

第一章 緒論

第一節 研究動機

近年來，台灣在國內外經濟金融環境的遽變之下，推動了一連串金融自由化的措施，利率管制也完全解除，使利率任由市場機能決定。此雖然使資金配置更有效率，卻也使利率風險大幅提高；金融國際化的結果，更使得利率容易受到國外各主要貨幣利率的影響，以致於波動性增加。再加上國內一般公司企業取得長期固定利率資金之來源有限，發行公司債亦有許多障礙，故多半以浮動利率借款。如此一來，利率風險的提高自然使得對規避利率風險金融工具的需求更殷切。

就發展史上，在利率風險管理工具的發展方面，首先登場的是利率期貨，接著，1982 年利率交換出現；1983 年初終於有了利率遠期市場，利率選擇權與利率期貨選擇權也相繼在集中市場上出現。而利率上限與下限屬店頭市場中的上櫃交易選擇權 (over-the-counter option)，自 1983 年底由大型金融機構陸續推出以來，交易量不斷擴大，目前已成為店頭市場中，交易量最大且最成功的選擇權；堪稱店頭市場上最重要的利率風險管理工具。其利率衍生性商品成長速度之快，更是必然的趨勢。(詳見圖 1-1)

而所謂利率衍生性商品，顧名思義即為衍生性商品的價值依附於與利率有關的固定收益證券為標的金融工具，通常以未來一段期間之利率為標的；就其種類劃分，主要分為遠期利率協定(Forward Rate Agreements)、利率交換(Interest Rate Swaps, IRSs) 及利率選擇權(Interest Rate Options, IROs)。例如債券現貨選擇權、債券期貨、債券期貨選擇權、利率上下限等均屬之。

當一般公司企業多以浮動利率借款、銀行以短期浮動利率吸收存款而以長期固定利率放款、投資人持有浮動利率資產愈來愈普及之下，如何防範利率往不利方向變

動，是各界關切的焦點。而利率上限與利率下限具有「高度有效的規避利率風險金融工具」的特質，不僅如同其他利率風險管理工具一樣可以消除利率往不利方向變動時的損失，還可保留當利率往有利方向變動時的好處，市場前景看好、潛力無限，即為國內各界可考慮選擇的有效的避險工具之一。

由於利率下限是一個可規避利率下跌風險的有利金融商品，即為浮動利率資產保險，使其收益率至少在某一水準(利率下限)以上的金融工具。對金融機構或券商而言，通常持有一筆長期負債部位，為了達到 maturity match，那麼就需要購買另一筆長期資產來沖銷；但在衡量現實市場環境後，預期未來長期利率會上漲，即長期資產價格會下跌，故會有延後買入長期資產的動機。不幸地，若判斷錯誤，將反遭損失；因此，可以透過購買利率下限來規避利率下跌的風險。

因此，本論文研究主體為利率選擇權之利率下限，任何金融商品推出後的成敗，決定於其需求與價格，而其價格之訂定是否合理，更是關鍵之所在。因此，相關利率下限價格訂定所需考慮的因素有哪些？其訂價方式又有哪些？如何正確地評價選擇權？為本論文所探討的課題。

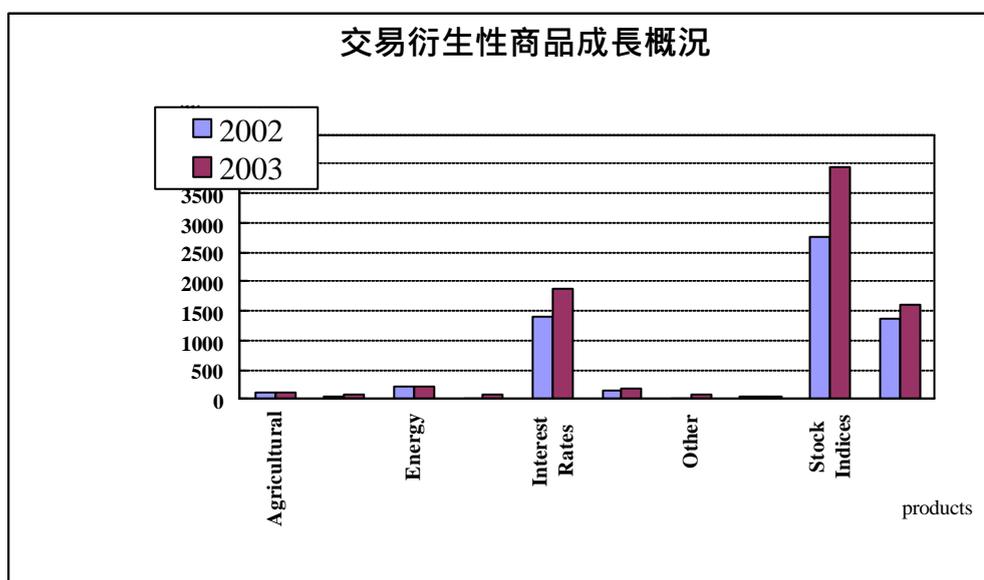


圖 1-1 交易衍生性商品成長概況

資料來源：TRADE data Global Services

第二節 研究目的

建立選擇權評價模式之前必須針對選擇權的特色將選擇權加以分類，藉著對無風險投資組合的評價，間接求出選擇權的價格。從建構投資組合的觀點來區分，選擇權大致可分為股票選擇權與利率選擇權。其差異在於：評價股票選擇權時，僅需研究單一或少數的股價隨機過程；評價利率選擇權時則需研究整個利率期間結構的隨機過程，評價之複雜度因而大增。為了簡化利率選擇權的評價問題，必須對殖利率曲線的波動有一定的瞭解，根據其特性建構出利率模型。本文的研究將著重於利率選擇權之一的利率下限來做評價方法的探討。

由於利率選擇權評價的複雜度遠遠超過股票選擇權，因此更難以直接求出利率選擇權的評價公式，此時必需藉助電腦的運算能力，以數值方法求出利率下限的價格。而目前較常被使用的數值方法可分為三種，第一種是有限差分法(finite difference method)，第二種是利率樹(tree or lattice method)，第三種則是蒙地卡羅模擬(Monte Carlo method)，每種方法各有其適用的條件：路徑獨立的利率選擇權可以採用利率樹或有限差分法求解；但路徑相依的歐式利率選擇權則無法直接使用蒙地卡羅模擬。主要的原因在於使用數值方法求解利率選擇權時，必須先求出與市場一致的利率期間結構，否則評價將會產生很大的誤差，利率樹可以輕易地滿足這項要求，但蒙地卡羅模擬則較困難。因此，若要使用蒙地卡羅模擬，所產生的路徑將無法與市場利率期間結構一致。因此，如何有效利用數值方法評價利率下限成為本文重要的課題。

國內目前關於利率選擇權評價的研究，所使用的數值方法，大多僅限於 Hull-White 模型的三元利率樹，或是只限對於 Vasieck 或是 Hull-White extend Vasieck 模型之公式解來作評價分析。但是，在多數利率衍生性商品或是利率模型並非常態性假設情況下，公式解往往並不存在。雖然從理論上可以得知，透過模擬次數的增加及切割期數的縮小則模擬的價格期望值必然會收斂到理論價格。但切割模擬的次數到達多少才能將誤差降低到可接受的範圍內，故如何判斷求出的數值解是否合理、正確，

成為一個棘手的問題，才是主要問題。本文作法是先透過，均衡模型中的 Vasicek 模型與無套利模型中的 Hull 和 White 之 extended Vasicek 模型，在假設一個隨機變數的波動過程遵循特定的隨機差分方程式，經由隨機差分方程式產生零息債券價格選擇權的公式解(closed form solution)，求出利率下限之公式解，接下來再透過利率樹與蒙地卡羅模擬來評價 Vasicek 模型、CIR 模型與 Hull-White 模型，進而觀察切割的誤差隨著切割次數增加時的變化情形，以供參考。

又由於 Hull and White(1993)所提出的三元利率樹，可以建構出與市場完全一致的利率期間結構，並適用於大多數的一因子利率模型，相當具有彈性，且收斂速度極快，是非常有效率的數值方法。因此，本文將透過結合 Hull and White 三元利率樹與蒙地卡羅模擬的方式來評價路徑相依之利率下限，使其模擬出的利率隨機過程能與市場一致，並比較其差異性。



第三節 研究流程

評價利率下限時，必須先建構利率模型，將利率的隨機過程加以描述，並根據該隨機過程，利用數值方法建構出與市場一致的利率期間結構以求出利率下限的價格。因此本文首先將介紹本文應用的利率模型，接著介紹利率樹、蒙地卡羅模擬與結合 Hull and White 三元利率樹與蒙地卡羅模擬等不同數值方法，如何應用於評價利率下限。另外，再透過情境分析(scenario analysis) 探討利率樹與蒙地卡羅模擬的數值解之估計誤差與收斂情形。最後，針對利率樹之數值方法，來作敏感度分析，並做出結論與後續研究之建議。

本論文共六章，其內容大綱如下：

第一章 緒論：說明研究動機與研究目的

第二章 文獻探討：主要分為三部分：第一部份主要是介紹不同的利率模型之特色與限制，透過模型間的相互對照、比較，以瞭解使用數值方法時應該注意的事項。第二部分，則介紹利率上限與利率下限評價之文獻。第三部介紹相關文獻的數值方法，並說明各種數值方法的優缺點與適用時機。

第三章 研究方法：分為四部分來探討：第一部分說明 Hull and White 之三元利率樹。第二部分介紹蒙地卡羅模擬，並介紹一些常被用於降低蒙地卡羅估計誤差，以改善精度的技術。第三部分說明如何將利率樹與蒙地卡羅結合。第四部分是模型參數估計部分。

第四章 資料分析與參數估計：第一部分說明資料來源與處理，第二部分則針對資料來做參數估計結果分析。第三部分為本文所應用的利率期間結構。

第五章 模擬結果：主要分為四部分：第一部是在 Vasicek 模型與 CIR 模型以及 Hull and White 模型下，利用利率樹與蒙地卡羅模擬對利率下限的數值解分析。第二部分則是利用利率樹針對三個利率模型來做數值法之收斂行為分析，另外本文還透過利率樹來評價的美式選擇權。第三部分則是探討三元利樹之 Hull and White 模型的數值分析基本運作；以及 Hull and White 模型之蒙地卡羅模擬與利率樹結合後，其數值解的分析結果。第四部分是針對上述所分析之利率模型數值方法，來做敏感度分析。

第六章 結論與建議

第二章 文獻探討

第一節 利率期間結構與利率模型

利率的期間結構(term structure of interest rates)乃是零息債券(zero coupon bonds)到期期間與零息債券到期收益率相互對應的關係式。不同的利率期間結構對於債券的評價，甚至於利率衍生性金融商品的評價都將有很大的影響，因此許多關於利率期間結構的假設與模型相繼的被提出。但卻無法有效的應用在評價利率商品及其衍生性金融商品。因此，關於整個殖利率曲線動態變化情形的研究，已成為近代利率理論熱門研究的課題之一。各種關於利率期間結構在未來時點的動態描述的模型，相繼被提出。

利率模型所扮演的角色，就如同股票衍生性商品標的物的動態行為給予符合市場慣例的規範，然而其間的差別在於利率衍生性商品，要描述整條殖利率曲線(yield curve)隨時間推移所發生的移轉、平移等複雜的模型，遠較股票衍生性商品僅描述一個股價變數的隨機過程還要複雜許多。根據不同的假設可以將這些動態利率模型分成均衡模型(equilibrium model)與無套利模型(no-arbitrage model)兩種，再依據影響利率變化的因子個數分成單因子模型(one-factor)與多因子模型(multi-factors)。

表 2-1 利率模型的分類

| 模型 | 一因子 | 二因子 |
|------|--------------------------|------------------------|
| 均衡模型 | Vasicek(1977) | Brennan-Schwartz(1978) |
| | Dothan(1978) | Chaplin(1978) |
| | Cox-Ingersoll-Ross(1985) | Langetieg(1980) |
| | Jamshidian(1989) | Coutadon(1982) |

| | | |
|-------|------------------------|--------------------------|
| | Longstaff(1989) | Cox-Ingersoll-Ross(1985) |
| | Beaglehole-Tenny(1992) | Longstaff-Schwartz(1992) |
| | Constantiedes(1992) | Chen-Scott(1992) |
| 無套利模型 | Ho-Lee(1986) | Heath-Jarrow-Morton |
| | Black-Derman-Toy(1990) | (1990,1992) |
| | Hull-White(1990) | |
| | Black and | |
| | Karasinski(1991) | |

一、均衡模型

均衡模型是由即期利率的經濟變數開始發展，首先假設影響短期利率的因子及其隨機過程再加上資產定價模型，導出在風險中立情況下的債券價格。常見的均衡模型有單因子的 Vasicek(1977)模型、CIR(1985)模型、二因子的 Longstaff & Schwartz(1992)模型等，其對利率隨機過程的假設各有不同，故得出的利率期間結構也有所差異。不過由於這些模型假設其參數為定值，與實際情況不盡相同，故所得出的理論利率期間結構常與當時市場上實際的利率期間結構無法吻合，成為此類模型較為人所爭議之處。

1、Vasicek 模型

Vasicek 模型為最早提出之均衡模型。此假設參數是固定的，短期利率具有回復均數(Mean reversion)的性質，且符合 Ornstein-Uhlenbeck(OU) Process：

$$dr = \mathbf{b}(m - r)dt + \mathbf{s} \cdot dz$$

其中， r ：短期利率， \mathbf{b} ：均數回復調整速度， μ ：短期利率的平均值， \mathbf{s} ：短期利率的標準差， z ：韋納過程(Wiener Process)。 $dz = \mathbf{e} \times \sqrt{dt}$ ，其中 \mathbf{e} 服從標準常態分配。

在 Vasicek 模型中，時點 s 支付一元的零息債券在時點 t 的價格為：

$$P(t, s, r) = A(t, s) \times e^{-B(t, s)r}$$

$$B(t, s) = (1 - e^{-b(s-t)}) / b$$

$$A(t, s) = \exp \left[\frac{(B(t, s) - s + t) \left(b^2 m - \frac{s^2}{2} \right) - \frac{s^2 B(t, s)^2}{4 \cdot b}}{b^2} \right]$$

Jamshidian(1989)承襲Vasicek模型進一步評價零息債券選擇權。其特色在於將風險中立過程(risk-neutral process)轉成forward – adjusted過程，可簡單求解零息債券選擇權之價值。由於每個floorlet可視為浮動利率的賣權或零息債券的買權，使用Vasicek 模型計算每個floorlet的價值，即可假設為一零息債券的買權價值，表示如下：

$$Caplet_k = Put(t, T, s) = [X \cdot P(t, T) \cdot N(-h + s_p) - L \cdot P(t, s) \cdot N(-h)]$$

$$Floorlet_k = Call(t, T, s) = [L \cdot P(t, s) \cdot N(h) - X \cdot P(t, T) \cdot N(h - s_p)]$$

$$h = \frac{1}{s_p} \ln \frac{L \cdot P(t, s)}{P(t, T) \cdot X} + \frac{s_p}{2}$$

$$s_p = \frac{s}{b} [1 - e^{-b(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2b(T-s)}}{2b}}$$

