

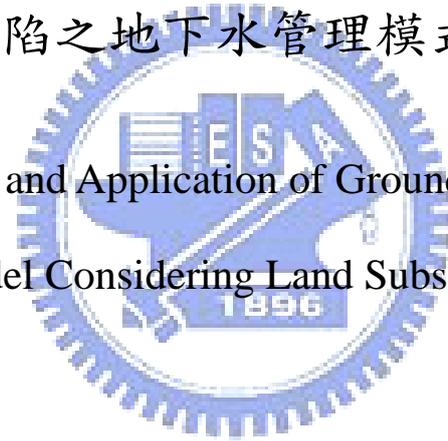
國立交通大學

土木工程學系

博士論文

考量地層下陷之地下水管理模式建立與應用

The Development and Application of Groundwater Management
Model Considering Land Subsidence



研究生：張胤隆

指導教授：楊錦釗 博士

湯有光 博士

中華民國九十六年六月

考量地層下陷之地下水管理模式建立與應用

The Development and Application of Groundwater Management

Model Considering Land Subsidence

研究生：張胤隆

Student： Yin-Lung Chang

指導教授：楊錦釗

Advisor： Jinn-Chuang Yang

湯有光

Yeou-Koung Tung



A Thesis

Submitted to Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Doctor of Philosophy

in

Civil Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

考量地層下陷之地下水管理模式建立與應用

學生：張胤隆

指導教授：楊錦釗博士

湯有光博士

國立交通大學土木工程學系博士班

摘 要

地下水為相當重要且可靠的水資源，然而地下水超抽將導致地層下陷災害之發生，因此如何合理地利用地下水資源兼且避免地層下陷危害，實為重要研究課題之一。地下水管理模式已廣泛地應用於地下水資源開發或汙染整治之規劃中，然一般地下水管理模式常僅以地下水位為限制條件來推求最大可抽水量(Optimal Total Pumpage)，鮮少考慮地層下陷之影響，因此可能高估最大可抽水量，導致非預期地層下陷災害之發生。本研究之主要目的即在建立可定量考量地層下陷影響之地下水管理模式。

本研究首先以 Simulation-Optimization 方法為基礎，分別利用響應矩陣法與一維土體壓密方程式建立水頭洩降量與地層下陷量之限制式，以發展同時考量水頭洩降與地層下陷影響之定率地下水管理模式，並利用二進位變數將屬於 Non-smooth Optimization 之管理模式轉換為混合整數線性規劃之型態以增進求解之效率。

在定率管理模式建立完成後，本研究進一步考慮地質參數(水力傳導係數與拉梅常數)空間變異性之影響，首先利用 LHS (Latin Hypercubic Sampling)與蒙地卡羅模擬分析單位響應係數之不確定性，再以一階變異數分析法(First Order Variance Estimation, FOVE)推導水頭洩降量與地層下陷量之統計特性與各抽水井抽水量之關係式，最後以 Chance Constrained Programming (CCP)建立考慮地質參數不確定性，並以水頭洩降量與地層下陷量需求可靠度(Compliance Reliability)為決策考量之序率地下水管理模式。

模式建置完成後，本研究以虛擬之案例驗證其正確性及適用性。定率模式驗

證結果顯示無論是在穩態、動態或多層地下水系統之條件，定率模式皆能提供在滿足水頭洩降量與地層下陷量限制條件下，地下水系統之最大可抽水量與各井抽水量最佳之時空分布，且當管理問題為穩態時，模式更具有決定抽水井設計最大抽水能力(Maximum Pumping Capacity)與最佳設井位置之功能。

在序率管理模式驗證方面，本研究蒐集過往地質參數相關之調查資料，共設計了五個不同方案以期能涵蓋地質參數可能之變異程度。驗證結果顯示在地質參數變異程度不高時，以一階變異數分析法計算地層下陷量統計特性能得相當良好之結果，而無論地質參數變異程度如何，序率模式計算之最大可抽水量皆能滿足需求可靠度之限制，且驗證過程中亦顯示 Active Constraints 會同時發生在水頭洩降量與地層下陷量可靠度之限制式，顯示若不考慮地層下陷之影響而僅以水頭洩降為限制條件，可能會高估最大可抽水量。

模式驗證後，本研究將定率與序率管理模式應用於台灣西部之濁水溪沖積扇地區，並依據政策、地層下陷概況與地下水需求量擬訂不同之地下水管理方案，以求得不同方案下之最大可抽水量。應用結果顯示，無論有無考慮參數不確定性之影響，濁水溪沖積扇地區並無法同時滿足地下水需求量以及避免或減緩地層下陷危害發生之目標，而其亦正面臨地下水嚴重超抽導致地層下陷災害嚴重之情形，由此顯示本研究發展之模式能正確反應濁水溪沖積扇地下水系統之特徵以及模式於實務應用之價值。

關鍵詞：地下水管理、地層下陷、最佳化、不確定性、可靠度、序率模式

The development and Application of Groundwater Management Model Considering Land Subsidence

Student: Yin-Lung Chang

Advisors: Dr. Jinn-Chuang Yang

Dr. Yeou-Koung Tung

Department of Civil Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

Groundwater is one of the major water resources in the world. Today, many groundwater aquifer systems are over-developed resulting in serious hazards of land subsidence. Although groundwater management models have been extensively applied to establish the optimal groundwater development or remediation strategies, only a few studies explicitly considered the land subsidence effect. This study presents a groundwater management model explicitly considering land subsidence.

From the simulation-optimization approach, the response matrix technique and one-dimensional consolidation equation are adopted to develop a deterministic management model. Due to the phenomenon that soil is hardly swelled, the nature of groundwater management considering subsidence is a non-smooth optimization problem. To improve the efficiency of solution technique, the non-smooth optimization is transferred into mixed-integer linear programming (MILP) by introducing the binary variables.

By Latin Hypercubic Sampling (LHS) technique, along with numerical subsurface flow simulation, statistical features of unit response coefficients due to random hydrogeologic parameters, including hydraulic conductivity (K) and Lamé constants (μ and λ), are quantified. The first-order-variance-estimation (FOVE) method is adopted to analyze the uncertainties of drawdown and land subsidence based on which the concept of chance-constrained programming (CCP) is applied to transfer the original deterministic management model into its stochastic form. The stochastic management model enables the determination of optimal total pumpage subject to the

constraints that drawdown and land subsidence do not exceed the allowable values with stipulated compliance reliability.

Hypothetical examples are utilized to verify the developed management model. The verification is using numerical model simulation by trial-and-error. The results indicate that the deterministic model can provide accurate optimal total pumpage in steady, transient state or multi-layer aquifer system. Besides, the deterministic model also enables the determination of maximum pumping capacity and optimal allocation of pumping wells.

A hypothetical example is utilized to demonstrate the applicability of the stochastic model to five scenarios in which various levels of parameter uncertainty are considered. The results indicate that joint consideration of drawdown and land subsidence is essential, and the proposed stochastic management model can be generally applied for regional groundwater resources management in conjunction with controlling land subsidence.

After the proposed management model have been verified, it is applied to Choshui alluvial fan located in mid-west Taiwan which is facing serious land subsidence hazard due to groundwater over-pumping. Several management strategies have been considered based on the policy, groundwater demand, and profile of land subsidence. The optimal solutions to all management strategies considered, whether deterministically or stochastically, indicate that the groundwater demand and land subsidence controlling cannot be satisfied simultaneously. The application considers present situation of Choshui alluvial fan which shows that the proposed management model is applicable to real world problems.

Keywords: Groundwater Management, Land Subsidence, Optimization, Uncertainty, Reliability, Stochastic model

誌 謝

論文提筆至此，始發覺撰寫誌謝實為最困難之部分，誠如先輩陳公之藩所言：「得之於人者太多，出之於己者太少」，需要誠摯銘謝之人太多，而感激之情溢於言表，拙者實難以有限之詞彙表達無盡之感恩。

在國立交通大學就學期間，承蒙恩師楊教授錦釗與湯教授有光在生活上之照顧，包容拙者於研究過程中所犯之錯誤並惠予悉心之指導，使拙者能學習正確之研究態度與觀念並順利完成學業，在此謹獻上最誠摯之銘謝與敬意。論文口試期間，感謝口試委員郭教授振泰、洪教授士林、張教授良正、張博士國強、黃教授文政與蔡教授東霖等貢獻其所學專長，悉心給予指導，使拙者能依其寶貴之建議繕改論文。

博士班求學過程也許是辛苦的，但在此過程中，感謝研究室學長張教授哲豪、吳科長瑞濱、連長、信玄、士畦、勇哥、東哥、聰哥、阿伯、DOJ、添哥、阿勇、阿中與岳峰，同學怪頭、家和、豐佐、A 宏與春渾，以及學弟妹們與邱小瑜，因為有你(妳)們的陪伴、鼓勵、幫助與互相討論，使拙者求學之過程充滿了快樂與溫馨。

最後謹將論文獻予我最親愛之父親、母親、姐姐、舅舅、舅媽與三位可愛地表妹們，感謝您們對於我從幼時起漫長之求學過程所做之無悔付出與包容，謹以此論文表達我無盡感激之情，亦望您們能從中分享我的喜悅與榮耀。

目 錄

摘要	I
Abstract	III
誌謝	V
目錄	VI
表目錄	IX
圖目錄	XI
符號說明	XIV
第一章 緒論	1
1.1 研究動機與目的	1
1.2 文獻回顧	2
1.2.1 定率地下水管理模式	3
1.2.2 序率地下水管理模式	6
1.3 研究方法與步驟	9
1.4 章節介紹	10
第二章 理論基礎與模式建置	12
2.1 地層下陷數值模式簡介	12
2.2 定率地下水管理模式架構	15
2.2.1 模式建立	15
2.2.2 求解方法	21
2.3 序率地下水管理模式架構	22
2.3.1 不確定性參數定義	22
2.3.2 單位響應係數統計特性分析	22
2.3.3 水頭洩降量與地層下陷量統計特性分析	25

2.3.4	模式建立	30
2.3.5	求解方法	33
2.4	小結.....	34
第三章	定率模式驗證與應用案例模擬.....	35
3.1	定率模式驗證	35
3.1.1	穩態驗證案例	35
3.1.2	動態驗證案例	36
3.2	應用案例.....	38
3.2.1	應用案例一：單侷限含水層	38
3.2.2	應用案例二：多層地下水系統	39
3.2.3	應用案例三：最佳單井最大抽水能力與設井位置決定	40
第四章	序率模式驗證與應用案例模擬.....	43
4.1	地質參數敏感度分析	43
4.2	序率模式驗證	44
4.2.1	地質參數取樣次數決定	45
4.2.2	序率模式模擬結果討論	45
4.2.3	序率模式計算時間討論	47
4.2.3	一階變異數分析方法合理性驗證與檢討	47
4.2.4	地層下陷量常態分布假設驗證	48
4.2.5	真實可靠度驗證	49
4.3	可靠度進階考量	50
第五章	濁水溪沖積扇地下水管理策略研擬與模式應用.....	52
5.1	濁水溪沖積扇區域概述	52
5.1.1	地理位置暨水文狀況	52
5.1.2	地質概況與地質分層	52

5.1.3	地下水使用與地層下陷概況	53
5.1.4	地下水管制區	54
5.1.5	嚴重地層下陷區	57
5.2	地層下陷數值模式設定與資料處理	58
5.2.1	邊界與網格設定	58
5.2.2	地質條件	59
5.2.3	抽水井設定	59
5.3	定率管理模式應用	60
5.3.1	模式設定	60
5.3.2	管理方案研擬	61
5.3.3	應用結果與討論	62
5.4	序率管理模式應用	64
5.4.1	模式設定與管理方案研擬	64
5.4.2	應用結果與討論	66
第六章	結論與建議	68
6.1	結論	68
6.2	建議	71
	參考文獻	73
附錄一	Branch and Bound 方法簡介	78
附錄二	一階變異數分析法推導地層下陷量統計特性	81
附錄三	G 動差母函數推導	83

表 目 錄

表 1	定率管理模式穩態驗證案例設定	85
表 2	穩態驗證案例達最大可抽水量時各點地層下陷量	85
表 3	定率管理模式動態驗證案例設定	85
表 4	動態驗證案例試誤過程計算表	86
表 5	定率模式應用案例一地質參數設定	86
表 6	定率模式應用案例一模式設定	86
表 7	定率模式應用案例一計算結果	87
表 8	定率模式應用案例二模式設定	87
表 9	定率模式應用案例二計算結果	87
表 10	定率模式應用案例二方案一各點地層下陷量	88
表 11	定率模式應用案例二方案二各點地層下陷量	88
表 12	定率模式應用案例二方案一各點地層下陷量 (只考量水頭洩降為限制條件)	89
表 13	定率模式應用案例三模式設定(最小地層下陷量)	89
表 14	定率模式應用案例三地下水需求量 $4.5 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時各井抽水量	90
表 15	定率模式應用案例三地下水需求量 $7.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時各井抽水量	90
表 16	定率模式應用案例三地下水需求量 $7.5 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時各井抽水量	90
表 17	敏感度分析地質參數變化範圍	91
表 18	序率模式應用案例模式設定	91
表 19	序率模式應用案例地質參數統計特性表	92
表 20	水頭洩降量與地層下陷量統計特性分析方法比較表 (90%需求可靠度)	93
表 21	真實可靠度及與需求可靠度之相對誤差	94

表 22 四種最大可抽水量於不同方案真實可靠度比較(水頭洩降限制)	95
表 23 四種最大可抽水量於不同方案真實可靠度比較(地層下陷限制)	96
表 24 彰化雲林地區各鄉鎮市年抽水量表	97
表 25 彰化雲林地區各鄉鎮市年入滲量表	98
表 26 濁水溪沖積扇地質參數設定表	99
表 27 濁水溪沖積扇分層抽水比例表	100
表 28 濁水溪沖積扇定率模式設定表	101
表 29 濁水溪沖積扇含水層水力傳導係數變化範圍表	101
表 30 濁水溪沖積扇地質參數統計特性表	102
表 31 序率模式各控制點最大允許地層下陷量設定表	103
表 32 濁水溪沖積扇序率模式設定表	104
表 33 方案(3a)各鄉鎮市最佳抽水量分布	105
表 34 方案(3b)各鄉鎮市最佳抽水量分布	106
表 35 方案(3c)各鄉鎮市最佳抽水量分布	107

圖目錄

圖 1	常見地下水管理模式分類圖	108
圖 2	試誤法演算概念圖	108
圖 3	數值模擬結合最佳化模式演算概念圖	109
圖 4	本研究模式建置流程圖	109
圖 5	阻水層水壓沿深度方向隨時間變化圖	110
圖 6	混合型態隨機變數示意圖	110
圖 7	定率管理模式驗證流程示意圖	111
圖 8	定率管理模式穩態驗證案例地下水系統圖	111
圖 9	定率管理模式穩態驗證案例試誤分析圖	112
圖 10	穩態驗證案例達最大可抽水量時各點地層下陷量模擬圖	112
圖 11	定率管理模式動態驗證案例試誤流程圖	113
圖 12	動態驗證案例達最大可抽水量時各點地層下陷量模擬圖 (第一管理期末)	113
圖 13	動態驗證案例達最大可抽水量時各點地層下陷量模擬圖 (第二管理期末)	114
圖 14	動態驗證案例達最大可抽水量時各點地層下陷量模擬圖 (第三管理期末)	114
圖 15	定率模式應用案例一地下水系統示意圖	115
圖 16	定率模式應用案例二地下水系統水平分區示意圖	115
圖 17	定率模式應用案例二地下水系統垂直分層與參數設定示意圖	116
圖 18	單井最大抽水能力與最大可抽水量關係圖	116
圖 19	地下水需求量與最小總地層下陷量關係圖	117
圖 20	敏感度分析龍捲風圖	117

圖 21 序率模式驗證流程圖	118
圖 22 取樣次數與參數樣本平均值關係圖	119
圖 23 取樣次數與參數樣本標準差關係圖	119
圖 24 最大可抽水量與需求可靠度關係圖	119
圖 25 井 A 第一時刻對控制點 <i>c</i> 之單位響應係數直方圖(5,000 個樣本).....	120
圖 26 FOVE 與蒙地卡羅模擬相對誤差比較圖(水頭洩降量).....	121
圖 27 FOVE 與蒙地卡羅模擬相對誤差比較圖(地層下陷量).....	121
圖 28 方案一控制點 <i>c</i> 第三時刻地層下陷量直方圖 (5,000 個樣本，90% 需求可靠度).....	121
圖 29 方案三控制點 <i>c</i> 第三時刻地層下陷量直方圖 (5,000 個樣本，90% 需求可靠度).....	122
圖 30 方案五控制點 <i>c</i> 第三時刻地層下陷量直方圖 (5,000 個樣本，90% 需求可靠度).....	122
圖 31 需求與真實可靠度相對誤差圖	123
圖 32 參數變異程度、可靠度與地層下陷統計特性關係圖	124
圖 33 5,000 組定率最大可抽水量不同方案之累積百分率	125
圖 34 序率模式最大可抽水量與 Q_{90} 、 Q_{100} 於不同方案變化圖	125
圖 35 Q_{90} 不同方案水頭洩降真實可靠度組體圖	126
圖 36 Q_{90} 不同方案地層下陷真實可靠度組體圖	126
圖 37 濁水溪沖積扇區域概況圖	127
圖 38 彰化縣近年(迄 2001 年)累積下陷量超過 50 公分觀測井	128
圖 39 大城鄉各觀測井累積地層下陷組體圖	129
圖 40 彰化線地下水管制區區域圖	130
圖 41 雲林縣地下水管制區區域圖	130
圖 42 濁水溪沖積扇數值模擬邊界示意圖	131

圖 43 濁水溪沖積扇水平分區示意圖	132
圖 44 濁水溪沖積扇地質垂直分層示意圖	133
圖 45 濁水溪沖積扇控制點位置圖(定率管理模式)	134
圖 46 方案(1a)(1b)最大可抽水量與控制點地層下陷最大允許值關係圖	135
圖 47 方案(1a)(1b)總抽水或補注量與控制點地層下陷最大允許值關係圖 ..	135
圖 48 (1a)方案地層下陷最大允許值 5 公分時各鄉鎮市抽水量或補注量 ..	136
圖 49 (1a)方案地層下陷最大允許值 10 公分時各鄉鎮市抽水量或補注量	137
圖 50 (1b)方案地層下陷最大允許值 5 公分時各鄉鎮市抽水量或補注量 ..	138
圖 51 (1b)方案地層下陷最大允許值 10 公分時各鄉鎮市抽水量或補注量	139
圖 52 方案(2a)(2b)最大可抽水量與抽水量上限增加百分比關係圖	140
圖 53 方案(2a)(2b)總抽水或補注量與抽水量上限增加百分比關係圖	140
圖 54 (2a)方案非地下管制區抽水量上限增加 180%時 各鄉鎮市抽水量或補注量	141
圖 55 (2b)方案非地下管制區抽水量上限增加 180%時 各鄉鎮市抽水量或補注量	142
圖 56 濁水溪沖積扇控制點位置圖(序率管理模式)	143
圖 57 最大可抽水量與需求可靠度關係圖	144
附圖 1 MILP 問題樹狀圖	144

符號說明

- a_Y : 具空間變異性隨機變數之相關尺度(Correlation Scale) ;
 B : 土層厚度 ;
 C : 具空間變異性隨機變數之定常共變異函數 ;
 $C()$: 共變異矩陣 ;
 E : Young's Modules ;
 $E[]$: 隨機變數之期望值 ;
 G : $\max[0, \text{水頭洩降量}]$;
 g : 重力加速度 ;
 i : 管理期指標 ;
 j : 抽水井指標 ;
 K : 水力傳導係數 ;
 k : 控制點指標 ;
 L : 地下水系統總分層數 ;
 l : 土層分層指標 ;
 LO : 極小之負數 ;
 $M()$: 動差母函數 ;
 m : 二進位變數，其值僅為 0 或 1 ;
 NC : 總控制點數 ;
 NP : 總抽水井數 ;
 NT : 總管理期數 ;
 n : 孔隙率 ;
 P : 孔隙水壓變動量 ;
 Q : 抽水量 ;
 Q^D : 地下水需求量 ;
 Q^* : 抽水井最大抽水能力(Maximal Pumping Capacity) ;
 $R()$: 相關係數矩陣 ;



- S : 源流項；
 \bar{S} : 深度平均抽水量；
 S_s : 比儲水係數；
 t : 管理期；
 t^* : 無因次時間；
 UP : 極大之正數；
 \vec{U}_s : 土體位移量；
 U_{sx} : 土體在 x 方向之位移量
 U_{sy} : 土體在 y 方向之位移量
 U_{sz} : 土體在 z 方向之位移量
 V : 由相關係數矩陣之特徵向量(Eigenvector)組成之正規化矩陣；
 $Var[]$: 隨機變數之變異數；
 W : 由互相獨立且均具標準常態分布之隨機變數組成之向量；
 Y : 自然對數水力傳導係數；
 Y' : 標準化之自然對數水力傳導係數；
 α_h, α_s : 水頭洩降量與地層下陷量限制條件之需求可靠度(Compliance Reliability)；
 β : 單位響應係數；
 Δh : 水頭洩降量；
 $\bar{\Delta h}$: 深度平均之水頭洩降量；
 Δh^* : 水頭洩降量最大允許值；
 Δs : 地層下陷量；
 Δs^* : 地層下陷量最大允許值；
 ε : 應變張量；
 $\Phi^{-1}[\alpha]$: 標準累積常態分布之反函數；
 γ : 流體壓縮係數；
 Λ : 由相關係數矩陣之特徵值(Eigenvalue)組成之對角矩陣；
 λ : 拉梅常數；

- μ : 拉梅常數；
- μ_Y : 對數水力傳導係數之期望值；
- ν : Poisson Modules
- ρ_w : 水之密度；
- σ_Y : 對數水力傳導係數之標準差；
- τ : 應力張量；
- Ω : 隨機變數水頭洩降量；
- ω : Ω 之值。



第一章 緒論

1.1 研究動機與目的

水資源為地球上萬物繁衍最重要需求之一，綜觀世界人類文明之起源，例如中國之於黃河流域、蘇美之於兩河流域(美索不達米亞)、以及埃及之於尼羅河，莫不倚河而居，進而發展出橫亘千古之歷史文化。

儘管地球上約有 $1.36 \times 10^{18} \text{ m}^3$ 體積之水，然淡水僅占 2.5% 之份量，而其中可供利用之淡水則約為 30.3%，包含 30% 之地下水以及 0.3% 之地表水。由於地下水含量遠大於地表水，加以地下水具有開發成本較低廉，且水質與水量較為穩定之優點，因此自古以來即為相當重要且可靠的水資源，尤其在氣候較為乾燥，或是因為自然環境影響而造成地表水利用不易之地區，地下水更可能是唯一之水資源來源。以美國為例，根據調查資料顯示，約有 56% 的人口使用地下水做為日常之飲用水，而在佛羅里達與新墨西哥州，地下水更供給了 90% 之水資源來源。而在台灣地區，依據經濟部水利署資料顯示，近五年約有平均 30% 之供水量係由地下水所供應，部分縣市因環境或產業結構影響，其地下水使用率更遠高於平均值。

近年來隨著社會變遷，工商及經濟發展迅速，人口急遽成長，加以環保意識抬頭，興建水庫已窒礙難行，使得地下水之需求量逐步增加，導致地下水超抽之現象普遍發生於世界各地。地下水超抽現象所帶來最直接的影響，就是可能導致地層下陷災害之發生。根據經濟部水利署統計資料，台灣地下水年超抽量達 33 億噸，造成約 1,170 平方公里之土地發生地層下陷，其中尤以雲林與彰化等縣市最為嚴重，年下陷量分別為 11.6 公分與 11.0 公分。地層下陷對環境會造成許多負面之影響，例如土壤壓密降低地下水系統之儲水容量、地表高程降低造成局部地區洪患之發生，而沿海地區更可能因此發生海水入侵地下水系統，產生地下水鹽化之現象，進而破壞可利用的水資源，其所造成的影響非常深遠且亦難以恢復，因此如何擬訂地下水管理策略，達到合理利用地下水資源，兼且避免地層下陷危害發生之目的，實為重要的研究課題。

為了達到合理運用地下水資源，兼且避免或降低相關災害發生之目標，地下

水管理模式(Groundwater Management Model)廣泛的被應用於各種研究中，例如地下水資源的開發(水量)或是地下水污染整治(水質)。地下水管理模式之精神在研訂一或多個目標函數(Object Function)，運用適當之搜尋技巧，尋找當狀態變數(States Variables，如水頭洩降量或汙染物濃度等)符合所有限制條件下之決策變數(Decision Variables，如各抽水井之抽水量)與最佳目標函數值，以水量管理而言最佳函數可為最大可抽水量(Maximal Total Pumpage)。然而儘管相關研究多如繁星，但絕大多數的研究僅考慮含水層中之水頭(或水位)洩降量為限制條件來推求最大可抽水量，並未將地層下陷的影響納入地下水管理模式中加以考量，再者，地下水位以及地層下陷量之變化與各項地質參數(例如水力傳導係數，Hydraulic Conductivity)息息相關，然受限於調查工作之困難，全面之地質參數資料勢不可得，在地質參數具有不確定性(Uncertainty)下，導致以管理模式求得之最大可抽水量亦具有不確定性存在。鑒於上述兩項原因，可能導致最大可抽水量被高估之現象，使得決策者在利用地下水管理模式進行地下水資源之調配管理時，發生不預期之地層下陷災害。因此完整的地下水管理模式，必須能將地層下陷量納入其限制條件中，同時考量地質參數不確定性對模式造成之影響，如此才可據以研擬較為可靠之地下水管理策略。

