

# 利率下限評價模型之數值分析

學生：李蘭蘭

指導教授：王克陸

國立交通大學財務金融研究所碩士班

## 摘 要

任何金融商品推出後的成敗，決定於其需求與價格，而其價格之訂定是否合理，更是關鍵之所在。因此，相關利率商品價格訂定所需考慮的因素有哪些？其訂價方式又有哪些？如何正確地評價選擇權？為本論文所探討的課題。本論文研究主體為利率選擇權之利率下限，評價利率下限時，必須先建構利率模型，將利率的隨機過程加以描述，並根據該隨機過程，利用數值方法以求出利率下限的價格。但是，在多數利率衍生性商品或是利率模型往往並不易求得公式解。雖然從理論上可以得知，透過模擬次數的增加及切割期數，則模擬的價格期望值必然會收斂到理論價格。但切割模擬的次數到達多少才能將誤差降低到可接受的範圍內，故如何判斷求出的數值解是否合理、正確，才是主要問題。本文作法是先透過，Vasicek 模型與 Hull 和 White 之 extended Vasicek 模型，在特殊假設下求出利率下限之公式解。接下來再透過數值方法來評價 Vasicek 模型 CIR 模型與 Hull-White 模型，進而觀察切割的誤差隨著割切次數增加時的變化情形，以供參考。又由於 Hull and White 所提出的三元利率樹，可以建構出與市場完全一致的利率期間結構，且收斂速度極快。因此，本文將透過結合 Hull and White 三元利率樹與蒙地卡羅模擬的方式來評價路徑相依之利率下限，使其模擬出的利率隨機過程能與市場一致，並比較其差異性。

# Numerical Analysis for Interest Rate Floor Valuation

Student : Lan-Lan Lee

Advisors : Dr. Kelu Wang

Institute of Finance  
National Chiao Tung University

## ABSTRACT

The purpose of this study is to numerically analyze the floor of the interest rate option. We first obtain the closed-form solutions by special assumptions of Vasicek model and Hull-White extended Vasicek model. Then the numerical techniques provide a simple and intuitive method for valuing floor of Vasicek model, CIR model and Hull-White model. An exact value for the floor is obtained in the limit as  $\Delta t$  tends to zero. The trinomial tree proposed by Hull and White can provide consistent initial term structure and converge faster to the continuous time limit. Therefore, Hull-White trinomial tree can be extended to deal with path-dependent options which can recover the initial term structure of interest rates. Finally, this paper showed their different results.

## 誌 謝

初次來到新竹交通大學繼續升學，研究所生活，除了要適應這陌生的環境，更要應付繁重的課業壓力。這段人生中最難忘記的一段歲月，愉悅的開始，此時的結束卻萬般滋味湧上心頭。

寫論文的日子確不好過，但最要感謝的是我的指導教授：王克陸老師，給我相當多的指導與建議。同時也要謝謝口試委員清華大學 蔡錦堂與 林哲群教授、及本校應數系許和春教授，使得本論文能更加完整與充實。

感謝在完成論文這過程中，曾經給我無限支持的親人及幫助過我的朋友們，一路陪我走過來。以及親切地老師們對我的照顧、可愛地研究所同學們相互扶持討論。

好感謝好感謝自己所擁有的，這研究所的兩年 讓我成長不少，真的很捨不得 為它劃上句點。但願在完美的結束，邁入下一階段的人生路途上，能不畏挫折，勇敢向前。僅以此篇論文獻給所有幫助過我的人！

93年6月24日

# 目 錄



中文摘要		i
英文摘要		ii
誌謝		iii
目錄		iv
表目錄		vi
圖目錄		vii
一、	緒論	1
1.1	研究動機	1
1.2	研究目的	3
1.3	研究流程	4
二、	文獻探討	6
2.1	利率期間結構與利率模型	6
2.1.1	均衡模型	7
2.1.2	無套利模型	10
2.1.3	均衡模型與無套利模型之比較	14
2.2	利率上下限評價相關之文獻	16
2.3	數值方法相關文獻	17
2.3.1	蒙地卡羅模擬	17
2.3.2	利率樹	19
三、	研究方法	21
3.1	Hull and White 三元利率樹	21
3.2	蒙地卡羅模擬	25
3.3	結合三元利率樹與蒙地卡羅模擬	29
3.4	模型參數估計方法	30
四、	資料來源與參數估計結果	33
4.1	資料來源	33
4.2	參數估計結果	35
4.3	利率期間結構	37
五、	模擬結果	38
5.1	利率下限價值模擬結果	38
5.2	利率結構樹之數值分析	40
5.2.1	利率樹之價格收斂行為	40
5.2.2	美式利率下限與歐式利率下限	43
5.3	三元利率樹之數值分析	44
5.3.1	三元利率樹原理	44
5.3.2	結合蒙地卡羅模擬與三元利率樹	47