另外，Stapleton 和 Subrahmanyam(1990)推導利率選擇權與零息債券選擇權之間的關係，可得到一單位以 s (單位年)期利率為標的之買權到期支付時，若與 1 單位以 s 期零息債券為標的之賣權到期之支付相同，則：

$$X = 1 / (1 + x \times s \times (365 / 360))$$

其中： s 為零息債券到期日， T 為零息債券選擇到期日， L 為到債券的面額， X 為債券執行價格， $x\%$ 為執行利率， $N()$ 代表累積常態分配。

$P(t, s)$ 為在 Vasicek 模型中，時點 s 支付 1 元的零息債券在時點 t 的價格。

$P(t, T)$ 為在 Vasicek 模型中，時點 T 支付 1 元的零息債券在時點 t 的價格。

2、Cox, Ingersoll, and Ross 模型

由於 Vasicek 所提出的模型中假設利率隨機過程呈現常態分配,因此利率可能出現負值。Cox, Ingersoll, and Ross 為解決此一問題而提出了均方根(square root)模型,假設利率波動為平方根隨機過程,認為短期利率符合以下的隨機過程:

$$dr = \mathbf{b}(m-r)dt + \mathbf{s}\sqrt{r} \cdot dz$$

其中 r :短期利率, \mathbf{b} :均數回復調整速度, μ :短期利率的平均值, $\mathbf{s}\sqrt{r}$:短期利率的標準差, z :韋納過程(Winner Process)。

CIR 模型中,時點 s 支付 1 元的零息債券在時點 t 的價格為:

$$P(t, s, r) = A(t, s) \times e^{-B(t, s)r}$$

$$A(t, s) = \left\{ \frac{2 \cdot \mathbf{g} \cdot e^{(\mathbf{b} + \mathbf{g})(s-t)/2}}{(\mathbf{b} + \mathbf{g})(1 - e^{\mathbf{g}(s-t)}) + 2 \cdot \mathbf{g}} \right\}^{2 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{m} / \mathbf{s}^2}$$

$$B(t, s) = \frac{2(e^{\mathbf{g}(s-t)} - 1)}{(\mathbf{g} + \mathbf{b})(e^{\mathbf{g}(s-t)} - 1) + 2 \cdot \mathbf{g}}$$

$$\mathbf{g} = \sqrt{\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{s}^2}$$

選擇權的評價公式為:

$$Call = P(t, T) \times (P(T, s) c^2 (h_1) - K c^2 (h_2))$$

$$h_1 = \left(2 \cdot r^* [\mathbf{j} + \mathbf{f} + B(T, s)] \dots \frac{4k\mathbf{q}}{\mathbf{s}^2} \dots \frac{2\mathbf{f}^2 r \cdot e^{\mathbf{g}(T-t)}}{\mathbf{f} + \mathbf{j} + B(T, s)} \right)$$

$$h_2 = \left(2r^* [\mathbf{j} + \mathbf{f}] \dots \frac{4k\mathbf{q}}{\mathbf{s}^2}, \frac{2\mathbf{f}^2 r e^{\mathbf{g}(T-t)}}{\mathbf{f} + \mathbf{j} + B(T, s)} \right)$$

$$r^* = \frac{\ln \frac{A(T, s)}{k}}{B(T, s)}, \mathbf{g} = \sqrt{(k + \mathbf{l})^2 + 2\mathbf{s}^2}, \mathbf{j} = \frac{k + \mathbf{l} + \mathbf{g}}{\mathbf{s}^2 (e^{\mathbf{g}(T-t)} - 1)}$$

其中, T 為選擇權到期日, s 為債券到期日, c^2 分配, \mathbf{l} 為市場風險溢酬。

K 為債券執行價格, $k\%$ 為執行利率。

3、Longstaff & Schwartz(1992)模型

Longstaff & Schwartz 不僅將模型擴充至多因子,並且透過變數變換的方式

將原先無法觀察到的變數轉成具有經濟上的意義，此模型所提出的二因子為短期利率及利率波動性。二因子模型雖然解決了單因子模型中的部分問題，但仍然有以下的問題：

- (1) 由於二因子模型的參數結構過於龐大，所以造成估計與運算上的困難。
- (2) 二因子利率模型所估計出來的殖利率曲線與實際資料仍有偏誤。

二、無套利模型

由於均衡模型無配適出與市場上的利率期間結構相吻合的理論利率期間結構，故有無套利模型的產生。它是把觀察到的市場利率期間結構當作原始資料輸入，如此所得出的模型可以配適整個實際的利率期間結構，保證理論價格與市場價格一致。此類的文獻包括 Ho&Lee(1986)、Black-Derman- Toy(1990)、Hull-White(1990)、Heath-Jarrow-Morton(1990,1992)等。

(一) 利用零息債券價格配適與市場利率期間結構吻合的模型：

--- Ho & Lee(1986)

此模型是由 Thomas Ho 與 Sang-bin Lee 於 1986 年所提出，他們以現有的市場利率期間結構(轉為零息債券價格)為輸入變數，再以二項樹狀圖的結構推展出將來各種不同期限的零息債券價格可能的變化。將模型以連續的方式：

$$dr = \mathbf{q}(t) \cdot dt + \mathbf{s} \cdot dz$$

其中， σ ：短期利率標準差， $q(t)$ ：時間函數。債券的價格函數如下：

$$P(t, T) = A(t, T) \times e^{-r(T-t)}$$

$$\ln A = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - (T - t) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 t (T - t)^2$$

零息債券的歐式選擇權價格為：

$$\begin{aligned}
Call &= L \cdot P(0, s)N(h) - XP(0, T)N(h - \mathbf{s}_p) \\
Put &= X \cdot P(0, T)N(-h + \mathbf{s}_p) - L \cdot P(0, s)N(-h) \\
h &= \frac{1}{\mathbf{s}_p} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)X} + \frac{\mathbf{s}_p}{2} \\
\mathbf{s}_p &= \mathbf{s}(s - T)\sqrt{T}
\end{aligned}$$

其中 L 代表債券面額，X 代表執行價格。

Ho-Lee 模型的特色是它的單純性、評價容易，且提供對現今利率期間結構一個良好的配適效果。但是缺點是，由於假設利率變化為常態分佈，所以可能出現利率值為負的情形。此外，該模型的利率隨機過程不具備均數回復的現象。而且，所有的即期與遠期利率具有相同的標準差，因此並無法配適起始點的利率波動性結構(term structure of volatility)。



(二) 利用即期利率配適與市場利率期間結構吻合的模型：

1. Black-Derman-Toy(1990)

BDT 模型假設即期利率呈現對數常態分配，市場上所有債券的殖利率變動完全相關。模型中除了吻合市場現有的利率期間結構外，尚還吻合利率變異數之期間結構，所以即期利率變異數會隨著時間的改變而變動，不再如 Ho-Lee 和 Hull-White 模型中假設為常數的狀況。以連續型的隨機模型來表示 BDT 模型如下：

$$d \log r = \left[\mathbf{q}(t) + \frac{\mathbf{s}'(t)}{\mathbf{s}(t)} \log r \right] \times dt + \mathbf{s}(t) \times dz$$

BDT 模型同樣以二項樹狀圖來建構利率期間結構模型，即期利率為對數常態分佈，其所建構的利率期間模型具有均數回復的效果，不僅能確保利率結構不會發生利率為負的現象，且也能夠描繪市場真實利率變動的行為。但缺點是對於債券的評價公式無法求出。

2. Hull-White 模型(1990)

Hull and White 針對 Vasicek 模型無法滿足市場上真實利率期間結構及

Ho-Lee 模型沒有均數回復的缺點，重新建立即期利率隨機模型，以使模型得以符合現今的利率期間結構，其假設利率為常態分配，利用三元樹狀結構圖來配適市場的利率期間結構，故能反映利率均數回復的特性。且此模型的優點是，不論對零息債券或歐式選擇權價格來說，皆有其相對的封閉解。

將這個模型的隨機過程以最一般化的形式表示：

$$dr = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{b}(t) \cdot (a - r)) \times dt + \mathbf{s}(t) \cdot r^b \times dz$$

當 $b=0$ 時，模型變成

$$\text{extended Vasicek model } dr = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{b}(t) \cdot (a - r)) \times dt + \mathbf{s}(t) dz$$

當 $b=0.5$ 時，模型變成

$$\text{extended CIR model } dr = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{b}(t) \cdot (a - r)) \times dt + \mathbf{s}(t) \sqrt{r} \cdot dz$$

當 $\mathbf{b}(t)$ 與 $\mathbf{s}(t)$ 為常數， $a=0$ 、 $b=0$ 時，一般式將變成

$$dr = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{b} \cdot r) \times dt + \mathbf{s} \cdot dz$$

其中， r : 短期利率， $\mathbf{q}(t)$: 均數回復調整速度， \mathbf{s} : 短期利率的標準差

$\mathbf{q}(t)$: 可以由期初利率期間結構求得。

$$\mathbf{q}(t) = F_t(0, t) + \mathbf{b} \cdot F(0, t) + \frac{\mathbf{s}^2}{2 \cdot \mathbf{b}} (1 - e^{-2\mathbf{b}t})$$

在此 $F(0, t)$ 代表 t 點到期的遠期利率函數。在上式中最後一項通常可忽略不計。因此可以改寫成： $dr = F_t(0, t) + \mathbf{b}[F(0, t) - r] \times dt + \mathbf{s} \times dz$

以上式與債券價格到期日價值為面額的限制式，可以解出第 s 期到期的零息債券在第 t 期的封閉解價格：

$$P(t, s, r) = A(t, s) \times e^{-B(t, s)r}$$

$$B(t, s) = \frac{1 - e^{-\mathbf{b}(s-t)}}{\mathbf{b}}$$

$$A(t, s) = \exp \left[\ln \frac{P(0, s)}{P(0, t)} - B(t, s) \times \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{\mathbf{s}^2}{4 \cdot \mathbf{b}^3} (e^{-\mathbf{b}s} - e^{-\mathbf{b}t})^2 \times (e^{2\mathbf{b}t} - 1) \right]$$

由於每個floorlet可視為浮動利率的賣權或零息債券的買權，使用Vasicek 模型計算每個floorlet的價值，即可假設為一零息債券的買權價值，表示如下：

$$\begin{aligned}
 \text{Caplet}_k &= \text{Put}(t, T, s) = [X \times P(t, T) \cdot N(-h + s_p) - L \times P(t, s) \cdot N(-h)] \\
 \text{Floorlet}_k &= \text{Call}(t, T, s) = [L \times P(t, s) \cdot N(h) - X \times P(t, T) \cdot N(h - s_p)] \\
 h &= \frac{1}{s_p} \ln \frac{L \cdot P(t, s)}{P(t, T) \cdot X} + \frac{s_p}{2} \\
 s_p &= \frac{s}{b} \left[1 - e^{-b(s-T)} \right] \sqrt{\frac{1 - e^{-2b \cdot (T-t)}}{2b}}
 \end{aligned}$$

其中：s 為零息債券到期日，T 為零息債券選擇到期日，L 為到債券的面額，X 為債券執行價格。

Hull and White 承襲 Vasicek 均衡利率模型的架構，並以市場上起始點的利率期間結構當成模型的輸入資料，使得模型得以配適實際市場上的利率期間結構。除了符合均衡模型的設定之外，也利用無套利模型強調符合真實利率期間結構的配適原則來建構模型。此模型雖解決了均衡模型無法符合實際利率期間結構的問題，同時又能得到債券與選擇權的評價公式。因此，在評估三元利率樹的收斂性質，本文是以這個模型作為三元利率樹評價為基礎。

(三) 建立瞬間遠期利率的模型：

----Heath-Jarrow-Morton(1990,1992)

Heath-Jarrow-Morton 認為瞬間遠期利率包含了投資人對未來資訊的預期，故欲了解利率期間結構的變化，應將探討的焦點置於遠期利率上。

此模型的隨機過程如下：

$$df(t, T) = \mathbf{a}(t, T) \cdot dt + \mathbf{s}(t, T) \cdot dz$$

其中，f 為 instantaneous forward rate。債券的價格函數為：

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left(-\frac{\mathbf{s}^2}{2} T_t(T-t) - \mathbf{s}(T-t) \cdot z\right)$$

其中， $s_t = \mathbf{s}$ 。此模型與先前模型最大的不同點在於以遠期利率 $f(t, T)$ 代替短期現貨利率(short rate or instantaneous spot rate)。

此模型為連續時間模型，模型中以外生的方式給定起始點不同期限的遠期利率，而期間結構則為遠期利率的函數，藉由固定的遠期利率之變異數維持樹狀結構中的路徑獨立，且因為只需估計遠期利率的變異數，所以並無 Ho-Lee 模型中參數估計值不穩定的情形。此模型最大的缺點在於：模型的利率隨機過程不是馬可夫過程，將造成模型的複雜度大增，求解更加困難。

三、均衡模型與無套利模型比較

依據 Hull and White(1990)將短期利率 r 的隨機過程通式假設如下：

$$dr = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{b}(t) \cdot (a - r)) \times dt + \mathbf{s}(t) \cdot r^b \times dz$$

當 b 在各種利率模型中通常被設為 0、1/2、1 分別代表 Normal、Noncentral chi-square c^2 、Lognormal 的分配， dz 為 Winner process，其平均數與變異數分別為 0 與 dt 。

下列五種常見的利率隨機過程：

- 1、Ornstein-Uhlenbeck process(簡稱 OU process)
- 2、Mean-reverting square root process (簡稱 SR process)
- 3、Lognormal process(簡稱 LN process)
- 4、Ho and Lee discrete bi-normal process (簡稱 HL process)
- 5、Hull and White extended vasicek process(簡稱 HW process)

表 2-2 顯示 前三種為均衡模型(一因子固定參數模型)，後兩種為無套利模型(一因子變動參數模型)，差別在於利率隨機過程中有沒有 $\mathbf{q}(t)$ 來配置目前的收益率曲線。利率不像國民生產毛額(GDP)或是股價指數會有上升的趨勢，而是會呈現平均反轉現象(mean-reverting)，即當利率過高時會反轉向下，相反的，當利

率過低時會反轉向上。OU、SR、HW 因為提供此特性將更能反應實際經濟現象。然而 OU、HL 因假設利率的隨機過程為常態分配，而有負利率的產生將不符合另一個實際經濟現象。SR、LN 分別使用 Noncentral chi-square χ^2 與 Lognormal 的分配消除負利率的產生，然而因為短期利率的變異數是利率的函數，因而也是時間的函數，所以產生的解較為複雜。

但是，常態性的假設容易在債券、選擇權或是其他利率產品獲得公式解 (Closed form solution)，使得評價上較容易且快速。而非常態性之利率模型常需藉助數值方法，不僅實際操作因難且往往需耗費大量電腦運算時間。而由上小節已介紹 OU、HW 為利率隨機過程的 Vasicek 模型與 Hull and White extended Vasicek 模型，其零息債券價格以及零息債券選擇權的公式解，便可評價利率下限的價值。