綜上所述，本研究之主要目的首先在發展一套以地層下陷量為考量之定率(Deterministic)地下水管理模式，同時進一步分析相關地質參數之不確定性，將此不確定性納入管理模式中，最終建立以可靠度為考量之序率(Stochastic)地下水管理模式，以作為合理運用地下水資源兼且達到防杜地層下陷危害發生的決策工具。

1.2 文獻回顧

地下水管理模式發展至今已有 50 年以上之歷史，其主要精神是在由一或多個限制條件所組成之可行解範圍內，尋找最佳之目標函數值，因此依據管理目標、建立方法以及模式架構等不同要項，地下水管理模式可展現多樣之變化，圖 1 所示為本研究整理之地下水管理模式分類圖，過去相關研究所發展之模式大體

上均適用此表述，故本節將依循圖 1 之架構對過往相關之研究文獻作一回顧。

1.2.1 定率地下水管理模式

定率地下水管理模式係指將模式中所需各項參數(包含地質與水文參數等)設定為已知且確定之數值，而不考慮其不確定性，一般而言，建構定率模式最簡單之方法為試誤法(Trial-and-Error)。試誤法之精神在事先擬定好(或以亂數選取)數種不同之決策變數組合(即管理策略)，並利用相關公式或數值模式模擬地下水系統在不同策略下之反應，以評估何種策略既可符合管理者設定之限制條件(例如水頭洩降量或地下水需求量)，又可達到最佳之目標函數值，試誤法之應用流程如圖 2 所示。Onta and Gupta (1995)曾以地層下陷為主要考量因子，配合試誤法建立地下水管理模式，其中用以模擬地層下陷量之數值模式係以三維地下水流(MODFLOW)與垂向一維土體壓密方程式耦合之觀念建立。而在抽水量管理上則依據公用水井、私用水井、水資源需求量與季節變化等條件，研擬了 5 個不同之管理策略，利用數值模式模擬不同策略下，1991 年至 2010 年間地層下陷量之變化，以評估泰國中部平原合宜之地下水抽取策略。

試誤法之優點在觀念直接簡單，僅需要一套可模擬地下水系統變化之公式或數值模式，而缺點則為試誤的過程相當耗費模擬之時間，尤其當系統龐大決策變數眾多時更為明顯，且求得之最佳策略並無法保證其接近全域(Global)或局部(Local)最佳解。

為了克服上述試誤法在搜尋最佳策略上之缺點，Deninger (1970)首先採用了地下水流模擬結合最佳化模式之觀點(Simulation-Optimization Approach)來建立地下水管理模式，其應用流程如圖 3 所示。一般而言，以此觀點建構地下水管理模式之方法可概分為嵌入法(Embedding Method)(Aguado and Remson, 1974, 1980)以及響應矩陣法(Response Matrix Method)(Gorelick, 1983)兩大類，其差別僅在於圖 3 中，將管理策略表示為最佳化模式方法之不同。以管理目的為地下水量而言，嵌入法係將地下水流控制方程式(Ground Water Flow Equation)以數值方法離散化後，直接將離散方程式做為最佳化模式中之限制式，再以線性規劃或非線性規劃等(Linear and Nonlinear Programming)演算法來搜尋最佳目標函數值。Aguado and

Remson (1974)首先將嵌入法應用於地下水量管理之問題，其限制式係利用有限差分法，將一維與二維之穩態(Steady State)、動態(Transient State)地下水流方程式加以離散化後產生，模式之目的則在尋找當管理區域內各點水頭不超過允許洩降量下之最大可抽水量。應用嵌入法求解地下水管理問題者甚多，如 Willis and Neuman (1977)、Molz and Bell (1977)、Remson and Gorelick (1980)、Peralta et al. (1991)、Duckstein et al. (1994)以及 Keshari et al. (1996)等。

由於嵌入法直接將地下水流方程式離散化後做為最佳化模式之限制式，水頭與抽水量之關係以差分式表示，因此限制式所組成之矩陣可視為具有模擬地下水流功能之數值模式，故以嵌入法建立之地下水管理模式不僅具有直觀之物理意義，且理論上可適用於各種水量或水質之管理問題。然亦由於嵌入法之特質，造成管理區域內之每一數值格網點於每一時刻之狀態變數，不管其是否為管理者所感興趣之點(即控制點，Control Point)，皆必須納入限制式中考量，因此對於大區域動態的問題，限制式組成之矩陣將會異常龐大，造成計算耗時甚至蒐尋過程無法收斂之現象。為了避免矩陣過於龐大之問題，Alley et al., (1976)提出時間拆解的概念，分別循序求解每一時刻之最佳化模式，但其亦指出以此方法求得之最佳解僅能代表該時刻，而無法計算全時(Whole Time)之最佳操作策略。

以 Simulation-Optimization 概念建構地下水管理模式之第二種方法為響應矩陣法。響應矩陣法係利用單位響應係數(Unit Response Coefficients)的概念，先求出管理區域內某一控制點因為任一井抽取一單位地下水造成之水頭洩降量(此洩降量即為單位響應係數)，再根據疊加法(Superposition)與線性系統理論(Linear System Theory)來建構抽水量與水頭洩降量之線性關係式，以作為最佳化模式中限制式。響應矩陣法最早是利用於石油工業中，用以模擬油井壓力變化對油田內壓力分佈之影響，由於油井對油田壓力變化與抽水井對含水層水頭變化之物理現象相似，因此 Deninger (1970)首先將響應矩陣法的概念應用於地下水管理模式中，其利用希斯方程式(Theis equation)求解單位響應係數。此外，利用響應矩陣法以求解地下水優化問題者甚多，如 Maddock and Haines (1975)、Haines and Dreizin (1977)、Heidari (1982)、Colarullo et al. (1984)、Reichard (1987)、Peralta et

al. (1988, 1990)以及李振誥(2000)等。

由於響應矩陣法引用線性疊加概念，其優點在於僅需要先行計算控制點之單位響應係數，最佳化模式中僅包含控制點之限制條件，因此相較於嵌入法，其限制式所組成之矩陣較小，特別適合應用於大區域且動態之問題，然其原則上只能適用於當地下水控制方程式符合線性系統之情況，例如侷限含水層(Confined Aquifer)，而在非侷限含水層(Unconfined Aquifer)由於抽水造成地下水位之降低，流通係數(Transmissivity)為時間之函數，導致其水流控制方程式形成非線性系統。為了克服響應矩陣法在非侷限含水層之限制，Maddock (1974)由 Boussinesq 方程式出發，藉由擾動理論(Perturbation Theory)之分析求出單位響應係數在非侷限含水層可表示為一無窮之冪級數(Power Series)，而當飽和含水層厚度遠大於水位洩降時，可忽略級數中之高次項。Danskin and Gorelick (1985)則採用疊代求解步驟，重複修正單位響應係數之值，並與地下水模式模擬之結果比較直到收斂。

無論是嵌入法或是響應矩陣法，此種結合數值模擬與最佳化模式之觀念，不僅克服了試誤法最佳解求得不易之缺點，且已廣泛地應用於地下水管理模式之建置與發展上，相關研究可參考 Gorelick (1983)所做之完整回顧，然在眾多之研究中，僅極少數有將地層下陷之影響納入考量。Larson et al. (2001)利用響應矩陣法建立以最大可抽水量為目標函數，地下水位為限制條件之地下水管理模式，並將其應用於美國加州聖喬昆谷(The San Joaquin Valley)。不同於以往之研究，其在地下水位之限制條件中加入了地層下陷之考量，即限制水頭在地下水抽取過程中，不可低於預壓密水頭(Preconsolidation Head)，以避免土體發生非彈性壓密(Inelastic Compaction)之現象。Phillips et al. (2003)亦曾利用響應矩陣法建立地下水管理模式，並將其應用於加州安特洛普谷地(The Antelope Valley)。其模式之目標函數為最大化管理期間內，各控制點在整個抽水過程中產生之最低水位值，而限制條件則為該地區之需水量。在此設定下，若某一控制點之初始地下水位遠高於其他控制點，則求解過程中將會過量的抽取此控制點之地下水，如此將可能造成地層下陷之危害。為了避免此現象之發生，該研究中對位在地層下陷敏感地區之控制點另外增加水位洩降之限制條件，首先限制其水位不得低於初始值，以避免

地層下陷發生，而隨著管理時間之前進則逐步降低水位最低限制值，以避免無法滿足最小需水量之情形。因此，無論是 Larson et al. (2001)或是 Phillips et al. (2003)，皆僅將地層下陷之影響以定性之方式納入水位之限制條件中考量，並非真正地以定量之方式，將地層下陷量作為狀態變數納入管理模式中考量。

1.2.2 序率地下水管理模式

由於天然含水層本身異質性(Heterogeneity)之特質，地質參數存在空間上之變異性(Spatial Variability)，然而實測地質資料往往極為有限而不足以描述地下水系統完整之地質分布狀況，於實際案例應用時，這些地質參數之不確定性將造成狀態變數亦存在不確定性，導致當利用管理模式計算之最佳解進行實際操作時，可能會發生狀態變數並不滿足限制條件之情形，造成不預期之危害，因此必須將參數的不確定性納入定率模式中加以考慮，進一步建立序率地下水管理模式。

序率地下水管理模式之建立方法一般而言可分為 CCP (Chance-Constrained Programming)以及 Multiple Realization Method 兩大類。CCP 最早是由 Charnes and Cooper (1959)所提出，其概念為將原本為定率之限制式，轉變為此定率限制式至少必須滿足可靠度 α 之機率型態。Tung (1986)首先將 CCP 應用於序率地下水管理問題中，該研究首先利用響應矩陣法建立定率之模式，而單位響應係數則是以 Cooper-Jacob 方程式計算，在假設水力傳導係數與比儲水係數(Specific Storage, S_s)為具不確定性地質參數後，以一階變異數分析法(First-Order Variance Estimation, FOVE)推導單位響應係數與水頭洩降量之統計特性，管理模式之目標則為在水頭洩降量不超過給定值之可靠度至少必須為 α 之限制下，求取最大之可抽水量。藉由蒙地卡羅模擬(Monte Carlo Simulation)之驗證，該研究指出當水力傳導係數之變異性不大時，水頭洩降量可根據中央極限定理(Central Limit Theorem, CLT)假設為常態分布。

Wagner and Gorelick (1987)首先應用 CCP 於地下水水質管理問題上，其管理之策略為利用 Pump-and-Treat 之方式達到降低或清除含水層中之污染物濃度。該模式之限制條件為控制點污染物濃度小於標準值之機率必須大於給定之可靠度，而目標函數則為最小化系統之抽水量，以盡量降低整治之成本。在污染物濃

度之統計特性方面，該研究假設其為常態分布，而模式中水力傳導係數為唯一具不確定性之地質參數。與 Tung (1986)相同，待最佳解求出後，其亦利用地下水污染傳輸數值模式與蒙地卡羅模擬驗證污染物濃度的機率密度函數型態。

利用 CCP 建構序率地下水管理模式之研究為數眾多，且廣泛地應用於不同之問題型態上，例如 Datta and Dhiman (1996)應用於污染物觀測井網之建置上，以求取在滿足決策者調查資料需求量之前提下，最小之觀測井網建置成本，惟其單位響應係數之不確定性定義為定率之單位響應係數加上一常態分配之亂數項，並未真正考慮各項地質參數之變異性對單位響應係數之影響。相較於上述以 CCP 建立之模式僅將定率限制式轉變為以可靠度為考量之機率型態，Sawyer and Lin (1998)在處理地下水污染整治之問題時，進一步考慮了目標函數中係數值之不確定性，在此研究中目標函數為最小化抽水操作成本，而其中之係數代表抽一單位水所需要之成本。上述之各項研究皆應用於虛擬案例，Tiedeman and Gorelick (1993)則利用 Wagner and Gorelick (1987)所發展之模式，實際應用於美國密西根州之地下水污染整治問題中。

不同於 CCP 將定率限制式轉變為機率型態之方法，Multiple Realization Method 則是利用統計取樣(Sampling)之技巧來考慮地質參數對狀態變數造成之影響。其概念為首先利用嵌入法或響應矩陣法建立定率之管理模式，依據管理區域地質參數之統計特性對地質參數進行取樣，因此差分式係數或是單位響應係數在每次取樣後皆會有所改變而產生新的限制式，最後再將全部之限制式同時考慮並推求最佳解(即總限制式數目等於原定率模式限制式數目乘以取樣次數)。Wagner and Gorelick (1989)首先將 Multiple Realization Method 應用於序率地下水管理模式之建置上，並考慮與 Wagner and Gorelick (1987)相同之地下水污染整治問題，在取樣 30 組可能之水力傳導係數並推求符合污染物濃度限制下之最小抽水量後，該研究再取樣 1000 組可能之水力傳導係數，以最小抽水量配合地下水污染傳輸模式與蒙地卡羅模擬，計算是否有超過污染物濃度限制之情況發生。經由以上步驟其發現最佳解具有 90%之可靠度，僅有 10%的機率污染物濃度無法降低到到給定之要求。其他利用 Multiple Realization Method 建立序率地下水管理模式之

研究尚包含 Wagner et al. (1992), Chan (1994) 以及 Mylopoulos et al. (1999) 等。

比較上述兩種方法可知，CCP 之優點在於並不因為考慮了參數之不確定性而造成限制式增加之情形，如此可避免最佳化演算法求解時間加大或無法收斂之現象，以線性規劃而言，Reklaitis et al. (1983) 指出求解時間約與限制條件數目之三次方成正比。CCP 之另一項優點為加入了可靠度之觀點，提供決策者更彈性之應用，能夠依據各控制點不同之現況條件及其重要性，給定不同之可靠度需求。

CCP 之主要缺點在於其最佳化模式因包含機率型態之限制式，必須事先知道狀態變數之機率密度函數(Probability Density Function, PDF)型態，再藉由 PDF 反函數運算之技巧，將機率型態之限制式轉變為具相同數學意義之定率限制式，如此才可使用傳統之最佳化演算法搜尋最佳解，然而狀態變數之 PDF 往往難以推斷，且會隨著地質參數不確定性程度之變化而改變，因此必須以先行假設再事後驗證之方式加以克服。近年來隨著電腦計算能力之大幅躍進，求解 CCP 已可使用統計模擬(Stochastic Simulation)結合遺傳演算法(Genetic Algorithm)之方法(Liu, 1999)，來避免 PDF 反函數推求之難處。CCP 另一項缺點為各限制式被滿足之可靠度係分別考慮，亦即假設各限制式彼此互相獨立，因此在模式應用時並無法考慮整體系統(此處系統定義為串連式)之可靠度。

Multiple Realization Method 最主要的好處在於僅需知道含不確定參數之統計特性，而不像 CCP 必須進一步分析(或假設)狀態變數之統計特性。而此方法最主要之缺點在於模式之健壯性(Robustness)與最佳解搜尋難易度呈現競合之關係，在此健壯性意指實際利用最佳解進行地下水管理操作時，不會發生違背限制條件之機率。Chan (1993) 以理論推導之方式提出以 Multiple Realization Method 建立之序率模式，其健壯性可表示為 $(N+1)/(N+2)$ 或 $N/(N+1)$ ，其中 N 為取樣次數，即健壯性僅與參數取樣次數呈正相關，而與參數不確定性等其他因子無關，因此理論上無論任何地下水管理問題，在相同取樣次數下皆可獲得相同之健壯性。然而 Feyen and Gorelick (2004) 利用 Multiple Realization Method 建立以地下水量管理為目標之序率模式，在分析 36,000 組不同案例之計算結果後，該研究指出模式之健壯性不僅與參數取樣次數呈正相關，亦與參數之不確定性程度呈反比，且 Chan

(1993)之公式可能有過於高估模式健壯性之現象。因此當模式應用於大區域且地質參數具有高度不確定性時，參數取樣次數之決定將造成模式使用上之困擾。

Multiple Realization Method 之另一項缺點在於並未直接將可靠度的觀念融入模式中，決策者無法在事前(Priori-Optimization)以可靠度作為管理上之考量，而須待求出最佳解後，再配合蒙地卡羅模擬分析最佳解之可靠度(Post-Optimization)。為了解決此問題，Morgan et al. (1993)在模式每一條限制式中增加一個二進位變數(Binary Variables)，並依據事前給定之可靠度限制二進位變數之和，模式形成混合整數規劃(Mixed Integer Programming)，以彈性的調整哪些限制式可不被滿足，然此方法仍會面臨前段提及健壯性之問題，為了滿足健壯性之要求而增加參數取樣次數將會同時導致二進位變數之增加，而混合整數規劃求解所需時間約正比於二進位變數數目之指數次方(Floudas, 1995)，造成當參數不確定性程度高時難以求解之現象。

1.3 研究方法與步驟

如前節所提及，多數之地下水管理模式並未考慮地層下陷之影響，即使如 Onta and Gupta (1995)、Larson(2001)以及 Phillips et al. (2003)等之研究，但前者採用試誤法，並未能有效率的尋得最佳解，而後二者亦僅是在模式計算前先行評估可能造成地層下陷的水頭洩降量，其管理模式還是以水頭作為限制條件，並未真正定量地將地層下陷量也納入模式中，且三者均未考慮地質參數不確定性對管理策略所造成之影響。

引發地層下陷之機制有相當多種，例如重物負載(如大型建物)、氣候季節變化(影響土壤含水率)、地震或火山活動以及地下水位降低(地下水超抽)等，而不同之機制其地層下陷持續之時間與規模亦有所不同，本研究中將僅探討因地下水超抽而導致之地層下陷。因地下水超抽引致之地層下陷問題具有以下特點：(1)以物理機制而言，其具有長時間尺度之現象；(2)以實務觀點而言，其影響範圍通常屬於區域性大空間尺度。因應上述兩項特點，本研究將以水量管理為目的，採用響應矩陣法以及 CCP 來建立考量地層下陷量以及參數不確定性影響之序率地下水

管理模式。模式之建置流程如圖 4 所示，共包含四大步驟，以下簡述各步驟之目的及方法，詳細之理論及推導過程詳述於第二章。

- (1) 定率地下水管理模式建立：以水量管理為目的，利用響應矩陣法結合一維土體壓密方程式，建立以水頭與地層下陷量為狀態變數之定率地下水管理模式。
- (2) 單位響應係數統計特性分析：首先分析地質參數之不確定性及其空間變異性，利用統計取樣之技巧產生參數之分布後，可進一步配合地下水數值模式分析單位響應係數之統計特性。
- (3) 狀態變數統計特性分析：狀態變數為單位響應係數及其他地質參數之函數，因此亦具有不確定性存在，本研究將採用 FOVE 推導狀態變數之平均值與標準差。
- (4) 序率地下水管理模式建立：利用 CCP 之概念，將步驟(1)之定率模式擴充為以可靠度為考量之序率模式；而序率模式求解過程中所需之限制式轉換則可以步驟(3)之結果獲得。

1.4 章節介紹

前面已闡述本研究之目的、相關文獻回顧以及研究方法等，以下扼要說明本論文各章節之主要內容，期使讀者能對本論文整體架構有一初步之了解。

第一章為緒論，旨在闡明本研究之主要目的，同時針對過往地下水管理模式相關之研究做一回顧，以說明本研究之重要性以及所採用之方法。

第二章為理論基礎與模式建置，詳細說明本研究模式建置所採用之方法、假設與流程。

第三章為定率模式之驗證與案例應用，首先利用試誤法配合地下水數值模式驗證定率模式之正確性，而案例應用部分則將展示地下水量管理問題中，水頭洩降與地層下陷量必須同時考慮之必要性。

第四章為序率模式之驗證與案例應用，藉由虛擬之案例模擬，驗證序率模式之健壯性。

第五章為濁水溪沖積扇地下水管理策略研擬與模式應用，首先介紹濁水溪沖

積扇之現況及其地層下陷問題之嚴重性，依據政策、地理條件及水資源需求等，分別以定率與序率之觀點研擬管理方案，最後則以本研究所建立之模式探討在不同方案規劃下，濁水溪沖積扇之最佳抽水操作策略。

第六章為結論與建議，除了對本研究之研究過程與成果做綜合性之說明外，並對未來可加以改進之方向提出建議。



第二章 理論基礎與模式建置

2.1 地層下陷數值模式簡介

依據第一章文獻回顧之內容(圖 2 與圖 3)，管理模式之建立其首要工作為必須具備一套可靠且有效率之數值模式。本研究將採用蔡東霖(2001)所發展之「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」，作為計算地下水位與地層下陷變化之工具。本節將針對該模式之理論架構、建立方法以及適用條件等作一簡介。

地下水之抽取會造成土體孔隙水壓(Pore Water Pressure)之下降，而在土體總應力不變之情況下，其有效應力(Effective Stress)將會增加，進而導致土體發生壓密之現象。考慮一飽和且等向(Isotropic)均值(Homogeneous)之含水層，若忽略浮體重力之效應並假設土體為彈性體(Elastic Body)，則孔隙水壓變化與土體位移量之關係可以式(1)-(4)之三維耦合控制方程式表示。

$$K \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = \rho_w g \left(\frac{\partial^2 U_{sx}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U_{sy}}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 U_{sz}}{\partial z \partial t} + n \gamma \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (1)$$

$$\mu \nabla^2 U_{sx} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{U}_s) = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

$$\mu \nabla^2 U_{sy} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{U}_s) = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

$$\mu \nabla^2 U_{sz} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{U}_s) = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4)$$

式中 K 為水力傳導係數(LT^{-1})； P 為孔隙水壓變動量($ML^{-1}T^{-2}$)； ρ_w 為水之密度(ML^{-3})； g 為重力加速度(LT^{-2})； \vec{U}_s 為土體位移量(L)； U_{sx} 、 U_{sy} 和 U_{sz} 分別為土體在 x 、 y 和 z 方向之位移量(L)； n 為土壤孔隙率； t 為時間(T)； μ 與 λ 為拉梅常數(Lame Constants, $ML^{-1}T^{-2}$)以及 γ 為流體壓縮係數($M^{-1}LT^2$)。

式(1)-(4)之三維耦合方程式雖可同時計算土體孔隙水壓以及垂直與水平方向之位移量，但對於模擬大區域且非穩態之問題仍可能有使用上之困難度。在土體

垂向位移量遠大於水平位移量之假設下，蔡東霖(2001)利用量階分析(Order of Magnitude)之技巧，推導出當孔隙水壓垂直方向與水平方向之梯度變化差異極大時(即地下水流近似為水平流或垂直流)，式(1)-(4)之三維耦合控制方程式可簡化為非耦合之地下水流方程式與垂向一維土體壓密方程式，亦即可先單獨計算地下水流之變化，再據以推估垂向之地層下陷量。

(1) 擬三維地下水流計算

考慮一多層之地下水系統，假設土壤為飽和且土體體積之變化與孔隙水壓呈正比關係，則三維地下水流方程式可以下式表示：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \Delta h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right) = -S_s \frac{\partial \Delta h}{\partial t} - S(x, y, z) \quad (5)$$

式中 Δh 為水頭洩降量，正值代表地下水位降低(L)； S_s 為比儲水係數(L⁻¹)； S 則為流源項。對任一層之含水層，將式(5)沿深度進行垂向積分可得：

$$\int_b \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \Delta h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right) \right] dz = \int_b \left[-S_s \frac{\partial \Delta h}{\partial t} - S \right] dz \quad (6)$$

式中 b 為含水層之上下邊界。利用萊布尼茲法則(Leibnitz Rule)與連鎖律(Chain Rule)，並進一步假設土體參數在垂直向為一常數，則式(6)可變為：

$$\begin{aligned} & KB \frac{\partial^2 \overline{\Delta h}}{\partial x^2} + KB \frac{\partial^2 \overline{\Delta h}}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (KB) \right] \frac{\partial \overline{\Delta h}}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial y} (KB) \right] \frac{\partial \overline{\Delta h}}{\partial y} \\ & = -S_s B \frac{\partial \overline{\Delta h}}{\partial t} + K \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial z} \Big|_b \right) - \overline{S} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 B 為含水層厚度； $\overline{\Delta h}$ 和 \overline{S} 分別為水頭洩降量與流源項之深度平均值(Depth-Averaged)。在垂直邊界條件之處理上，蔡東霖(2001)假設孔隙水壓在垂直方向為 z 之二次多項式函數，不僅滿足層與層間孔隙水壓與水流通量連續之邊界條件，更可自動計算水流為水平流或垂直流，達到分層三維水流模擬之功能。