5.4	敏感度分析	50
5.4.1	二項樹評價之參數分析---Vasciek Model	50
5.4.2	二項樹評價之參數分析---CIR Model	57
5.4.3	三利率樹評價之參數分析---Hull-White Model	63
六、	結論與建議	71
6.1	研究結論	71
6.2	研究建議	73
	參考文獻	74



## 表目錄

表 2-1	利率模型的分類	6
表 2-2	不同利率模型之比較	15
表 2-3	均衡模型與無套利模型比較	15
表 4-1	台灣貨幣市場商業本票利率基本況	35
表 4-2	利用 AR(1)估計參數結果	35
表 4-3	估計參數之初始值	36
表 4-4	最大概似法估計參數值	36
表 5-1	數值方法評價利率模型之利率下限價值	39
表 5-2	二項樹評價之收斂行為	40
表 5-3	三元利率樹評價之收斂行為表	41
表 5-4	美式利率下限與歐式利率下限之比較表	43
表 5-5	三元利率樹下所建構的 state price tree	46
表 5-6	三元利率樹下所建構的模擬參數結果	46
表 5-7	零息債券與歐式利率下限結構樹	46
表 5-8	原始的蒙地卡羅模擬與對消變異之數值解	47
表 5-9	原始的蒙地卡羅模擬與對消變異的數值解	49





## 圖目錄

圖 1.1	交易衍生性商品成長概況	2
圖 3.1	三元利率可能的分支形狀	22
圖 3.2	第一階段三元利率樹	24
圖 3.3	第二階段三元利率樹	25
圖 3.4	蒙地卡羅所模擬之路徑	27
圖 3.5	對消變異所模擬之路徑	29
圖 4.1	30 天期商業本票走勢圖	34
圖 4.2	30 天期商業本票走勢圖	34
圖 4.3	30 天期商業本票走勢圖	34
圖 4.4	利率期間結構	37
圖 5.1	二項樹評價之價格收斂行為	41
圖 5.2	三元利率樹評價之價格收斂行為	42
圖 5.3	蒙地卡羅模擬與對消變異	48
圖 5.4	原始的蒙地卡羅模擬與對消變異的數值解	50
圖 5.5	Vasicek Model 中 maturity 與 beta 變動之利率下限立體圖	51
圖 5.6	Vasicek Model 中 sigma 與 beta 變動之利率下限立體圖	52
圖 5.7	Vasicek Model 中 strike price 與 beta 變動之利率下限立體圖	53
圖 5.8	Vasicek Model 中 strike price 與 maturity 變動之利率下限立體圖	54
圖 5.9	Vasicek Model 中 strike price 與 sigma 變動之利率下限立體圖	55
圖 5.10	Vasicek Model 中 maturity 與 sigma 變動之利率下限立體圖	56
圖 5.11	CIR Model 中 maturity 與 beta 變動之利率下限立體圖	57
圖 5.12	CIR Model 中 sigma 與 beta 變動之利率下限立體圖	59
圖 5.13	CIR Model 中 strike price 與 beta 變動之利率下限立體圖	60
圖 5.14	CIR Model 中 strike price 與 maturity 變動之利率下限立體圖	61
圖 5.15	CIR Model 中 strike price 與 sigma 變動之利率下限立體圖	62
圖 5.16	CIR Model 中 maturity 與 sigma 變動之利率下限立體圖	63
圖 5.17	Hull-White Model 中 maturity 與 beta 變動之利率下限立體圖	64
圖 5.18	Hull-White Model 中 sigma 與 beta 變動之利率下限立體圖	65
圖 5.19	Hull-White Model 中 strike price 與 beta 變動之利率下限立體圖	66
圖 5.20	Hull-White Model 中 strike price 與 maturity 變動之利率下限立體圖	67
圖 5.21	Hull-White Model 中 strike price 與 sigma 變動之利率下限立體圖	68
圖 5.22	Hull-White Model 中 maturity 與 sigma 變動之利率下限立體圖	69