能提供業者一套簡易建構兩個多品質 C_{pm} 指標差異之 BCa 複式區間估計之流程，以推廣 C_{pm} 指標的實用價值。本章說明如何以複式模擬法構建兩個多品質製程能力指標 C_{pm} 差異值的 BCa 信賴區間之流程，以及此信賴區間之有效性與敏感度分析。有效性可探討信賴區間的績效，而敏感度分析則考慮不同製程參數的組合對於信賴區間的影響。

3.1 兩個製程能力指標 C_{pm} 差異之複式信賴區間構建流程

到目前為止，在利用統計假說檢定方法來評估兩個製程（或供應商）之製程能力差異方面，因為牽涉到 C_{pm1} - C_{pm2} 機率分配太過複雜而無法推導出其機率分配，所以利用統計假說檢定來評估兩個多品質特性製程能力指標 C_{pm} 何者為佳是不可行的。本研究以兩個 C_{pm} 值差異之複式 BCa 信賴區間代替統計假說檢定，以評估兩個製程能力或供應商之製程能力。本節說明如何將複式模擬法應用於評估兩個多品質特性製程或供應商之製程能力。現將本研究分析步驟敘述如下：

步驟一：設定製程資料（製程 A 及製程 B）

應用 SAS 統計軟體分別產生兩個製程 A、B 之常態分配資料，分別以 $N(\mu_{Av}, \sigma_{Av})$ 與 $N(\mu_{Bv}, \sigma_{Bv})$ 表之，其中 $v=1,2,3\dots$ v 代表變量的個數（即 v 項品質特性= $1,2,3\dots v$ ）。假設產品特性之目標值為 T_v ，規格中心值為 M_v ($M_v = (USL_v + LSL_v) / 2$)，其中 USL_v 為規格上限，

LSL_v 為規格下限。

步驟二：針對 A、B 製程分別隨機抽出一組樣本。

由欲分析的製程 A 與製程 B 的資料中，分別抽出 n_A 及 n_B 個樣本，稱為樣本 A 及樣本 B。

步驟三：以複式模擬法模擬資料並計算 $C_{\underline{pm}}$ 指標值的差異。

在樣本 A 及樣本 B 中利用複式抽樣法以抽樣後放回的方式，分別再抽出 n_A 及 n_B 個樣本，稱為樣本 A_1 及樣本 B_1 ，由樣本 A_1 計算出 A_1 的 $C_{\underline{pm}}$ 估計值，以 $\hat{C}_{\underline{pm}_{A_1}}$ 記之。以相同的方法計算 B_1 的製程能力指標 $C_{\underline{pm}}$ 值，以 $\hat{C}_{\underline{pm}_{B_1}}$ 記之。接下來令 $\hat{E}_1^* = \hat{C}_{\underline{pm}_{A_1}} - \hat{C}_{\underline{pm}_{B_1}}$ 。

步驟四：進行重複抽樣模擬

重複步驟三 B 次 ($B \geq 1000$) 可得到 B 個 \hat{E}_i^* 值為止，將此 B 個 \hat{E}_i^* 由小至大排列，得 $\hat{E}_{(i)}^*, i = 1, 2, \dots, B$ 。



步驟五：以 BCa 區間估計法建構信賴區間

以複式模擬法中的 BCa 區間估計法找出 \hat{E}^* 分配的信賴區間。求算其

BCa 信賴區間為 $[\hat{E}_{(P_L B)}^*, \hat{E}_{(P_U B)}^*]$ ，其中

$$P_L = \Phi\left(Z_0 + \frac{Z_\alpha + Z_0}{1 - a(Z_\alpha + Z_0)}\right)$$

$$P_U = \Phi\left(Z_0 + \frac{Z_{1-\alpha} + Z_0}{1 - a(Z_{1-\alpha} + Z_0)}\right)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{E}^* - \hat{E}_i^*)^3}{6 \left(\sum_{i=1}^{1000} (\hat{E}^* - \hat{E}_i^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

式中 \hat{E}^* 為原始樣本 A 與 B 之指標差異值、 $Z_0 = \Phi^{-1}(P_0)$ ，而 P_0 為 1000 個 \hat{E}_i^* 中會小於等於 \hat{E}^* 的個數比，若 $Z_0 < 0$ 表示估計值資料呈現左偏，則偏態修正因子 $a < 0$ 可得向左修正的信賴區間，若 $Z_0 > 0$ 表示資料呈現右偏，則偏態修正因子 $a > 0$ 可得向右修正的信賴區間，而 \hat{E}^* 的 $(1-2\alpha)$ 100% BCa 信賴區間為 $[\hat{E}_{(P_L B)}^*, \hat{E}_{(P_U B)}^*]$ 。

步驟六：進行有效性分析

以蒙地卡羅模擬的方式驗證 BCa 信賴區間之有效性。進行方式為重複步驟三至步驟五 N 次 ($N=1000$)，可得 N 組 BCa 信賴區間，計算實際兩個母體之 C_{pm} 指標差異值以 E 表示，假設 E 落於 N 組 BCa 信賴區間的個數為 m ，定義此信賴區間估計法之績效指標 $P=m/N$ ，若 $m/N > (1-\alpha)\%$ ，則表示此信賴區間估計法有 $(1-\alpha)\%$ 的機會使實際兩個 C_{pm} 指標差異值會落於此信賴區間內。績效指標 P 越高代表本研究所建構之以複式模擬法所得之兩個多品質特性製程能力指標 C_{pm} 差異之信賴區間演算方法有效可信。