(2) 一維土體壓密方程式

假設土體為彈性體，則其應力與應變可以如下式之正比關係表示：

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (8)$$

其中 τ 與 ε 分別代表應力與應變之張量； C 為常數。Reismann and Pawlik (1980) 指出，當土體具有等向性時， C 則為拉梅常數 $\mu = E/2(1+\nu)$ 以及 $\lambda = \nu E/[(1-2\nu)(1+\nu)]$ 之函數，其中 E 與 ν 分別為 Young's and Poisson modules，而 μ 與 λ 分別代表土體受剪應力(Shear Stress)以及正向應力(Normal Stress)作用而產生之變形率，因此物理上可將此二個拉梅常數視為互相獨立(Independent)。而 Bear and Verruijt (1987) 在進一步假設土體之位移僅為垂向一維後，提出土體之位移量與孔隙水壓變化可以下式表示：

$$\frac{\partial U_{sz}}{\partial z} = \frac{P}{2\mu + \lambda} \quad (9)$$

將式(9)沿土層深度方向積分，並忽略土體因孔隙水壓增加而產生之回漲現象，則一維土體壓密方程式可以下式表示：

$$\Delta s(l, k, t) = \frac{\rho_w g B(l, k) [\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1)]}{2\mu(l, k) + \lambda(l, k)} \quad \text{if } \Delta h(l, k, t) > \Delta h(l, k, t-1) \quad (10)$$

$$= 0 \quad \text{if } \Delta h(l, k, t) \leq \Delta h(l, k, t-1)$$

式中 $\Delta s(l, k, t)$ 代表 k 點之第 l 層於 $t-1$ 至 t 時刻內之地層下陷量(L)。

(3) 數值模式建立與其限制

在數值模式建立部分，蔡東霖(2001)利用有限解析法(Finite Analytic, FA)求解式(7)，待計算出各含水層於每一時刻之水頭洩降量後，再以式(10)推估其所造成之地層下陷量，完成擬似三維地下水流模擬以及一維地層下陷量計算之非耦合數值模式。而該模式主要有兩項限制，即(a)地下水流與地層下陷非耦合之計算方式適用於近似水平流或垂直流，因此模式無法應用於如非完全貫穿抽水井附近之地層下陷計算；(b)模式之建立係採用土體為彈性體之假設，因此無法模擬大應變或地下水位反覆升降時之土層變化。

2.2 定率地下水管理模式架構

2.2.1 模式建立

對於複雜系統之規劃或操作而言，由於變數(或子系統)眾多且彼此互相影響，因此工程上常會將問題以最佳化模式之形態表示，用以分析最佳系統成效(Performance)與系統變數間之關係。一般而言，最佳化模式可以如下之通式表示：

$$\text{Optimize } f(\mathbf{x}) \quad (11)$$

$$\text{Subject to } g_j(\mathbf{x}) \leq b_j ; \forall j \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_U \quad (13)$$

其中 \mathbf{x} 為決策變數組成之向量； $f(\bullet)$ 為目標函數； $g(\bullet)$ 為狀態函數； b 為常數，代表狀態變數之限制值；而 \mathbf{a}_L 與 \mathbf{a}_U 則分別代表決策變數上下邊界所組成之向量。式(12)與式(13)所形成之區域稱為 \mathbf{x} 之可行解(Feasible Solution)，因此最佳化模式之意義即為在可行解區域內，尋找能使目標函數為最佳之決策變數。

在地下水量管理問題中，若以最大地下水資源開採為目標，並且同時考量水頭洩降與地層下陷之影響，則管理模式可以如下之最佳化模式表示：

$$\text{Maximize } \sum_{j=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} Q(j,t) \quad (14)$$

$$\text{Subject to } \Delta h(k,t) \leq \Delta h^*(k,t) \quad t=1,\dots,NT; k=1,\dots,NC \quad (15)$$

$$\Delta s(k,t) \leq \Delta s^*(k,t) \quad t=1,\dots,NT; k=1,\dots,NC \quad (16)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad t=1,\dots,NT; j=1,\dots,NP \quad (17)$$

其中 j 為第 j 口抽水井； NP 為總抽水井數； t 為第 t 個管理期； NT 為總管理期數； k 為模擬區域內第 k 個控制點； NC 為總控制點數； $\Delta h(k,t)$ 以及 $\Delta h^*(k,t)$ 分別代表 t 個管理期末於第 k 點之實際與最大允許水頭洩降量，而 $\Delta s(k,t)$ 以及 $\Delta s^*(k,t)$ 則分別代表 $t-1$ 至 t 個管理期內之實際與最大允許地層下陷量； $Q(j,t)$ 與 $Q^*(j,t)$ 分別為第

j 口井於第 t 管理期之抽水量及其上限值。式(14)至式(17)所組成之最佳化模式中，各抽水井之抽水量為決策變數，而水頭洩降量與地層下陷量則為狀態變數，其意義為在各控制點於每個管理期之水頭洩降量與地層下陷量皆不超過最大允許值之情況下，尋找各抽水井抽水量於時空上之分布，以使管理期終了時管理區域內之總抽水量為最大。

除了最大化地下水資源開採外，地下水量管理問題亦可採行最小化水頭洩降量或地層下陷量之概念，其最佳化模式可表示為：

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \{c_{k,t}^h \Delta h(k,t) + c_{k,t}^s \Delta s(k,t)\} \quad (18)$$

$$\text{Subject to} \quad \Delta h(k,t) \leq \Delta h^*(k,t) \quad t=1, \dots, NT; k=1, \dots, NC \quad (15)$$

$$\Delta s(k,t) \leq \Delta s^*(k,t) \quad t=1, \dots, NT; k=1, \dots, NC \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{NP} Q(j,t) \geq Q_t^D \quad t=1, \dots, NT \quad (19)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad t=1, \dots, NT; j=1, \dots, NP \quad (17)$$

其中 c 為權重係數，可均為 1 或依各控制點於管理上不同之重要程度加以調整，例如若控制點位於嚴重地層下陷區，則可適度調高該控制點之權重係數，因此在最佳解搜尋過程中會盡量避免該控制點發生地層下陷； Q_t^D 為第 t 個管理期時之地下水需求量。水頭洩降量與地層下陷量限制式之意義在於避免即使管理區域總下陷量(或總水頭洩降量)為最小，但仍有局部控制點發生過大之下陷量(或水頭洩降量)。

無論是以最大化地下水開採或最小化水頭洩降與地層下陷為目標，於實務應用上，由於季節、氣候與水文條件等變化，地下水位常呈現週期性地升降，因此吾人可依此週期規範每一管理期之水頭洩降量，或僅限制管理期終了時之最終洩降量以降低限制式的數目。然由於地層下陷具有不可逆性，亦即一旦發生地層下陷，將很難回覆原貌，因此地層下陷量必須於每一管理期皆給予限制值。

欲求解上述之地下水管理問題，必須建立抽水量與水頭洩降量以及地層下陷

量間之關係，以下將由單層含水層開始並擴展到多層地下水系統，詳述其關係式之建立。

考慮單層之侷限含水層，並假設各抽水井皆完全貫穿含水層，則根據響應矩陣法之理論，抽水量與水頭洩降量間可以線性之關係表示，式(15)可轉換為：

$$\Delta h(k,t) = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(k,j,t-i+1) Q(j,i) \leq \Delta h^*(k,t) \quad t=1,\dots,NT; k=1,\dots,NC \quad (20)$$

其中， $\beta(k,j,t-i+1)$ 代表單位響應係數，其意義為於 t 管理期末，第 k 點因為抽水井 j 於 i 管理期內抽一單位水所造成之水頭洩降量。本研究中推求單位響應係數之方法為(1)令第 j 口井於第 1 個管理期之抽水量為 1 CMS，其餘抽水井之抽水量為 0；(2)利用「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」計算第 1 至第 NT 管理期末控制點 k 之水頭洩降量，則此 NT 個水頭洩降量即為 k 點對抽水井 j 之單位響應係數 $\beta(k,j,t); t=1,\dots,NT$ ；(3)重複步驟(1)與(2)求出每一抽水井對每一控制點於各管理期之單位響應係數。

依據式(10)之一維土體壓密方程式，若僅考慮因孔隙水壓下降土體有效應力上升所產生之土體壓密，而忽略土體因孔隙水壓升高所造成之回漲現象，則式(16)可表示為：

$$\Delta s(k,t) = \frac{\rho_w g B_k G(k,t)}{2\mu_k + \lambda_k} \leq \Delta s^*(k,t) \quad (21)$$

其中，

$$G(k,t) = \begin{cases} \Delta h(k,t) - \Delta h(k,t-1) = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t [\beta(k,j,t-i+1) - \beta(k,j,t-i)] Q(j,i) & \text{if } \Delta h(k,t) - \Delta h(k,t-1) > 0 \\ 0 & \text{if } \Delta h(k,t) - \Delta h(k,t-1) \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

結合式(20)、(21)與式(22)，則式(18)之目標函數可轉換為抽水量之函數，即：

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \left\{ c_{k,t}^h \left[\sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(k,j,t-i+1) Q(j,i) \right] + c_{k,t}^s \frac{\rho_w g B_k G(k,t)}{2\mu_k + \lambda_k} \right\} \quad (23)$$

進一步考慮多層之地下水系統，假設含水層與阻水層中之地下水流分別為水平流及垂直流(Anderson and Woessner, 1991)，且在非侷限含水層中，因抽水而導致之水位洩降遠小於飽和含水層厚度，則各層之水頭(水位)洩降可依據式(20)加以變化為：

$$\Delta h(l, k, t) = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(l, k, j, t-i+1) Q(j, i) \leq \Delta h^*(l, k, t) \quad \forall t; \forall k; l=1, \dots, L \quad (24)$$

其中 L 為地下水系統總層數。而地層下陷量則為各層下陷量之總和，即：

$$\Delta s(k, t) = \sum_{l=1}^L \frac{\rho_w g B(l, k) G(l, k, t)}{2\mu(l, k) + \lambda(l, k)} \leq \Delta s^*(k, t) \quad \forall t; \forall k \quad (25)$$

式(23)之目標函數宜修正為：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \sum_{l=1}^L [c_{l,k,t}^h \Delta h(l, k, t) + c_{l,k,t}^s \Delta s(l, k, t)] \\ & = \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \sum_{l=1}^L \left\{ c_{l,k,t}^h \left[\sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(l, k, j, t-i+1) Q(j, i) \right] + c_{l,k,t}^s \frac{\rho_w g B_{l,k} G(l, k, t)}{2\mu_{l,k} + \lambda_{l,k}} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)中，由於吾人僅關心各控制點分層下陷量之總和，故並不需考慮各分層下陷量之權重係數。

由於阻水層水力傳導係數較低以及貯蓄效應之影響，阻水層內孔隙水壓消散之速率相當緩慢，根據 Terzaghi (1925)，阻水層因受相鄰含水層水壓改變 Δh 而產生之水壓沿深度方向隨時間之變化可以圖 5 表示，Bredehoeft and Pinder (1970) 提出當無因次化時間 $t^* = Kt/S_s B^2$ 大於 0.5 時，阻水層貯蓄效應之影響可加以忽略(即圖 5 中水壓分布曲線趨近於直線)，因此當應用式(24)計算阻水層內之水頭洩降變化時，必須注意所給定之管理期距 Δt 必須大於 $0.5 S_s B^2 / K$ ，以使孔隙水壓之消散達到平衡狀態，避免發生地層下陷量低估之狀況。而若因管理策略上之需求而無法滿足 $\Delta t > 0.5 S_s B^2 / K$ 之條件時，可將阻水層以虛擬分層之概念將其水平切割為數個子阻水層，以使管理期距滿足達到平衡狀態所需時間之要求。

結合式(14)、(17)、(24)、(25)或是式(17)、(19)、(24)、(25)、(26)即為本研究

所發展可適用於多層地下水系統、考慮地層下陷量影響，且分別可應用於最大化地下水資源開採以及最小化地層下陷量(或水頭洩降量)之定率地下水量管理模式，茲分別整理如下：

(1) 以最大地下水資源開採為目標

$$\text{Maximize} \quad \sum_{j=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} Q(j,t) \quad (14)$$

$$\text{Subject to} \quad \Delta h(l,k,t) = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(l,k,j,t-i+1)Q(j,i) \leq \Delta h^*(l,k,t) \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (24)$$

$$\Delta s(k,t) = \sum_{l=1}^L \frac{\rho_w g B(l,k) G(l,k,t)}{2\mu(l,k) + \lambda(l,k)} \leq \Delta s^*(k,t) \quad \forall t; \forall k \quad (25)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad \forall t; \forall j \quad (17)$$

(2) 以最小水頭洩降量與地層下陷量為目標

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \sum_{l=1}^L [c_{l,k,t}^h \Delta h(l,k,t) + c_{l,k,t}^s \Delta s(l,k,t)] \\ & = \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \sum_{l=1}^L \left\{ c_{l,k,t}^h \left[\sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(l,k,j,t-i+1)Q(j,i) \right] + c_{l,k,t}^s \frac{\rho_w g B_{l,k} G(l,k,t)}{2\mu_{l,k} + \lambda_{l,k}} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{Subject to} \quad \Delta h(l,k,t) = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \beta(l,k,j,t-i+1)Q(j,i) \leq \Delta h^*(l,k,t) \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (24)$$

$$\Delta s(k,t) = \sum_{l=1}^L \frac{\rho_w g B(l,k) G(l,k,t)}{2\mu(l,k) + \lambda(l,k)} \leq \Delta s^*(k,t) \quad \forall t; \forall k \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^{NP} Q(j,t) \geq Q_t^D \quad \forall t \quad (19)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad \forall t; \forall j \quad (17)$$

當管理問題符合以下條件時，本研究所發展之定率管理模式可進一步加以簡化：

(1) 單一含水層系統

當地下水系統僅為單一含水層時，由於拉梅常數(μ 與 λ)、土層厚度(B)以及最大允許地層下陷量 $\Delta s^*(k,t)$ 為已知，因此藉由式(21)之運算可求出在 $t-1$ 至 t 管理期內，造成 $\Delta s^*(k,t)$ 之水頭洩降量 $\Delta h^{**}(k,t)$ ，則式(16)可忽略並將式(15)之水頭最大允許洩降量 $\Delta h^*(k,t)$ 修正為 $\min[\Delta h^*(k,t), \Delta h^*(k,t-1) + \Delta h^{**}(k,t)]$ ，因此模式可簡化為傳統僅包含水頭洩降量為限制式之管理模式，且可將地層下陷量自目標函數式(18)中移除。

(2) 多層地下水系統

由於分層水頭洩降量並不像分層地層下陷量一樣，可藉由加總來表示為控制點之總下陷量，因此在多層地下水系統中必須給定分層之最大允許水頭洩降量 $\Delta h^*(l,k,t)$ ，然此一數值往往難以給定且將造成管理問題過於複雜化，鑑於地下水量管理最重要之目標即在控制地層下陷(因地下水位即使回復地層亦無法復原)，因此在實務應用上可忽略式(24)而僅考慮式(25)，且分層水頭洩降量可自目標函數式(26)中移除。而若因管理策略需求必須考慮 $\Delta h^*(l,k,t)$ 之情況下，可將 $\Delta h^*(l,k,t) - \Delta h^*(l,k,t-1)$ 代入式(25)中推求當分層水頭洩降等於 $\Delta h^*(l,k,t)$ 時所造成之總下陷量 $\Delta s^{**}(k,t)$ ，並分別考慮如下兩種情況：

- (a) 若 $\Delta s^{**}(k,t) \leq \Delta s^*(k,t)$ ，則利用管理模式計算出之最佳抽水量分布不會造成地層下陷量超過其最大允許值之情形，因此式(25)可忽略，模式簡化為傳統僅包含水頭洩降量為限制式之管理模式，且可將地層下陷量自目標函數式(26)中移除。
- (b) 若 $\Delta s^{**}(k,t) > \Delta s^*(k,t)$ ，則忽略式(25)所求得之最佳抽水量分布將會使總地層下陷量超過其最大允許值；而因為模式會在滿足 $\Delta s^*(k,t)$ 之情況下，自動調整分層地層下陷量之值以使總抽水量為最大(或使總下陷量為最小)，吾人並不需要也無法規範分層地層下陷量之最大允許值，因此亦無法利用前段所述單一含水層之模式簡化技巧來替換 $\Delta h^*(l,k,t)$ ，故模式之限制條件必須完整考慮。

2.2.2 求解方法

根據前節所發展之地下水量管理模式，若應用於單一含水層則模式在加以簡化後形成線性規劃之問題，不僅求解容易且亦可保證為全域最佳解；然當模式無法簡化時，由於 G 為在原點不連續之函數，導致式(25)為局部不可微分之函數，成為不連續之最佳化問題(Non-smooth Optimization)。儘管已有很多種解 Non-smooth Optimization 之演算法發展出來，然而 Uryas'ev (1991)以及 Yang (2001) 之研究指出，Non-smooth Optimization 之計算相當費時，且其演算法具有不易收斂以及無法評估最佳解是否為局部或全域最佳值之缺點。本研究中藉由導入二進位變數並增加限制式之方法，將原本 Non-smooth Optimization 問題轉變為混合整數線性規劃(Mixed Integer Linear Programming, MILP)，其新增之限制式可表示如下：

$$\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1) + LO \times m(l, k, t) \geq LO \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (27)$$

$$\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1) - UP \times m(l, k, t) \leq 0 \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (28)$$

$$\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1) - G(l, k, t) \leq 0 \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (29)$$

$$\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1) - G(l, k, t) - UP \times m(l, k, t) \geq -UP \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (30)$$

$$G(l, k, t) - UP \times m(l, k, t) \leq 0 \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (31)$$

$$G(l, k, t) \geq 0 \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (32)$$

其中 LO 與 UP 分別為絕對值足夠大之負數與正數； $m(l, k, t)$ 為第 t 管理期中， k 點第 l 層之二進位變數，其值僅為 0 或 1。茲分別就以下兩種情況加以探討：

(1) $\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1) > 0$ ：由式(28)可知 m 必為 1，而當 m 等於 1 時，由式(29)以及式(30)可推論 $G(l, k, t)$ 必等於 $\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1)$ ，此時將會發生地層下陷。

(2) $\Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1) < 0$ ：由式(27)可知 m 必為 0，而當 m 等於 0 時，由式(31)與式(32)可分別歸納出 $G(l, k, t) \leq 0$ 以及 $G(l, k, t) \geq 0$ ，因此 $G(l, k, t)$ 必等於 0，此

時不會發生地層下陷。

由上述兩種情況之討論可知，轉換後之 MILP 問題與轉換前之 Non-smooth Optimization 具有完全相同之意義。本研究使用 Branch-and-Bound (B&B Method) 方法以求解此 MILP 問題，由於該方法在每一演算分支將 MILP 轉換為線性規劃，因此所得之最佳解即為全域最佳值。B&B 方法之概念簡述於附錄一中，而其詳細理論與步驟可參考 Hillier and Lieberman (1974) 以及 Sierksma (1996)。

2.3 序率地下水管理模式架構

2.3.1 不確定性參數定義

前節所建立之定率地下水管理模式已能同時考慮水頭洩降量與地層下陷量之影響，而由式(5)及式(10)可知，假設水之密度 ρ_w 為定值之情況下，地層下陷量與水頭洩降量(或單位響應係數)為土層厚度(B)、拉梅常數(μ, λ)、水力傳導係數(K)以及比儲水係數(S_s)之函數。這些地質參數通常在空間上具有一定程度之變異性，因此管理區域內任一點之現地試驗或調查資料並無法代表整個區域之地質參數實際分布狀態，然實務上由於完整調查資料之缺乏，地質參數數值在使用上具有不確定性存在，導致水頭洩降量與地層下陷量之計算結果亦存在不確定性。

以地下水系統而言，由於地層下陷量之尺度通常遠小於土層厚度，因此土層厚度之不確定性可加以忽略；另根據 Tung (1986) 之研究，在含水層中比儲水係數之改變對水頭洩降之影響程度可加以忽略，而在阻水層中亦僅是影響孔隙水壓消散達平衡之速率，故比儲水係數之不確定性亦可加以忽略。

綜上所述，本研究中將視 K 、 μ 與 λ 等為具有不確定性之地質參數，並進一步假設其機率密度函數皆為對數常態分布(Log-Normal Distribution) (Gelhar, 1993)，考慮其不確定性之影響以建立序率地下水管理模式。

2.3.2 單位響應係數統計特性分析

本研究中分析單位響應係數統計特性係採用蒙地卡羅模擬法，首先對地質參數取樣 n 組資料，再利用「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」計算 n 組之單

位響應係數樣本，則此樣本即可用以估計單位響應係數之各階動差(Moment)。

地質參數為一具強烈空間關聯性之隨機變數，因此在利用蒙地卡羅模擬法分析單位響應係數前，必須先行估算地質參數於空間上不同點彼此間之相關性，同時設法消除此相關性以便能對地質參數進行取樣。由於地殼變動與地層沉積之特性，同一位置內不同地層常具有迥異之特性，因此本研究假設地質參數僅具有平面二維之空間相關性，垂直方向上不同分層之地質參數則為互相獨立。傳統上地質參數之空間變異性分析皆假設符合二階定常性(Second-Order Stationary)(Cressie, 1993)，二階定常性代表具空間變異性之隨機變數其期望值於空間內任一點皆相等，且空間內任兩點之共變異數(Covariance)僅與兩點間之距離以及方向有關，而與兩點所在之位置無關，以數學形式表示則為：

$$E[X(s)] = \mu_x \quad (33)$$

$$\text{Cov}[X(s_1), X(s_2)] = C(|s_1 - s_2|) \quad (34)$$

其中， X 為具空間變異性之地質參數； s 表示空間內之點位， μ_x 為期望值， C 為定常共變異函數(Stationary Covariance Function)，若 $C(|s_1 - s_2|)$ 僅為兩點距離絕對值之函數，則稱為此共變異函數具有等向性。

於實際案例之模擬時，由於地質參數之異質性造成期望值往往不是定值，而會隨著不同位置而改變，本研究利用水平分區之概念，假設同一區同一地層內地質參數之對數其空間變異性符合二階定常性且定常共變異函數為指數型態(Wagner and Gorelick, 1989; Mylopoulos et al., 1999)，而不同區或不同地層則為線性獨立，亦即共變異數等於零，則同一水平分區與分層內，式(33)與式(34)可改為：

$$E[Y_x] = \mu_y \quad (35)$$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sigma_y^2 \times \exp\left\{-\frac{|\Delta x_{12}|}{a_y}\right\} \quad (36)$$

其中 $E[\bullet]$ 代表隨機變數之期望值； $Y = \ln(X)$ 代表地質參數之對數； μ_y 與 σ_y 分別為對數地質參數之期望值與標準差； $|\Delta x_{12}|$ 表示點 1 與點 2 間之距離； a_y 為相關尺度

(Correlation Scale)。由式(35)與式(36)可知，同一分區與分層內對數地質參數之隨機場(Random Field)係由 μ_y 、 σ_y 與 a_y 等三個參數決定，因此在此三個參數決定後，若吾人能藉由座標轉換之方法將空間相關性消除，則可以統計取樣之技巧製造出平面上對數地質參數於各點之值。

定義 $Y_{mn \times 1}$ 與 $Y'_{mn \times 1} [Y' = (Y - \mu_y) / \sigma_y]$ 分別為對數地質參數及其標準化後之隨機場(mn 為平面上總格點數)， $C_{mn \times mn}(\bullet)$ 與 $R_{mn \times mn}(\bullet)$ 分別為共變異數矩陣以及相關係數矩陣，吾人希望存在一方陣 $T_{mn \times mn}^{-1}$ 可將 Y' 轉變為不具空間相關性且平均值為 θ 標準差為 I 之隨機場 $W_{mn \times 1}$ ，亦即：

$$W = T^{-1}Y' \quad (37)$$

且 W 具有以下特徵：(1) $E[W] = \theta$ ；以及(2) $C(W) = R(W) = I$ 。

由於相關係數矩陣為對稱且正定(Positive Definite)之矩陣，利用特徵拆解法(Spectral Decomposition)將 $R(Y)$ 進行特徵拆解後，可得如下之關係式：

$$R(Y) = C(Y') = V\Lambda V^{-1} \quad (38)$$

其中 $\Lambda_{mn \times mn}$ 代表由 $R(Y)$ 之特徵值(Eigenvalue)組成之對角矩陣； $V_{mn \times mn}$ 為由 $R(Y)$ 之特徵向量(Eigenvector)組成之正規化矩陣，即 $V^{-1} = V'$ 。令隨機場 $W'_{mn \times 1}$ 為 Y' 之線性轉換且可以下式表示：

$$W' = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} Y' \quad (39)$$

則 W' 之期望值與共變異數矩陣可表示為：

$$E[W'] = E\left[\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} Y'\right] = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} E[Y'] = \theta \quad (40)$$

$$\begin{aligned} C(W') &= E\left[\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} Y' \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} Y'\right] = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} E[Y' Y'] V \Lambda^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} C(Y') V \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^{-1} V \Lambda V^{-1} V \Lambda^{-\frac{1}{2}} = I \end{aligned} \quad (41)$$

由式(40)與式(41)可知， W' 為標準化後之隨機場且不具相關性存在，比較式

(37)與式(39)即可發現轉換矩陣 $\mathbf{T} = \mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}}$ ，因此對數地質參數 \mathbf{Y} 可表示為：

$$\mathbf{Y} = \mu_y + \sigma_y \mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{W} \quad (42)$$

由於對數地質參數 \mathbf{Y} 為常態分布，而式(42)為線性方程式，因此 \mathbf{W} 為具有標準常態分布之變數且不具空間相關性。根據以上說明，本研究對地質參數取樣之過程為(1)若欲於模擬區域內各點取樣 n 組水力傳導係數，則於各點針對標準常態分布變數 \mathbf{W} 各取樣 n 組資料；(2)利用式(36)計算對數地質參數 \mathbf{Y} 之共變異數矩陣 $\mathbf{C}(\mathbf{Y})$ 與相關係數矩陣 $\mathbf{R}(\mathbf{Y})$ ；(3)計算 $\mathbf{R}(\mathbf{Y})$ 之特徵向量矩陣 \mathbf{V} 以及特徵值對角矩陣 Λ ；(4)利用式(42)將步驟(1)取樣之 n 組 \mathbf{W} 轉換為對數地質參數 \mathbf{Y} ；(5)將 \mathbf{Y} 以 e 作底取指數後即得 n 組之地質參數分布。