表 2-2 不同利率模型之比較

| | 利率隨機過程 | 均數 反轉 | 負利率 | 配置市收 益率曲線 | 隨機 分配 | 變異數 假設 | 代表模型 |
|----|--|----------|-----|--------------|----------|-----------|---|
| OU | $dr = b(m-r)dt + s \cdot dz$ | 有 | 可能 | 沒有 | 常態 | 獨立 | Vasicek(1977) |
| SR | $dr = b(m-r)dt + s\sqrt{r} \cdot dz$ | 有 | 不可能 | 沒有 | 卡方 | 相依 | CIR(1985) |
| LN | $dr = m \times r \times dt + s \cdot r \cdot dz$ | 沒有 | 不可能 | 沒有 | 對數 常態 | 獨立 | Rendleman-Ba tter (1980) Brennan-Schw artz(1978) |
| HL | $dr = q(t) \cdot dt + s \cdot dz$ | 沒有 | 可能 | 有 | 常態 | 獨立 | Ho-Lee(1986) |
| HW | $dr = (q(t) - b(t)(a-r)dt) + s(t)dz$ | 有 | 可能 | 有 | 常態 | 獨立 | Hull-White (1990) |

表 2-3 均衡模型與無套利模型比較

| 比較項目 | 均衡模型 | 無套利模型 |
|------|------|-------|
|------|------|-------|

| 模型所需的資料 | 利用統計方法估計 | 起始點的期間結構 |
|------------|----------|----------|
| 運用於現貨市場 | 可以 | 無法運用 |
| 運用於衍生性金融商品 | 較差 | 可以 |
| 模型的持續性 | 參數穩定 | 不一致 |

資料來源：Bruce Tuckman(1995)

第二節 利率上限與利率下限評價之文獻

利率模型的發展使得利率上下限之評價更廣泛被研究，從早期的 Abken (1989) 使用蒙地卡羅模擬來評價利率上限，到 Stapleton and Subrahmanyam (1990,1993) 首先轉換利率選擇權與零息債券選擇權的關係，在假設零息債券之折價成對數常態分配，利用 Black and Scholes(1973)模型評價。而 Hull and White (1990)引進利率模型，擴充 Vasicek(1977)和 Cox,Ingersoll,and Ross(1985)，使模型的參數不再是固定，並獲得零息債券選擇權的公式解來評價利率上限，至此 Hull and White 的一因子參數變動模型廣泛被研究。Briys, Crouhy and Schobel(1991)在假設零息債券價格的隨機過程至少與兩種利率的隨機過程為常態的假設一致，即 OU 利率隨機過程與隨機漫步(Random walk) 利率隨機過程，獲得評價利率上限的公式解。Hull-White(1990,1993b,1993c)同樣將利率上限與利率下限視為零息債券選擇之組合，應用 Hull-White(1990)之 extended Vasicek 模型，評價利率上限與利率下限。

而在國內方面，應用利率模型來評價公司債附有利率上限、利率下限的有 Hwang(1995)與林容竹(1995)，游登茂(1996)、楊振海(1999)。而林容竹(1995)則以 Black(1979)模型和 Hull and White extended Vasicek 模型對遠紡 62 期公司債、遠紡 63 公司債所附利率上限進行評價。另外，游登茂(1996)則是利用一因子 Vasicek 模型、Hull and White extended Vasicek 模型以及二因子 Vasicek 模型，並使用其產生零息債券選擇權的公式解來評價公司債附有利率、利率下限及利率雙限的價值，另外還對利

率 Black and Scholes(1973)模型反推隱含變異數(implied volatility)。而楊振海(1999)則利用 Hull and White extended Vasicek 模型，來對平均利率上限與利率上限評價。許嘉玲(2002)主要是以 Hull-White(1990b)無套利機會利率模型(No Arbitrage Model) 為基礎，推導出一吻合現今市場殖利率曲線之一般化 IRS 利差期間結構模型，並利用美元 IRS 之資料進行參數估計與模型解釋能力分析，以避免非 IRS 契約本身之因素所造成的影響。

第三節 數值方法相關文獻

在評價利率衍生性資產時，首先必須針對該資產的特性找出適合的模型來評價。模型確定後，如果無法直接求得公式解，則必須根據模型的特性，找出適合的數值方法求得模型的數值解。在大多數的情形下公式解都無法求得，數值解是唯一的選擇。較常用於求解利率模型的數值方法有利率樹(lattice or tree method)、蒙地卡羅模擬(Monte Carlo method)與有限差分法(finite difference method)，三種方法各有其適用的場合，本文將針對蒙地卡羅模擬與利率樹來說明。

一、蒙地卡羅模擬

蒙地卡羅模擬主要用於評價路徑相依的歐式股票選擇權，其理論基礎來自於 Cox and Ross(1977)。他們認為只要選擇權可以透過其他資產完全複製，則選擇權價格便可直接以無風險利率將到期日的期望現金流量加以折現而求得。蒙地卡羅模擬的作法便是模擬出許多股價波動的路徑，每條路徑分別求出選擇權到期日的現金流量，最後將所有的現金流量加以平均並折現，便可得到選擇權的價格。

Boyle(1977)是第一位將蒙地卡羅模擬應用於選擇權評價的學者，由於蒙地卡羅模擬的簡單易用，故被許多學者都用於評價無法求出公式解的選擇權，例如

Johnson and Shanno(1987), Hull and White(1987)與 Scott(1987)。然而，沒有一種數值方法是完美無缺的，蒙地卡羅模擬也不例外。

蒙地卡羅模擬主要的缺點有三個：第一個是估計時，標準誤降低速度十分緩慢；其次是不適合用於美式選擇權的評價；此外，用於求解利率模型時，無法得到與市場完全一致的利率期間結構。由於許多的評價問題只能以蒙地卡羅模擬求解，因此許多學者開始針對上述的三個缺點提出改善的方法。

Hull and White(1988)以控制變異(control variate)來降低蒙地卡羅所產生的估計標準誤。Kemna and Vorst(1990)則使用控制變異降低蒙地卡羅模擬評價亞洲選擇權的估計標準誤。還有許多其他的方法可以降低估計標準誤，包括對消變異(antithetic variate)，分段抽樣(stratified sampling)等方法，這些用來降低蒙地卡羅模擬誤差的方法通稱為變異降低技術(variation reduction techniques)。

Tilly(1993)是最早使用蒙地卡羅模擬於美式選擇權評價的學者，此外 Barraquand and Martineau(1995), Boyle, Broadie and Glasserman(1995), Broadie and Glasserman(1997)等學者，也提出一些使用蒙地卡羅模擬評價美式選擇權的方法。這些方法主要的概念是在模擬隨機變數的路徑時，在每個節點上分別判斷選擇權是否會被提前執行，如果不會提前執行，下一期只需模擬出一個節點即可；若可被提前執行，則下一期必須模擬多個節點，直到選擇權到期日為止，不斷重複此步驟，求出許多的路徑，最後再將折現的現金流量取平均值，便可求出選擇權的價格。

目前還沒有文獻專門探討如何利用蒙地卡羅模擬出與市場利率期間結構一致的路徑。Hull and White(1993)曾提到以蒙地卡羅模擬結合 Hull and White 三元利率樹的方式評價路徑相依之利率選擇權，如此便可解決蒙地卡羅模擬無法產生與市場利率期間結構一致之路徑的問題，但文中並沒有針對這個問題作深入的探討。Wang(1997)將蒙地卡羅模擬與利率樹結合以評價利率選擇權，但文中的利率樹是建構在 CIR 模型上，由於 CIR 模型所產生的利率期間結構不一定會與市場一致，故用於評價選擇權時可能會造成誤差。

本文則採用 Hull and White (1993)的建議,將蒙地卡羅模擬與 Hull and White 三元利率樹結合,使模擬出的利率隨機過程與市場利率期間結構一致,進而用於路徑相依之利率選擇權評價。

二、利率樹

樹狀模型模擬最早是在1979年由Cox-Ross-Rubinstein所提出的二項式模型(Binomial Model),評價股票選擇權,該方法由於觀念簡單易懂,容易使用,再加上可用於美式選擇權的評價,很快就在學術界與實務界佔有一席之地。

Ho and Lee(1986)首度將二項定價模式用於評價利率選擇權。由於他們所使用的方法可以產生與市場利率期間結構完全一致的解,在概念上又與CRR的二項定價模式十分相近,故很快就受到學術界的青睞。Black, Derman and Toy(1990)與 Hull and White(1993)也分別利用二元利率樹與三元利率樹來評價利率選擇權,其中又以Hull and White三元利率樹最受重視,原因是Ho and Lee與BDT的二元利率樹都只能用於特定的模型,而Hull and White三元利率樹幾乎可用於所有的一因子模型,一旦利率樹建好後,將可用於評價所有路徑獨立的利率選擇權。另外,有限差分法(EFD)與三元利率在本質上是相同的,Hull and White三元利率樹也是從EFD發展而成。Hull and White(1990)使用EFD評價衍生性資產,並將EFD對於具有均數回復性質的利率隨機過程可能無法收斂的缺點加以改進,以確保EFD的收斂。Hull and White(1993)則進一步將EFD轉換成三元利率樹。

Kijima and Nagayama(1994)與Pelsser(1994),則提出第二階段平移函數的封閉式解,可以減少許多運算時間。但由於三元利率樹是在間斷時間(discrete time)的假設下所建構,平移函數的封閉式解則是連續時間(continuous time)的假設下所求得,如果在第二階段直接透過平移函數的公式解來建構最後的利率樹,則可能造成求出的利率樹無法與市場的利率期間結構完全一致。

Hull and White(1994)針對1993年所發表的三元利率樹加以改進,以提升其運算效率,Hull and White(1996)再度以1994年的改良三元利率樹為基礎,說明許多

在 1994 年的文章中沒有涵蓋到的細節加以闡述。故 Hull and White 三元利率樹是一個評價利率衍生性資產非常有效率的數值方法

第三章 研究方法

第一節 Hull and White 三元利率樹

三元利率樹模型主要是由於二元樹收斂的速度緩慢所發展出來，Hull and White(1990)將CRR的二項式模型加以擴展，發展出三元利率樹模型。

Hull and White 利率模型對利率的隨機過程設定為：

$$dr = (q(t) - b \cdot r) \cdot dt + s \cdot dz \quad (3.1)$$

其中 r 是短期利率(short rate)，而 $q(t)$ 是用來使模型能與市場上的利率期間結構一致的調整項，而 b 與 s 是模型的參數，其中 b 決定短期利率的波動性， s 則決定長期利率與短期利率相對的波動性。(3.1)式子可以改寫成下式：

$$dr = b \left(\frac{q(t)}{b} - r \right) \cdot dt + s \cdot dz \quad (3.2)$$

由上式可以看出：在時點 t ， r 會以 $\frac{q(t)}{b}$ 的速度向 $\frac{q(t)}{b}$ 趨近，所以 Hull and White 是具有均數回復(mean-reverting)特性的利率模型。

Hull and White 在 1994 年提出使用(3.2)式利率模型，來建構三元利率樹的方法，其建構方法分成兩階段進行：第一階段先求出 dr^* ，建構出 $r^*(t)$ 的利率樹；第二階段再求出平移函數 $q(t)$ ，並利用 $r(t) = r^*(t) + q(t)$ ，而建構出真正的 $r(t)$ 三元利率樹。以下將分別介紹其建構觀念及方法。

一、第一階段利率樹之建構

首先將(3.1)式拆解成為下列的型態： $dr = dr^* + q(t) \times dt$

定義隨機變數 $dr^* = -b \cdot r^* dt + s \cdot dz$

由該式子可知，此隨機過程對稱於 $r^* = 0$ ，而隨機變數 $r^*(t + \Delta t) - r^*(t)$ 是常態分配，若 $\Delta t^n = 0, n > 1$ ，則其期望值與變異數分別為：

$$\begin{aligned} E[r^*(t + \Delta t) - r^*(t)] &= -\mathbf{b} \cdot r^*(t)\Delta t \\ \text{Var}[r^*(t + \Delta t) - r^*(t)] &= \mathbf{s}^2 \Delta t \end{aligned} \quad (3.3)$$

由數值方法的文獻中可知，若將 Δr 設定成 $\Delta r = \mathbf{s} \sqrt{3\Delta t}$ 將會使誤差最小。

定義節點 (i, j) 代表處於第 i 期 ($t = i\Delta t$)，狀態 (垂直高度) 為 j ($r^* = j\Delta r$) 的節點，則任一節點 (i, j) 的利率值為 $r^* = j\Delta r$ ，由此便可求出每一個狀態 (垂直高度) 的利率值。在此利率模型下，當節點由時點 t 到時點 $t+1$ 時，利率的變化有三種路徑，但是不同利率水準的節點，其分枝 (branching) 形狀可能不同，所對應的分枝機率 (branching probabilities) 也會不同，見圖 3-1：

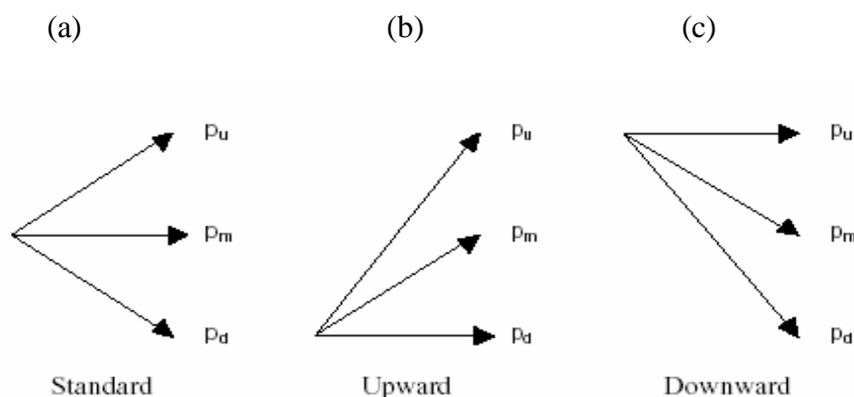


圖 3.1：三元利率樹可能之分枝形狀

在一般情形下，三元樹的分枝形狀為圖 3-1(a)，然而由於利率具有均數回復的特性，所以節點的分枝形狀會隨者利率水準的高低而改變，當利率處於低檔時，三元樹的分枝形狀可能會出現如圖 3-1(b) 的情形，使利率有往上回升的傾向；反之當利率處於高檔時，三元樹的分枝形狀能會出現如圖 3-1 (c)，使利率有向下調整的傾向。