步驟七：進行敏感度分析

以蒙地卡羅模擬法進行敏感度分析，進行方式為改變抽樣樣本數及製程相關參數值（即製程平均數 μ 與標準差 σ ，變異數-共變異數矩陣等），重複進行步驟一至步驟五 N 次 ($N \geq 1000$) 後得到績效值，期望能證明在不同的樣本數與其他製程相關參數之組合下，BCa 信賴區間估計法仍能有穩健的表現。

上述之研究步驟可以圖 3-1 之流程圖表之。

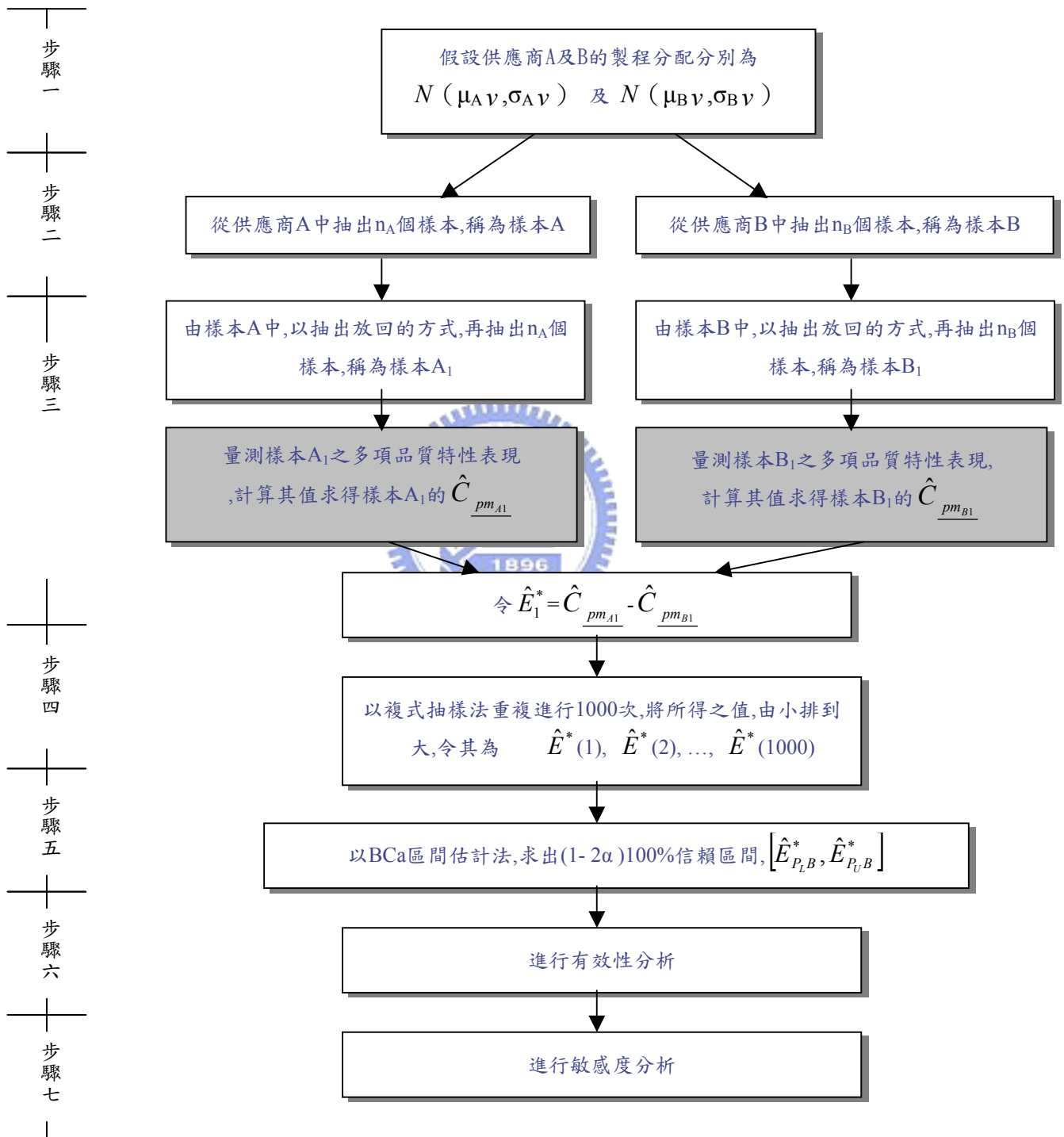


圖 3-1：以複式模擬法構建兩個製程能力指標 C_{pm} 差異值信賴區間之流程圖

3.2 構建二元常態分配下製程能力指標 C_{pm} 值差異之信賴區間

製程資料之機率分配的種類有非常多不同的類型，本研究中僅以 Chen [9] 及 Wang [22]所提及的一個擁有二個品質特性的製程資料(Brinell hardness: H; Tensile strength: S)為例，設其為廠商 A 之資料並利用電腦模擬另一個不同的競爭廠商 B 的製程資料，製程的規格界限 H 及 S 分別為：(112.7, 241.3)及(32.7, 73.3)，H 及 S 之規格中心值分別為[177, 53]，依照本研究的步驟二，由供應商 A 及供應商 B 的產品中，分別抽出 40 個樣本，稱為樣本 A 及樣本 B，樣本平均數向量及樣本的共變異數矩陣分別為 $\mu_A:[177, 53]$ ， $\mu_B:[168, 44]$;
 $V_{0A}:\begin{bmatrix} 196 & 25 \\ 25 & 9 \end{bmatrix}$ ， $V_{0B}:\begin{bmatrix} 324 & 65 \\ 65 & 25 \end{bmatrix}$ 。接下來以研究步驟三算出供應商 A 與 B 之製程能力指標並以步驟四之複式模擬抽樣方法重覆 1000 次後，求算其 Bca 信賴區間為(0.47241,1.63398)。本研究假設之製程品質特性分配呈二元常態分配，分別改變其參數組合以進行敏感度分析，不同之參數組合設定如表 3.1 所示。

表 3-1 常態分配各參數組合表

平均值 μ_{A1}, μ_{A2}	平均值 μ_{B1}, μ_{B2}	變異數 vA1	變異數 vA2	製程 A 共變異數	變異數 vB1	變異數 vB2	製程 B 共變異數	模擬樣本 數
[175,51]	[166,42]	225	16	35	289	16	55	20,30,40,50
[175,51]	[166,42]	196	9	25	324	25	65	20,30,40,50
[175,51]	[166,42]	169	4	15	361	36	75	20,30,40,50
[177,53]	[168,44]	225	16	35	289	16	55	20,30,40,50
[177,53]	[168,44]	196	9	25	324	25	65	20,30,40,50
[177,53]	[168,44]	169	4	15	361	36	75	20,30,40,50
[179,55]	[170,46]	225	16	35	289	16	55	20,30,40,50
[179,55]	[170,46]	196	9	25	324	25	65	20,30,40,50
[179,55]	[170,46]	169	4	15	361	36	75	20,30,40,50

其中 A, B 分別表不同的供應商，而 1, 2 則表產品之不同的品質特性。在執行模擬程序時，本研究將這 1000 組信賴區間的信賴水準 $(1-2\alpha)$ 設為 0.95，此顯示該信賴區間有 95%的機率包含兩個製程實際製程能力指標 C_{pm} 值之真實差

異值。在不同的參數組合下之績效指標的模擬結果如表 3-2 所示。

表 3-2 常態母體下兩個指標差異值 95%信賴區間之模擬結果

平均值	共變異數矩陣	模擬	績效	區間長度	區間變異
M_vector1: [175,51] [166,42]	COV1: $\begin{bmatrix} 225 & 35 \\ 35 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 289 & 55 \\ 55 & 16 \end{bmatrix}$	20	0.6890	2.4543	0.0830
		30	0.9340	1.2391	0.0320