利用前述步驟(5)所得之 n 組地質參數，配合「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」之計算，可獲得 n 個樣本之單位響應係數，則單位響應係數之統計特性可以此 n 組資料加以推估。例如其期望值與變異數可以下式表示：

$$E[\beta(l, k, j, t - i + 1)] = \frac{\sum_{ii=1}^n \beta_{ii}(l, k, j, t - i + 1)}{n} \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (43)$$

$$Var[\beta(l, k, j, t - i + 1)] = \frac{\sum_{ii=1}^n \{\beta_{ii}(l, k, j, t - i + 1) - E[\beta(l, k, j, t - i + 1)]\}^2}{n - 1} \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (44)$$

其中 $Var[\bullet]$ 代表隨機變數之變異數。

在前述步驟(1)中，本研究利用 LHS(Latin Hypercubic Sampling) (McKay, 1988) 作為取樣之方法。由於 LHS 具有以較少取樣次數達到取樣不偏移(Unbiased)之特質，McKay et al. (2000)提出其特別適合作為模式輸入參數取樣之工具。

2.3.3 水頭洩降量與地層下陷量統計特性分析

(1) 水頭洩降量統計特性分析

根據響應矩陣法之原理(式(24))，水頭洩降量為單位響應係數與抽水量之線性

組合，而其中具有不確定性之隨機變數為單位響應係數，則依據中央極限定理，水頭洩降量之機率密度函數可近似為常態分布。

對於常態分布之隨機變數而言，其統計特性主要由期望值與變異數加以決定。假設單位響應係數間為線性獨立，則水頭洩降量之期望值與變異數可以下式表示：

$$E[\Delta h(l, k, t)] = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t E[\beta(l, k, j, t-i+1)] Q(j, i) \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (45)$$

$$Var[\Delta h(l, k, t)] = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t Var[\beta(l, k, j, t-i+1)] Q^2(j, i) \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (46)$$

式(45)與式(46)中，單位響應係數之平均值與變異數可利用前節之分析流程獲得，因此水頭洩降量之期望值與變異數可分別表示為決策變數 Q 之一次函數與二次函數。

(2) 地層下陷量統計特性分析

假設分層地層下陷量之機率密度函數為常態分布，而總地層下陷量為各分層下陷量之和，因此總下陷量亦可假設為常態分布。根據統計線性組合原理，並假設各層間之地層下陷量為線性獨立，則總地層下陷量之期望值與變異數可以如下式子表示：

$$E[\Delta s(k, t)] = \sum_{l=1}^L E[\Delta s(l, k, t)] \quad \forall k; \forall t \quad (47)$$

$$Var[\Delta s(k, t)] = \sum_{l=1}^L Var[\Delta s(l, k, t)] \quad \forall k; \forall t \quad (48)$$

因此吾人必須更進一步分析各分層地層下陷量之期望值與變異數，始能獲得總下陷量之統計特性。觀察式(25)可發現，導致地層下陷量具有不確定性之隨機變數包括 G 、 μ 與 λ ，其中 μ 與 λ 在物理上可視為互相獨立，進一步假設 G 、 μ 與 λ 間互為線性獨立，則利用一階變異數分析法，分層地層下陷量之期望值與變異數可以下式表示：

$$E[\Delta s(l, k, t)] = \frac{\rho_w \times g \times B(l, k) \times \bar{G}(l, k, t)}{2 \times \bar{\mu}(l, k) + \bar{\lambda}(l, k)} \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (49)$$

$$\begin{aligned} Var[\Delta s(l, k, t)] = & \left[\frac{\rho_w \times g \times B}{2\bar{\mu}(l, k) + \bar{\lambda}(l, k)} \right]^2 \times Var[G(l, k, t)] + \\ & \left\{ \frac{\rho_w \times g \times B \times \bar{G}(l, k, t)}{[2\bar{\mu}(l, k) + \bar{\lambda}(l, k)]^2} \right\}^2 \times \{4Var[\mu(l, k)] + Var[\lambda(l, k)]\} \end{aligned} \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (50)$$

其中， $\bar{\cdot}$ 代表隨機變數之平均值。式(49)與式(50)之推導過程詳述於附錄二。式(49)與式(50)中， μ 與 λ 為地質參數，其平均值與變異數需事先給定，以下將探討變數 G 之平均值與變異數。

由式(21)與式(22)可知，由於 G 在原點不連續之特質，因此 G 屬於混合型態之隨機變數(Mixed Random Variable)。混合型態意指隨機變數在不同之範圍內，具有不同型態之機率函數。令隨機變數 $\Omega(l, k, t) = \Delta h(l, k, t) - \Delta h(l, k, t-1)$ ，則式(22)可寫成如下型式：

$$G(l, k, t) = \begin{cases} \omega(l, k, t) & \text{if } \omega(l, k, t) > 0 \\ 0 & \text{if } \omega(l, k, t) \leq 0 \end{cases} \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (51)$$

上式中小寫之 ω 代表隨機變數 Ω 之值。由於 Ω 為單位響應係數之線性組合(式(22))，其機率密度函數可假設為常態分布，且具有期望值與變異數如下所示：

$$E[\Omega] = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \{E[\beta(l, k, j, t-i+1)] - E[\beta(l, k, j, t-i)]\} Q(j, i) \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (52)$$

$$\begin{aligned} Var[\Omega] = & Var \left\{ \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t [\beta(l, k, j, t-i+1) - \beta(l, k, j, t-i)] Q(j, i) \right\} \\ = & Var \left\{ \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t [Q(j, i) - Q(j, i-1)] \beta(l, k, j, t-i+1) \right\} \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (53) \\ = & \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t [Q(j, i) - Q(j, i-1)]^2 Var[\beta(l, k, j, t-i+1)] \end{aligned}$$

因此由式(51)可知， G 在原點屬於離散之隨機變數，且具有發生機率為 p_m 之

機率質量函數(Probability Mass Function, PMF)；而當 $G > 0$ 時則屬於常態分布之連續隨機變數，且累積發生機率為 p_c 。圖 6 所示為 Ω 與 G 之機率函數示意圖，其中虛線為 Ω 之機率密度函數，而粗黑實線則為 G 之 PMF 與機率密度函數，當 $\Omega > 0$ 時兩者機率密度函數重合。須注意的是 $p_m + p_c$ 必須等於 1。

根據圖 6 以及式(51)，則 G 之動差母函數 M_G (Moment Generating Function)可表示為：

$$\begin{aligned} M_G(n) &= E[e^{nG}] \\ &= \int_0^{\infty} e^{n\omega} f(\omega) d\omega + e^{n \times 0} \times p_m \\ &= \int_0^{\infty} e^{n\omega} f(\omega) d\omega + e^{n \times 0} \left[1 - \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega \right] \end{aligned} \quad (54)$$

上式中 f 為 Ω 之機率密度函數(即常態分布)。依據式(54)， G 之動差母函數可推導為(參見附錄三)：

$$\begin{aligned} M_G(n) &= \int_0^{\infty} e^{n\omega} f(\omega) d\omega + e^{n \times 0} \times \int_{-\infty}^0 f(\omega) d\omega \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times e^{\mu_{\Omega} n + \frac{1}{2} \sigma_{\Omega}^2 n^2} \times \operatorname{erfc} \left(-\frac{\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n}{\sqrt{2} \sigma_{\Omega}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-\mu_{\Omega}}{\sqrt{2} \sigma_{\Omega}} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

式(55)中， μ_{Ω} 與 σ_{Ω} 分別為 Ω 之期望值與標準差(式(52)與式(53))， erfc 為 Complementary Error Function。 G 之期望值與變異數可以下式表示：

$$E[G(l, k, t)] = M_G'(0) = \int_0^{\infty} \omega f(\omega) d\omega = E[\Omega] - \int_{-\infty}^0 \omega f(\omega) d\omega \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}[G(l, k, t)] &= E[G^2(l, k, t)] - \{E[G(l, k, t)]\}^2 = M_G''(0) - M_G'(0)^2 \\ &= \int_0^{\infty} \omega^2 f(\omega) d\omega - \left[\int_0^{\infty} \omega f(\omega) d\omega \right]^2 \quad \forall l; \forall k; \forall t \end{aligned} \quad (57)$$

由式(55)、(56)與式(57)可知， G 之期望值與變異數計算函數包含 Error Function，導致地層下陷量之期望值與變異數沒有 Close-Form 之函數型態。本研究假設 $\Omega < 0$ 之機率可加以忽略，即 $P(\Omega \leq 0) \rightarrow 0$ ，則 G 之期望值與變異數可以

下列函數近似：

$$E[G] = \begin{cases} E[\Omega] = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \{E[\beta(l, k, j, t-i+1)] - E[\beta(l, k, j, t-i)]\} Q(j, i) \\ \text{if } E[\Omega] > 0 \\ 0 \\ \text{if } E[\Omega] \leq 0 \end{cases} \quad (58)$$

$$Var[G] = \begin{cases} Var[\Omega] = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t [Q(j, i) - Q(j, i-1)]^2 Var[\beta(l, k, j, t-i+1)] \\ \text{if } E[\Omega] > 0 \\ 0 \\ \text{if } E[\Omega] \leq 0 \end{cases} \quad (59)$$

由於式(58)與式(59)僅為近似之結果，因此必須進一步分析其對於管理策略上之影響，避免發生低估地層下陷量不確定性之情形。統計上變異數之意義在量化隨機變數之分散程度，由於 $\Omega \in (-\infty, \infty)$ 而 $G \in (0, \infty)$ ，且兩者在大於0時具有相同之機率密度函數，式(59)所計算 G 之變異數會較式(57)之理論值為大，亦即地層下陷量之不確定性有高估之現象，導致管理策略趨向於較保守之考量，因此以管理角度而言式(58)與式(59)為合理之近似。

總結以上所述，地層下陷量統計特性之計算方法可表示為：

$$E[\Delta s(k, t)] = \sum_{l=1}^L E[\Delta s(l, k, t)] = \sum_{l=1}^L \frac{\rho_w \times g \times B(l, k) \times \bar{G}(l, k, t)}{2 \times \bar{\mu}(l, k) + \bar{\lambda}(l, k)} \quad \forall k; \forall t \quad (60)$$

$$\begin{aligned} Var[\Delta s(k, t)] &= \sum_{l=1}^L Var[\Delta s(l, k, t)] \\ &= \sum_{l=1}^L \left\{ \left[\frac{\rho_w \times g \times B}{2\bar{\mu}(l, k) + \bar{\lambda}(l, k)} \right]^2 \times Var[G(l, k, t)] + \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{\rho_w \times g \times B \times \bar{G}(l, k, t)}{[2\bar{\mu}(l, k) + \bar{\lambda}(l, k)]^2} \right\}^2 \times \{4Var[\mu(l, k)] + Var[\lambda(l, k)]\} \right\} \quad \forall k; \forall t \quad (61) \end{aligned}$$

其中 G 之期望值與變異數則以式(58)與式(59)計算。

2.3.4 模式建立

2.3.2 與 2.3.3 節中已詳述水頭洩降量與地層下陷量統計特性分析方法，本節將利用 CCP 之概念，將 2.2 節所建立之定率管理模式進一步擴充為序率模式，使其能考慮地質參數不確定性之影響。CCP 之概念在於考慮參數不確定性後，將定率之限制條件轉換為機率之型態，亦即地層下陷量(或水頭洩降量)小於等於最大允許下陷量(或水頭洩降量)之機率必須大於等於事先給定之可靠度 α 。依此觀念，則以最大化地下水資源開採為目的之序率管理模式可表示為：

$$\text{Maximize} \quad \sum_{j=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} Q(j,t) \quad (14)$$

$$\text{Subject to} \quad \Pr[\Delta h(l,k,t) \leq \Delta h^*(l,k,t)] \geq \alpha_{l,k,t}^h \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (62)$$

$$\Pr[\Delta s(k,t) \leq \Delta s^*(k,t)] \geq \alpha_{k,t}^s \quad \forall k; \forall t \quad (63)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad \forall t; \forall j \quad (17)$$

而以最小化水頭洩降量與地層下陷量為目的之序率管理模式則可表示為：

$$\text{Minimize} \quad E \left[\sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \sum_{l=1}^L [c_{l,k,t}^h \Delta h(l,k,t) + c_{k,t}^s \Delta s(k,t)] \right] \quad (64)$$

$$\text{Subject to} \quad \Pr[\Delta h(l,k,t) \leq \Delta h^*(l,k,t)] \geq \alpha_{l,k,t}^h \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (62)$$

$$\Pr[\Delta s(k,t) \leq \Delta s^*(k,t)] \geq \alpha_{k,t}^s \quad \forall k; \forall t \quad (63)$$

$$\sum_{j=1}^{NP} Q(j,t) \geq Q_t^D \quad \forall t \quad (19)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad \forall t; \forall j \quad (17)$$

其中 $\Pr[\cdot]$ 代表水頭洩降量與地層下陷量之機率； $\alpha_{l,k,t}^h$ 與 $\alpha_{k,t}^s$ 分別代表水頭洩降量與地層下陷量不超過最大允許值之可靠度，其值介於 0~1 間。與定率模式相同，吾人必須能將上述兩個不同目的管理模式之目標函數或限制式以抽水量之函數表示，始能以最佳化演算法加以求解。將式(45)、(58)與式(60)代入式(64)，則目

標函數式(64)可轉換為如下以抽水量為函數之型式：

$$\text{Minimize} \quad \left. \begin{aligned} & c_{l,k,t}^h \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t E[\beta(l,k,j,t-i+1)] Q(j,i) + \\ & c_{k,t}^s \frac{\rho_w g B_{l,k} E[G(l,k,t)]}{2E[\mu_{l,k}] + E[\lambda_{l,k}]} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

進一步考慮式(62)與式(63)機率型態之限制式，2.3.3 節中本研究已假設水頭洩降量與地層下陷量為常態分布，令 Z 為具標準常態分布之隨機變數，且標準化後之最大允許水頭洩降量與地層下陷量分別為 Z_h^* 與 Z_s^* ，則式(62)與式(63)可分別轉換為：

$$\text{Pr} \left\{ Z \leq Z_h^* = \frac{\Delta h^*(l,k,t) - E[\Delta h(l,k,t)]}{\sqrt{\text{Var}[\Delta h(l,k,t)]}} \right\} \geq \alpha_{l,k,t}^h \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (66)$$

$$\text{Pr} \left\{ Z \leq Z_s^* = \frac{\Delta s^*(k,t) - E[\Delta s(k,t)]}{\sqrt{\text{Var}[\Delta s(k,t)]}} \right\} \geq \alpha_{k,t}^s \quad \forall k; \forall t \quad (67)$$

式(66)與式(67)成立之條件為 $Z_h^* \geq \Phi^{-1}[\alpha_{l,k,t}^h]$ 與 $Z_s^* \geq \Phi^{-1}[\alpha_{k,t}^s]$ ，其中 Φ^{-1} 為標準常態累積機率函數之反函數，因此：

$$\sqrt{\text{Var}[\Delta h(l,k,t)]} \times \Phi^{-1}[\alpha_{l,k,t}^h] \leq \Delta h^*(l,k,t) - E[\Delta h(l,k,t)] \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (68)$$

$$\sqrt{\text{Var}[\Delta s(k,t)]} \times \Phi^{-1}[\alpha_{k,t}^s] \leq \Delta s^*(k,t) - E[\Delta s(k,t)] \quad \forall k; \forall t \quad (69)$$

藉由等號兩邊平方之技巧將可把式(68)與式(69)中之根號去掉，簡化限制式之複雜度，但必須等號兩邊之數值皆大於 0 才可確保平方後之方程式正確。觀察等號左邊可發現，雖然變異數恆為正值，然而當給定可靠度小於 50% 時， Φ^{-1} 之值將小於 0，因此等號兩邊平方後之限制式將只能適用於給定可靠度大於 50% 之管理策略，而於實際應用中，可靠度之要求鮮少低於 50%。再觀察等號右邊之式子，為了避免最佳化求解過程中，不可行之解因為平方後滿足式(68)與式(69)，因此必須在模式中增加限制式：

$$\Delta h^*(l,k,t) - E[\Delta h(l,k,t)] \geq 0 \quad \forall l; \forall k; \forall t \quad (70)$$

$$\Delta s^*(k,t) - E[\Delta s(k,t)] \geq 0 \quad \forall k; \forall t \quad (71)$$

將式(45)至式(50)代入式(68)至式(71)並移項整理後，本研究所發展考量地層下陷影響之序率地下水量管理模式可表示如下：

$$\text{Maximize} \quad \sum_{j=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} Q(j,t) \quad (14)$$

或

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{NT} \sum_{k=1}^{NC} \sum_{l=1}^L \left\{ c_{l,k,t}^h \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t E[\beta(l,k,j,t-i+1)] Q(j,i) + c_{k,t}^s d_{l,k} E[G_{l,k,t}] \right\} \quad (72)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \left\{ \Phi^{-1}[\alpha_{l,k,t}^h] \text{Var}[\beta(l,k,j,t-i+1)] - E^2[\beta(l,k,j,t-i+1)] \right\} Q^2(j,i) + 2\Delta h_{l,k,t}^* \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t E[\beta(l,k,j,t-i+1)] Q(j,i) - 2q_{l,k,t} \leq \Delta h_{l,k,t}^{*2} \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (73)$$

$$\Phi^{-1}[\alpha_{k,t}^s] \times \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{d_{l,k}^2 \times \text{Var}[G_{l,k,t}] + \left(\frac{d_{l,k} E[G_{l,k,t}]}{2\mu_{l,k} + \lambda_{l,k}} \right)^2 \times \{4\text{Var}[\mu_{l,k}] + \text{Var}[\lambda_{l,k}]\}} \right\} + 2\Delta s_{k,t}^s \times \sum_{l=1}^L d_{l,k} E[G_{l,k,t}] - \left\{ \sum_{l=1}^L d_{l,k} E[G_{l,k,t}] \right\}^2 \leq \Delta s_{k,t}^{*2} \quad \forall t; \forall k \quad (74)$$

$$\sum_{j=1}^{NP} Q(j,t) \geq Q_t^D \quad \forall t \quad (19)$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t) \quad \forall t; \forall j \quad (17)$$

上述方程組中， $d_{l,k} = \rho_w g B_{l,k} / (2E[\mu_{l,k}] + E[\lambda_{l,k}])$ ； $q_{l,k,t}$ 為：

$$q_{l,k,t} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \sum_{j'=j}^{NP} \sum_{i'=i+1}^t \beta(l,k,j,t-i+1)\beta(l,k,j',t-i'+1)Q(j,i)Q(j',i') & \text{if } j' = j \\ \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t \sum_{j'=j}^{NP} \sum_{i'=1}^t \beta(l,k,j,t-i+1)\beta(l,k,j',t-i'+1)Q(j,i)Q(j',i') & \text{if } j' \neq j \end{cases} \quad (75)$$

須注意的是，本研究所發展之序率管理模式並無法像 2.2 節中之定率模式一樣當符合特定條件時，可利用代數運算將地層下陷量限制條件去除，由於地層下陷量不確定性之影響，地層下陷量之限制條件必須完整考量(式(74))。

2.3.5 求解方法

由於 G 之期望值與變異數(式(58)與式(59))為在原點不可微分之函數，因此前小節所建立之序率管理模式亦為 Non-smooth Optimization 之問題。與定率模式求解方法相同，在序率模式求解上本研究亦導入二進位變數之觀念以將 Non-smooth Optimization 轉變為混合整數非線性規劃(Mixed Integer Nonlinear Programming, MINLP)問題，其增加之限制式如下所示：

$$E[\Delta h(l,k,t) - \Delta h(l,k,t-1)] + LO \times m(l,k,t) \geq LO \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (76)$$

$$E[\Delta h(l,k,t) - \Delta h(l,k,t-1)] - UP \times m(l,k,t) \leq 0 \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (77)$$

$$E[\Delta h(l,k,t) - \Delta h(l,k,t-1)] - E[G(l,k,t)] \leq 0 \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (78)$$

$$E[\Delta h(l,k,t) - \Delta h(l,k,t-1)] - E[G(l,k,t)] - UP \times m(l,k,t) \geq -UP \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (79)$$

$$E[G(l,k,t)] - UP \times m(l,k,t) \leq 0 \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (80)$$

$$E[G(l,k,t)] \geq 0 \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (81)$$

$$Var[G(l,k,t)] - m(l,k,t)Var[\Delta h(l,k,t) - \Delta h(l,k,t-1)] = 0 \quad \forall t; \forall k; \forall l \quad (82)$$

與定率模式求解不同的是，此處新增了式(82)之限制條件，其意義為限制第 t 管理期內之水頭洩降若為負(即 m 等於 0)，則 G 之變異數必為 0。上述 MINLP 之問題本研究採用 B&B Method 加以求解，其概念可參考附錄一。

2.4 小結

本章詳細介紹了考量地層下陷影響之定率管理模式建立方法，並在考慮地質參數 K 、 μ 與 λ 之不確定性後，詳述單位響應係數、水頭洩降量以及地層下陷量之統計特性分析方法，最後則以 CCP 之概念將定率模式擴充為以可靠度為考量之序率地下水量管理模式。

由於地下水管理問題之多樣性，管理模式亦可因應需求而有多樣之變化，例如式(19)即可依據各子區域之需水程度或重要性不同，而加以變化為限制同一管理期內各子區域之各別地下水需求量；或是當考慮成本效益時，目標函數可變換為最小化抽水操作成本。然無論變化為何，皆可利用本章所介紹管理模式之架構與建立方法，將因應各別需求而擬訂之管理模式擴充為可定量考量地層下陷影響之定率與序率管理模式，期使能在獲得最佳管理策略時兼且達到防杜或減緩地層下陷發生之效益。



第三章 定率模式驗證與應用案例模擬

本章將針對本研究所發展之定率地下水量管理模式進行測試驗證與案例模擬。在驗證部分主要為定率模式建立程序之檢查(examination)，包含採用響應矩陣法與一維土體壓密方程式建立定率模式之合理性以及程式撰寫之正確性。驗證方法為藉由試誤法配合數值模式模擬，分別比較穩態與動態兩個案例下定率模式與試誤法所得結果是否一致。而在案例模擬部分，首先以最大地下水資源開採為目標，分別應用於單層與多層之地下水系統，以展示水頭洩降量與地層下陷量同時考慮之重要性，最後再以最小化地層下陷量為目標，展示模式於地下水管理之功能，包含抽水井最大抽水能力(Maximum Pumping Capacity)以及最佳設井位置之決定。

3.1 定率模式驗證

定率管理模式之驗證過程如圖 7 所示，可大致分為三個步驟：(1)首先根據驗證案例之設定，利用所發展之定率管理模式求取最大可抽水量與各抽水井抽水量在時空上之分布；(2)接著利用試誤法配合「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」，逐步調整各抽水井之抽水量，直到求出符合限制條件下之最大可抽水量；(3)待上述兩步驟完成後，比較兩步驟所求出之最大可抽水量以及各抽水井之抽水量是否相同，藉以驗證本研究所發展定率管理模式之正確性。

3.1.1 穩態驗證案例

考慮如圖 8 所示之等向均質，由砂土所構成之侷限含水層管理區域，區域面積為 $20 \text{ km} \times 16 \text{ km}$ ，厚度 B 為 50 公尺，水力傳導係數 K 為 $2.0 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$ ，土體拉梅常數為 $\mu = 5.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 以及 $\lambda = 1.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ，管理區域之東西邊界條件為定水頭，而南北兩邊則為不透水邊界條件(No Flux)，將管理區域分成 11×9 個格網點，點與點之間距為 2,000 公尺，且分別在座標點(4,5)及(7,7) 設置抽水井群 A 與抽水井群 B 之完全貫穿抽水井。假設抽水井群 B 之最大抽水能力為 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，而抽水井群 A 則不限制，在考量管理區域內各點地層下陷量不得超過 20 公分之

條件下，欲求取最大可抽水量(即二個抽水井群抽水量總和)。此管理問題之相關設定如表 1 所示，管理模式計算結果顯示最大可抽水量為 $17.2 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，抽水井群 A 及抽水井群 B 之抽水量分別為 $12.2 \text{ m}^3/\text{sec}$ 以及 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，而此時地層下陷量最大處發生在抽水井群 A 之位置，其值為 20 公分。

接著利用地層下陷數值模式配合試誤法來證明管理模式計算結果之正確性。首先設定抽水井群 A 與抽水井群 B 之抽水量皆為 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，在相同地質參數與邊界條件下，因為井群 A 較靠近定水頭邊界，地層下陷數值模式模擬之結果顯示最大地層下陷量為 10.76 公分且發生在抽水井群 B 處。因為最大地層下陷量並未超過最大允許值 20 公分，因此可繼續增加抽水量以使最大可抽水量增加，然而抽水井群 B 已達到其最大抽水能力，因此只能繼續增加抽水井群 A 之抽水量。接著以試誤法逐步增加抽水井群 A 之抽水量，並同時利用數值模式計算相對應之最大地層下陷量，其試誤過程如圖 9 所示。由圖 9 可知，在抽水井群 B 之抽水量為 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 之情況下，當抽水井群 A 之抽水量達到 $12.2 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時，最大地層下陷量發生在抽水井群 A 之位置且其值已達最大允許值 20 公分，由此吾人可加以歸納在符合地層下陷量之限制條件下，此時管理區域達到最佳之地下水抽取策略。表 2 與圖 10 所示為當抽水井群 A 與抽水井群 B 之抽水量分別為 $12.2 \text{ m}^3/\text{sec}$ 以及 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時，地層下陷數值模式模擬之各格網點地層下陷量。

藉由以上分析可知，定率管理模式以及試誤法配合地層下陷數值模式兩者所求得之最大可抽水量與各抽水井群之抽水量皆相等，可加以證明本研究發展之定率管理模式在穩態條件之正確性。