各分枝機率的求算方法如下：假設參數 $a > 0$ 的情形下，當 j 夠大 ($j > j_{\max}$) 則

分枝形狀必須由(a)變成(c);當 j 夠小 ($j > j_{\min}$), 則分枝形狀會由(a)變成(b) 其中, j_{\max} 為 $\frac{0.1835}{b\Delta t}$ 值的最小整數, 而 $j_{\min} = -j_{\max}$ 可以保證所有分枝機率恆為正。在每一個節點, 其最高、中間、最低分枝的機率各以 P_u 、 P_m 、 P_d 來代表(參數見圖 3-1), 在符合 r^* 與原來利率隨機過程, 期望值與變異數必須一致, 且各分枝機率總和必須等於 1 的限制下, 可以得到 3 條方程式。此三條方程式分別為:

$$\begin{cases} P_u \Delta r - P_d \Delta r = -b j \Delta r \Delta t \\ P_u \Delta r^2 + P_d \Delta r^2 = s^2 \Delta t + b^2 j^2 \Delta r^2 \Delta t^2 \\ P_u + P_m + P_d = 1 \end{cases}$$

以 $\Delta r^2 = 3s^2 \Delta t$ 代入求解, 便可得到分枝機率為:

在圖 3-1(a)的分枝形狀下, 各分枝機率為:

$$\begin{cases} P_u = \frac{1}{6} + \frac{b^2 j^2 \Delta t^2 - b \cdot j \Delta t}{2} \\ P_m = \frac{2}{3} - b^2 j^2 \Delta t^2 \\ P_d = \frac{1}{6} + \frac{b^2 j^2 \Delta t^2 + b \cdot j \Delta t}{2} \end{cases}$$



在圖 3-1(b)的分枝形狀下, 各分枝機率為:

$$\begin{cases} P_u = \frac{1}{6} + \frac{b^2 j^2 \Delta t^2 + b \cdot j \Delta t}{2} \\ P_m = -\frac{1}{3} - b^2 j^2 \Delta t^2 - 2b \cdot j \Delta t \\ P_d = \frac{7}{6} + \frac{b^2 j^2 \Delta t^2 + 3b \cdot j \Delta t}{2} \end{cases}$$

在圖 3-1(c)的分枝形狀下, 各分枝機率為:

$$\begin{cases} P_u = \frac{7}{6} + \frac{b^2 j^2 \Delta t^2 - 3b \cdot j \Delta t}{2} \\ P_m = \frac{1}{3} - b^2 j^2 \Delta t^2 + 2b \cdot j \Delta t \\ P_d = \frac{1}{6} + \frac{b^2 j^2 \Delta t^2 - b \cdot j \Delta t}{2} \end{cases}$$

第一階段的三元利率樹, 每一個節點的分枝機率只與狀態(垂直高度)有關,

且利率樹上下對稱的，也就是說同一時點但位置上下對應的節點，其分枝機率恰好是相反的。

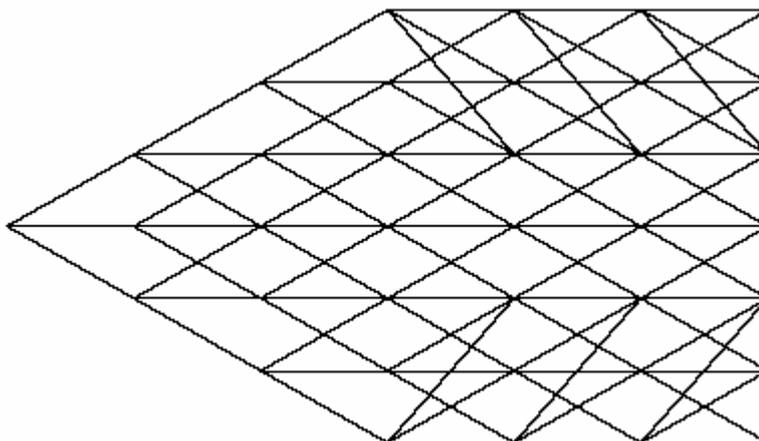


圖 3.2 第一階段三元利率樹

二、第二階段利率樹之建構

定義： $q_i = r(i\Delta t) - r^*(i\Delta t)$ 。先求出平移函數 $q(t)$ ，再將第一階段所求出的利率 r^* 加上，便可以得到真正的三元利率樹 r 。Hull & White 以數值方法循環求解平移函數，介紹如下：

$Q_{i,j}$ 代表在第 i 期，當第 j 種情狀發生時現金流量為 \$1，其他情況發生時現金流量為 0 的證券價格。在第 i 期 $Q_{i,j}$ 已知之下， $(i+1)$ 到期的折價債券 (discount bond) 之價格為

$$P(i+1) = \sum_j Q_{i,j} \exp[-(q_i + j\Delta r)\Delta t] \quad (3.4)$$

整理可得

$$q_i = \frac{\ln \sum_j Q_{i,j} e^{-j\Delta r\Delta t} - \ln P(i+1)}{\Delta t} \quad (3.5)$$

q_i 求出後，便可利用下式求出 $Q_{i+1,j}$ ，

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k} P(k,j) \exp[-(q_i + j\Delta r)\Delta t] \quad (3.6)$$

其中 $P(k,j)$ 代表從節點 (i,k) 到節點 $(i+1,j)$ 的機率。

當 $Q_{i+1,j}$ 已知，可利用上述觀念求出 q_{i+1} ，如此可將整個平移函數求出，得到符合市場利率結構的利率樹。透過上述的方法來求解平移函數最大的好處在於可以使求出的三元利率樹與市場利率期間結構完全一致。

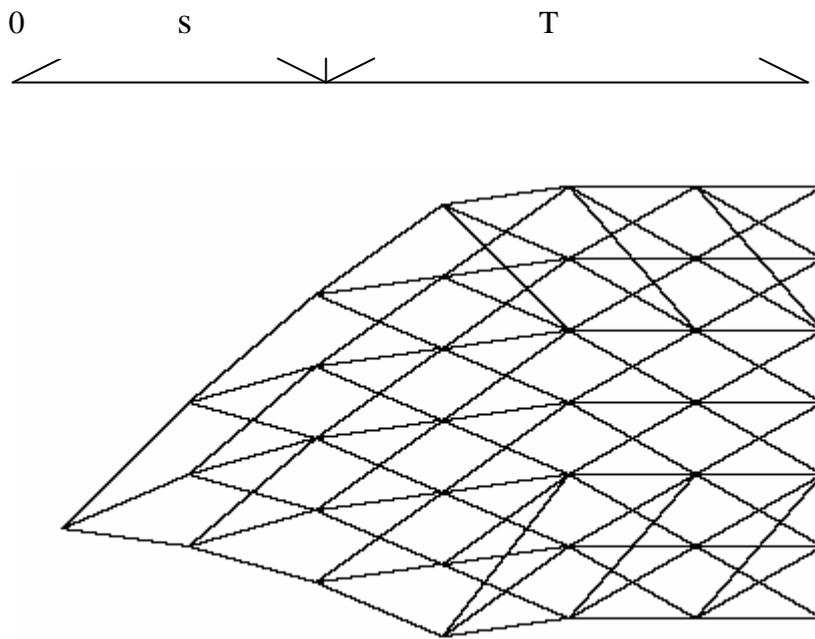


圖 3.3 第二階段三元利率樹

第二節 蒙地卡羅模擬

蒙地卡羅模擬原本是應用在其他領域，Boyle(1977)首先將蒙地卡羅模擬用於衍生性資產的評價。蒙地卡羅模擬的概念非常簡單，只是隨機抽樣加上大數法則的應用罷了，所有選擇權價格的隨機過程都能以隨機偏微分方程式(stochastic partial differential equation, SDE)描述，選擇權評價主要的工作就是求解SDE,SDE是很難求解的問題，在許多情形下根本求不出封閉解，此時可以利用蒙地卡羅模擬出SDE的路

徑，進而估計SDE的解。以下將舉一例說明蒙地卡羅模擬的概念與作法。

假設有一個隨機變數 $r_i(t)$ 其波動是隨著某一組隨機變數所影響，則 $r_i(t)$ 隨機過程可表為：

$$dr_i(t) = u_i(t, r_i(t))dt + \sum_{k=1, n} s_{i,k}(t, r_i(t))dz_k(t) \quad (3.7)$$

其中 dz_i 為布朗運動 ($E(dz_i) = 0, E(dz_i dz_j) = \mathbf{r}_{ij} dt$)， u_i 與 s_{ik} 分別代表 r_i 的 drift 與 volatility，當 s_{ik} 符合某些條件時，上式可改寫為

$$r(t) = r(0) + \int_{s=0}^t u_i(s, r_i(s))ds + \int_{s=0}^t \sum_{k=1}^n s_{i,k}(s, r_i(s))dz_k(s) \quad (3-8)$$

在(3-8)式第一個積分式是普通的 Riemann 積分，而第二個積分式則是隨機積分，蒙地卡羅模擬的概念就是把式子中的積分項改成間斷時間(discrete time)的形式

$$\int_{s=0}^t m_i(s, r_i(s))ds \cong \sum_s m_i(t_s, r_i(t_s))\Delta t$$

$$\int_{s=0}^t \sum_{k=1}^n s_{i,k}(s, r_i(s))dz_k(s) \cong \sum_s \sum_{k=1}^n s_{i,k}(t_s, r_i(t_s))Z_k(t_s)$$

為求得 $r(t)$ 可透過 $r(t_x + \Delta t) = r(t_s) + m_i(t_s, r_i(t_s))\Delta t + \sum_{k=1, n} s_{i,k}(t_s, r_i(t_s))z_k(t_s)$

遞迴求解，其中 $\Delta Z_k(t_s) \cong \mathbf{e}_k \sqrt{\Delta t}$
 $\mathbf{e} \sim N(0,1)$

因此，蒙地卡羅模擬法是假設資產價格的變動依附在服從某種隨機過程的型態，利用電腦模擬，在目標時間範圍內，產生隨機價格路徑，並依此建構資產報酬分配。此一估算程序如果用以描述投資組合價值變動行徑之模式適當，而且用來模擬情境發生的亂數產生器(random number generator)符合真正隨機亂數的性質，則模擬建構的投資組合損益分配即可精確描述該投資組合損益分配之特性。另外，蒙地卡羅模擬法的價格變動率 Δx_i 是從指定的模型中任意抽取出來的。其主要有以下幾個步驟：

- 1、選擇一個適合描述資產價格的模型，並利用歷史資料估計該模型的參數。
- 2、利用電腦中的亂數產生器來產生隨機變數的模擬值，並代入模型中，則可得

到一個未來資產價格的路徑。

3、重複多次使所模擬的資產價格的分配收斂至所假設的分配。

例如，圖 3-4 是利用蒙地卡羅模擬的一條路徑，其隨機過程為：

$$dr = (a + b \cdot r)dt + s \cdot r^g dz \quad \text{其中假設 } a = 0.06, b = -1.2, s = 0.3, g = 0.5, r_0 = 0.05$$

$n=100$ 。

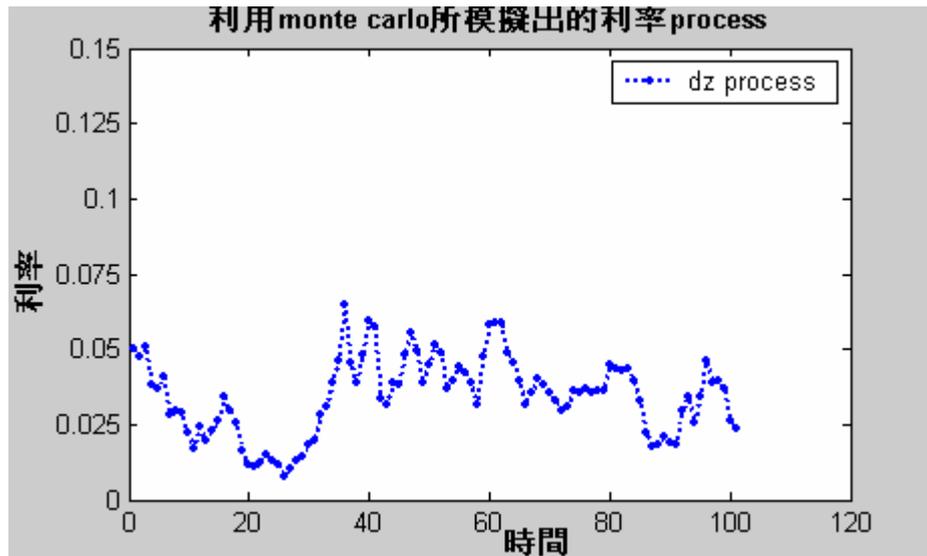


圖 3.4 蒙地卡羅所模擬之路徑

蒙地卡羅模擬常為人所詬病的缺點是收斂速度太慢，因此蒙地卡羅模擬很難直接用於衍生性資產評價。然而對於某些衍生性資產而言，蒙地卡羅模擬是唯一可行的評價方法，因此許多學者開始研究降低蒙地卡羅模擬估計誤差的方法。

Hull and White(1988)以控制變異(control variate method)來降低蒙地卡羅模擬的估計誤差。控制變異的作法是，找出與被評價資產 A 具有高度相關且具有評價公式的資產 B，同時對資產 A 與資產 B 進行蒙地卡羅模擬分析，分別求出資產價格的估計值 f_A^* 與 f_B^* ，則可以利用 $f_A = f_A^* - f_B^* + f_B$ 求出 f_A 做為資產 A 的價格估計值，其中 f_B 是資產 B 以評價公式求出的價格。

例如我們可以找到另一個機率密度函數 h 而在 h 之下 $g(\cdot)$ 的期望值有公式解，也就是說， $G = \int_A g(y)h(y)dy$ 是可以直接計算的。

那麼以下必然成立： $\bar{g} = G + \int_A g(y)(f(y) - h(y))dy$

我們只要分別從 f 及 h 產生樣本 y 及 z ，便可以獲得 \bar{g} 的另一個估計式：

$$g^* = G + (\hat{g} - \hat{G}) \quad \text{其中} \quad \hat{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y_i) \quad \text{and} \quad \hat{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i)$$

值得注意的： g^* 是一個不偏估計式且變異數為

$$\text{Var}(g^*) = \text{Var}(\hat{g}) + \text{Var}(\hat{G}) - 2\text{Cov}(\hat{g}, \hat{G})$$

只要 $\text{Cov}(\hat{g}, \hat{G}) > \text{Var}(\hat{G})/2$ 或 $\text{Cov}(\hat{g}, \hat{G}) > \frac{1}{2} \sqrt{\text{Var}(\hat{G})/\text{Var}(\hat{g})}$ ， g^* 的變異數就會小於 \hat{g} 的變異數，因此，這個方法利用高正相關的兩個估計式提供了一種改善精度的方式。

另一種常用的方法是分段抽樣(stratified sampling)，作法是先將隨機變數的定義域分段，針對不同區段分別模擬隨機過程的路徑，當劃分的區段愈多，則估計誤差降低的效果愈顯著。但隨著區段的增加，所耗費的運算時間也會跟著上升。

接著要介紹的是對消變異(antithetic variate method)，這是最簡單的方式。利用負相關變數的概念。例如，在模擬過程中我們用一個取自 $U(0,1)$ 的變數 u 產生一個 y_u 及對應的 $g(y_u)$ ，當然也可用 $1-u$ 產生一個 y_{1-u} 及對應的 $g(y_{1-u})$ ，則

$$\tilde{g} = \frac{1}{2} [g(y_u) + g(y_{1-u})] \quad \text{也會是} \quad \bar{g} \quad \text{的不偏估計式且}$$

$$\tilde{g} \quad \text{變異數為} \quad \frac{1}{4} [\text{Var}(g(y_u)) + \text{Var}(g(y_{1-u}))] + \frac{1}{2} \text{Cov}(g(y_u) + g(y_{1-u}))$$