		40	0.9650	0.9889	0.0222
		50	0.9890	0.4930	0.0177
	COV2: $\begin{bmatrix} 196 & 25 \\ 25 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324 & 65 \\ 65 & 25 \end{bmatrix}$	20	0.7470	0.9289	0.0503
		30	0.8950	0.8732	0.0299
		40	0.9340	0.6220	0.0179
		50	0.9890	0.4023	0.0154
	COV3: $\begin{bmatrix} 169 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 361 & 75 \\ 75 & 36 \end{bmatrix}$	20	0.7280	0.7744	0.0402
		30	0.9220	0.8296	0.0318
		40	0.9550	0.7154	0.0289
		50	0.9990	0.7634	0.0171
M_vector2: [177,53] [168,44]	COV1: $\begin{bmatrix} 225 & 35 \\ 35 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 289 & 55 \\ 55 & 16 \end{bmatrix}$	20	0.7250	1.1060	0.0747
		30	0.9190	1.7454	0.0256
		40	0.9600	1.1489	0.0551
		50	0.9870	1.0377	0.0297
	COV2: $\begin{bmatrix} 196 & 25 \\ 25 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324 & 65 \\ 65 & 25 \end{bmatrix}$	20	0.7110	2.3780	0.1325
		30	0.8820	1.1345	0.0592
		40	0.9400	0.6983	0.0404
		50	0.9900	0.7218	0.0211
	COV3: $\begin{bmatrix} 169 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 361 & 75 \\ 75 & 36 \end{bmatrix}$	20	0.5890	1.6897	0.2513
		30	0.8500	0.8774	0.0209
		40	0.9560	0.7645	0.0168
		50	0.9970	0.4843	0.0176
M_vector3: [179,55] [170,46]	COV1: $\begin{bmatrix} 225 & 35 \\ 35 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 289 & 55 \\ 55 & 16 \end{bmatrix}$	20	0.7790	1.7421	0.0567
		30	0.9100	0.7168	0.0350
		40	0.9560	0.7017	0.0219
		50	0.9780	0.6325	0.0228
	COV2: $\begin{bmatrix} 196 & 25 \\ 25 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324 & 65 \\ 65 & 25 \end{bmatrix}$	20	0.6520	0.9228	0.0612
		30	0.9190	0.6566	0.0599
		40	0.9360	0.5137	0.0357
		50	0.9780	0.5879	0.0121
	COV3: $\begin{bmatrix} 169 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 361 & 75 \\ 75 & 36 \end{bmatrix}$	20	0.6660	1.4769	0.0818
		30	0.8720	0.9456	0.0256
		40	0.9490	0.5817	0.0281
		50	0.9580	0.4045	0.0236