3.1.2 動態驗證案例

考慮與圖 8 相同之管理區域，且地質參數與邊界條件之設定與前小節相同。今總管理期間為 18 個月，並分為三個管理期，每個管理期距為 6 個月。座標點(4,5)之抽水井群 A 在其 18 個月之總管理期間中，第 1 個管理期之抽水量固定為 $2.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，第 2 個管理期為 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，而第 3 個管理期則為 $8.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 。此外在第 2 個管理期開始之初，座標點(7,7)處之抽水井群 B 加入供水之行列且其抽水量不受限制。現欲求取總管理期間內之最大可抽水量，且每一管理期內各格網點之地層

下陷量不得超過 9.0 公分，此管理問題之相關設定如表 3 所示。

藉由定率管理模式之計算，其結果顯示在不違背地層下陷量之限制條件下，總管理期間之最大可抽水量為 $28.58 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，而抽水井群 A 於三個管理期之抽水量分別為 $2.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 及 $8.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，抽水井群 B 於第二與第三個管理期之抽水量分別為 $4.58 \text{ m}^3/\text{sec}$ 及 $9.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 。最大地層下陷量於三個管理期內分別為 2.88 公分(抽水井群 A 處)、9.0 公分(抽水井群 B 處)以及 9.0 公分(抽水井群 B 處)。

與穩態案例相同，此處亦以地層下陷模式配合試誤法來證明管理模式之正確性，唯此案例為動態條件，試誤過程稍嫌繁複。觀察案例設定可發現，抽水井群 A 之抽水量皆為固定，而抽水井群 B 僅於第二個管理期開始抽水，故試誤過程必須藉由調整第二與第三個管理期時井群 B 之抽水量，使其達到最大可抽水量兼且符合地層下陷量之限制。本案例試誤過程之示意圖如圖 11 所示，首先固定抽水井群 B 第二個管理期之抽水量為 $0.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，再由小到大調整井群 B 在第三個管理期之抽水量，直到第三個管理期內任一格網點之地層下陷量超過最大允許值 9.0 公分。待完成此步驟後，變更井群 B 第二個管理期之抽水量為 $1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，再由小到大調整井群 B 第三個管理期之抽水量直到第三個管理期內任一格網點之地層下陷量超過最大允許值 9.0 公分。如此逐步增加 $1 \text{ m}^3/\text{sec}$ 於井群 B 第二個管理期之抽水量，並重複由小到大調整井群 B 在第三個管理期抽水量之步驟，可發現隨著井群 B 在第二個管理期抽水量之增加，在符合地層下陷限制之情形下總抽水量亦隨之增加，唯當井群 B 第二個管理期抽水量增加到 $5 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時，井群 B 處第二個管理期內之地層下陷量已超過 9.0 公分，故吾人可歸納在限制條件範圍內，井群 B 第二個管理期之抽水量必界於 $4.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 至 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 間。

接著重複前段之試誤過程，即固定井群 B 第二個管理期之抽水量並由小到大調整井群 B 第三個管理期之抽水量，直到第三個管理期內任一格網點之地層下陷量超過最大允許值 9.0 公分，唯井 B 第二個管理期抽水量逐步增加之幅度由 $1 \text{ m}^3/\text{sec}$ 降低為 $0.1 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，並由 $4 \text{ m}^3/\text{sec}$ 開始，如此試誤可知井群 B 第二個管理期之抽水量將界於 $4.5 \text{ m}^3/\text{sec}$ 至 $4.6 \text{ m}^3/\text{sec}$ 間。重複以上步驟並將井群 B 第二個管理期

抽水量逐步增加幅度改為 $0.01 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，最後可得到當抽水井群 B 於第二與第三個管理期之抽水量分別為 $4.58 \text{ m}^3/\text{sec}$ 及 $9.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 時，地層下陷量達到最大允許值 9.0 公分，且三個管理期內之最大地層下陷量分別為 2.88 公分(於抽水井群 A 處發生)、9.0 公分(於抽水井群 B 處發生)及 9.0 公分(於抽水井群 B 處發生)，總抽水量則為 $28.58 \text{ m}^3/\text{sec}$ 。表 4 所列為試誤過程之摘要，而圖 12 至圖 14 所示為在最大可抽水量時，地層下陷數值模式模擬之各格網點地層下陷量。

藉由以上分析可知，定率管理模式以及試誤法配合地層下陷數值模式兩者所求得之最大可抽水量與各抽水井群之抽水量皆相等，可加以驗證本研究發展之定率管理模式在動態條件之正確性。

3.2 應用案例

3.2.1 應用案例一：單侷限含水層

考慮僅含單層侷限含水層，且土層厚度為 80 公尺，面積為 5 公里 \times 4 公里之地下水系統，其區域示意圖如圖 15 所示。該區域可以 11×9 個格網點加以表示，格網點間之距離 $dx = dy = 500$ 公尺，左右兩邊之變界條件為定水頭，而上下兩邊之邊界則為零流量。區域內共包含 A、B 與 C 三口完全貫穿之抽水井，且可依據不同之地質參數將其分為三個子區域 I、II 與 III，各子區域之地質參數設定如表 5 所列。今欲探討在三年之總管理期間內，當五個控制點 a、b、c、d 與 e (其中 a、b 與 c 分別位於抽水井 A、B 與 C 處) 皆不超過最大允許之水頭洩降量與地層下陷量時，該區域之最大可抽水量。現將三年之總管理期間切割為三個管理期，且每個管理期為 1 年以考慮動態之管理策略，而在第 1 個管理期開始前，區域內各點之水頭皆相等，亦即無地下水流動。在水頭洩降量方面其最大允許值於三個管理期皆為 15 公尺，而為了達到逐步減緩地層下陷之需求，地層下陷量之最大允許值於第一、第二與第三個管理期分別為 3 公分、1.5 公分與 1.0 公分。上述管理模式之設定詳列於表 6 中。

由表 6 可知該案例共有 30 條限制式(5 個控制點於 3 個管理期之水頭洩降與地層下陷量)，表 7 所示則為管理模式之計算結果。該區域之最大可抽水量為 6.69

m^3/sec ，其中抽水井 A 於三個管理期之抽水量皆為 0，而井 C 則有最大之地下水產能，造成此現象最主要之原因在於井 A 所在之子區域 I 其水力傳導係數較低，因此定水頭邊界較難補充區域 I 因抽水而造成之水頭洩降；相反的，因區域 III 水力傳導係數最高，因此井 C 具有較高之抽水優先權。

表 7 中粗黑字體代表當模式求得最大可抽水量時，該控制點於該時刻之狀態變數剛好等於限制值(或稱 Active Constraint)，亦即管理模式受限於該限制式而無法再求得更大之最大可抽水量。觀察表 7 可知，對於水頭洩降量而言，Active Constraint 發生在控制點 b 於三個管理期以及控制點 c 於第一個管理期之限制式；而地層下陷量之 Active Constraint 則發生在控制點 c 之第二與第三個管理期。因此若吾人不考慮地層下陷量之限制條件，則所得之最大可抽水量必然大於考慮地層下陷影響時所計算之 $6.69 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，且會造成控制點 c 於第二與第三個管理期之地層下陷量分別超過規定之 1.5 公分與 1.0 公分。

3.2.2 應用案例二：多層地下水系統

考慮一有 35 口井之多層地下水系統，其地質分布情形由上而下共分三層，分別為第一侷限含水層、阻水層以及第二侷限含水層。此外在水平方向由左至右依地質參數之不同將其分成三個子區域(區域 I、區域 II 與區域 III)，35 口井之分層抽水比例由上而下依序為 0.5、0.0、0.5，該地下水系統之水平分區、垂直分層與地質參數條件如圖 16 與圖 17 所示。對此多含水層系統進行為期一年之地下水抽取管理研究，並針對模擬區域制定二個地下水抽取方案，如表 8 所示。由表 8 比較二個方案可知，方案一可視為模擬區域並無明顯地層下陷危害之發生，因此水頭洩降以及地層下陷量之限制條件較寬鬆，而方案二則可視為模擬區域目前已面臨嚴重之地層下陷問題，因此水頭洩降以及地層下陷量相關之限制條件較方案一為嚴苛。

表 9 所示為二個方案分別在僅考慮水頭洩降以及同時考慮水頭洩降與地層下陷為限制條件下，利用管理模式所求得之最大可抽水量。由表 9 可知，無論有無同時考慮水頭洩降與地層下陷，較嚴苛之方案二所獲得之最大可抽水量皆小於方案一，因此地下水量管理實為一 Trade-off 之問題，決策者必須在水資源利用以及

地下水系統環境維持間尋找平衡點，在沒有人工補注之情況下，並不存在可同時增加地下水資源開採與環境維持之抽水策略。

表 10 與表 11 所示為在同時考慮水頭洩降與地層下陷之情況下，兩方案會造成之地層下陷量。兩方案之 Active Constraint 皆發生在地層下陷之限制式(表 10 與表 11 中之粗黑字體)，而各點於二含水層之水頭洩降皆小於允許值，故在此應用案例下若忽略地層下陷之影響，則必然會高估最大可抽水量，造成不預期地層下陷之發生。此一現象亦可由表 9 中在同一方案下，僅考慮水頭洩降所得之最大可抽水量較大加以驗證，以方案一為例，以僅考慮水頭洩降所得之最大可抽水量 $0.221 \text{ m}^3/\text{sec}$ 作為地層下陷數值模式之輸入，則模式模擬結果如表 12 所列，可看出所有格網點之地層下陷量皆超過設定之允許值。

藉由 3.2.1 小結與本節之案例應用可知，於地下水量管理時，實有必要進一步考慮地層下陷之影響，以避免高估最大可抽水量之情形。

3.2.3 應用案例三：最佳單井最大抽水能力與設井位置決定

藉由本節所介紹之應用案例，將說明如何在以最大地下水開採以及最小地層下陷為目標下，分別求取抽水井設計最大抽水能力以及最佳設井位置。考慮一穩態條件且與圖 16 相同之地下水系統，唯垂直方向僅包含單層之侷限含水層，模擬區域面積為 $20 \text{ km} \times 16 \text{ km}$ ，厚度為 200 公尺，模擬區域可大致分為三區域(I、II、III)，此三區之水力傳導係數由左至右分別為 0.0015 m/sec 、 0.001 m/sec 、 0.0005 m/sec ，土體拉梅常數皆相同，其值為 $\mu = 5.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 以及 $\lambda = 1.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ，而區域內皆為等向均質。模擬區域東西兩邊之邊界條件為定水頭，而南北兩邊則為不透水邊界條件。今欲於此模擬區域開發地下水資源，而可設井的位置共有 35 處(即圖 16 中之粗黑圓點)。

(1) 單井設計最大抽水能力決定

一般而言，水井之最大抽水能力與井之直徑以及抽水機能力有關，若水井之最大抽水能力提高時，則理論上最大可抽水量亦可能相對提高。例如一管理問題中地層下陷量不得超過 10.0 公分，而水井之最大抽水能力為 $5.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，若抽水

5.0 m³/sec 時將造成地層下陷 8.0 公分，則理論上最大可抽水量會大於 5.0 m³/sec，唯受限於抽水井本身抽水能力限制，此時最大可抽水量將只有 5.0 m³/sec。若欲提高抽水井之抽水能力，則可加寬水井之直徑或選用較大且效率較好之抽水機，唯此舉亦將迫使工程費用的提高，因此如何合理的取捨實為重要之關鍵。圖 18 所示為當模擬區域內各點地層下陷量不得超過 0.5 公分時，利用地下水管理模式計算之單井最大抽水能力與最大可抽水量(即 35 口井抽水量之和)之關係圖。由圖中可看出，兩者間之關係為非線性，而圖中曲線上任一點之斜率即代表最大可抽水量因為單井最大抽水能力增加 1 單位而造成之增加量。最大可抽水量雖然隨著單井最大抽水能力之增加而增加，但其增加率則逐步遞減，以本案例而言，當單井最大抽水能力達到 0.9 m³/sec 時，最大可抽水量為 7.95 m³/sec，曲線上之斜率已趨近於零，因此水井之最大抽水能力可考慮設計為 0.9 m³/sec。

(2) 抽水井最佳設置位置決定

本章目前為止所有的地下水管理案例其目標函數皆為求取最大可抽水量，為了探討抽水井之最佳設置位置，此處目標函數將改為最小總地層下陷量(模擬區域各點地層下陷量之和)，而限制條件則為滿足地下水使用之需求量(Water Demand)、各抽水井抽水量不超過最大抽水能力(0.9 m³/sec)以及區域內各點地層下陷量不超過 0.5 公分，詳細模式設定如表 13 所列。圖 19 所示為地下水需求量與最小地層下陷量(目標函數)之關係圖，由圖中可看出隨著地下水需求量之增加，經由管理模式演算後之最小地層下陷量亦隨之增加，兩者大約呈一線性關係，但當地下水需求量大於 7.0 m³/sec 時，最小地層下陷量則快速增加。由前段之案例分析中可知，在地層下陷量限制條件不變之情形下，此地下水系統之最大可抽水量趨近於 8.0 m³/sec (圖 18)，故在此案例中，地下水需求量大於 7.0 m³/sec 時已逼近地下水出水之極限，額外增加之抽水量將會造成地層下陷量之大幅增加，因此決策者必須考慮是否足以承受此大幅增加之地層下陷量或另覓其他之水資源來源。而當地下水需求量大於 8.0 m³/sec 時，管理模式已無法求得可行解，亦間接驗證了前段案例模式計算之正確性。

表 14-16 為地下水需求量分別為 4.5 m³/sec、7.0 m³/sec 及 7.5 m³/sec 時，可使

總地層下陷量為最小之 35 口井個別抽水量。比較表 14 至表 16 可發現，當地下水需求量不大時，有抽水的井皆集中在模擬區域最靠近左邊邊界處，隨著需求量的增加開始啟動抽水的水井始漸漸往右邊增加。此現象發生的原因與應用案例一相同，乃是因為左邊之邊界條件為定水頭，當抽水井開始抽水時，為了符合邊界條件之設定，將會有地下水流從模擬區域外水頭較高之地方經由邊界流入模擬區域內以平衡壓力。根據達西定律(Darcy's Law)：

$$Q_x = -K_x A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (83)$$

式中， Q_x 為流量， K_x 為 x 方向之水力傳導係數， A 為斷面積。由式(83)可發現，補注之地下水流量其大小與水力傳導係數成正比關係，而模擬區域內左邊之區域其水力傳導係數較其他區域大，因此在此處設井抽水因為邊界補注較多的關係，水頭洩降量將會較少，亦即地層下陷量也隨之減小。

由以上案例演算可知，在穩態管理問題下，本研究發展之管理模式亦具有決定最佳抽水井設置位置之功能。在已知地下水需求量下，若能依照模式分析結果，在有抽水量之格網點上設置抽水井，且依相對應之抽水量(即表 14-16)進行操作，則必能達到最小總地層下陷量之效益。然若為動態之管理問題，在初始管理期時部份沒有抽水量之格網點可能在後續管理期中，管理模式計算出必須開始抽水以滿足地下水需求量或達到最小總地層下陷量，在此情況下則必須從更多面向，包含管理面、經濟面與維護面等，更進一步探討這類格網點是否必須設井，或是需在哪一管理期時開始設井。

第四章 序率模式驗證與應用案例模擬

本章將利用第三章應用案例一所設定之地下水系統，針對本研究所發展之序率地下水量管理模式進行測試驗證與案例模擬。在模式驗證部分包含有：(1)地質參數敏感度分析(Sensitivity Analysis)，以評估本研究所選定具有不確定性之參數是否合理；以及(2)水頭洩降量與地層下陷量統計特性分析方法之合理性。而在案例應用部分，則以最大地下水資源開採為目標，展示序率模式於地下水管理之功能。

4.1 地質參數敏感度分析

在第二章序率模式建立中，本研究首先假設僅水力傳導係數(K)與拉梅常數(μ 、 λ)具有不確定性，土層厚度(B)與比儲水係數(S_s)則視為確定已知之參數，本節中將以敏感度分析之技巧以評估上述之假設是否合理。敏感度分析之意義在量化模式各輸入參數之變化對於模式輸出結果之影響，以此決定可忽略不確定性之參數。在本研究中輸入參數為 K 、 μ 、 λ 、 B 與 S_s 等五個地質參數，而輸出則為地層下陷量，其分析方法為：

- (1) 假設一固定之抽水量，並將各地質參數設定為基值(Base Value)，利用「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」計算選定位置之地層下陷量。
- (2) 改變其中一地質參數之值，其餘參數則維持基值，並再次利用地層下陷模式計算選定位置之地層下陷量。
- (3) 重複步驟(2)直到所有地質參數皆被改變過。
- (4) 比較各地質參數改變後造成之地層下陷量變化。

上述步驟(1)之抽水量本研究設定井 A 與井 C 之抽水量為零，抽水井 B 則為 $1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，而地質參數之基值為第三章定率模式應用案例一之參數設定，改變量則為基值之 50% 與 150%，詳細設定列於表 17。設定觀察位置為井 B 且模擬時間為 1 年，重複步驟(1)至(4)後，圖 20 所示為敏感度分析結果之龍捲風圖(Tornado Diagram)。圖中之粗黑橫條代表選定地質參數在指定變化範圍內(括號內之百分比)，而其他地質參數為基值時，井 B 處一年後地層下陷量之變化範圍。例如當

全部地質參數皆為基值時，井 B 處一年後地層下陷量為 2.2 公分，而當僅改變水力傳導係數時(基值之 50% 至 150%)，地層下陷量則由 4.4 公分變化至 1.5 公分(2.2 公分之 200% 至 68%)。由圖 20 可看出，水力傳導係數對地層下陷量之影響最大，所造成之下陷量相差可達 2.9 公分， μ 與 λ 之影響則居其次，造成之下陷量變化為 77% 至 150% 以及 86% 至 120%，而比儲水係數與地層厚度在其基值之 50% 與 150% 變化範圍內，地層下陷量幾乎不受任何影響。

藉由敏感度分析可加以驗證本研究僅將水力傳導係數與拉梅常數視為具有不確定性之地質參數為合理之假設，且亦大幅簡化了不確定性分析之工作。

4.2 序率模式驗證

本研究序率模式之驗證方法與流程如圖 21 所示，其步驟簡述如下：

- (1) 設定地質參數 K 、 μ 與 λ 之統計特性，並依據 2.3.2 節之方法利用 LHS 取樣 n 組地質參數之隨機場，同時計算單位響應係數之統計特性。
- (2) 設定管理模式之限制條件，包含控制點之水頭洩降量與地層下陷量最大允許值，以及不超過最大允許值之需求可靠度 α^h 與 α^s 。
- (3) 利用序率模式求解最大可抽水量以及各抽水井抽水量之時空分布。
- (4) 以步驟(1)取樣之隨機場與步驟(3)求得之抽水量，利用「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」計算各控制點 n 組水頭洩降量與地層下陷量資料。
- (5) 以步驟(4)所得之樣本資料，計算水頭洩降與地層下陷之平均值與標準差及其不超過最大允許值之真實可靠度 α^* ，並繪製地層下陷量之機率密度函數。
- (6) 以步驟(5)之結果評估序率模式之正確性，包含 FOVE(式(45)、(46)、(60)與(61))之適用性、地層下陷常態分布假設之合理性以及計算結果是否滿足需求可靠度等。

考慮與第三章定率模式應用案例一相同之地下水系統，唯此處因乃序率模式之應用，必須另外給定地質參數之統計特性以及需求可靠度。依據 Gelhar (1993) 之研究，對於沖積土層而言其對數水力傳導係數之標準差最大約為 1.2；而在拉梅常數方面，Reismann and Pawlik (1980)指出拉梅常數與 Young's Modulus 間具有

線性之關係，Das (1983)則指出沖積土層之 Young's Modulus 之變化幅度最大約可相差五倍。為了驗證序率模式在不同參數不確定性程度下之適用性，本研究依據上述文獻資料考慮了五個不同參數標準差之方案，其參數之標準差由方案一至方案五逐步遞增，但平均值則仍維持不變，且式(36)中決定空間相關性之相關尺度 a_y 皆為 1,000 公尺，期使參數設定能盡量完整涵蓋常見之範圍。需求可靠度方面則設定為五個控制點 a 、 b 、 c 、 d 與 e 在三個管理期皆相同。詳細之序率模式設定以及參數特性分別如表 18 與表 19 所列。

4.2.1 地質參數取樣次數決定

由第三章序率模式建立流程可知，吾人必須先對地質參數進行統計取樣，始能分析單位響應係數之統計特性。理論上取樣次數越少越能簡化後續蒙地卡羅模擬工作之繁複度，然而取樣次數過少時將可能導致取出之樣本無法代表參數真實之統計特性，且當參數變異程度高時更為明顯，因此吾人必須針對參數之設定探討取樣次數之合理性。

觀察表 19 可知，方案五中子區域 III 之參數具有較高之變異係數(Coefficient of variation, COV)，因此本研究將據此探討本驗證案例合理之參數取樣次數。圖 22 所示為取樣次數對水力傳導係數與拉梅常數 μ 之樣本平均值之關係，而圖 23 則為樣本標準差對取樣次數之關係，比較兩圖可知，取樣次數大於 3,000 即可使 μ 之樣本平均值與標準差趨近於穩定，然而水力傳導係數則需要 5,000 次以上之取樣次數才可使樣本平均值與標準差達到穩定，因此本案例參數取樣次數將設定為 5,000 次。

4.2.2 序率模式模擬結果討論

依據表 18 之模式設定，圖 24 所示為在五個不同方案下，最大可抽水量與需求可靠度之關係圖。由計算結果可看出，隨著需求可靠度之增加，最大可抽水量則隨之減少，在需求可靠度小於 90% 時，兩者間大致為線性之反比關係，然而當需求可靠度超過 90%，尤其是 95% 以上時，隨著需求可靠度增加則最大可抽水量呈現急遽之遞減，欲探討其原因，吾人可觀察式(68)中，當需求可靠度增加時，

$\Phi^{-1}(\alpha^h)$ 亦需隨之增加，因此水頭洩降量之期望值或標準差必須減小，在地質參數不確定性已固定之情形下，僅能藉由降低抽水量來達到減小水頭洩降量之期望值與標準差，而這也是需求可靠度增加則最大可抽水量減小之原因；然而在需求可靠度已經很高時，再增加需求可靠度將會造成 $\Phi^{-1}(\alpha^h)$ 急遽之增加，因此圖 24 中在高需求可靠度時最大可抽水量呈現陡降之現象。由此吾人可知，當應用序率管理模式於實際案例之規劃時，若規劃策略要求極高之可靠度，則決策者必須審慎且仔細的訂定需求可靠度，因為在高需求可靠度之規劃下，增加一點點之需求可靠度即會造成最大可抽水量之大量減少，從而導致可利用水資源之大幅降低。

在可靠度分析上，50% 之需求可靠度可視為中性之風險(Risk-Neutral)，當需求可靠度為 50% 時， $\Phi^{-1}(\alpha^h)$ 與 $\Phi^{-1}(\alpha^s)$ 必為零，由式(68)與式(69)可知在此情況下水頭洩降量與地層下陷量之變異數不會對限制條件造成影響，序率模式簡化為定率模式之型態，因此理論上需求可靠度 50% 時求得之最大可抽水量應與定率模式相同。然由圖 24 可知，在 50% 需求可靠度下，最大可抽水量隨著地質參數變異程度增加而減小，即使是變異程度最小之方案一，其最大可抽水量也小於定率模式計算之 $6.69 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，究其原因乃在於：

- (1) 參數取樣範圍增加：由於參數變異數增加會造成取樣範圍之擴大，因此方案一至方案五雖然取樣後之水力傳導係數樣本具有相同之平均值，但變異數較大之方案會取到較多相對較大與較小之水力傳導係數。
- (2) 單位響應係數(水頭洩降量)與水力傳導係數間之非線性關係：由一維土體壓密方程式以及 4.1 節之敏感度分析可知水頭洩降量與水力傳導係數呈反比之關係，亦即水頭洩降量除以水力傳導係數之斜率為負，然而此斜率並非定值，相對較小與相對較大之水力傳導係數在同樣改變一單位下，前者造成之水頭洩降量變化會遠大於後者。

合併以上兩項說明可知，當水力傳導係數變異數增加時會造成單位響應係數平均值之增加，圖 25 所示為單位響應係數在方案一、方案三與方案五之統計特性與直方圖(Histogram)，由圖中即可觀察出當變異數增加時，相對較大之單位響

應係數出現次數也趨於頻繁。故即使當需求可靠度為零時水頭洩降量與地層下陷量之變異數可加以忽略，但隨著參數變異程度提高增加單位響應係數之平均值下，抽水量必須減少才能滿足限制式(68)與式(69)。

本案例之模擬中，無論是何種方案，其 Active Constraint 皆與定率模式應用案例一相同，即控制點 *b* 三個管理期與控制點 *c* 第一管理期之水頭洩降量可靠度限制式，以及控制點 *c* 第二與第三管理期之地層下陷量可靠度限制式，因此後續小節之驗證亦將以這些限制式為探討之對象。

4.2.3 序率模式計算時間討論

序率管理模式於電腦計算時間上主要由兩大部分控制，分別為：

1. 蒙地卡羅模擬計算單位響應係數統計特性：此部分所需時間取決於抽水井、管理期與參數取樣數目之設定，以本驗證案例而言，在參數取樣次數為 5,000 次，三個管理期之設定下，以 Intel Core 2 Duo 平台計算單一抽水井對各控制點之 5,000 組單位響應係數樣本所需時間約為 15 分鐘。
2. 最佳化演算法求解：最佳化演算所需時間正比於 B&B 執行分離、放寬與瞭解等步驟之效率，以本驗證案例而言，求得最佳解所需計算時間約為 20 秒，因此相比於前項蒙地卡羅模擬，最佳化演算所需時間非常短。