若 $g(y_u)$ 與 $g(y_{1-u})$ 為負相關， \tilde{g} 的變異數也會較 \hat{g} 小。

而實際簡單的作法，是每模擬出一個數值 dz ，直接以 $-dz$ 當作另一條模擬路徑的數值(請參考下圖 3-5)。由於兩個隨機過程為完全負相關，因此可以有效降低估計誤差；此外，由於 $-dz$ 只需將 dz 變號即可求得，不需特別的處理，故運算時間較其他方法少。

例如 $dr = (\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot r)dt + \mathbf{s} \cdot r^g dz$ 其中假設 $\mathbf{a} = 0.06$, $\mathbf{b} = -1.2$, $\mathbf{s} = 0.3$, $g = 0.5$, $r_0 = 0.05$

$n=100$ 。

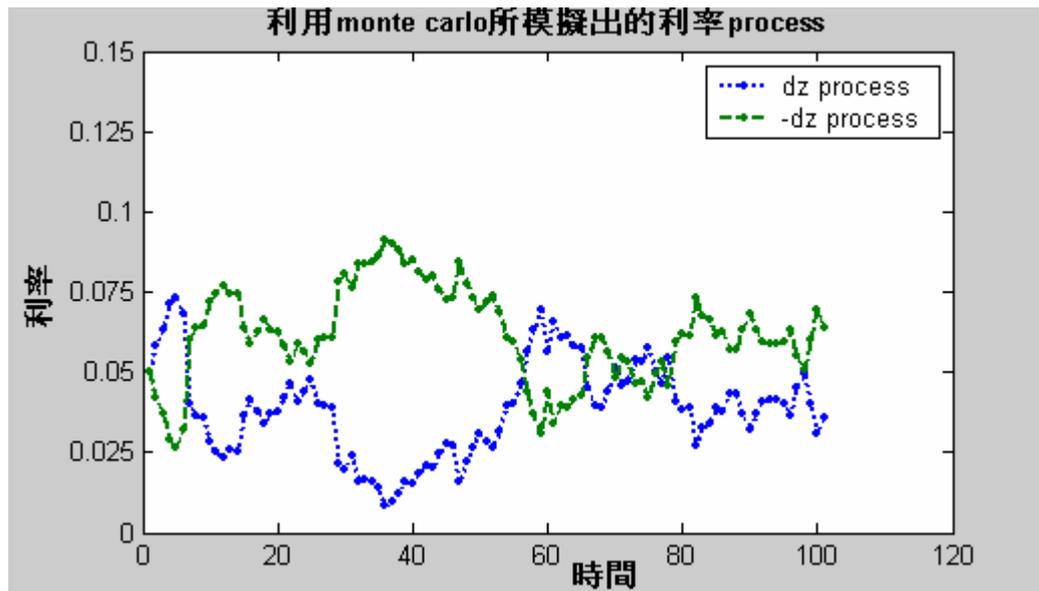


圖 3.5 對消變異所模擬之路徑

由於蒙地卡羅模擬是透過電腦產生的亂數去模擬隨機變數，因此電腦亂數的隨機性成為影響蒙地卡羅模擬效果的重要變數。但由於電腦無法產生真正的亂數，而是利用一些演算法製造出類似具隨機性的亂數。研究結果發現使用電腦所產生的虛擬亂數，會發生群聚的現象，可能會對模擬的結果產生不良的影響。為了解決這個問題，學者開始嘗試利用非隨機(deterministic)的數列代替虛擬亂數，目的是希望每一個數值能均勻地分佈，這種技術稱為 Quasi-Monte Carlo，採用的數列最通稱為 low discrepancy sequence。

由於採用 Quasi-Monte Carlo 所耗費的運算時間比傳統的蒙地卡羅模擬多，而蒙地卡羅模擬加上對消變異後，運算時間並不會增加，因此是演算效率最佳的方法。本文在評價路徑相依利率選擇權亦採用蒙地卡羅模擬加上對消變異的方法。

第三節 結合利率樹與蒙地卡羅模擬

由於利率樹先天上的限制，使得利率樹並不適合用於路徑相依(path dependent)

利率選擇權的評價。雖然，蒙地卡羅模擬非常適合用於評價路徑相依的股票選擇權，但由於股票選擇權與利率選擇權本質上的差異，故無法直接使用蒙地卡羅模擬於路徑相依之利率選擇權的評價。主要的原因在於使用數值方法求解利率選擇權時，必須先求出與市場一致的利率期間結構，否則評價將會產生很大的誤差，利率樹可以輕易地滿足這項要求，而蒙地卡羅模擬則較困難。因此，若要使用蒙地卡羅模擬，所產生的路徑將無法與市場利率期間結構一致。

為了評價路徑相依之利率選擇權，必須將蒙地卡羅模擬加以修改，使其模擬出的利率隨機過程能與市場一致，為了達到這個目的，本文將透過結合蒙地卡羅模擬與利率樹的方式，使蒙地卡羅模擬所產生的路徑能與市場一致。實際的作法是先建構一個與市場利率期間結構完全一致的利率樹，再從利率樹上隨機抽樣，產生所需的路徑。

三元利率樹建構完成後，即可利用蒙地卡羅模擬在利率樹上抽樣。亦即在任一節點上，抽出一個介於零與一之間的隨機變數 s ，當 s 小於 P_u 時，則下一期的節點上升；當 $P_u < s < (P_u + P_d)$ 時，下一期的節點不變；當 s 大於等於 $(P_u + P_d)$ 時，節點則下降。重複此一步驟，即可得到利率波動的路徑，每一條路徑可求出一個價格。重複 1000 次上述步驟，最後將有路徑所求出的價格平均，即可得出價格的估計值。

第四節 參數估計

本文採用 Chen and Scott(1993)所用的最大概似估計法(Maximum Likelihood Estimation)來作為估計參數的方法。此方法最大的優點在於，若利率的分配給定後，利用利率機率密度函數可準確估出參數，而不受 Δt 大小的影響。缺點在於此方法必需先給定分配，才能採用。但許多利率模型之分配並非都已知。

一般而言，最大概似估計法來進行參數估計時，常會遇到該如何選擇合理的初始值呢？本文參考 Chen and Yang(1995b)的作法，將 Vasicek 模型所遵循的隨機過程

$dr = \mathbf{b}(m-r)dt + \mathbf{s} \cdot dw$ 視為一個以離散型態表達的一階自我迴歸方程式：

$$r_s = \mathbf{m} + (r_t - \mathbf{m}) \times e^{-\mathbf{b} \cdot (s-t)} + e(s)$$

$$e(s) \sim N\left(0, \frac{\mathbf{s}^2}{2\mathbf{b}} (1 - e^{-2\mathbf{b} \cdot (s-t)})\right)$$

能夠如此表達是因為上述的 O-U process 可以導出 r_t 之條件機率分配平均值。基本上，可以再將 r_t 之條件機率分配平均改寫成一個 AR(1)的迴歸式子：

$$r_s = \mathbf{m}(1 - e^{-\mathbf{b} \cdot (s-t)}) + r_t \times e^{-\mathbf{b} \cdot (s-t)} + e(s)$$

$$\Rightarrow r_t = a + b \cdot r_{t-\Delta t} + e_t$$

$$a = \mathbf{m}(1 - b), b = \exp(-\mathbf{b} \cdot \Delta t)$$

針對所蒐集到的利率資料，分成二數列，一為 r_t ，另一為 r_{t-1} ，進行一階自我迴歸，便可估得的截距項、斜率和殘差的誤差平方均數；之後再分別得到 \mathbf{b} 、 \mathbf{m} 、 \mathbf{s} 的初始估計值，並以這些初始估計值再作為最大概似估計法中所需的初始值。

在 Vasicek 模型中，由於假設短期利率服從 O-U process。而 O-U process 本身具備所謂的“馬可夫性質” (Markovian Property) 所致，此一特性仍意謂只有現在的資訊對預測未來是有用的，過去的資訊則毫無幫助。以數學表示，則是 $f(r_{t+2} | r_{t+1}) = f(r_{t+2} | r_t, r_{t+1})$ ， r_t 代表隨機變數。故由於 O-U process 可以導出隨機變數 r_t 之條件機率分配為常態分配，即在目前短期利率為已知的前提下，未來任何時點的短期利率之波動變化將呈現常態分配的特性，可用數學式表示如下：

$$f(r_t | r_{t-1}) \sim N(\text{mean}_t, \text{Var}_t)$$

$$\text{mean}_t = \mathbf{m} + (r_{t-1} - \mathbf{m}) \times e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t}$$

$$\text{Var}_t = \frac{\mathbf{s}^2}{2 \cdot \mathbf{b}} (1 - e^{-2\mathbf{b} \cdot \Delta t})$$

$$r_t \sim N\left(\mathbf{m} + (r_{t-1} - \mathbf{m}) \times e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t}, \frac{\mathbf{s}^2}{2 \cdot \mathbf{b}} (1 - e^{-2\mathbf{b} \cdot \Delta t})\right)$$

$$r_{t+\Delta t} = \mathbf{m} + (r_t - \mathbf{m}) \times e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t} + \sqrt{\frac{\mathbf{s}^2 \times (1 - e^{-2\mathbf{b} \cdot \Delta t})}{2 \cdot \mathbf{b}}} \times e$$

再利用 O-U process 所具備的馬可夫性質而得出所有樣本期間內 r_t 的概似函數：

$$L(\mathbf{b}, \mathbf{m}, \mathbf{s} | r_1, r_2, \dots, r_T) = f(r_1) f(r_2 | r_1) \Lambda f(r_T | r_{T-1})$$

取 log 後，可得 $\ln L(r_1, r_2, \mathbf{K} r_t, \mathbf{K} r_T) = \ln f(r_1) + \sum_{t=2}^T \ln f(r_t | r_{t-1})$

$$\begin{aligned} \therefore \ln f(r_t) &= -\frac{1}{2} \ln(2\mathbf{p}) - \frac{1}{2} \ln\left(\mathbf{s}^2 \times \frac{1 - e^{-2 \cdot \mathbf{b} \cdot \Delta t}}{2 \cdot \mathbf{b}}\right) - \frac{1}{2} \times \left(\frac{r_t - e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t} \times r_{t-\Delta t} \times \mathbf{m}(1 - e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t})}{\mathbf{s}^2 \times \frac{1 - e^{-2 \cdot \mathbf{b} \cdot \Delta t}}{2 \cdot \mathbf{b}}} \right)^2 \\ \therefore \ln L &= -\frac{n}{2} \ln(2\mathbf{p}) - \frac{n}{2} \ln\left(\mathbf{s}^2 \times \frac{1 - e^{-2 \cdot \mathbf{b} \cdot \Delta t}}{2 \cdot \mathbf{b}}\right) - \frac{1}{2} \times \sum_{t=1}^T \left(\frac{r_t - e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t} \times r_{t-\Delta t} \times \mathbf{m}(1 - e^{-\mathbf{b} \cdot \Delta t})}{\mathbf{s}^2 \times \frac{1 - e^{-2 \cdot \mathbf{b} \cdot \Delta t}}{2 \cdot \mathbf{b}}} \right)^2 \end{aligned}$$

針對上式的參數集合進行最大化運算，即可求各個參數的最大概似估計值。



第四章 資料來源與參數估計

第一節 資料來源

指標利率(reference rate)，通常以三或六個月的倫敦銀行同業間拆款利率(London Inter-bank offered Rate, LIBOR)為準，亦可以國庫券利率(Treasury bill rate)、基本放款利率(prime interest rate)、商業銀行定期存單利率(commercial bank certificate of deposit (CD) rate)、商業本票利率(commercial paper(CP) rate)或銀行承兌匯票利率(bankers' acceptance(BA) rate)等為準。基本上，只要是具公信力、不易受人為操縱且是許多浮動利率資產與負債計息之依據，而交易雙方均能接受的利率指標，都可以被選為指標利率。

本文資料蒐集來源主要以台灣地區為主，為便於說明起見挑選出三種不同天期的貨幣市場利率來作為實證的資料，即 30 天期，90 天期和 180 天期的月資料。資料來源，則是取自台灣經濟新報資料庫，時間則是自民國 75 年 9 月至民國 92 年 5 月止，三種天期融資性商業本票的利率，共計各有 201 筆月資料。其三種不同天期到期的商業本票之利率走勢圖如下圖 4.1、4.2 及 4.3 所示。由這些圖中可知，商業本票利率自從民國 75 年 9 月至民國 89 年 9 月，這段期間利率具有 mean reverting 的現象。