由各組參數組合所模擬出的 1000 組信賴區間，本研究採用以下三種衡量信賴區間之指標來評估其績效，現分別說明如下。

1. 績效 (覆蓋率): 指在 1000 組的信賴區間中，包含兩母體製程實際指標差異值的信賴區間所佔的比率，簡言之即 1000 次中包括真實差異值的次數所佔的百分比。若此績效指標值越大，表示本研究所使用的區間估計法越能有效估計兩個製程能力指標值 C_{pm} 的差異。
2. 平均區間長度: 指在 1000 組信賴區間的區間長度平均值。若此指標值越小，表示本研究所使用的區間估計法越能精準地估計兩個製程能力指標值 C_{pm} 的差異。
3. 區間長度變異: 指 1000 組信賴區間的區間長度標準差。若此指標值越小，表示本研究所使用區間估計法的變異程度越小。

本研究以績效 (覆蓋率) 來評估信賴區間差異的有效性，另同時以三種指標來分析信賴區間指標差異的敏感度。



3.3 BCa 的有效性分析

在 BCa 複式信賴區間有效性評估方面，以蒙地卡羅模擬的方式驗證，執行方式為將衡量指標中的「績效指標」與信賴水準做比較，當績效值達到信賴水準時，則可判定此模擬結果具有相當高之可信度。

因每次模擬所得之 BCa 複式信賴區間是否包含真實指標 C_{pm} 差異值為一個伯努利試驗 (Bernoulli trial)，故當重複 1000 次信賴區間模擬後，所求得之「績效指標」的機率分配應為二項分配 (Binomial distribution)，其 $N=1000$ ， P =績效指標水準。本研究方法希望達到績效指標 0.95 的水準，因績效指標為一樣本數 $N=1000$ ， $P=0.95$ 之二項分配隨機變數，故其 95% 涵蓋比例的信賴區間可求得為 $0.95 \pm Z_{0.05/2} \sqrt{(0.95)(0.05)/1000} = 0.95 \pm 0.0135$ ，即區間為

(0.9365,0.9635)，即表示有 95%的信心認為真實的績效指標值的信賴區間應落於 0.9365 至 0.9635 間。且若模擬的績效高於 0.9365，即表示所找出的複式信賴區間效果良好。在表 3-2 的『績效』欄中，以黑體字顯示者表示此組參數組合的模擬績效未達預期水準，而反黑的欄位則表示正好在臨界值上。從以上的信賴區間中可以發現，當樣本數 $n=50$ 時，所有分配參數組合之績效值均大於 93.65%，而當樣本數 $n=40$ 時，所有分配參數組合中雖然有三組績效值在臨界績效指標 93.65%信賴區間左右，但其值均略高於 93.65%。不過當樣本數小於等於 30 時，則其績效值表現不佳，所有分配參數組合樣本數為 20 或 30 的共有 18 組，績效值全部均未包含於 (93.65%, 96.35%) 信賴區間，表示本研究當樣本數大於等於 40 者，即有相當良好的指標差異值估計效果。

3.4 BCa 的敏感度分析



多元常態分配之製程參數共有兩個，分別為製程樣本平均數向量 ($M_vector_{1,2,3}$)及樣本的共變異數矩陣($COV_{1,2,3}$)，同時針對抽樣樣本數($n_{20,30,40,50}$)與兩個製程參數組合之敏感度分析如下：

- (1) 固定兩製程之共變異數矩陣($COV_{1,2,3}$)及抽樣樣本數($n_{20,30,40,50}$)，變動製程樣本平均數向量($M_vector_{1,2,3}$)

當固定兩製程之共變異數矩陣($COV_{1,2,3}$)、抽樣樣本數 n 分別訂為 20、30、40 及 50，變動製程樣本平均數向量($M_vector_{1,2,3}$)時，三種衡量指標(績效指標、區間長度之平均值指標及區間長度之變異值指標)的折線圖如圖 3.2(a)至 3.2(l)所示。

由圖 3.2(a)至 3.2(l)可知，績效值指標與變異值指標不會隨著兩製程平均值差異大小而有顯著的變化；而平均值指標的變化亦不規律，因此可判定平均值差異變化對於 BC_a 複式信賴區間沒有顯著的影響。

- (2) 固定兩製程樣本平均數向量($M_vector_{1,2,3}$)及抽樣樣本數($n_{20,30,40,50}$)，變動

兩製程之共變異數矩陣($COV_{1,2,3}$)

當固定兩製程樣本平均數向量($M_vector_{1,2,3}$)、抽樣樣本數 n 分別訂為 20、30、40 及 50，變動兩製程之共變異數矩陣($COV_{1,2,3}$)時，三種衡量指標（績效指標、區間長度之平均值指標及區間長度之變異值指標）的折線圖如圖 3.3(a) 至 3.3(l)所示。

由圖 3.3(a)至 3.3(l)可知，績效值指標與變異值指標不會隨著兩製程標準差比例大小而有顯著的變化；而信賴區間平均值指標的變化亦不規律，因此可判定標準差比例變化對於 BC_a 複式信賴區間沒有顯著的影響。