4.2.4 一階變異數分析方法合理性驗證與檢討

本節將探討 FOVE 方法應用於分析水頭洩降量與地層下陷量統計特性之合理性，本研究分別針對需求可靠度為 50%、60%、70%、80%、90% 與 99% 等六種狀況加以分析，由於此六種狀況分析結果均具有相同之趨勢，因此後續將以需求可靠度 90% 為例進行討論。

表 20 所列為在 90% 需求可靠度下，分別利用 FOVE 以及蒙地卡羅模擬所計算之水頭洩降量與地層下陷量之平均值與標準差。表 20 中 FOVE 代表將前節計算之最佳解代入式(45)、(46)、(60)以及式(61)後求得之平均值與標準差，LHS 則為以蒙地卡羅模擬所得 5,000 組樣本估計之平均值與標準差(圖 21)。本研究假設蒙地卡羅模擬所得之結果為正確，並定義相對誤差為 $[(FOVE - LHS)/LHS] \times 100$ ，

以評估 FOVE 之合理性。由相對誤差定義可知，正值與負值分別代表 FOVE 高估與低估期望值或標準差。圖 26 與圖 27 分別為水頭洩降量與地層下陷量統計特性之相對誤差。

由圖 26 可知，無論地質參數變異程度為何，水頭洩降量平均值之相對誤差皆不超過 $\pm 1.0\%$ ，且大多數都小於 0.1% ，觀察式(45)可知，水頭洩降量為單位響應係數平均值之線性組合，而單位響應係數之平均值亦為蒙地卡羅模擬所推求，因此式(45)所得之水頭洩降平均值即為正解(Exact Solution)。而在水頭洩降量標準差方面，兩方法計算之結果則有輕微之差異，其原因在於式(46)中，吾人並未考慮單位響應係數間之共變異數，然以相對誤差而言皆未超過 $\pm 2.0\%$ ，且多數小於 $\pm 1.0\%$ ，由此亦可驗證本研究假設單位響應係數互為線性獨立之合理性。

相較於水頭洩降量，由圖 27 可知地層下陷量平均值與標準差之相對誤差則隨著地質參數變異程度增加而變大，在低變異度之方案一中，其相對誤差僅達 -1.43% 至 -4.0% ，然而在高變異度之方案五，尤其在控制點 c 之第二個管理期，平均值與標準差之相對誤差則分別達到 -50% 與 -45% ，其原因在於一維土體壓密方程式為非線性，且 FOVE 係以泰勒展開式展開方程式後，再忽略高次項以求得一階近似之輸出變數統計特性，當方程式為非線性且參數變異度高時，被忽略之高次項對輸出變數統計特性之影響將會增加。

藉由以上討論可知，在地質參數不確定性程度高時，利用 FOVE 計算地層下陷量之期望值與標準差可能會有明顯低估之現象。

4.2.5 地層下陷量常態分布假設驗證

本小節將探討地層下陷常態分布假設之合理性。依據蒙地卡羅模擬並採用方案一、方案三與方案五中控制點 c 於第三管理期之 5,000 組地層下陷樣本，吾人可分別繪製如圖 28、圖 29 與圖 30 之直方圖，圖中之實線代表依據樣本平均值與標準差(表 20 中之 LHS)所描繪之理論常態分布曲線。比較三圖可知，在方案一參數不確定性程度低時，地層下陷量之直方圖相當吻合常態分布曲線，僅在左半邊之趾部(Toe)有較大之偏差，而隨著參數不確定性程度之提高，地層下陷之直方圖愈偏離常態分布曲線，且正斜(Positive Skew)之程度亦隨之增加，因此與 FOVE

相同，地層下陷常態分布之假設在參數不確定性程度高時將有可能產生極大之偏差。

4.2.6 真實可靠度驗證

由前兩小節之驗證結果可知，FOVE 與地層下陷常態分布之假設在參數變異度高時可能並不適用，本節將進一步驗證真實可靠度。真實可靠度之評估為本研究序率模式驗證最重要之項目，因其代表序率模式之計算結果是否能滿足決策者之需求，若其與需求可靠度差異過大，則模式將不具實用之價值，反之則吾人可忽略 FOVE 與地層下陷常態分布假設之不適用性，因模式最終仍能在滿足需求可靠度下求得最大可抽水量。依據蒙地卡羅模擬之 5,000 組水頭洩降與地層下陷樣本，吾人可計量超過最大允許值之樣本數，據此計算真實之可靠度。表 21 所列為 Active Constraint 於各方案下之真實可靠度以及與需求可靠度(皆為 90%)之相對誤差，其中相對誤差定義為 $[(\text{真實可靠度}-\text{需求可靠度})/\text{需求可靠度}] \times 100$ 。圖 31 則為相對誤差與參數變異程度之關係圖。由圖 31 可知，隨著參數不確定性程度提高，可靠度相對誤差亦隨之增加，然即使在不確定性程度最大之方案五，例如控制點 c 第三管理期地層下陷量平均值與標準差之相對誤差已分別達 -50% 與 -45%，其真實可靠度之相對誤差亦僅有 -4.44%。

由 4.2.4 節之討論吾人可歸納隨著參數不確定性之增加，FOVE 會加劇地低估地層下陷量之平均值與標準差，若在此情況下地層下陷之機率密度函數仍保持為常態分布(即符合本研究之假設)，則低估之平均值與標準差將會導致模式高估最大可抽水量，因此真實可靠度將遠小於需求可靠度(如圖 32(a))；相反地，當地層下陷機率密度函數隨著參數不確定性提高而由常態分布變為正斜之形態時，若 FOVE 仍能維持計算之正確性，則模式將會低估最大可抽水量，導致真實可靠度遠大於需求可靠度(如圖 32(b))。綜合以上說明可知，FOVE 低估平均值標準差以及地層下陷偏離常態分布假設對真實可靠度具有相反之影響，因此表 21 中真實與需求可靠度間之差異相當微小(如圖 32(c))。

藉由以上之驗證結果，本研究所發展之序率管理模式其正確性與參數不確定性程度有關，然在本驗證案例中，五個方案參數設定上已依據文獻資料盡量包含

沖積土層可能之最大變異程度與範圍，且五個方案在真實可靠度之驗證結果皆能提供相當良好之精確度，由此可加以驗證本研究所發展之序率管理模式能在符合決策者需求可靠度之考量下，提供正確之最大可抽水量以及各抽水井最佳抽水量之時空分布。

4.3 可靠度進階考量

在 4.2 節中本研究藉由虛擬之案例已驗證序率管理模式之正確性，而由驗證過程亦可發現到，不同之地質參數設定下最大可抽水量皆不相同，因此吾人亦可將其視為一隨機變數，且其不確定性來自於地質參數之變化性(不同於地質參數之不確定性係來自於完整調查資料之不足)。本節將繼續利用 4.2 節之案例，分析最大可抽水量之機率分布特性，以探討其與控制點需求可靠度之關係。

在序率模式驗證步驟(1)中，本研究藉由蒙地卡羅模擬製造出 5,000 組單位響應係數以推求其統計特性，而任一組之單位響應係數皆可代入定率管理模式中推求最大可抽水量(即等同於第三章應用案例一)，因此在前節所設定之五個方案中吾人皆可獲得 5,000 個最大可抽水量，圖 33 所示為不同方案下，由 5,000 個由小到大排列之定率最大可抽水量所繪製之累積百分率。由圖中可看出，方案一之 5,000 個定率最大可抽水量分布較為集中，而隨著地質參數不確定性程度提高，5,000 個定率抽水量之分布則愈為分散，此現象肇因於當地質參數變異度大時，LHS 會增加取樣出差異極大之地質參數隨機場之機會，因此最大可抽水量差異極大之現象也會更明顯。

為了探討最大可抽水量與需求可靠度(本案例針對 90%)之關係，吾人定義 5,000 個最大可抽水量中最小者為 Q_{100} ，而累積百分率為 10% 者則為 Q_{90} ，圖 34 所示為 Q_{100} 、 Q_{90} 以及前節序率模式所計算之最大可抽水量在不同方案下之比較，其中在相同方案下， Q_{90} 皆較序率模式計算之抽水量為大，因此 Q_{90} 必定無法滿足需求可靠度大於 90% 之限制，其原因在於雖然僅有 10% 之抽水量小於 Q_{90} ，但 Q_{90} 係僅依據一種地質參數隨機場所推求，並未完整考慮參數之統計特性；因此相同的情況，雖然 Q_{100} 皆小於序率模式計算結果，但亦不保證其必定滿足所有控制點

需求可靠度大於 90% 之要求，因此必須藉由蒙地卡羅模擬以探討其真正之可靠度。

將 Q_{90} 與 Q_{100} 利用前節驗證步驟(4)與(5)之方法代入地層下陷數值模式中模擬 5,000 次，表 22 與表 23 所示分別為在各控制點與各管理期水頭洩降與地層下陷小於最大允許值之真實可靠度。表中定率與序率分別代表抽水量係採用第三章驗證案例一與前節序率模式之計算結果。由表中可看出，定率模式計算之最大可抽水量若加入參數不確定性之考量則有明顯高估之現象，觀察 Active Constraint 所在之控制點與管理期可發現真實可靠度最高不超過 50%，且大部分低於 30%。而在 Q_{100} 部分，雖然大部分控制點各管理期之真實可靠度皆大於 90%，但在方案一與方案四控制點 a 之水頭洩降真實可靠度則僅為 82% 至 85%，由於區域 I 水力傳導係數較低，控制點 a 之水頭洩降對抽水最為敏感，因此管理模式計算時井 A 抽水之優先度最低(這也是控制點 a 不為 Active Constraint 之原因)，故若計算 Q_{100} 所用之單位響應係數係在區域 I 水力傳導係數偏大(LHS 取出較大之樣本)之地質參數隨機場計算而得，則即使其為 5,000 組抽水量中最小者，當用在其他 4,999 組地質參數隨機場中模擬時亦會造成控制點 a 水頭洩降偏大之情形。此亦驗證了前段所述 Q_{100} 僅依據一種地質參數隨機場所推求，並未完整考慮參數之統計特性，因此無法保證滿足所有控制點需求可靠度大於 90% 之要求。

圖 35 與圖 36 為 Q_{90} 在不同方案下，各控制點各管理期之實際可靠度組體圖，圖例中括號內左邊代表控制點，右邊代表管理期。觀察兩圖可發現，真實可靠度與地質參數不確定性程度並不存在明顯之關係，但半數左右之真實可靠度未滿足 90% 需求可靠度之限制，由此吾人可加以歸納並不可以採用最大可抽水量累積機率為 10% 之值做為 90% 需求可靠度之管理規劃。

第五章 濁水溪沖積扇地下水管理策略研擬

與模式應用

5.1 濁水溪沖積扇區域概述

5.1.1 地理位置暨水文狀況

濁水溪沖積扇位於臺灣西部海岸之中部地區，東起八卦山台地及斗六丘陵，西至臺灣海峽，北起烏溪，南至北港溪，其範圍涵蓋彰化縣與雲林縣，面積約為 1,700 平方公里，佔濁水河流域面積的百分之六十，是臺灣本島最大之沖積扇。區域內地形雖呈東高西低之勢態，但除東邊斗六丘陵與八卦山脈外，地表平均高程僅介於 10 公尺至 55 公尺間，整體地型相當平緩。

濁水溪沖積扇屬亞熱帶季風氣候，月平均溫度以一月最低，約為 13 度，七月最高約為 32 度，年平均溫度為攝氏 23 度。每年十月至翌年三月，東北季風盛行，三月以後東北季風漸止，四、五月份便開始進入西南季風期，並持續至九月。濁水溪沖積扇年雨量相當充沛，但在時間和空間分布上則非常不平均。以時間分布而言，八成之年降雨量集中在五月至九月間，十月至翌年四月則為明顯的乾季；而在空間分布方面，年平均雨量從東邊扇頂的 2,000 公釐往西遞減，在沿海岸地區僅為 1,000 公釐至 1,200 公釐之間。濁水溪沖積扇之河川除濁水溪與北港溪為主要河流外，較重要且獨流入海之河流尚有 12 條，總計為 14 條。其中發源於中央山脈者僅有濁水溪，而北港溪乃發源於斗六丘陵之低山性平地河川，其餘 12 條河川均發源於台地或平原地帶。圖 37 所示為濁水溪沖積扇區域圖。

5.1.2 地質概況與地質分層

濁水溪沖積扇之上游(扇頂)多為礫石層，而下游(扇尾)多為砂層或泥層，除斗六丘陵及其西側為更新世半固結之砂岩、泥岩、礫岩及紅土外，本區地表均為全新世以來未固結的礫石、砂土及黏土所覆蓋。而在地層垂向分布方面，中下游丘陵及平地區域之地層分布由上而下依序為現代沖積層、台地礫岩層以及頭嵙山礫

石層，三層總厚度在數百公尺以上，由於砂、礫層孔隙發達，含水性能佳，構成主要的含水層。垂向更深處則為上新世或更老之地層，主要由較緻密之砂頁岩組成，導水及含水性不佳。上游山脈大部分屬第三紀亞變質岩系板岩，含有許多複雜之褶曲與斷層，且風化侵蝕顯著，以致溪水終年混濁。板岩、變質砂岩與石英之碎屑在上游受侵蝕搬運至下游地區堆積，形成本沖積扇。

中央地質調查所將濁水溪沖積扇地表下 200 公尺深範圍內之水文地質，由上而下概念性劃分為含水層一、阻水層一、含水層二(可再細分為含水層二之 1 與含水層二之 2)、阻水層二及含水層三等共五層之地下水系統。各含水層在上游段岩性均屬礫石，並且合而為一，愈往下游分層愈趨明顯，粒徑愈細且含水層厚度漸小。於臺灣海峽中，阻水層一、二應合而為一，含水層一、二、三均尖滅於阻水層中，亦即各含水層末端應是封閉的，並未與海連通，形同自然地下水庫。含水層二厚度最大，沈積物粒徑最粗，含水及透水性能較佳，是最重要之地下水層。

5.1.3 地下水使用與地層下陷概況

由於濁水河流域河川含砂量太大，使得興建水庫有其難度，因此長期以來水資源來源皆偏重於地下水開發。自 1970 年代後期起，沿海地區之養殖漁業逐漸興盛，使得地下水抽取量大幅增加。此外近年來離島工業區的開發，亦將增加對於抽取地下水之需求。根據嘉義農業技術學院(2000 年已與國立嘉義師範學院整合為國立嘉義大學)沈向白教授之普查結果顯示，雲林縣全縣民井達近十萬口，地下水開採量約 8.0 億噸(其中農田灌溉用水約為 6 億多噸，養殖用水也約 1 億多噸)(如表 24 所列)，而地下水入滲補注量約只有 4.0 億噸。張良正與龔誠山(1996)在「區域性地下水觀測站網檢討 III」中亦曾對濁水溪沖積扇地下水補注量做全面之探討，其分析資料如表 25 所列。

根據水利署 1998 年「彰化沿海地區地盤下陷檢測計畫報告」中指出，彰化地區自和美、頂番婆、溪湖與北斗一線以西均有地層下陷情形發生，總面積約 581 平方公里，佔彰化平原之百分之七十四。此外又發現下陷率雖較以前減緩，但下陷範圍有向東漸為擴大之趨勢，其中西港地區由新街至濁水溪口沿海一帶，自 1975 起至 1995 年止，最大累積下陷量達 155 公分，而 1995 年至 1997 年間之下

陷量亦有 32 公分。另外大城地區自 1975 年至 1997 年止，最大累積下陷量也達 108 公分之多，且 1995 年至 1997 年間也有 40 多公分之下陷量產生。對於雲林地區地層下陷量，根據經濟部水利署 1998 年「地層下陷水準檢測—雲林縣沿海地區」報告中指出，由 1996 年至 1998 年下陷量超過 5 公分的範圍面積約 420.6 平方公里，而累積下陷量超過 7 公分的地區有橋頭至豐榮地區、崙背至龍岩地區、麥寮地區、台西地區與元長地區，且下陷量變化趨勢有向內陸擴增情況。另外，若分析 1992 年 8 月至 1998 年 2 月的檢測結果亦可發現，五年多以來累積下陷量超過 30 公分以上的區域，幾乎接近台十九線以西之範圍，而主要下陷中心為中山與台西地區。至於年下陷速率，口湖鄉，金湖鄉，有緩和趨勢，而豐榮地區有微量增加。

圖 38 所示為至 2001 年 8 月止，彰化縣累積地層下陷量超過 50 公分觀測井之分布圖，圖中顯示有 10 個累積地層下陷超過 50 公分之觀測井集中於大城鄉，餘下僅有一處位於芳苑鄉。圖 39 則為大城鄉 10 個觀測井地表高程變化之組體圖，其中由以大城國小與王厝寮下陷情形最為嚴重，累積下陷量分別達 139 與 133 公分。



5.1.4 地下水管制區

依據「水利法」規定「省（市）主管機關為防止某一地區地下水之超抽所引起之海水入侵或地盤沈陷，得劃定地下水管制區，限制或禁止地下水之開發。而其劃設評分原則包括：

- (1) 有下列二項者為正分，每項給十分。
 1. 地盤高於標高十五公尺以上。
 2. 地盤非為礫石層與黏土層之互層。
- (2) 有下列四項者為負分，每項扣十分。
 1. 地盤已下陷地區。
 2. 地下水位已低於海平面。
 3. 近十八年來，年最低水位下降三公尺以上。
 4. 地面標高在五公尺以下。

(3) 零分以下者列入管制區。

(4) 以鄉鎮(區)為管制單位。

濁水溪沖積扇共有 45 個鄉鎮市，而根據上述之劃分原則彰化地區計有六個鄉鎮被列入地下水管制區，分別是伸港鄉、線西鄉、鹿港鎮、福興鄉、芳苑鄉以及大城鄉；而雲林地區則有十個鄉鎮被列入地下水管制區，分別是麥寮鄉、臺西鄉、四湖鄉、口湖鄉、東勢鄉、崙背鄉、褒忠鄉、元長鄉、北港鄉以及水林鄉。

經濟部於 2004 年 12 月修正上述地下水管制區訂定辦法，改為分別對本島 1 公里×1 公里、離島 0.5 公里×0.5 公里所畫設之網格點進行評分，其評分原則如下：

(1) 地層下陷變化之評分

1. 累積下陷量，以該鄉(鎮、市、區)內所有檢測資料之最大累積下陷量為評分依據，累積下陷量每增加 1 公分，該鄉(鎮、市、區)內所有網格加給二分。
2. 地層下陷速率，以該網格近五年之地層下陷年平均速率為評分依據，其平均年下陷量每增加 0.01 公分，該網格加給三分之一分。

(2) 地下水位變化之評分：

1. 地下水位下降幅度，以該網格近五年之地下水位下降幅度為評分依據，地下水位下降量每增加 1 公分該網格加給一分。
2. 地下水位低於零水位線面積，以該網格近五年之最低月平均地下水位低於零水位線面積比例為評分依據，該比例每增加百分之一，該網格加給一分。
3. 地下水位絕對高程，以該鄉(鎮、市)內所有監測資料之最低月平均地下水位高程，低於零水位之高程差為評分依據，其高程差每增加 1.4 公尺，該鄉(鎮、市)內所有網格加給一分。

(3) 地質之評分，以該網格地層之地質種類所佔比例乘以其配賦評分權重之總和為其評分依據，各地質種類配賦之評分權重如下：

1. 固結岩：零分。
2. 礫層：二十五分。

3. 砂層：五十分。
 4. 泥層：一百分。
- (4) 地面高程之評分，以距離該網格最近驗潮站歷年之大潮平均高潮位加 100 公分減去該網格地面高程所得之差值為評分依據，其差值每增加 1 公分加給該網格一分。
- (5) 水質之評分，以該網格近五年之氯鹽平均值大於 250 mg/L 之差值為評分依據，其差值每增加 3.75 mg/L，該網格加給一分。

按照上述標準計算各網格之總分後，再依下列各檢討項目按其權重，加總計算之；總分在四十五分以上者列為管制網格：

(1) 臺灣本島地區：

1. 地層下陷變化：

(a) 累積下陷量：百分之十五。

(b) 地層下陷速率：百分之二十五。

2. 地下水水位變化：

(a) 地下水位下降幅度：百分之二十五。

(b) 地下水位低於零水位線面積：百分之十五。

3. 地質條件：百分之十。

4. 地面高程：百分之十。

(2) 離島地區：

1. 地下水位絕對高程：百分之四十。

2. 地質條件：百分之十。

3. 水質條件：百分之五十。

待各鄉鎮市全部網格之加總分數獲得後，管制區域之劃設與解除則依下列原則辦理：

- (1) 經檢討管制網格範圍達全鄉(鎮、區、市)檢討範圍面積百分之八十以上者，該鄉(鎮、市、區)檢討範圍全區域均予管制。
- (2) 經檢討管制網格範圍未達全鄉(鎮、市、區)檢討範圍面積百分之二十時，

該鄉(鎮、市、區)檢討範圍全區域不予管制。

- (3) 經檢討管制網格範圍達全鄉(鎮、市、區)檢討範圍面積百分之二十以上，未達百分之八十時，得依應予管制範圍周邊之明顯地形、地貌、排水、道路或地段分界劃設管制範圍，惟管制範圍不得小於管制網格之範圍。
- (4) 原已劃定為地下水管制區，經檢討位於地下水管制區劃設邊界外者，得解除管制。

依據上述之劃設原則，彰化縣除了原已劃為地下水管制區之六個鄉鎮市外，經評分後則增加了二林、秀水、埔鹽與竹塘等全鄉鎮，以及和美、埤頭與溪湖等鄉鎮部分地段；而雲林縣則除了原有之十個鄉鎮市外，亦新增了二崙、土庫、虎尾、斗南與大埤等全鄉鎮，以及西螺鎮之部分地段。圖 40 及圖 41 所示分別為彰化及雲林地區地下水管制區位置圖。

5.1.5 嚴重地層下陷區

經濟部水資源局(現已改制為水利署)曾於 1998 年公告台灣地區符合嚴重地層下陷標準之鄉鎮市，而其認定標準則有以下三項，分別為：

- (1) 暴潮溢淹區：低於該縣市最高高潮位以下，經常發生海水倒灌並導致嚴重災害之海岸低窪土地所在之鄉鎮。可反映地層下陷區所在地裡條件。
- (2) 地層下陷累積總量：鄉鎮內地層下陷累積總量大於 50 公分之沈陷面積佔其行政轄區面積超過百分之七十者。可反映地層下陷歷史。
- (3) 近年地層下陷年平均速率：鄉鎮內水準樁測量在近五年內之地層下陷年平均速率大於十公分以上者。可反映地層下陷近年來之趨勢。

嚴重地層下陷區劃定時以鄉鎮為單位，凡是達到「地層下陷累積總量」或「近年地層下陷年平均速率」認定標準，且達到「暴潮溢淹區」認定標準之鄉鎮，則該鄉鎮被劃定為嚴重地層下陷區。根據上述標準，目前彰雲地區被列入嚴重地層下陷區之鄉鎮市計有彰化縣大城鄉以及雲林縣之麥寮鄉、台西鄉、四湖鄉及口湖鄉。

經濟部於 2005 年 10 月修正嚴重地層下陷區劃設評分方式，與地下水管制區相同，同樣改以 1 公里×1 公里之網格點作為評分之單位，若網格符合累積下陷量

達 50 公分或年下陷速率 10 公分以上，且位於易淹水範圍內，則判定為嚴重地層下陷網格。待網格屬性決定後，則依據下述原則劃設嚴重地層下陷區：

- (1) 經檢討嚴重地層下陷網格範圍達全鄉(鎮、市、區)面積百分之七十以上者，以全鄉(鎮、市、區)列為嚴重地層下陷地區。
- (2) 經檢討嚴重地層下陷網格範圍達全鄉(鎮、市、區)面積百分之三十以上，未達百分之七十者，得依應列入嚴重地層下陷地區範圍周邊之明顯地形、地貌、排水、道路或地段分界劃設為嚴重地層下陷地區範圍。但該劃設為嚴重地層下陷範圍不得小於應列入之嚴重地層下陷網格範圍。
- (3) 經檢討嚴重地層下陷網格範圍未達全鄉(鎮、市、區)面積百分之三十者，該鄉(鎮、市、區)不予列入嚴重地層下陷地區。

依據上述之劃設原則，彰化縣除了原已劃為嚴重地層下陷區之大城鄉外，經評分後則增加了芳苑鄉部分地段；而雲林縣則除了原有之四個鄉鎮市外，亦新增了土庫、元長與水林等全鄉鎮，以及崙背、褒忠、虎尾、東勢、大埤與北港等鄉鎮市之部分地段。

5.2 地層下陷數值模式設定與資料處理

本節將詳述地層下陷數值模式應用於濁水溪沖積扇之設定，共分為邊界與網格設定、地質條件以及抽水井設定等，其設定係依據蔡東霖(2001)中之率定成果。

5.2.1 邊界與網格設定

濁水溪沖積扇西抵台灣海峽且以不透水之黏土層與其阻隔，東邊則以斗六丘陵與八卦山脈為界，因此東西兩邊之邊界條件可設定為零流量；而南北兩邊由於分別以北港溪與烏溪為界，因此理論上其地下水體與河川水體間應有雙向之交流，然由於河川入滲之資料極為有限，故假設南北兩邊亦為零流量邊界。