圖 4,1

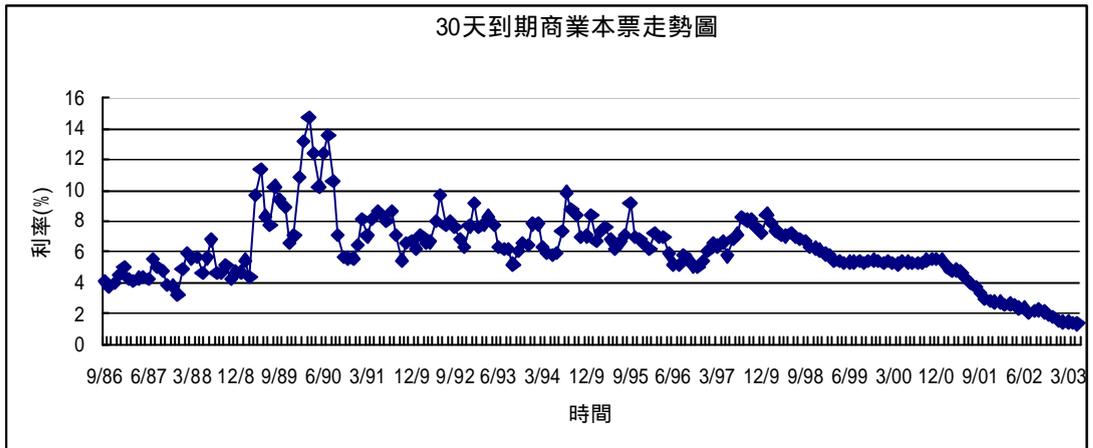


圖 4.2

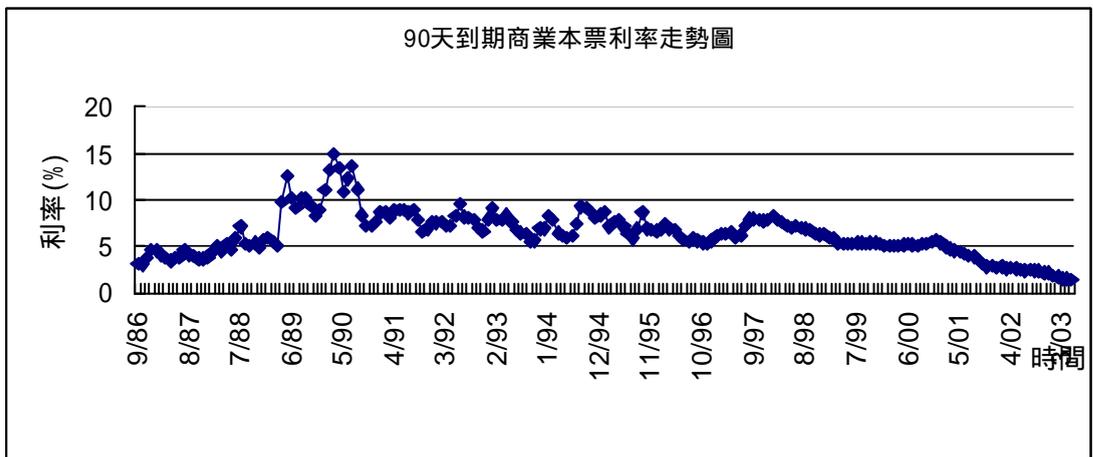
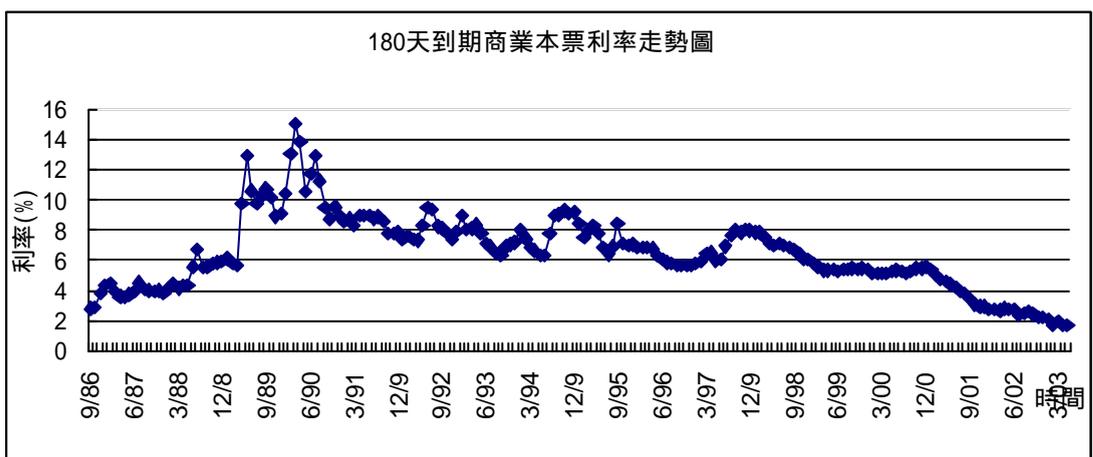


圖 4.3



下表 4-1 是利率資料的一些基本統計，由表中大概可以約略知道貨幣市場利率的基本特徵，例如天期越長的利率，其平均值也往往較高。

表 4-1 台灣貨幣市場商業本票利率基本概況

| | 30 天期 | 90 天期 | 180 天期 |
|-----|----------|----------|----------|
| 平均數 | 6.1380% | 6.3235% | 6.4590% |
| 中間值 | 6.06% | 6.23% | 6.37% |
| 眾數 | 5.45% | 7.96% | 5.74% |
| 最小值 | 1.33% | 1.43% | 1.7% |
| 最大值 | 14.74% | 15.01% | 14.98% |
| 標準差 | 0.022685 | 0.024062 | 0.02438 |
| 變異數 | 0.000515 | 0.000579 | 0.000594 |
| 樣本數 | 201 | 201 | 201 |

(月資料：9/1/1986~5/31/2003)

第二節 參數估計結果

本文針對上節所蒐集到的各天期商業本票利率資料，分成二數列，一為 r_t ，另一為 r_{t-1} 。針對 $r_t = a + b \cdot r_{t-\Delta t} + e_t$ 進行一階自我迴歸，便可估得的截距項、斜率和殘差的誤差平方均數；之後再透過 $a = m(1-b)$, $b = \exp(-b \cdot \Delta t)$ 與 $e_t = \frac{s^2}{2b}(1 - e^{2b\Delta t})$ 分別得到 b 、 m 、 s 的初始估計值，並以這些初始估計值再作為最大概似估計法中所需的初始值。而此過程估計結果，顯示於表 4-2、表 4-3、表 4-4 中。

表 4-2 利用 AR(1)估計參數結果

| Parameter | 30 天期 | 90 天期 | 180 天期 |
|-----------|-------|-------|--------|
|-----------|-------|-------|--------|

| | | | |
|-------|--------------|--------------|--------------|
| a | 0.00579385 | 0.00347538 | 0.00252135 |
| b | 0.903556 | 0.943592 | 0.960076 |
| s^2 | 0.0001027991 | 0.0000706397 | 0.0000513457 |

表 4-3 利用表一結果推算出估計參數之初始值

| Parameter | 30 天期 | 90 天期 | 180 天期 |
|-----------|--------|--------|--------|
| μ | 0.0601 | 0.0616 | 0.0632 |
| | 1.2170 | 0.6967 | 0.4889 |
| | 0.0101 | 0.0084 | 0.0072 |

表 4-4 利用最大概似法估計 Vasicek model 真實分配的參數

| Parameter | 30 天期 | 90 天期 | 180 天期 |
|-----------|----------|----------|----------|
| μ | 0.061327 | 0.063024 | 0.064879 |
| | 1.6292 | 0.85146 | 0.63955 |
| | 0.039542 | 0.030304 | 0.025948 |
| Max value | 731.83 | 701.22 | 652.13 |

t=1/12 的參數值(台灣地區商業本票月資料)

由表 4-2 至表 4-4 可知，不同天期所估計出來的 σ 、 μ 、 λ 等參數及概似函數值，會因到期的長短而呈現不同的趨勢型態。例如： σ 與 λ 會隨著天期的增加而縮減，這或許說明了短天期利率變動較長天期來得活潑有彈性，所以調整速度比較快，變異性亦較高。但 μ 則相反，仍是隨到期日天期的增加而增加， μ 所代表的長天期利率平均水準(mean reversion level)較高，則蠻符合一般直覺上的概念。因為長天期利率的平均水準在正常情況下往往會比短天期利率來得高。另外，在資料中所跑出的結果中短天期利率所估計出的概似函數值，也較長天期來的高。這現象也頗符合直覺的看法，

主要是因為模型中的利率其實是即期利率(instantaneous interest rate)的概念,所以越短天期的利率應該要越符合理論模型的要求。即配適度越高,導致概似函數值也要隨到期天數增長而減少。

第三節 利率期間結構

本文在 Hull-White 模型中,以 Vasicek Model 的利率模型

$$dr = b(m-r)dt + s \cdot dz \text{ 所產生的零息債券價格 } P(t, s, r) = A(t, s) \times e^{-B(t, s)r}$$

$$B(t, s) = (1 - e^{-b(s-t)}) / b$$

$$A(t, s) = \exp \left[\frac{(B(t, s) - s + t) \left(b^2 m - \frac{s^2}{2} \right) - \frac{s^2 B(t, s)^2}{4 \cdot b}}{b^2} \right]$$

本文以 30、60 及 90 天期的商業本票利率資料,透過最大概似法所估計出參數 μ 、 σ 、 μ (表 4-4) 為其代入參數值,再由 $R(t, s) = -\frac{1}{s-t} \ln P(t, s, r)$ 來決定整個利率期限結構,當作其輸入的市場利率期間結構。圖 4.1 為 Vasicek 模型之利率期間結構。

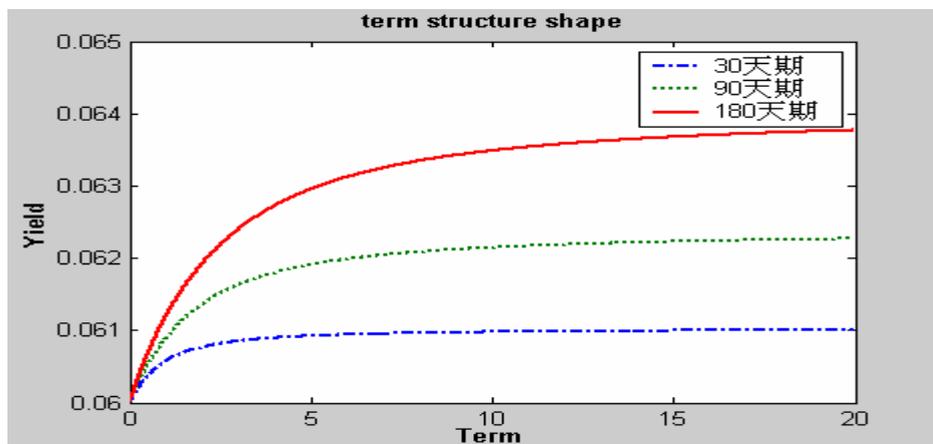


圖 4.4 利率期間結構

第五章 模擬分析

本章將實際運用前章的利率模型，Vasicek 模型、CIR 模型與 Hull&White 之 extended Vasicek 模型，與所估計出的參數來進行利率下限的評價。第一節為對利率下限，即零息債券之買權來做評價；第二節則針對利率樹的數值方法，來分析其收斂效果，另外也對歐式選擇權與美式選擇權進行評價。第三節為介紹三元利率樹之原理，以及分析結合原始蒙地卡羅跟對消變異之蒙地卡羅後之結果。第四節則從 Vasicek 模型及 CIR 模型之二項樹，及 Hull-White 之 extended Vasicek 模型之三元利率樹來看，影響利率下限價值的因素至少有執行利率、距到期期限、短期利率之波動性與調整速度。本節將就幾個相關因素，來進行敏感度分析。



第一節 利率下限價值模擬結果

由實證方法中的估計方法，採最大概似估計法得知各參數值。因此，本文採用以 30 天期商業本票之參數估計值。 σ 為 1.6292； λ 為 0.039542； μ 為 0.061327。另外，假設執行利率(x) 為 0.04；執行價格(K) 為 $1/(1+x \times s \times (365/360)) = 0.9610$ ；期初利率(r_0) 為 6%；本金(L) 為 1； t 等於 $1/N$ ；零息債券到期日(s) 為 1 年；選擇權到期日(T) 為半年。利率模型計算每個 Floor 的價值時，假設為計算 1 個零息債券的買權價值(floorlet)。

表 5-1 數值方法評價三個利率模型之利率下限價值

| | Vasicek model | CIR model | Hull-White model |
|-------------------------|---|-----------------------------------|---|
| 公式解 | Floor: 0.00899128 | | Floor: 0.0089112 |
| 利率樹($\Delta t=1/100$) | BN:0.0085064 | BN:0.008142 | TN: 0.0095346 |
| ($\Delta t=1/1000$) | BN:0.0089515 | BN: 0.008652 | TN:0.0089468 |
| 蒙地卡羅(N=100) | MC: 0.0083643 OU: 0.00837358 AMC: 0.00920049 | MC: 0.00779354 AMC: 0.00838494 | MC+BN : 0.01957 AMC+BN: 0.010591 ($\Delta t=1/100$) |
| (N=1000) | MC:0.008830129 OU: 0.008685598 AMC:0.00909332 | MC:0.00792264 AMC:0.00840957 | MC+BN : 0.019464 AMC+BN: 0.0099783 ($\Delta t=1/100$) |

其中 Binomial Tree (BN)、Trinomial Tree(TN)、Monte Carlo(MC)、Antithetic Monte Carlo(AMC)。

上表，主要是利用特殊假設下的公式解，以及不同的數值方法(包括利率結構樹及蒙地卡羅)，來對三個利率模型加以評價利率下限。其結果如表 5-1 所示。利率下限使用 Vasicek 模型及 Hull-White extended Vasicek 模型來評價，在特殊假設下產生零息債券價格選擇權的公式解(closed form solution)，所獲得每一元面額公司債利率下限價值，分別為 0.00899128 與 0.0089112。因此，透過均衡模型與無套利模型所模擬出來的結果，兩者差異不大。

另外，利用不同數值方法所估計出來的值，有其差異之處。其中以 Vasicek 模型為例，以二項樹所模擬出的數值，分割期數愈大者，當分割 1000 期時，每一元面額公司債利率下限價值為 0.0089515，更接近其公式解。而在蒙地卡羅方法所模擬出來的數值，當模擬次數為 1000 次所評價的結果為 0.008830129，相對模擬次數為 100 次時所評價的 0.0083643 數值，要來得更接近公式解。相同地，Hull-White 模型也可得相同的結論。因此，不易求得公式解下的 CIR 模型，由於是非常態性之利率模型，

常需藉助數值方法來模擬，可透過模擬次數(N)的增加及分割期數(Δt)的縮小，將可似近其 CIR 模型之公式解。由結果可知，似近其 CIR 模型獲得利率下限價值約為 0.00840957~0.008652，與 Vasicek 模型及 Hull-White extended Vasicek 模型有些微差異。

第二節 利率結構樹之數值分析

一、利率樹之價格收斂行為

為了分析公式解與二項樹(Binomial Tree)及三元利率樹(Trinomial Tree)二種數值評價方法價格的收斂行為，本文分別以 Vasicek 模型及 Hull-White 模型設定 Vasicek Model 的利率期間結構為市場上的利率結構，並且代入此方法，來確保其收斂行為。另外，仍可分析 CIR 模型之二項樹(Binomial Tree) 的收斂行為。

表 5-2 利率下限公式解與二項樹評價之收斂行為

| 內差點數 | 以零息債券為標的 | | | |
|------|---------------|-------------|-----------|--------------|
| | Vasicek model | | CIR model | |
| | 權利金 | 誤差(%) | 權利金 | 誤差(%) |
| 10 | 0.0048721 | -0.00458131 | 0.003071 | -0.006468897 |
| 50 | 0.00800149 | -0.00110083 | 0.007575 | -0.001290100 |
| 100 | 0.00850675 | -0.00053888 | 0.008142 | -0.000638151 |
| 250 | 0.00880293 | -0.00020948 | 0.008482 | -0.000247212 |
| 500 | 0.008901181 | -0.00010021 | 0.008596 | -0.000116132 |
| 1000 | 0.008951452 | -0.00004429 | 0.008652 | -0.000051742 |
| 1500 | 0.008967422 | -0.00002653 | 0.008671 | -0.000029895 |

| | | | | |
|------|-------------|-------------|----------|--------------|
| 2000 | 0.008975167 | -0.00001792 | 0.008680 | -0.000019547 |
| 封閉解 | 0.00899128 | | | - |

表 5-3 利率下限封閉解與三元利率樹評價之收斂行為表

| 內差點數 | 以零息債券為標的 | |
|------|--------------------|----------------|
| | Hull - White model | |
| | 權利金 | 誤差(%/100) |
| 10 | 0.027744 | 0.021133854026 |
| 50 | 0.010176 | 0.001419337463 |
| 100 | 0.0095346 | 0.00069956909 |
| 250 | 0.0091249 | 0.00023981057 |
| 500 | 0.0089997 | 0.000099313224 |
| 1000 | 0.0089468 | 0.000039949726 |
| 1500 | 0.0089288 | 0.000019750426 |
| 2000 | 0.0089201 | 0.000009987432 |
| 封閉解 | 0.0089112 | |