(3) 固定兩製程樣本平均數向量($M_vector_{1,2,3}$)及兩製程之共變異數矩陣

($COV_{1,2,3}$)，變動抽樣樣本數($n_{20,30,40,50}$)

當固定兩製程樣本平均數向量($M_vector_{1,2,3}$)及兩製程之共變異數矩陣($COV_{1,2,3}$)，變動抽樣樣本數 n 為 20、30、40 及 50 時，三種衡量指標（績效指標、區間長度之平均值指標及區間長度之變異值指標）的折線圖如圖 3.4(a)至 3.4(i)所示。

由圖 3.4(a)至 3.4(i)可知，績效值指標會隨著樣本數的增加而略升；區間長度之平均值指標與變異程度指標會隨著樣本數的增加而遞減。當抽樣樣本數為 20、30 時，九組參數組合之績效值全部落在真實績效指標等於 0.95 的 95% 信賴區間之外；當抽樣樣本數為 40 時，九組參數組合之績效值有八組落在真實績效指標等於 0.95 的 95% 信賴區間；當樣本數等於 50 時，九組參數組合之績效值均落在真實績效指標等於 0.95 的 95% 信賴區間，所以當樣本數大於 40 時，績效值皆在 0.936 以上，因此建議在常態分配下，抽樣樣本數最好大於 40。