另外在計算網格設定上，設定每一網格為 2 公里×2 公里之正方形，其模擬區域邊界與網格圖如圖 42 所示。

彰化縣與雲林縣合計共有 46 個鄉鎮市，然由於本研究中東邊邊界位於八卦山脈，而彰化縣之芬園鄉為濁水溪沖積扇中唯一位於八卦山東麓之鄉鎮，因此本

研究將不納入芬園鄉之考量，亦即僅有 45 個鄉鎮市納入模擬之範圍內。

5.2.2 地質條件

根據 5.1 節所述之濁水溪沖積扇地質概況與地質分層，再配合各阻水層在空間分佈情形(張良正與龔誠山，1996)可將濁水溪沖積扇作水平分區與垂直分層之處理如圖 43 與圖 44 所示。其中垂直方向共分為五層，分別為第一含水層(侷限或非侷限)、阻水層、第二含水層、阻水層與第三含水層，最底部則視為不透水之岩盤。由於部分區域垂向上具有相同地質條件，並沒有明顯之分界處，數值模式中則以虛擬之分層處理。

在地質參數設定方面，地層下陷數值模式共需要水力傳導係數、拉梅常數、土層厚度與比儲水係數等資料，根據經濟部中央地質調查所「台灣地區地下水觀測網第一期計畫—八十一，八十二，八十三年濁水溪沖積扇水文地質調查」的研究報告指出，含水層水力傳導係數在含水層一之扇頂自由層約為 $1.93 \sim 0.4 \times 10^{-3}$ m/s，扇尾減至 $0.1 \sim 0.2 \times 10^{-3}$ m/s，而含水層二之扇頂約為 $1.93 \sim 0.4 \times 10^{-3}$ m/s，扇央與扇尾約為 $0.3 \sim 1.4 \times 10^{-3}$ m/s，含水層三之資料則付之闕如。研究中各分層與分區地質參數之設定係依據蔡東霖(2001)之率定成果，如表 26 所示。

5.2.3 抽水井設定

由於濁水溪沖積扇地區抽水井數量繁多，而其詳細之個別抽水井位置亦難以標定，且相關研究報告及文獻中對於抽水量之分析皆以鄉鎮市為單元，因此數值模式於抽水井之處理上係將一個鄉鎮市視為一口虛擬之抽水井，並將該鄉鎮市之總抽水量平均分配於該鄉鎮市之所有格網點上，例如若某一鄉鎮抽水量為 $10.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，而該鄉鎮包含 10 個格網點，則每一格網點均抽水 $1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 。而每一虛擬抽水井(即各鄉鎮市)於不同含水層之分層抽水比例則同樣依據蔡東霖(2001)之率定成果，詳如表 27 所示。

5.3 定率管理模式應用

5.3.1 模式設定

在定率模式設定方面，總共必須考量目標函數、決策變數、狀態變數、管理期距以及控制點等項目，以下詳述各項目之設定方式。

目標函數

設定為最大可抽水量，即最大化濁水溪沖積扇所有抽水井抽水量之和。

決策變數

設定為各抽水井之抽水量。管理模式中抽水井之考量與地層下陷數值模式相同，即視單一鄉鎮市為一口虛擬抽水井，並在計算單位響應係數時，將單位抽水量平均分配於虛擬抽水井所在鄉鎮市之全部網格點。

狀態變數

設定為各控制點之總地層下陷量(各分層之累加)。

管理期距

設定為一年管理期距之穩態條件。

控制點

本研究網格劃設共有 28×40 個格點，扣除不位於濁水溪沖積扇之外部點後，尚約有 600 個格網點，吾人並不需要將全部約 600 個格網點皆設為控制點，因其中可能包含狀況良好並不需特別管理之格點，且亦會造成響應矩陣過大、限制式過多計算困難的缺點。本研究對於控制點數之選取並無一定之原則，係以鄉鎮市為基準，根據各鄉鎮市所擁有之格點數除以四，以決定該鄉鎮市內控制點之數目。而位置選取上以地層下陷潛勢較大以及能均勻分布於該鄉鎮市內為原則，令每一鄉鎮之抽水量皆為 1.0 m³/sec 並以「區域性地下水超抽導致地層下陷模式」模擬 1 年後之地層下陷量，根據模擬結果於每一鄉鎮市內依擬定好之控制點數目



選取下陷量最大之網格點，地層下陷量相近之點則依照均勻分布之原則選取。經由上述步驟後，總控制點數目縮減為 150 個，圖 45 所示為 150 個控制點之位置圖。

5.3.2 管理方案研擬

前小節中已定義管理模式各項目之意義，吾人尚須決定決策變數(各井抽水量)與狀態變數(各控制點地層下陷)之限制值始能進行求解。決策變數與狀態變數限制值可依據不同之管理方案加以擬定，本研究依據 2004 年以前劃設之嚴重地層下陷區與地下水管制區，共設計有以下數個方案：

(1) 各井抽水量上限固定方案

根據 2006 年 2 月發布之地下水管制辦法，位於地下水管制區之鄉鎮市，其鄉鎮內抽水井之抽水量，除了主管機關因應上級政府輔導各目的事業之政策需要，而對於原合法取得水權重新調配引水者外，不得申請增加抽水量。

上述規定僅適用於地下水管制區內，然為了避免地下水資源過度開採之可能性，本方案限定濁水溪沖積扇之所有鄉鎮市其抽水量均不得超過該鄉鎮市現行之抽水量。而由於各抽水井實際之現行抽水上限並無詳細資料記載，因此本研究中假設各鄉鎮市之抽水量上限值等於表 24 中記載之抽水量。

在各鄉鎮市抽水量上限決定後，根據各控制點所在位置不同，地層下陷量允許上限值則有以下二個子方案之考量。

(1a) 位於地下水管制區(包含嚴重地層下陷區)之控制點，於 1 年之管理期末後地層下陷最大允許值為零，因這些控制點代表其地下水位低於海平面或者是已有地層下陷之現象發生；而非地下水管制區之控制點則由零開始逐步增加，以探討其與最大可抽水量之關係，然其改變最多不得超過 10 公分，因年平均下陷速率 10 公分以上即達到嚴重地層下陷區之標準。

(1b) 位於嚴重地層下陷區之控制點，於 1 年之管理期末後地層下陷最大允許值為零；其他區域之控制點(包含部分地下水管制區)則由零開始逐步增加至 10 公分。

(2) 非地下管制區水井抽水量可增加方案

本方案目的在探討當位於非地下水管制區內之鄉鎮市抽水量上限可提高時，是否能對最大可抽水量帶來顯著之變化。在此方案下，各鄉鎮市之抽水量上限值將由表 24 記載之值開始，由 110% 逐步增加至 200%，而控制點地層下陷最大允許值則以下列二個子方案加以考量。

(2a) 位於地下水管制區(包含嚴重地層下陷區)之控制點，於 1 年之管理期末後地層下陷最大允許值為零；而依據濁水溪沖積扇現況地層下陷資料之分析，非地下水管制區之下陷速率逼近每年 5 公分，為了減緩其下陷速率，非地下水管制區之控制點於 1 年管理期末之地層下陷最大允許值在此設定為 3 公分。

(2b) 位於嚴重地層下陷區之控制點，於 1 年之管理期末後地層下陷最大允許值為零；位於地下水管制區，但不屬於嚴重地層下陷區之控制點設定其地層下陷最大允許值為 1 公分；而非地下水管制區之控制點則與(2a)相同設定為 3 公分。

上述各方案之設定詳如表 28 所列。

5.3.3 應用結果與討論

圖 46 所示為方案(1a)與(1b)最大可抽水量與地層下陷量限制值之關係，由於各鄉鎮市之抽水並未限制其不得小於零，因此有部分鄉鎮市之抽水量為負(即代表補注)，而最大可抽水量即為各鄉鎮之總抽水量減總補注量，圖 47 所示即為總抽水量與總補注量與地層下陷量限制值之關係，而圖 48 與圖 49 則為地層下陷限制值分別為 5 公分與 10 公分時，各鄉鎮市之抽水量或補注量。

觀察圖 46 可發現，隨著地層下陷量最大允許值之提高，最大可抽水量亦相對提高。而(1b)方案因為開放地下水管制區(不包括嚴重地層下陷區)之地層下陷量可大於零，所以最大可抽水量均較(1a)方案為大。根據秦啟文等(2000)之研究，濁水溪沖積扇年用水量為 31 億立方公尺，而地下水源供應了 9 億立方公尺。依據水利署「集集攔河堰運用要點」，其可供應濁水溪沖積扇地區豐水期(6 月至 9 月)

每日 20 萬噸、枯水期(10 月至翌年 5 月)每日 10 萬噸公共用水量，豐水期可供應工業用水每日 86 萬噸，則集集共同引水計劃約可供應濁水溪沖積扇地區每年 1.5 億立方公尺之用水。以(1a)案例而言，在無其他水資源開發或調配方案實施以及不加大現有抽水井現行抽水量下，即使放寬非地下水管制區之允許地層下陷量至年平均下陷速率 10 公分，年可用水量為 $5.86 + 1.5 = 7.36$ 億立方公尺，亦無法滿足 9 億立方公尺之需求量。而在(1b)方案中，當地層下陷允許上限值達到年平均速率 10 公分時，年可用水量為 $6.48 + 1.5 = 7.98$ 億立方公尺，幾可達到 9 億立方公尺之地下水需求量，但須另覓 2.49 億立方公尺之水源補注於地層下陷敏感地區，且因地層下陷量最大允許值已達嚴重地層下陷之門檻，故(1a)與(1b)方案並無實用之價值。

圖 52 所示為方案(2a)與(2b)最大可抽水量與非地下水管制區各鄉鎮市抽水量上限增加百分率之關係圖，圖 53 所示則為總抽水量與總補注量。由圖 52 可知，當增大非地下水管制區鄉鎮市抽水量上限值至表 24 抽水量之 180%時，方案(2a)與(2b)最大可抽水量分別達到每年 7.32 與 7.41 億立方公尺，此時各鄉鎮市之抽水量或補注量如圖 54 與圖 55 所示。方案(2a)與(2b)在非地下管制區抽水量上限增加 180%時之最大可抽水量加上集集共同引水計劃每年約 1.5 億立方公尺之供水，剛好可滿足濁水溪沖積扇地區地下水之需求量，但亦必須以人工方式每年補注 3.27 億立方公尺，才可地層下陷量於控制點之限制。

(2a)與(2b)兩方案各有其優缺點。方案(2a)之優點為地層下陷僅發生於非地下水管制區內，且下陷速率最大不超過 3 公分/年，其缺點則為最大可抽水量較(2b)方案少 0.15 億立方公尺，但卻需與方案(2b)相同之人工補注地下水量。方案(2b)之優缺點則與方案(2a)相反，雖然多了 0.09 億立方公尺之抽水量，但地下水管制區內(不包括嚴重地層下陷區)則會發生地層下陷，雖然其下陷速率最多不會超過 1 公分/年，但因位於地下水管制區之鄉鎮多濱海，且過去有地層下陷發生或地下水位低於海平面，因此仍須審慎評估。

5.4 序率管理模式應用

5.3 節中本研究以定率管理模式應用於濁水溪沖積扇地區，以決定最佳之地下水抽取策略，其中在案例設定上吾人並未考慮入滲之影響以致最佳策略趨向保守，且抽水量可為負值之設定亦使模式計算結果必須適當輔以人工補注。本節將進一步考慮入滲之影響且設定抽水量不可為負，利用序率管理模式探討濁水溪沖積扇合宜之地下水管理策略。

5.4.1 模式設定與管理方案研擬

由於考慮了不確定性之影響，序率模式應用時所需考量之項目較定率模式多了地質參數統計特性以及可靠度等要項。本節中目標函數、決策變數、狀態變數以及管理期距等項目之設定與 5.3 節相同，以下說明地質參數統計特性、控制點、地層下陷最大允許值、需求可靠度以及管理方案之設定。

地質參數統計特性

依據本研究序率模式之建立方法，吾人需要設定水力傳導係數與拉梅常數之期望值與標準差，在期望值方面係採用定率模式應用時之設定(表 26)，拉梅常數之標準差則假設為 $5 \times 10^7 \text{ Nt/m}^2$ ，而水力傳導係數之標準差則依下述方法決定。

根據秦啟文等(2000)之研究指出，濁水溪沖積扇含水層水力傳導係數之變化範圍如表 29 所示，其中扇頂代表地質分區之第 IV 區，扇央代表地質分區之第 II 與第 III 區，而扇尾則代表地質分區之第 I 區。將各地質分區不同含水層水力傳導係數變化範圍之兩端邊界數值取自然對數(水力傳導係數為對數常態分布)，則此二數值即為對數水力傳導係數變化範圍之邊界，由於對數水力傳導係數為常態分布，本研究假設對數水力傳導係數之標準差即為此兩端邊界之距離除以六，亦即有 99.74% 之機率 LHS 取樣資料是屬於對數水力傳導係數之變化範圍。待對數水力傳導係數之標準差決定後，即可利用以下方程式配合試誤法求出水力傳導係數之標準差或對數水力傳導係數之期望值。

$$E[K] = e^{\frac{E[\ln K] + \frac{\text{Var}[\ln K]}{2}}{2}} \quad (84)$$

$$\text{Var}[K] = e^{2E[\ln K] + \text{Var}[\ln K]} (e^{\text{Var}[\ln K]} - 1) \quad (85)$$

根據以上所述，本研究中各分層與分區地質參數之給定如表 30 所示。

控制點

在控制點之選取上，本研究採以下流程進行之：

- (1) 依據表 30 之參數設定，利用 LHS 對水力傳導係數與拉梅常數取樣 100 組資料。
- (2) 令一鄉鎮市抽水量為 $1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ，其餘鄉鎮市為零，以步驟(1)之 100 組地質參數資料執行地層下陷數值模式 100 次，模擬 1 年後每一網格點之地層下陷量。
- (3) 設定控制點為平均地層下陷量最大之網格點。
- (4) 重複步驟(2)與步驟(3)45 次，找出因為各鄉鎮市分別抽 $1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ 地下水而造成平均地層下陷量最大之網格點。

重複執行步驟(2)與步驟(3)於不同之鄉鎮市可能會找出相同之網格點，經由以上步驟後所決定之控制點數目為 41 個，如圖 56 所示。

地層下陷量最大允許值

本研究對控制點地層下陷量最大允許值之設定係考慮入滲之影響以及控制點之位置，並採以下步驟加以訂定。

- (1) 入滲之考量：以表 25 所列之各鄉鎮市年入滲量以及 LHS 取樣所得之 100 組地質參數為輸入，利用地層下陷數值模式可計算 100 組各控制點於一年後因為入滲之影響所能減少之地層下陷量，本研究進一步計算 100 組中最小 10 組資料之平均值並視為因入滲之影響所能減少之地層下陷量。
- (2) 控制點位置之考量：在控制位置不同之考量上，採用與定率模式應用(2b)方案相同之設定，即嚴重地層下陷區不可發生地層下陷，地下水管制區(不包含嚴重地層下陷區)之最大允許下陷量為 1 公分，非地下水管制區則設定為 3 公分。

經由以上分析後，各控制點地層下陷量最大允許值之設定為(1)與(2)之和，詳

如表 31 所列。

控制點需求可靠度

本研究中控制點地層下陷量不超過其最大允許值之需求可靠度依據控制點所在位置而有所不同。其中位於嚴重地層下陷區之控制點其需求可靠度設定為 95%，而位於地下水管制區內但不屬於嚴重地層下陷區之控制點其需求可靠度則設定為 90%。至於非位於地下水管制區之控制點，本研究將探討其分別為 80%、85%與 90%時對最大可抽水量之影響。

管理方案研擬

與定率模式相同，本研究依據各鄉鎮市抽水上限值之不同考慮以下三個方案。

(3a) 所有鄉鎮市抽水量均不得超過該鄉鎮市現行之抽水量(採用表 24 之資料)。

(3b) 非位於地下水管制區之鄉鎮市其抽水量上限為(3a)之 150%。

(3c) 非位於地下水管制區之鄉鎮市其抽水量上限為(3a)之 200%。

上述各項目之設定與方案研擬詳如表 32 所列。

5.4.2 應用結果與討論

根據表 32 方案之研擬，圖 57 所示為此三個方案最大可抽水量與非地下水管制區控制點需求可靠度之關係圖，表 33 至表 35 則為各鄉鎮市之最佳抽水量。觀察圖 57 可知，隨著非地下水管制區控制點需求可靠度之提高，最大可抽水量亦相對減少，與第四章之驗證成果吻合，三個方案最大可抽水量之減少量均接近 $0.5 \text{ m}^3/\text{sec}$ (0.158 億噸/年) (80% 需求可靠度升至 90%)，由於非地下水管制區較無面臨地層下陷災害之迫切危險，因此在其需求可靠度已達 80% 之情形下，決策者可評估是否值得犧牲約 0.158 億噸/年之抽水量來換取非地下水管制區增加 10% 之需求可靠度。而在相同需求可靠度下，最大可抽水量由小至大依序為方案(3a)、(3b)與(3c)，由此顯示提高非地下水管制區內鄉鎮市抽水量上限，可適度提高濁水溪

沖積扇之最大可抽水量，且不致產生嚴重之地層下陷危害。

依據定率模式應用結果，濁水溪沖積扇地區每年尚需 7.5 億噸之地下水需求量。然以序率模式應用結果顯示，在如表 32 之管理方案設定下，即使開放非地下水管制區之鄉鎮市抽水上限可提高 200%，且非地下水管制區需求可靠度為 80%，其最大可抽水量亦僅有 1.35 億噸/年，遠低於 7.0 億噸之年需求量，因此地下水管制區必須考慮適當之減抽地下水並輔以管理模式做妥善之抽水量分配，以期減緩地層下陷危害嚴重之現象。



第六章 結論與建議

在第一章至第五章中，本研究已分別針對地下水管理模式過去之相關研究成果、本研究所發展定率與序率管理模式之架構與建立方法、以及模試驗證與案例模擬等做詳細之敘述，並將發展之模式應用於濁水溪沖積扇地區以展現其實用性，本章將對本研究之成果做一總結，並提出建議以為後續相關研究之參考。

6.1 結論

模式架構與建立

- (1) 過去地下水管理模式相關之研究僅有少部分考慮地層下陷之影響，而其中以 Simulation-Optimization 觀點建立之定率管理模式係以預壓密水頭作為限制條件以避免地層下陷之發生，然預壓密水頭通常難以獲得，且均未考慮地質參數不確定性所造成之影響。
- (2) 本研究採用 Simulation-Optimization 之觀點，並分別利用響應矩陣法與一維土體壓密方程式建立同時定量考量水頭洩降量與地層下陷量之定率地下水管理模式。
- (3) 在考慮地質參數(水力傳導係數與拉梅常數)之不確定性後，利用 CCP 之技巧進一步建立序率之地下水管理模式，提供決策者能在考慮地層下陷影響下，以可靠度之觀點進行地下水管理策略研擬，而其中序率模式建立之流程中更包含下述二項重要之步驟：
 1. 考慮地質參數之空間變異性，利用蒙地卡羅模擬分析單位響應係數之統計特性，而在隨機場之取樣則採用 LHS。
 2. 以一階變異數分析法推導水頭洩降量與地層下陷量之統計特性。
- (4) 模式建立後，導入二進位變數之觀念，將 Non-smooth Optimization 之問題轉換為混合整數規劃，除了降低求解之難度與增加求解之效率外，在定率模式中更能保證獲得全域最佳解。
- (5) 研究中以最大可抽水量或最小總地層下陷量作為模式之目標函數，然本研

究所推導之地層下陷量統計特性與限制式仍可應用於過往其他類型之管理模式中，將其擴展為具有定量考量地層下陷影響之功能。

(6) 基於模式建立所依據之方法，本研究所發展之管理模式仍具有下述之限制：

1. 模式中地層下陷量之計算係採用以彈性理論假設所推導之一維土體壓密方程式，故模式並無法考慮土體大變形或短時間內地下水位反覆升降之影響。然於地下水管理之觀點而言，旨在控制地層下陷之現象，故並不需考慮土體大應變之情形。
2. 研究中水頭洩降量與地層下陷量係採非耦合方式計算，依據蔡東霖(2001)之研究，此計算方法並無法應用於三維地下水流現象明顯之地區，然在大區域之尺度下，地下水系統可合理的假設含水層與阻水層分別為水平流與垂直流(Anderson and Woessner, 1992)。
3. 研究中採用響應矩陣法計算水頭洩降量，因此當模式應用於水力傳導係數極低之阻水層時，管理期距之設定必須大於 $0.5 S_s B^2 / K$ ，如此才能確保阻水層內孔隙水壓之分布已達平衡狀態。

定率管理模式驗證與案例模擬

- (1) 待定率管理模式建立完成後，本研究以試誤法配合地層下陷數值模式以驗證定率管理模式之正確性。驗證過程共設計有穩態、動態、單井與多井等案例，而結果顯示定率管理模式之計算結果皆與試誤法相同，顯示其正確性。
- (2) 由定率模式驗證過程之繁複亦可發現，若僅以試誤法配合數值模式為方法，當地下水系統或管理方案趨於複雜時，將非常難尋找出最佳之管理策略。
- (3) 由定率模式之案例應用成果，吾人可歸納以下二點結論：
 1. 在僅考慮水頭洩降量之情況下，最大可抽水量有可能被過於高估，導致管理區域發生不預期之地層下陷危害。
 2. 除了決定最大可抽水量與各抽水井抽水量之最佳時空分布外，當管理問

題為穩態時，管理模式亦提供決定單井最大抽水能力以及最佳設井位置之功能。

序率管理模式驗證與案例模擬

- (1) 由單因子敏感度分析之成果顯示，影響地層下陷量最重要之地質參數為水力傳導係數與拉梅常數，至於土層厚度與比儲水係數則幾乎不對地層下陷量造成影響，因此可將其視為不具不確定性之參數，減少地層下陷相關分析之複雜度。
- (2) 由 LHS 取樣次數需求之測試成果顯示，當地質參數不確定性程度提高時，取樣次數必須相對地增加，依據 Gelhar (1993) 之研究，沖積土層之對數水力傳導係數最大可能標準差約為 1.2，在此情況下取樣次數必須達 5,000 次以上才能確保取出之隨機場具有代表性。
- (3) 序率模試驗證結果顯示，在地質參數變異程度低時，利用一階變異數分析法計算地層下陷之統計特性具有良好之結果，而當地質參數變異度提高時，則一階變異數分析法會低估地層下陷量之期望值與標準差。
- (4) 雖然當地質參數變異度提高時，一階變異數分析法與地層下陷常態分布之假設皆無法提供良好之近似，但序率模式計算之最大可抽水量經過蒙地卡羅模擬後，驗證其仍能滿足需求可靠度之限制。
- (5) 由序率模式應用結果顯示，當必須在極高可靠度之情況下擬定地下水管理方案時，決策者必須審慎決定需求可靠度，因其能對最大可抽水量造成極高之變化。
- (6) 由於地質參數不確定性之影響，當僅需考慮 50% 可靠度(Risk-Neutral)之管理方案時，仍須以序率管理模式尋找最佳之策略，直接採用定率管理模式之計算結果將造成實際可靠度遠低於需求可靠度。

濁水溪沖積扇地下水管理方案研擬與模式應用

- (1) 在定率模式之應用中，部分鄉鎮市之最佳抽水量為負值，由此顯示於適當之地點進行人工補注將能提高地下水系統之淨產能(抽水量減補注量)，且

兼顧避免發生地層下陷危害之效益。

- (2) 依據管理模式應用成果，無論是以定率或序率觀點考量，在本研究所設定，以避免或減緩地層下陷為目標之方案中，均無法滿足濁水溪沖積扇現況地下水需求量，由此顯示濁水溪沖積扇確實面臨地下水嚴重超抽之現象。

6.2 建議

- (1) 由於水頭洩降量與地層下陷量變化之尺度差異甚大，而不同土層間地質參數亦可能具有差異極大之數值，導致不同限制式之係數具有極大之變化範圍，當管理區域、管理期或控制點增多時，可能造成最佳化演算法求解之困難，建議未來可嘗試將地質參數以及目標函數與限制式中之變數加以無因次化，以增加限制式係數尺度之均勻度。
- (2) 雖然最佳化演算計算時間很短，但當管理問題趨於複雜時，例如管理期、抽水井與控制點之增加，最佳化演算可能面臨無法收斂之現象，建議未來可嘗試以遺傳演算法取代 B&B，亦可增加模式之實用性。
- (3) 目前本研究係假設在非侷限含水層中，水頭洩降量遠小於飽和含水層之厚度，然此假設並不一定符合抽水井附近水頭洩降之實際現象，因此未來在應用時，可考慮以 Maddock (1974) 之研究修正單位響應係數之數值以符合實際情形。
- (4) 以 CCP 建立之序率管理模式雖能提供決策者需求可靠度之考量，然其為各別控制點之需求可靠度，並不代表地下水系統整體之可靠度。建議未來可分析各控制點間(水頭洩降量與地層下陷量)之相關性，將 CCP 之機率限制式進一步擴展為所有控制點地層下陷(或水頭洩降)皆不超過最大允許值之機率必須大於需求可靠度。
- (5) 由於一維土體壓密方程式中 G 在原點不可微分，必須將 G 之期望值與變異數作式(58)與式(59)之假設，導致序率管理模式為 Non-smooth Optimization 或 MINLP(以二進位變數轉換)之問題。由於 G 之真實期望值與變異數僅為水頭洩降量期望值與變異數之函數，未來可嘗試以類神經網路訓練足以代表式(56)與

式(57)之方程式，以消除 Error Function 在最佳化演算時之困擾，而類神經網路訓練之樣本則可以 LHS 對水頭洩降量之期望值與變異數進行取樣，再配合數值積分加以獲得。

- (6) 建議未來可將本研究所發展之地下水管理模式與地表水管理模式加以結合，因地層下陷之控制或預防除了從地下水抽取管制開始外，亦須地表水聯合支援或適當補注於地下水系統，始能達到最佳之水資源產出量。
- (7) 本研究管理模式於濁水溪沖積扇之應用中，管理方案之研擬係依據 2004 年以前劃設之地下水管制區與嚴重地層下陷區，建議未來可採用 2004 年以後劃設之資料重新檢討，如此亦可探討地下水管制區與嚴重地層下陷區之增加對地下水管理上之影響。
- (8) 本研究管理模式於濁水溪沖積扇之案例設定與模擬結果僅為模式應用之示範，未來於實際應用時，建議可從正向之角度擬定管理策略，例如以水資源供需之條件，利用管理型態為最小化地層下陷量之管理模式推求最佳抽水分布與可能之地層下陷量，再進一步分析地層下陷帶來之影響，如此則管理策略亦較容易為大眾所接受。



參考文獻

- 李振誥，許清荃，林倣寬，”濁水溪沖積扇多層地下水調配與管理之研究”，第四十八卷，第四期，41 頁-52 頁，台灣水利季刊。
- 秦啟文，劉振宇，鄭立新，(2000)，”台灣地區地下水—濁水溪沖積扇篇”，第十一屆水利工程研討會論文集。
- 張良正，龔誠山，(1996)，「區域性地下水觀測站網檢討(II)—濁水溪沖積扇觀測站網佈井及觀測頻率檢討」，經濟部水資源局。
- 蔡東霖，(2001)，「區域性地下水超抽導致地層下陷模式之發展與應用」，國立交通大學土木工程研究所博士論文。
- Aguado, E., Remson, I., Pikul, M. F., and Thomas, W. A. (1974). "Optimal Pumping for Aquifer Dewatering." *Journal of the Hydraulics Division-ASCE*, 100(Nhy7), 869-877.
- Aguado, E., and Remson, I. (1980). "Ground-Water Management with Fixed Charges." *Journal of Water Resources Planning and Management Division-ASCE*, 106(WR2), 375-382.
- Alley, W. M., Aguado E., and Remson I. (1976). "Aquifer Management Under Transient and Steady-State Conditions." *Water Resour. Bull.*, 12(5), 963-972.
- Anderson, M. P., and Woessner, W. W. (1992). *Applied groundwater modeling : simulation of flow and advective transport*, Academic Press, San Diego.
- Bear, J., and Verruijt, A. (1987). *Modeling groundwater flow and pollution : with computer programs for sample cases*, D. Reidel Pub. Co.
- Bredehoe.Jd, and Pinder, G. F. (1970). "Digital Analysis of Areal Flow in Multiaquifer Groundwater System - a Quasi 3-Dimensional Model." *Water Resources Research*, 6(3), 883-888.
- Chan, N. (1993). "Robustness of the Multiple Realization Method for Stochastic Hydraulic Aquifer Management." *Water Resources Research*, 29(9), 3159-3167.
- Chan, N. (1994). "Partial Infeasibility Method for Chance-Constrained Aquifer Management." *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 120(1), 70-89.