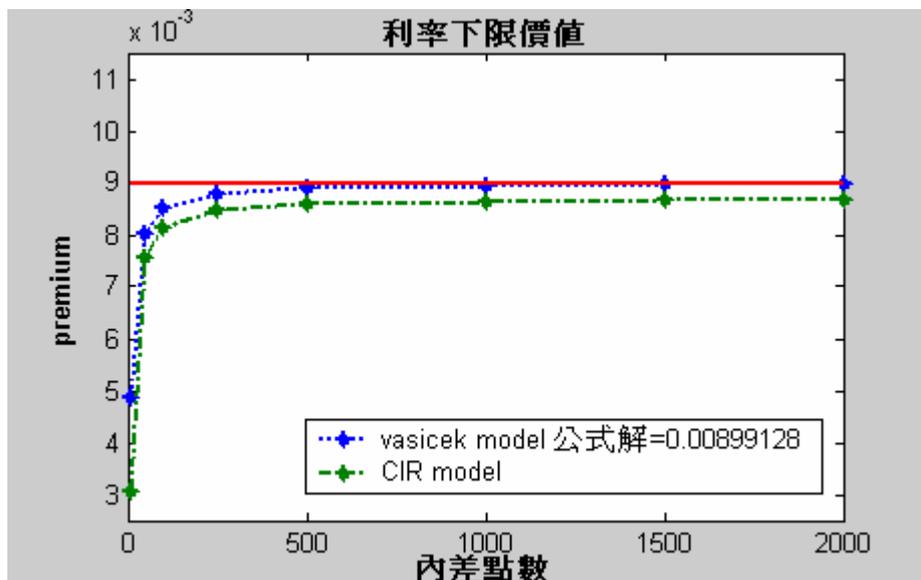


圖 5.1 利率下限公式解與二項樹評價之價格收斂行為

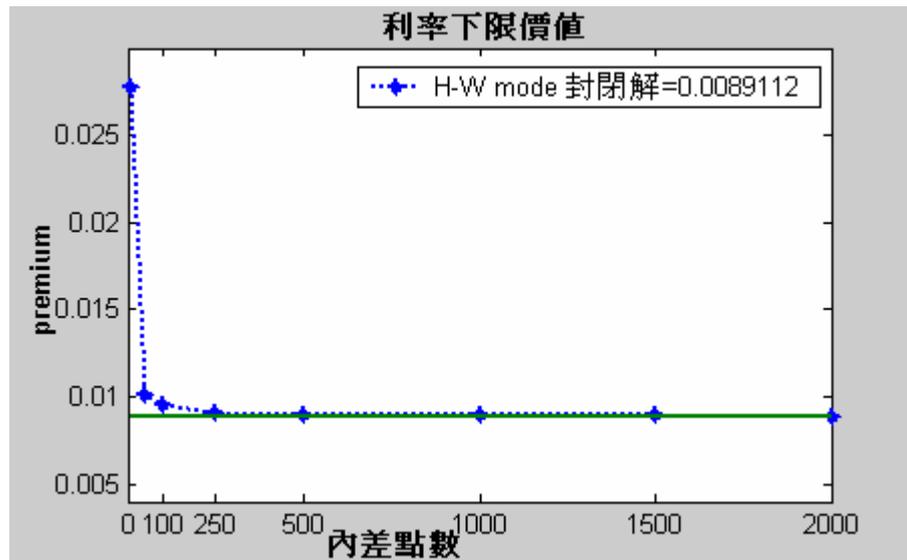


圖 5.2 利率下限公式解與三元利率樹評價之價格收斂行為



小結：

根據理論，當利率樹的切割期數不斷增加， Δt 不斷地趨近於零，則封閉解與利率樹之數值解，將會收斂在一起。從上方兩張圖可知，本文所採用的利率樹數值方法，在切割點(內差點數)增加時，不論是 Vasicek 模型、CIR 模型或是 H-W 模型，可以得到與零息債券為標的的利率下限公式解的價值，二者趨於一致，即數值解會慢慢逼近其公式解。當均衡模型之二元利率樹切割期數達 250 左右時，利率下限數值解，精確度已經達到小數第三位。至於無套利模型之三元利率樹切割期在 500 時，也收斂至非常精確的數值。另外，由表 5-2、表 5-3，可知誤差值會隨著利率樹切割期數增加，而產生逐漸遞減的情形。因此，公式解與利率樹之數值方法的價格收斂行為，與理論的預期相符合。

本節在分析數值解的誤差時，都是以公式解作為比較的基礎。但在多數情況下，公式解往往並不存在。故如何判斷求出的數值解是否合理、正確，成為一個棘手的問題。從理論上可以得知，就利率樹而言只要切割期數趨近無窮大，則模擬的價格期望值必然會收斂到理論價格。但實際操作時，只能切割有限次數，因此切割的次數到達多少才能將誤差降低到可接受的範圍內，才是主要問題。一般作法是先找出一個

具有公式解的問題，以模擬的方式觀察切割的誤差隨著切割次數增加時的變化情形，以供參考。

二、美式利率下限與歐式利率下限

利率樹相較蒙地卡羅方法，除了觀念簡單易懂，容易使用之外，還可應用於美式選擇權的評價。本節除了分析歐式利率下限，另外，也加進美式利率下限來加以分析比較。

表 5-4 美式利率下限與歐式利率下限之比較表

| N = 100 利率變異數 | 以零息債券為標的 | | |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | Vasicek 模型 | | |
| | 歐式公式解 | 美式 binomial | 歐式 binomial |
| 0.01 | 0.0081708531356 | 0.008140960510 | 0.008140960510 |
| 0.02 | 0.0081739726037 | 0.0081594495050 | 0.0081594495050 |
| 0.03 | 0.0084170307045 | 0.0082668525933 | 0.0082668506329 |
| 0.04 | 0.008654133886 | 0.0085227639225 | 0.0085224612493 |
| 0.05 | 0.0089267195224 | 0.0088782005065 | 0.0088742411966 |
| 0.06 | 0.00950828012 | 0.0093800996346 | 0.0093608921623 |
| 0.07 | 0.0101721384530 | 0.0099316759876 | 0.0098758532889 |
| 0.08 | 0.0112523933446 | 0.0105156738997 | 0.0103942329910 |
| 0.09 | 0.0113567834065 | 0.0111786970683 | 0.0109598934705 |
| 0.1 | 0.0121796921031 | 0.0119636239267 | 0.0116145611056 |

(本金=1, $\mu=0.061327$, $\sigma=1.6292$, $\lambda=0.039542$, $r_0=0.06$, 內差點數=100)

在公式解(Floor)、二項式美式利率下限(American Floor)與二項式歐式利率下限

(European Floor)之比較下，由上方表 5-4 結果可以得出以下三點結果：

- 1、不論是何種利率商品(Floor、American Floor、European Floor)，都會隨著代入的短期利率波動度()愈大，其利率下限之權利金也愈大，此符合一般選擇權理論。
- 2、不論短期利率波動()為何，美式利率下限價值恆大於等於歐式利率下限價值。主要是由於美式選擇權比歐式選擇多了提前執行的權利。
- 3、隨著利率波動程度愈大，美式選擇權與歐式選擇權之差異愈大。



第三節 三元利率樹之數值分析

一、三元利率樹原理

本文假設市場上的利率期間結構為 Vasicek Model 的利率模型 $dr = \mathbf{b}(m-r)dt + \mathbf{s} \cdot dz$ 所產生的利率期間結構 $R(t,s) = -\frac{1}{s-t} \ln P(t,s,r)$ ，將前述所估的參數值帶入求解，其 σ 等於 1.6292； ρ 等於 0.039542；假設 N 等於 10。因此，將建構一個一年期，切割數為 10 期的利率樹。

第一階段，首先先求出 σr ，直接代入公式，可求出 $\Delta r = \mathbf{s} \sqrt{3 \times \Delta t} = 2.17\%$ ，之後再建構出第一階段的利率樹，例如 $r^*(0,0) = 0$ ， $r^*(1,0) = 0$ ， $r^*(1,1) = 0 + 1 \times \Delta r = 2.17\%$ ， $r^*(1,1) = 0 - 1 \times \Delta r = -2.17\%$ 。其餘節點的求法依此類推。

第二階段，先求出 j_{\max} 。由 Hull-White 的定義可知， j_{\max} 是取大於 $0.1835 / (\mathbf{b} \times \Delta t) = 1.11263$ 的最小整數，所以，經過計算 j_{\max} 等於 2，而 j_{\min} 等於

$-j_{\max} = -2$, $\Delta t = 1/n = 1/10 = 0.1$ 。接著再來求出節點變化的機率，在節點(0,0)上的上升機率，代入公式後為：

$$\frac{1}{6} + \frac{\mathbf{b}^2 j^2 \Delta t^2 - \mathbf{a} \times j \times \Delta t}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1.1217^2 \times 0^2 \times 0.125^2 - 1.1217 \times 0 \times 0.125}{2} = 0.1666$$
，其餘

的機率以此類推。另外，接著再求出 $Q_{i,j}$ 與 $q(i)$ 。由定義知， $Q_{0,0} = 1$ ，

$q(0) = r(0)$ ；其中 $r(0)$ 可由市場假設的利率期間結構 $R(t,s) = -\frac{1}{s-t} \ln P(t,s,r)$ ，且

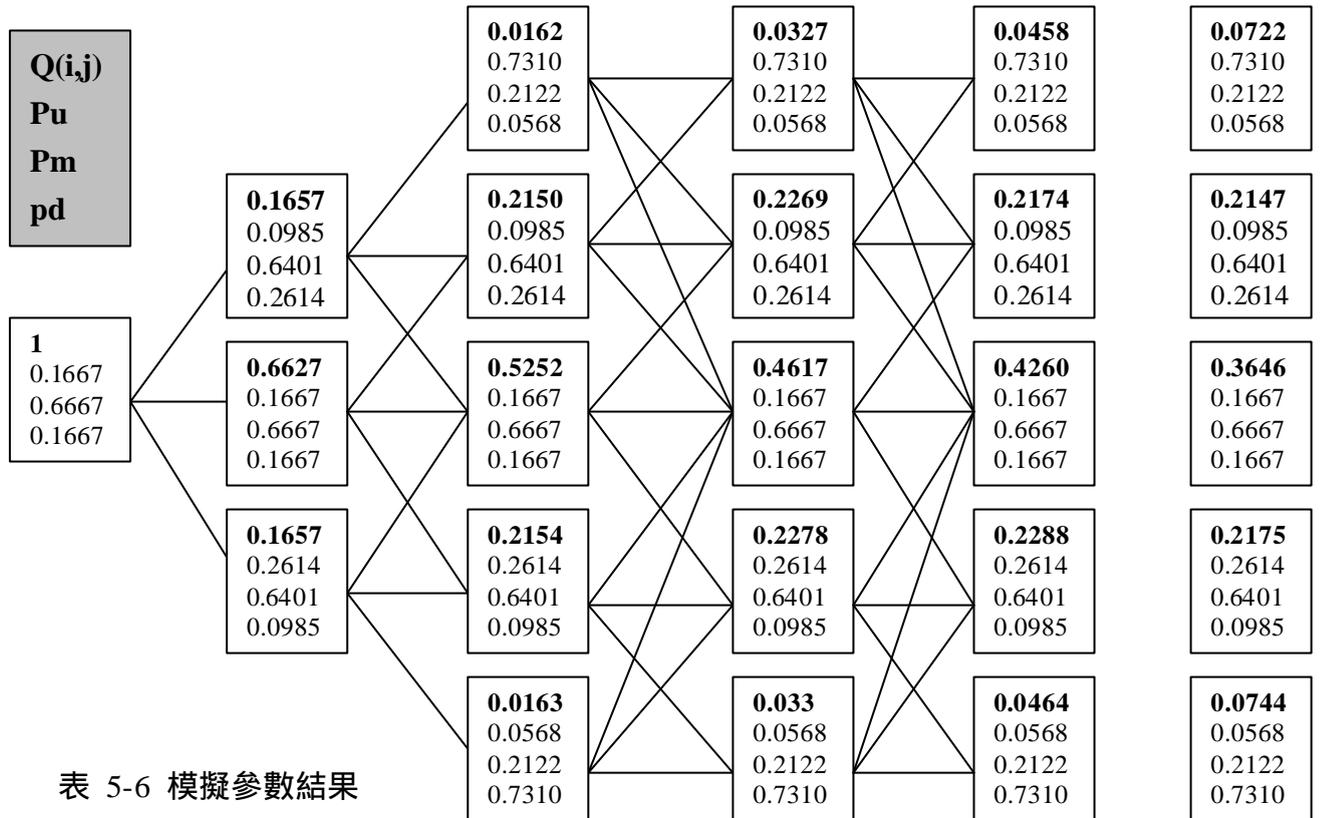
$P(t,s,r) = A(t,s) \times e^{-B(t,s)r}$ 求得， $r(0) = 6\%$ ， $Q_{1,1} = \frac{1}{6} e^{-6\% \times 0.1} = 0.1657$ 。同樣地，

$Q_{1,0} = 0.6627$ ， $Q_{1,-1} = 0.1657$ 。

之後，再透過 $Q_{1,-1} \times e^{-(q_1 + \Delta r)} + Q_{1,0} \times e^{-q_1} + Q_{1,1} \times e^{-(q_1 - \Delta r)} = e^{y_2 \times \Delta t}$ ，可反求算出 q_1 ，代入第一階段的利率樹(r*-tree)，便可求出第二階段的利率樹(r-tree)。

透過電腦快速運算，即可求得出，使用 $dr = (q(t) - \mathbf{b} \cdot r) \times dt + \mathbf{s} \cdot dz$ 模型下的三元利率樹表。此例中，所計算出來的利率限值為 0.002774 表格 5-5，為 state price tree 以及 probability tree。下方表格 5-7 則為利率結構樹，及零息公債與歐式利率下限結構樹。

表 5-5 三元利率樹下所建構的 state price tree



| I | 第 0 期 | 第 1 期 | 第 2 期 | 第 3 期 | 第 4 期 | 第 5 期 | 第 9 期 |
|------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| P(i) | | 0.9940 | 0.9881 | 0.9822 | 0.9763 | 0.9704 | 0.9417 |
| SQ | 1 | 0.9940 | 0.9881 | 0.9822 | 0.9744 | 0.9676 | 0.9434 |
| (i) | 6% | 6.01% | 6.01% | 4.13% | 3.36% | 2.78% | 1.85% |