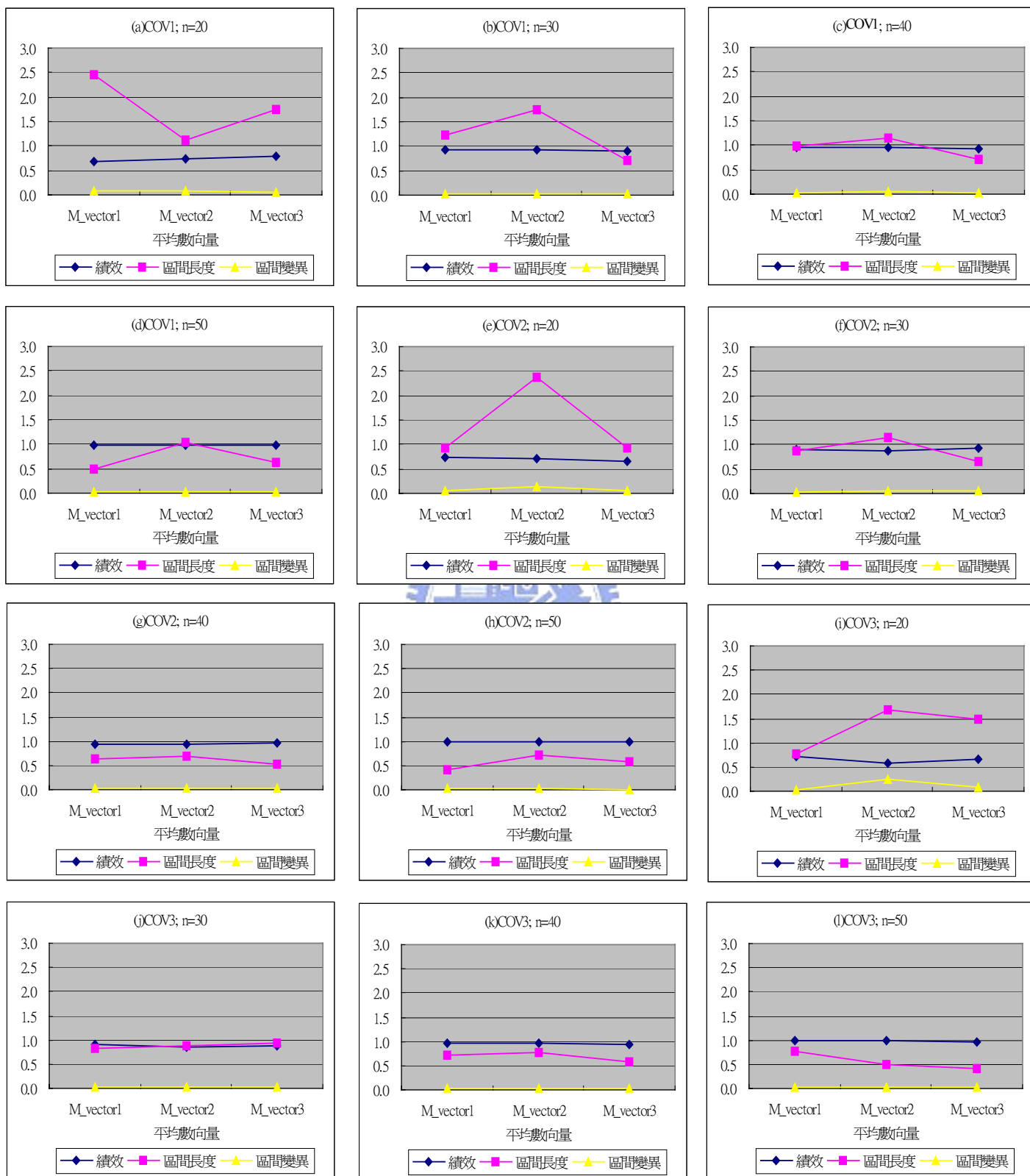


圖 3.2 常態分配下三種衡量 BCa 複式信賴區間之指標在製程平均值向量變動時之表現折線圖

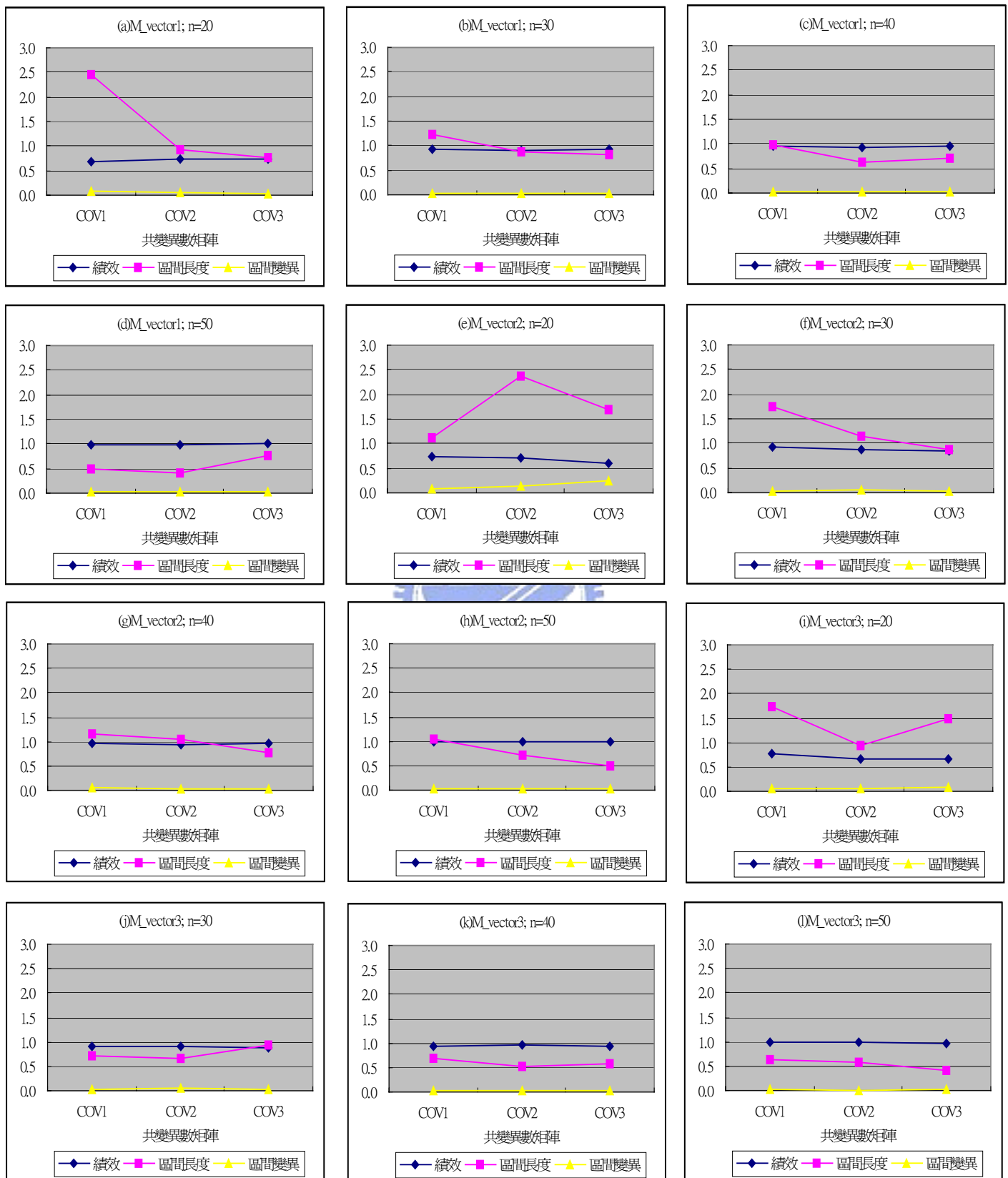


圖 3.3 常態分配下三種衡量 BCa 複式信賴區間之指標在製程共變異數矩陣變動時之表現折線圖

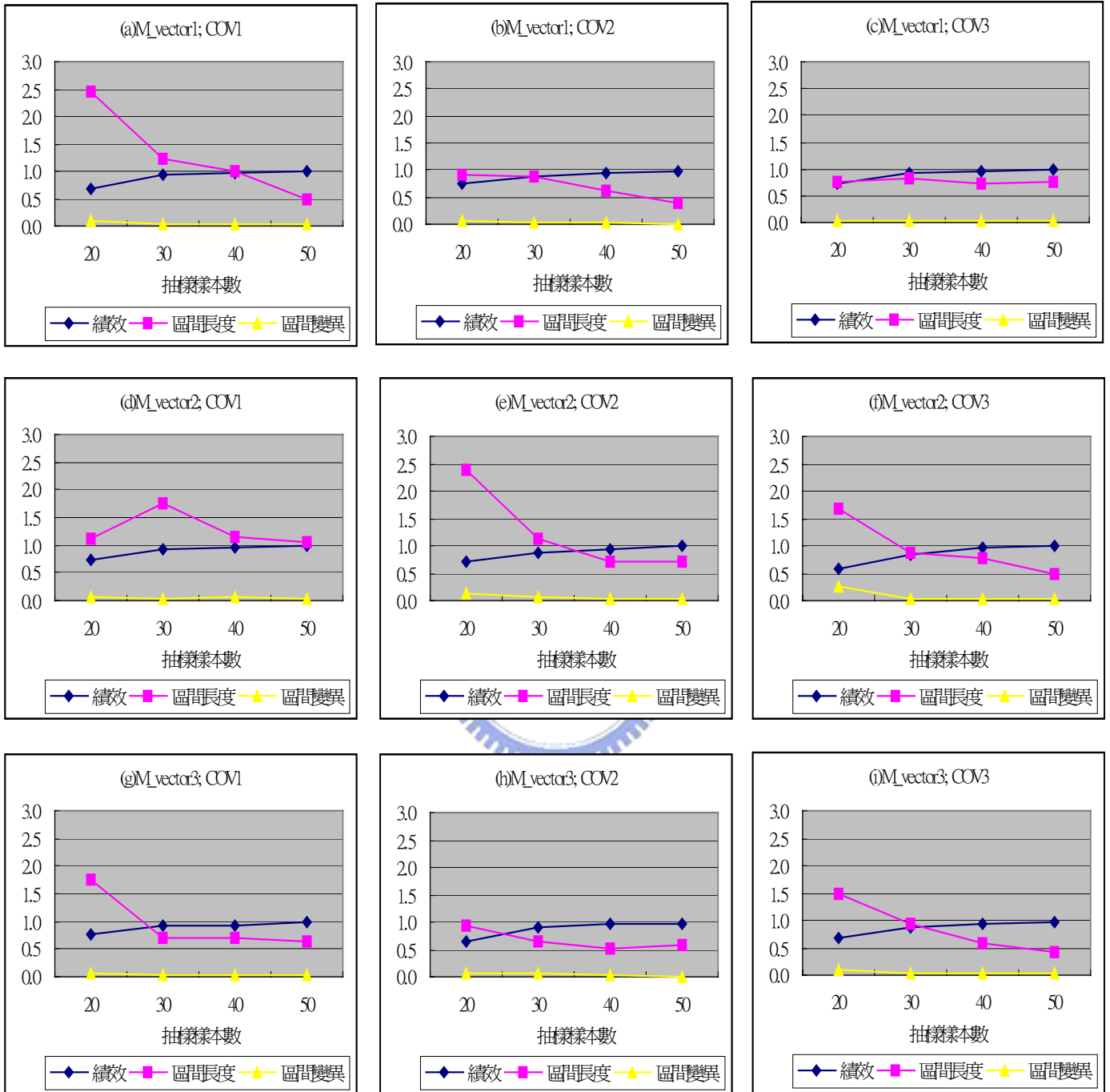


圖 3.4 常態分配下三種衡量 BCa 複式信賴區間之指標在製程抽樣樣本數變動時之表現折線圖

第四章 實例說明

4.1 以複式區間估計法檢定兩個製程能力指標 C_{pm} 是否有顯著差異之應用流程

本小節將本研究在 3.1 節所構建用來判斷兩個製程（或供應商）製程能力之優劣的複式模擬區間方法，撰寫成以下之應用流程：

步驟一：蒐集樣本資料。

步驟二：以複式模擬法模擬樣本資料並計算兩個 C_{pm} 指標之差異值。

步驟三：進行重覆抽樣模擬。

步驟四：產生兩個製程能力指標 C_{pm} 差異值之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間。

步驟五：判別製程（供應商）優劣情形：