- Charnes, A., and Cooper, W. W. (1959). "Chance-constrained programming." *Management Science*, 6(1), 73-79.
- Colarullo, S. J., Heidari, M., and Maddock, T. (1984). "Identification of an Optimal Groundwater-Management Strategy in a Contaminated Aquifer." *Water Resources Bulletin*, 20(5), 747-760.
- Cressie, N. A. C. (1993). *Statistics for spatial data*, J. Wiley, New York.
- Danskin, W. R., and Gorelick, S. M. (1985). "A Policy Evaluation Tool - Management of a Multiaquifer System Using Controlled Stream Recharge." *Water Resources Research*, 21(11), 1731-1747.
- Das, B. M. (1983). *Advanced soil mechanics*, Hemisphere Pub. Corp., McGraw-Hill, Washington, New York.
- Datta, B., and Dhiman, S. D. (1996). "Chance-constrained optimal monitoring network design for pollutants in ground water." *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 122(3), 180-188.
- Deninger R. A. (1970). "System Analysis of Water Supply Systems." *Water Resour. Bull.*, 6(4), 573-579.
- Duckstein, L., Treichel, W., and Elmagnouni, S. (1994). "Ranking Groundwater-Management Alternatives by Multicriterion Analysis." *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 120(4), 546-565.
- Feyen, L., and Gorelick, S. M. (2004). "Reliable groundwater management in hydroecologically sensitive areas." *Water Resources Research*, 40(7), 1-14.
- Floudas, C. A. (1995). *Nonlinear and mixed-integer optimization : fundamentals and applications*, Oxford University Press, New York.
- Gelhar, L. W. (1993). *Stochastic subsurface hydrology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Gorelick, S. M. (1983). "A Review of Distributed Parameter Groundwater-Management Modeling Methods." *Water Resources Research*, 19(2), 305-319.
- Haimes, Y. Y., and Dreizin, Y. C. (1977). "Management of Groundwater and Surface-Water Via Decomposition." *Water Resources Research*, 13(1), 69-77.
- Heidari, M. (1982). "Application of Linear-Systems Theory and Linear-Programming

- to Groundwater-Management in Kansas." *Water Resources Bulletin*, 18(6), 1003-1012.
- Hillier, F. S., and Lieberman, G. J. (1974). *Operations research*, Holden-Day, San Francisco.
- Keshari, A. K., and Datta, B. (1996). "Integrated optimal management of ground-water pollution and withdrawal." *Ground Water*, 34(1), 104-113.
- Larson, K. J., Basagaoglu, H., and Marino, M. A. (2001). "Prediction of optimal safe ground water yield and land subsidence in the Los Banos-Kettleman City area, California, using a calibrated numerical simulation model." *Journal of Hydrology*, 242(1-2), 79-102.
- Liu, B. (1999). *Uncertain programming*, Wiley-Interscience, New York.
- Liu, J., and Spiegel, M. R. (1999). *Mathematical handbook of formulas and tables*, McGraw-Hill, New York.
- Maddock, T. (1974). "Nonlinear Technological Functions for Aquifers Whose Transmissivities Vary with Drawdown." *Water Resources Research*, 10(4), 877-881.
- Maddock, T., and Haimes, Y. Y. (1975). "Tax System for Groundwater Management." *Water Resources Research*, 11(1), 7-14.
- McKay, M. D. (1988). "Sensitivity and uncertainty analysis using a statistical sample of input values." *Uncertainty Analysis*, Y. Ronen, ed., CRC Press, Inc., Boca Raton, Fla., 145-186.
- Mckay, M. D., Beckman, R. J., and Conover, W. J. (2000). "A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code." *Technometrics*, 42(1), 55-61.
- Molz, F. J., and Bell, L. C. (1977). "Head Gradient Control in Aquifers Used for Fluid Storage." *Water Resources Research*, 13(4), 795-798.
- Morgan, D. R., Eheart, J. W., and Valocchi, A. J. (1993). "Aquifer Remediation Design under Uncertainty Using a New Chance Constrained Programming Technique." *Water Resources Research*, 29(3), 551-561.
- Mylopoulos, Y. A., Theodosiou, N., and Mylopoulos, N. A. (1999). "A stochastic optimization approach in the design of an aquifer remediation under hydrogeologic

- uncertainty." *Water Resources Management*, 13(5), 335-351.
- Onta, R., and Das Gupta, A. (1995). "Regional management modeling of a complex groundwater system for land subsidence control." *Water Resources Management*, 9(1), 1-25.
- Peralta, R. C., and Datta, B. (1990). "Reconnaissance-Level Alternative Optimal Groundwater Use Strategies." *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 116(5), 676-692.
- Peralta, R. C., Azarmnia, H., and Takahashi, S. (1991). "Embedding and response matrix techniques for maximizing steady-state ground-water extraction: computational comparison." *Ground Water*, 29(3), 357-364.
- Peralta, R. C., Kowalski, K. G., and Morelseytoux, H. J. (1988). "Groundwater Recharge Planning Using Resolvent Discrete Kernels." *Transactions of the Asae*, 31(6), 1737-1742.
- Phillips S. P., Carlson C. S., Metzger L. F., Howle J. F., Galloway D. L., Sneed M., Ikehara M. E., Hudnut K. W., and King N. E. (2003). "Analysis of Tests of Subsurface Injection, Storage, and Recovery of Freshwater in Lancaster, Antelope Valley, California." Development of a Simulation/Optimization Model, U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 03-4061, 93-100.
- Reismann, H., and Pawlik, P. S. (1980). *Elasticity, theory and applications*, Wiley, New York.
- Reklaitis, G. V., Ravindran, A., and Ragsdell, K. M. (1983). *Engineering optimization : methods and applications*, Wiley, New York.
- Remson I., and Gorelick S. M. (1980). "Management Models Incorporating Groundwater Variables." in *Operations Research in Agriculture and Water Resources*, edited by D. Yaron and C. S. Tapiero, North-Holland, Amsterdam.
- Sawyer, C. S., and Lin, Y. F. (1998). "Mixed-integer chance-constrained models for ground-water remediation." *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 124(5), 285-294.
- Sierksma, G. (1996). *Linear and integer programming : theory and practice*, Dekker, New York.
- Terzaghi, K. (1925). *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage*, F. Deuticke,

Vienna.

- Tiedeman, C., and Gorelick, S. M. (1993). "Analysis of Uncertainty in Optimal Groundwater Contaminant Capture Design." *Water Resources Research*, 29(7), 2139-2153.
- Tung, Y. K. (1986). "Groundwater-Management by Chance-Constrained Model." *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 112(1), 1-19.
- Uryasev, S. P. (1991). "New Variable-Metric Algorithms for Nondifferentiable Optimization Problems." *Journal of Optimization Theory and Applications*, 71(2), 359-388.
- Wagner, B. J., and Gorelick, S. M. (1987). "Optimal Groundwater Quality Management under Parameter Uncertainty." *Water Resources Research*, 23(7), 1162-1174.
- Wagner, B. J., and Gorelick, S. M. (1989). "Reliable Aquifer Remediation in the Presence of Spatially-Variable Hydraulic Conductivity - from Data to Design." *Water Resources Research*, 25(10), 2211-2225.
- Wagner, J. M., Shamir, U., and Nemati, H. R. (1992). "Groundwater Quality Management under Uncertainty - Stochastic-Programming Approaches and the Value of Information." *Water Resources Research*, 28(5), 1233-1246.
- Willis, R., and Newman B. A. (1977). "Management Model for Groundwater Development." *Journal of Water Resources Planning and Management Division-ASCE*, 103(1), 159-171.
- Yang, Y. F., and Li, D. H. (2001). "A trust region algorithm for constrained nonsmooth optimization problems." *Journal of Computational Mathematics*, 19(4), 357-364.

附錄一 Branch and Bound 方法簡介

無論是 MILP 或 MINLP 之問題，在利用 B&B 方法求解時其觀念與流程皆相同，因此本文將以 MILP 為例說明 B&B 方法。MILP 之問題可以下列之最佳化模式表示：

$$\text{Maximize} \quad \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y} \quad (\text{附 1})$$

$$\text{Subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{b} \quad (\text{附 2})$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (\text{附 3})$$

$$\mathbf{y} \in \{0,1\} \quad (\text{附 4})$$

其中 \mathbf{x} 為包含 n 個連續決策變數組成之向量； \mathbf{y} 為包含 q 個 0 或 1 決策變數組成之向量； \mathbf{c} 與 \mathbf{d} 為目標函數係數向量； \mathbf{A} 與 \mathbf{B} 為限制式係數矩陣； \mathbf{b} 為常數。求解上述 MILP 問題最直觀之方法為將 0-1 變數 \mathbf{y} 以樹狀圖展開，例如若 q 為 3，則樹狀圖可展開如附圖 1 所示，接著再以窮舉法(Brute-Force)計算樹狀圖最底層 Level 3 之八個線性規劃問題以找出最佳解。窮舉法之缺點在於相當費時，且計算時間隨 0-1 變數增多而呈指數之成長，B&B 方法同樣是根據樹狀圖之概念，但經由分離(Separation)、放寬(Relaxation)與瞭解(Fathoming)等步驟，大幅縮短從樹狀圖找出最佳解之時間。以下將以附圖 1 為例，簡述此三步驟之意義。

分離

令式(附 1)至式(附 4)之 MILP 問題可表示為 (P) ，且其可行解可表示為 $FS(P)$ ，若以下二項條件成立，則子問題(Subproblems) (P_1) 、 (P_2) 、...、 (P_n) 可定義為 (P) 之分離。

- (1) 任何子問題之可行解亦為 (P) 之可行解；
- (2) 每一個 (P) 之可行解僅是其中一個子問題之可行解。

由以上定義可知，附圖 1 中除了最上層之節點外，任一節點皆可視為是其上一層節點之分離。B&B 方法求解 MILP 問題之第一步即在將 (P) 分離為 (P_1) ($y_1 = 0$)

與 (P_2) ($y_1 = 1$)兩個子問題，如附圖 1(①與⑧)所示。

放寬

若 (P) 之可行解屬於另一最佳化問題 (RP) 可行解之子集合，則 (RP) 稱為 (P) 之放寬，其意義可表示如下：

$$FS(P) \subseteq FS(RP) \quad (\text{附 4})$$

藉由以上之定義，吾人可知必具有以下之特徵：

- (1) 若 (RP) 無可行解，則 (P) 亦不存在可行解。
- (2) (P) 之最佳解必定小於或等於 (RP) 之最佳解。
- (3) 若 (RP) 之最佳解屬於 (P) 之可行解，則其亦必為 (P) 之最佳解。

在對 (P) 進行分離後，B&B 方法之第二步為將子問題放寬，例如附圖 1 中之子問題 (P_1) ，由於已令 $y_1 = 0$ ，吾人可將其餘 0-1 變數之限制式替換為 $0 \leq y_i \leq 1, i = 2, \dots, n$ ，得到放寬後之子問題 (RP_1) ，且 (RP_1) 可以傳統之線性規劃加以求解。

B&B 方法主要是依附圖 1 中由上而下再由左至右之分支順序(即附圖 1 中圓圈內數字)，重複利用前述分離與放寬之行為計算放寬後問題之最佳解，並判別此最佳解是否符合 y 必須為 0-1 變數之限制，然必須有一邏輯加以分析何種情況下可停止分支之演算，否則將與窮舉法並無二致。以下介紹此邏輯之意義。

瞭解

定義 (CS) 為 B&B 求解過程中正在處理之子問題，例如附圖 1 中將 (P) 分離為 (P_1) 與 (P_2) 後，接著要對 (P_1) 進行放寬，因此在此階段 (P_1) 可定義為 (CS) 。若下述二項條件中任一項被滿足，則吾人定義 (CS) 被徹底瞭解。

- (1) 確定 (CS) 之所有可行解皆不會大於曾被找到之可行解中最大者。
- (2) 找到 (CS) 之最佳解。

若 (CS) 被徹底瞭解，則吾人將不必對該 (CS) 再進行分離之動作。例如附圖 1 中若 (P_1) 為 (CS) ，且被判定為徹底瞭解，則吾人將不必再進行②與⑤之分離(因此

亦不必處理③④⑥⑦之分離)，可繼續處理子問題(P_2)並定義(P_2)為(CS)。

首先定義(RCS)為(CS)放寬後之問題； z_{RCS} 為(RCS)之最佳解； z_{CS} 為(CS)之最佳解以及 z^* 為曾被找到之可行解中最大者(若尚無求得可行解則可令 z^* 為負無限大)，則一般判定(CS)是否被徹底瞭解之方法有以下三種：

- (1) 若(RCS)並無可行解，依據前段放寬之敘述可知(CS)必無可行解，則(CS)可被視為徹底瞭解。
- (2) 若(RCS)之最佳解小於或等於 z^* ，則(CS)及其分支以下之子問題必不會有大於 z^* 之可行解，則(CS)可被視為徹底瞭解。
- (3) 若(RCS)之最佳解亦為(CS)之可行解(y 為 0-1 變數)，則其必為(CS)之最佳解，(CS)可被視為徹底瞭解。

當(RCS)不符合上述任一項條件時，吾人必須繼續對(CS)進行分離，並設定任一分離後之子問題為(CS)再重複是否被徹底瞭解之判定工作。

總結以上所述，以附圖 1 為例，B&B 方法之流程可表示為：

- (1) 對 MILP 問題(P)進行分離，將(P_1)與(P_2)列於候選子問題名單中，同時設定 z^* 為負無限大。
- (2) 若候選子問題名單內並無任何子問題，則計算中止，(P)之最佳解為 z^* ，若 z^* 仍為負無限大，則(P)並無可行解。
- (3) 從候選子問題名單內選擇任一子問題並令其為(CS)。
- (4) 對(CS)進行放寬得到(RCS)，並求取(RCS)之最佳解 z_{RCS} 。
- (5) 判別(CS)是否被徹底瞭解：
 1. 若(RCS)無可行解，則(CS)必無可行解，跳至步驟(2)。
 2. 若(RCS)之最佳解小於或等於 z^* ，跳至步驟(2)。
 3. 若(RCS)之最佳解亦為(CS)之可行解，則其必為(CS)之最佳解：
 - (a) 若 z_{RCS} 大於 z^* ，令 z^* 等於 z_{RCS} ，跳至步驟(2)。
 - (b) 若 z_{RCS} 小於等於 z^* ，跳至步驟(2)。
- (6) 對(CS)進行分離，並增加分離後之子問題至候選子問題名單內，跳至步驟(2)。

附錄二 一階變異數分析法推導地層下陷量統計特性

考慮如式(25)之一維土體壓密方程式如下所示：

$$\Delta s_{l,k,t} = \frac{\rho_w g B_{l,k} G_{l,k,t}}{2\mu_{l,k} + \lambda_{l,k}} \quad (\text{附 5})$$

其中 $\Delta s_{l,k,t}$ 為 k 點第 l 土層於時刻 $t-1$ 至 t 間之地層下陷量(L)； $B_{l,k}$ 為 k 點第 l 土層之厚度(L) ρ_w 為水之密度(ML^{-3})； g 為重力加速度(LT^{-2})； $\mu_{l,k}$ 與 $\lambda_{l,k}$ 為 k 點第 l 土層之拉梅常數($\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$)； G 則定義為：

$$G_{l,k,t} = \begin{cases} \Delta h_{l,k,t} - \Delta h_{l,k,t-1} = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{i=1}^t [\beta(l,k,j,t-i+1) - \beta(l,k,j,t-i)] Q(j,i) \\ \text{if } \Delta h_{l,k,t} - \Delta h_{l,k,t-1} > 0 \\ 0 \\ \text{if } \Delta h_{l,k,t} - \Delta h_{l,k,t-1} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{附 6})$$

其中 $\beta(k,j,t-i+1)$ 代表單位響應係數。若式(附 5)中僅有 G 、 μ 與 λ 為具不確定性之隨機變數，其餘可視為常數，則式(附 5)可以泰勒級數在 (G_0, μ_0, λ_0) 加以展開。若忽略二次以上之高階項，則式(附 5)之泰勒展開式可表示為：

$$\begin{aligned} \Delta s &= f(G, \mu, \lambda) = \frac{\rho_w g B G}{2\mu + \lambda} \\ &= f(G_0, \mu_0, \lambda_0) + (G - G_0) \left(\frac{\partial f}{\partial G} \right)_{G_0, \mu_0, \lambda_0} + (\mu - \mu_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_{G_0, \mu_0, \lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{G_0, \mu_0, \lambda_0} \end{aligned} \quad (\text{附 7})$$

其中， $\frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\rho_w g B}{2\mu + \lambda}$ ； $\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{-2\rho_w g B G}{(2\mu + \lambda)^2}$ ； $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{-\rho_w g B G}{(2\mu + \lambda)^2}$ 。式(附 7)為一線性方程式，若展開之點為 G 、 μ 與 λ 之期望值，即 $(G_0, \mu_0, \lambda_0) = (E[G], E[\mu], E[\lambda])$ ，且 G 、 μ 與 λ 為互相獨立之隨機變數，則 Δs 之期望值與變異數可表示為：

$$\begin{aligned}
 E[\Delta s] &= f(G_0, \mu_0, \lambda_0) + (E[G] - G_0) \left(\frac{\partial f}{\partial G} \right)_{G_0, \mu_0, \lambda_0} + (E[\mu] - \mu_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_{G_0, \mu_0, \lambda_0} + \\
 &\quad (E[\lambda] - \lambda_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{G_0, \mu_0, \lambda_0} \quad (\text{附 8}) \\
 &= f(E[G], E[\mu], E[\lambda]) = \frac{\rho_w g B E[G]}{2E[\mu] + E[\lambda]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\Delta s] &= \left(\frac{\rho_w g B}{2E[\mu] + E[\lambda]} \right)^2 \text{Var}[G] + \left\{ \frac{-2\rho_w g B E[G]}{(2E[\mu] + E[\lambda])^2} \right\}^2 \text{Var}[\mu] + \\
 &\quad \left\{ \frac{-\rho_w g B E[G]}{(2E[\mu] + E[\lambda])^2} \right\}^2 \text{Var}[\lambda] \quad (\text{附 9}) \\
 &= \left(\frac{\rho_w g B}{2E[\mu] + E[\lambda]} \right)^2 \text{Var}[G] + \left\{ \frac{\rho_w g B E[G]}{(2E[\mu] + E[\lambda])^2} \right\}^2 \times \{4\text{Var}[\mu] + \text{Var}[\lambda]\}
 \end{aligned}$$

式(附 8)與式(附 9)即為第二章中之式(49)與式(50)。



附錄三 G 動差母函數推導

第二章中吾人曾將 G 之動差母函數以下式表示：

$$M_G(n) = \int_0^{\infty} e^{n\omega} f(\omega) d\omega + e^{n \times 0} \times \int_{-\infty}^0 f(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} e^{n\omega} f(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^0 f(\omega) d\omega \quad (\text{附 10})$$

其中 ω 代表隨機變數 Ω 之值。由於 f 為常態分布之機率密度函數，因此式(附 10)又可表示為：

$$\begin{aligned} M_G(n) &= \int_0^{\infty} e^{n\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} e^{n\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} d\omega + 1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} d\omega \end{aligned} \quad (\text{附 11})$$

其中 μ_{Ω} 與 σ_{Ω} 分別為 Ω 之期望值與標準差。對於式(附 11)等號右邊第一項，可將其整理為：

$$\int_0^{\infty} e^{n\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} \int_0^{\infty} e^{n\omega} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} d\omega \quad (\text{附 12})$$

其中，

$$e^{n\omega} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} = e^{n\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2} \quad (\text{附 13})$$

將式(附 13)整理為指數的二次多項式次方之函數，即：

$$\begin{aligned} n\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2 &= \frac{-\omega^2 + 2(\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n)\omega - \mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2} \\ &= -\left[\frac{1}{2\sigma_{\Omega}^2}\omega^2 + \left(-\frac{\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n}{\sigma_{\Omega}^2}\right)\omega + \frac{\mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{附 14})$$

同樣地，式(附 11)等號右邊第二項積分中之次方項亦可整理為：

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}}\right)^2 = \frac{-\omega^2 + 2\mu_{\Omega}\omega - \mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2} = -\left[\frac{1}{2\sigma_{\Omega}^2}\omega^2 + \left(-\frac{\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}^2}\right)\omega + \frac{\mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2}\right] \quad (\text{附 15})$$

則式(附 11)可表示為：

$$M_G(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{2\sigma_{\Omega}^2}\omega^2 + \left(-\frac{\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n}{\sigma_{\Omega}^2}\right)\omega + \frac{\mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2}\right]} d\omega + 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{2\sigma_{\Omega}^2}\omega^2 + \left(-\frac{\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}^2}\right)\omega + \frac{\mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2}\right]} d\omega \quad (\text{附 16})$$

根據 Liu and Spiegel (1999)，對於指數的二次多項式次方函數之定積分可表示為：

$$\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2-4ac}{4a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right) \quad (\text{附 17})$$

則式(附 16)等號右邊第一項積分可表示為：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{2\sigma_{\Omega}^2}\omega^2 + \left(-\frac{\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n}{\sigma_{\Omega}^2}\right)\omega + \frac{\mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2}\right]} d\omega = \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu_{\Omega} n + \frac{1}{2}\sigma_{\Omega}^2 n^2}{\sigma_{\Omega}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n}{\sqrt{2}\sigma_{\Omega}}\right) \quad (\text{附 18})$$

同樣地，式(附 16)等號右邊第二項積分可表示為：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{2\sigma_{\Omega}^2}\omega^2 + \left(-\frac{\mu_{\Omega}}{\sigma_{\Omega}^2}\right)\omega + \frac{\mu_{\Omega}^2}{2\sigma_{\Omega}^2}\right]} d\omega = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\mu_{\Omega}}{\sqrt{2}\sigma_{\Omega}}\right) \quad (\text{附 19})$$

因此 G 之動差母函數可推導為：

$$M_G(n) = 1 + \frac{1}{2} \times e^{-\frac{\mu_{\Omega} n + \frac{1}{2}\sigma_{\Omega}^2 n^2}{\sigma_{\Omega}^2}} \times \operatorname{erfc}\left(-\frac{\mu_{\Omega} + \sigma_{\Omega}^2 n}{\sqrt{2}\sigma_{\Omega}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{-\mu_{\Omega}}{\sqrt{2}\sigma_{\Omega}}\right) \quad (\text{附 20})$$

式(附 20)即為第二章中之式(55)。