1. 當信賴區間所包含的兩個數皆為正時，表示製程（供應商）A 優於製程（供應商）B。
2. 當信賴區間所包含的兩個數皆為負時，表示製程（供應商）B 優於製程（供應商）A。
3. 當信賴區間所包含的兩個有正有負時，表示製程（供應商）A 與製程（供應商）B 之製程能力沒有顯著差異。

4.2 實例說明

新竹科學園區某家微波通訊製造商為能更擴充產品的市佔率而進行競爭力提昇計畫，其中主力產品 LNB(Low noise block)如圖 3-5 的 Performance 為重要衡量競爭力的一部份，工程師發現 absorber 的位置會對產品的 Gain 及 Noise 表現產生極大的影響，一旦其位置改變之後，此二項品質特性就會有很顯著的不同，所以為了解改善是否有效，工程師於生產線各抽出了改善前後兩個品質特性之製品各 40 個，並計算其多變量製程能力指標 C_{pm} 以做評估，Gain 及 Noise 的規格分別為：[0.3, 1.3], [42, 62]，規格的目標中心值 T 為[0.8,57]。收集所得之製程改善前後的資料分別如表 4-1 及 4-2 所示。



圖 4-1:LNB 產品

表 4.1、改善前製程之 40 筆樣本資料

.....



表 4.2、改善後製程之 40 筆樣本資料

.....

利用 4.1 節所構建的應用流程來評估製程之改善效果，過程如下：

步驟一：蒐集製程改善前與改善後各 40 組之樣本資料如表 4.1、表 4.2。

步驟二：以複式模擬法模擬樣本資料並計算兩個 C_{pm} 指標之差異值。

步驟三：進行重覆抽樣 ≥ 1000 次。

步驟四：產生兩個製程能力指標 C_{pm} 差異值之 95% 信賴區間為 (-0.4211, -0.1352)。

步驟五：由於信賴區間所包含的兩個值皆為負數，顯示改善後製程之製程能力較佳，因此判定此改善方式確實顯著有效。



第五章 結論與建議

本研究藉由重複抽樣的複式模擬法找出兩個製程產品之製程能力指標 C_{pm} 差異值之 BCa 複式信賴區間，利用此信賴區間來取代傳統的統計檢定，以有效地判斷兩個製程中何者有較佳之製程能力。本研究利用不同的製程參數組合所做之敏感度及有效性分析顯示兩個 C_{pm} 差異值之 BCa 信賴區間有良好的績效。

現將本研究的貢獻彙整如下：

1. 發展出兩個多品質特性 C_{pm} 指標差異值之複式信賴區間估計法，可以應用在新製程評選、品質改善成效評估或供應商品質評選方面。
2. 將本研究流程寫成簡單之標準作業程序，讓製程人員得以在進行選擇製程或供應商時，能有效快速地判斷何者擁有較佳的能力，以有效減少因誤判而造成之時間與成本的浪費。
3. 多品質特性製程能力 C_{pm} 指標在本研究的推廣下，可增加其在業界之應用性。
4. 本研究藉由複式模擬法從兩組原始抽樣的樣本中模擬出多組樣本使用，原始樣本僅需至少 40 筆即可，能節省全檢所需花費之大量的抽樣時間與成本。
5. 本研究結果寫成電腦程式後，可快速判斷多變量製程之能力。

參考文獻

- [1] 周聖慧, “以複式模擬法構建非常態下兩個製程能力指標 S_{mpk} 差異值之信賴區間” 交通大學工業工程與管理所碩士論文, 2003.
- [2] 戴裕芳, “以複式模擬法構建兩個製程能力指標 C_{Npmk} 差異之信賴區間” 交通大學工業工程與管理所碩士論文, 2002.
- [3] 朱哲成, “以複式模擬法構建多品質特性製程能力指標之分析” 成功大學工業管理系所博士論文, 2001。
- [4] 許慧先, “以複式模擬法構建單一製程能力指標 C_{pmk} 之信賴下限及兩個製程能力指標 C_{pmk} 差異之信賴區間” 交通大學工業工程與管理所碩士論文, 2000。
- [5] Bothe, D. R., “Composite Capability Index for Multiple Product Characteristics”, *Quality Engineering*, 12(2), pp.253-258, 2000.
- [6] Chan, L. K., Cheng, S. W. and Spring, F. A., “A Multivariate Measure of Process Capability,” *Journal of Modeling and Simulation*, 11, pp. 1-6,1991.
- [7] Chan, L. K., Cheng, S. W. and Spring, F. A., “A New Measure of Process Capability: C_{pm} ,” *Journal of Quality Technology*, 30, pp. 162-175, 1988.
- [8] Clements, J. A., “Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions,” *Quality Progress*, Vol. 22, No. 9, Sep., pp. 95-100, 1989.
- [9] Chen, H., “A multivariate process capability index over a rectangular solid tolerance zone,” *Statistics Sinica*, 4, 749-758(1994)
- [10] Efron, B. “Bootstrap Methods: Another Looking at the Jackknife.” *Ann. Statist.* 7, 1-26. 1979.
- [11] Efron, B. and Tibshirani, R. J., “Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Interval, and Other Measure of Statistical Accuracy,” *Statistical Science*, 1, pp. 54-77, 1986.

- [12] Efron, B., "Better bootstrap confidence intervals," J. Amer. Statist. Assoc. 82, pp. 171-200, 1987.
- [13] Efron, B. and Tibshirani, R. J., "A Leisurely Look at the Bootstrap, the Bootstrap, the Jackknife and Cross-Validation," American Statistician, 37, pp. 36-48, 1983.
- [14] Efron, B. and Tibshirani, R. J., "An Introduction to the Bootstrap," Chapman & Hall, 1993.
- [15] F. K. Wang, C.Y. Chen, "Confidence intervals for multivariate process capability indices using bootstrap." Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, Vol. 15 No. 5, pp. 429-438.
- [16] Franklin, L. A. and Wasserman, G. S., "Bootstrap Lower Confidence Limits for Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 24(4), pp. 196-210, 1992.
- [17] Juran, J. M., Gryna, F. M. and Bingham, R. S., *Quality Control Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [18] Kane, V.E., "Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, 18(1), pp.41-52, 1986.
- [19] Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L., "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, 24, pp. 216-233, 1992
- [20] Shahriari, H., Hubele, N. F. and Lawrence, F. P., "A Multivariate Process Capability Vector," *Proceeding of the 4th Industrial Engineers Research Conference*, 1995, Institute of Industrial Engineers, pp. 304-309, 1995
- [21] Taam, W., Subbaian, P. and Liddy, J. W., "A Note on Multivariate Capability Indices," *Journal of Applied Statistics*, 20(3), pp.339-351, 1993.
- [22] Wang, F. K., Hubele, N. F., Lawrence, F. P., Miskulin, J. D. and Shahriari, H., "Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 32(3), pp.263-275, 2000.