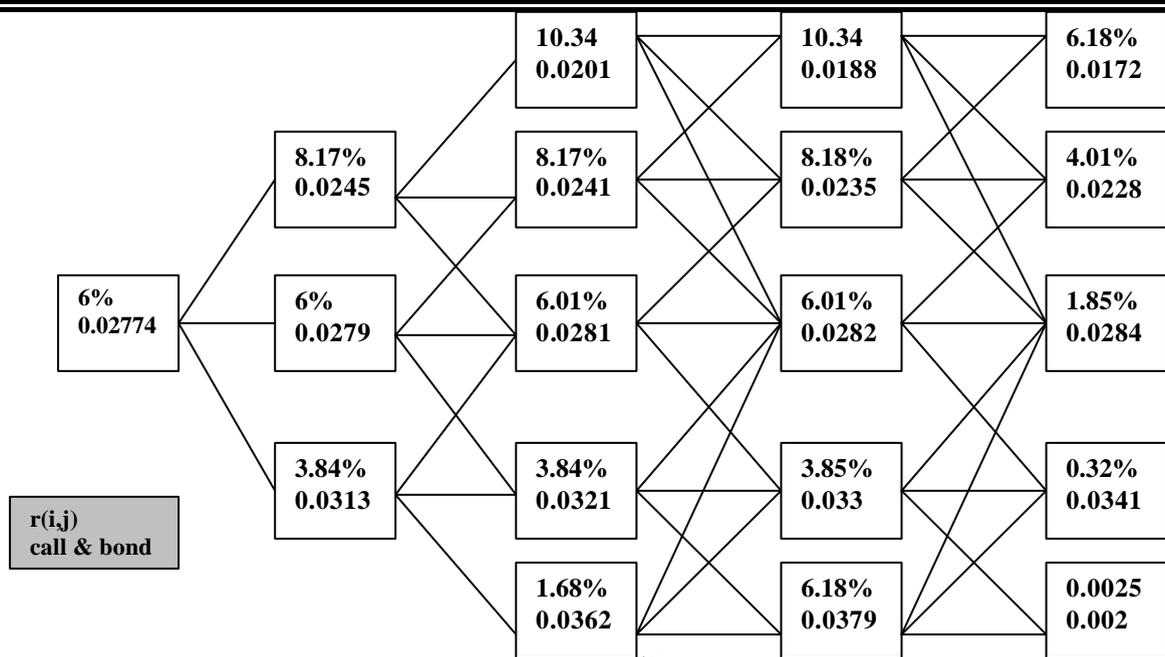


表 5-7 零息債券與歐式利率下限結構樹

二、結合蒙地卡羅模擬與三元利率樹

為了評價路徑相依之利率下限，則必須將蒙地卡羅模擬加以修改，使其模擬出的利率隨機過程能與市場一致，為了達到這個目的，本節將透過結合蒙地卡羅模擬與利率樹的方式，使蒙地卡羅模擬所產生的路徑能與市場一致。實際的作法是先建構一個與市場利率期間結構完全一致的利率樹，再從利率樹上隨機抽樣，產生所需的路徑。

由於蒙地卡羅模擬造成的估計誤差太大，因此必須採用一些技巧使模擬的誤差降低到可接受的範圍，本文採用的方法為對消變異。由表 5-8 及圖 5-3 為原始蒙地卡羅模擬與對消變異的蒙地卡羅模擬，在利率樹上進行抽樣所得到的選擇權價格，隨著模擬次數的增加，數值解的收斂情形。假設選擇權的到期日為半年，標的債券到期日為 1 年，執行利率為 4%，本金為 1， σ 為 1.6292； r 為 0.039542，利率樹切割期數為 200 期，利用三元利率樹所求出每一元面額公司債利率下限價值的價格為 0.0091911。

由表 5-8 及圖 5-3 可知，使用對消變異後，隨著模擬次數的增加，由 10 到 300 之間，其誤差有明顯地變小，收斂的速度也加快許多。因此，在固定切割期數為 200 後，隨著模擬次數的增加，以原始的蒙地卡羅模擬再加上對消變異的蒙地卡羅模擬，會明顯地優於原始的蒙地卡羅模擬結果。

表 5-8 原始的蒙地卡羅模擬與對消變異之數值解

| N=200 | Standard Error | | Call Premium | | |
|-------|----------------|-------------|---------------|-------------|-----------|
| | Antithetic MC | Original MC | Antithetic MC | Original MC | Tree |
| 10 | 0.0017383 | 0.0037264 | 0.0084563 | 0.018716 | 0.0091911 |
| 40 | 0.001286 | 0.0014738 | 0.011575 | 0.019333 | 0.0091911 |

| | | | | | |
|-----|------------|------------|-----------|----------|-----------|
| 50 | 0.0010578 | 0.0011194 | 0.0099152 | 0.01512 | 0.0091911 |
| 60 | 0.0010312 | 0.0011421 | 0.011219 | 0.016835 | 0.0091911 |
| 80 | 0.00079785 | 0.00098725 | 0.010514 | 0.016751 | 0.0091911 |
| 100 | 0.00071405 | 0.00079041 | 0.0078513 | 0.014935 | 0.0091911 |
| 120 | 0.00070287 | 0.00086025 | 0.010268 | 0.01803 | 0.0091911 |
| 140 | 0.00062366 | 0.00069014 | 0.010086 | 0.017065 | 0.0091911 |
| 160 | 0.00058541 | 0.00065531 | 0.0093583 | 0.017139 | 0.0091911 |
| 180 | 0.00054553 | 0.00067888 | 0.0095695 | 0.017523 | 0.0091911 |
| 200 | 0.00054011 | 0.00062306 | 0.010327 | 0.016936 | 0.0091911 |
| 220 | 0.00050909 | 0.00055493 | 0.0097211 | 0.017043 | 0.0091911 |
| 240 | 0.00044704 | 0.00051003 | 0.0086551 | 0.016626 | 0.0091911 |
| 260 | 0.00043955 | 0.00053567 | 0.0085626 | 0.016184 | 0.0091911 |
| 280 | 0.00042563 | 0.00048398 | 0.0092785 | 0.016911 | 0.0091911 |
| 300 | 0.00043031 | 0.00044706 | 0.0090556 | 0.016568 | 0.0091911 |

註：Antithetic MC：Antithetic Monte Carlo, Original MC：Original Monte Carlo

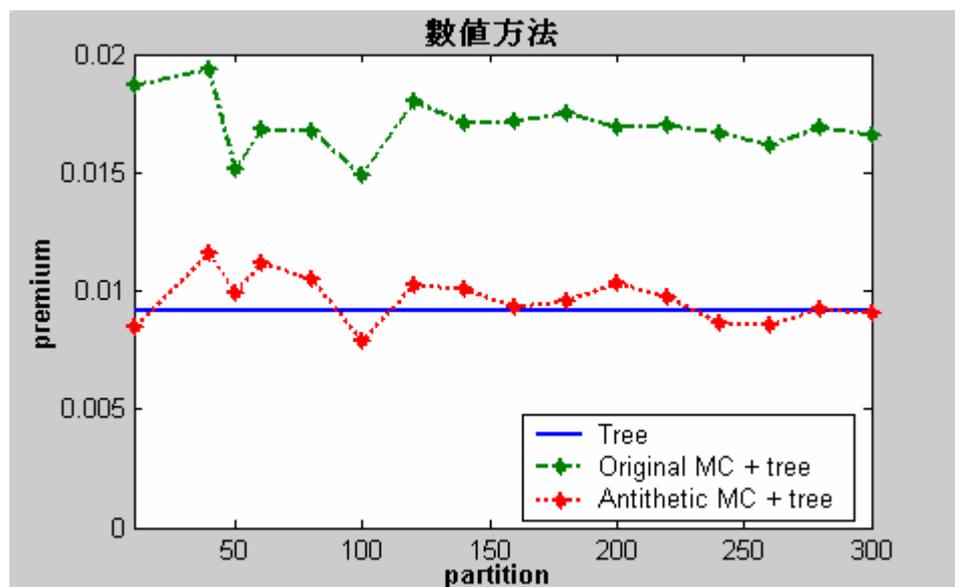


圖 5.3 蒙地卡羅模擬與對消變異

另外，為了評估原始的蒙地卡羅的估計標準誤，本文的作法是，不斷地重複的蒙地卡羅的次數，即每求出 N 條路徑後，取一個平均數，稱為 1 次蒙地卡羅試驗模擬。求出估計值，最後求出這些估計值的標準差。本文假設模擬次數為 1000 次，表 5-9 為重複做 1000 次的蒙地卡羅模擬，並依不同利率樹切割點(由 40~240)所得出結果。

由結果顯示出，對消變異相對原始的蒙地卡羅的數值解，較易於收斂於三元利率樹數值解，切割期數在 80 期左右即可收斂至可接收的精確度，而且所模擬出來的標準差也相對較小。因此，在固定模擬次數為 1000 次下，隨著切割期數的增加，以原始的蒙地卡羅模擬再加上對消變異的蒙地卡羅模擬，會明顯地優於原始的蒙地卡羅模擬。所模擬結果如下：

表 5-9 原始的蒙地卡羅模擬與對消變異的數值解

| partition =1000 | Standard Error | | Call Premium | | |
|--------------------|----------------|---------------|--------------|---------------|-------------|
| | N | Antithetic MC | Original MC | Antithetic MC | Original MC |
| 40 | 0.00025543 | 0.00026321 | 0.010616 | 0.021424 | 0.010466 |
| 50 | 0.00024586 | 0.0002709 | 0.010827 | 0.020628 | 0.010176 |
| 60 | 0.0002346 | 0.0002691 | 0.010385 | 0.020495 | 0.0099741 |
| 80 | 0.00023802 | 0.0002652 | 0.009867 | 0.020018 | 0.0096969 |
| 100 | 0.00023702 | 0.00027142 | 0.0099921 | 0.019227 | 0.0095346 |
| 120 | 0.00024333 | 0.00026941 | 0.0095962 | 0.019 | 0.0094238 |
| 140 | 0.00023399 | 0.000269 | 0.0097853 | 0.018479 | 0.009335 |
| 160 | 0.0002368 | 0.00026358 | 0.0093869 | 0.017895 | 0.0092763 |
| 180 | 0.00023052 | 0.00027926 | 0.0092435 | 0.017604 | 0.0092311 |

| | | | | | |
|-----|------------|------------|-----------|----------|-----------|
| 200 | 0.00023688 | 0.00026882 | 0.0096502 | 0.016649 | 0.0091911 |
| 220 | 0.00024469 | 0.00026161 | 0.0096933 | 0.016124 | 0.0091562 |
| 240 | 0.00023234 | 0.00026024 | 0.00972 | 0.015683 | 0.009135 |

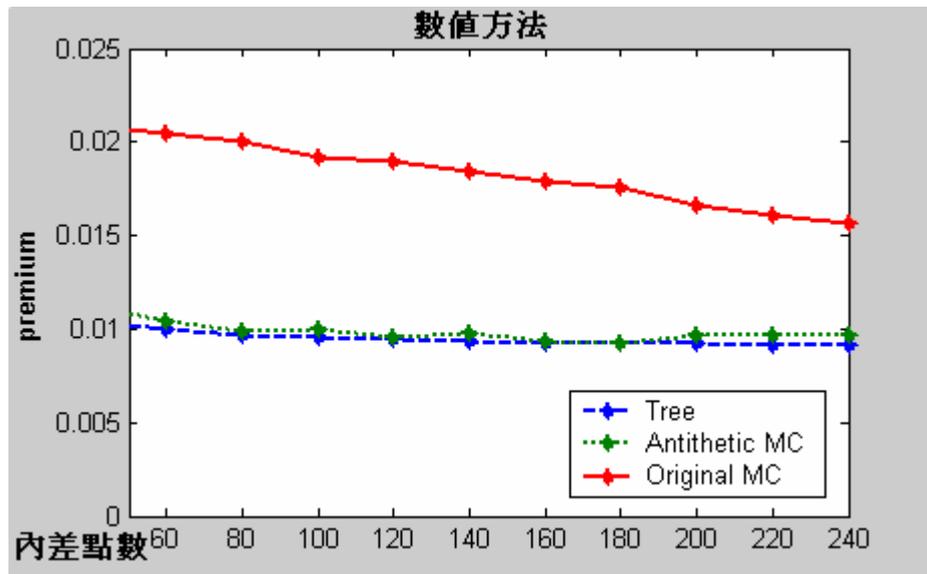


圖 5.4 原始的蒙地卡羅模擬與對消變異的數值解

第四節 敏感度分析---權利金行為及參數分析

從利率模型來看，影響利率下限價值的因素至少有執行價格(K)、距到期期限(T)、短期利率之波動性()，利率的調整速度()，本節即針對幾個相關因素，來進行敏感度分析。

一、二項結構樹評價之參數分析--- Vasicek model

(一)、利率調整速度() VS 距到期日長短(T)

假設其他情況不變下，變動距到期期限於半年到 1 年之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|---------|--------|-----|
| μ | β | r | T | K | N(內差點) | |
| 0.039542 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 ~ 1 | 0.9610 | 100 |

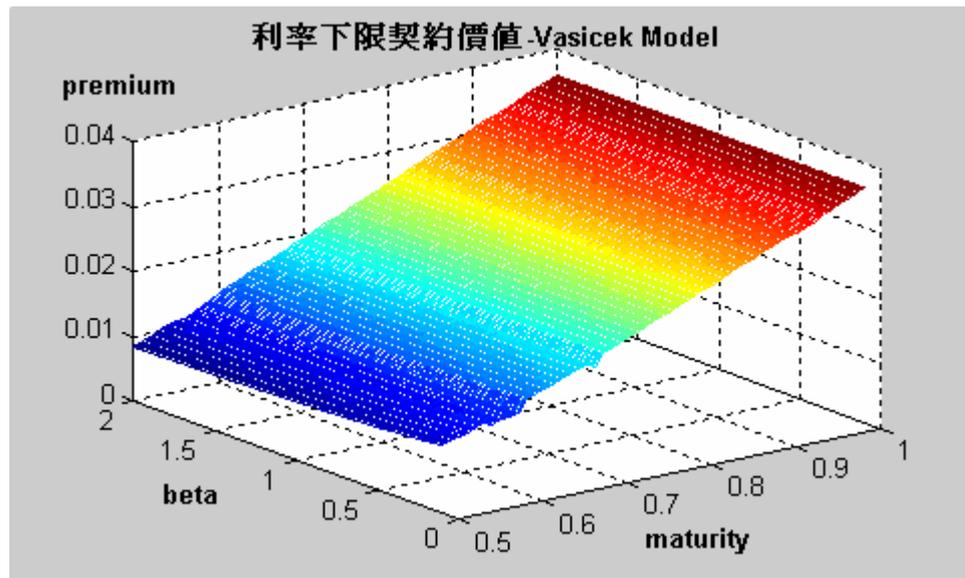


圖 5.5 Vasicek Model 中 maturity 與 beta 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論調整速度較快或較慢時，利率下限價值隨距到期日之增加而增加的幅度較大，速度也較快。這是由於含有時間價值的關係，到期期限愈長，權利金會隨距到期日期限之增加而增加。
- 2、不論距到期日較短或較長時，利率下限價值隨著調整速度之增加而減少的幅度較小，速度也較慢。

調整速度參數，也就是均數回復參數，代表瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度，因此參數值愈大，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率而導致利率波動程度下降所致，使得利率下限價值與均數回歸參數呈負向變動關係。

(二)、利率調整速度() VS 短期利率波動性()

假設參其他情況不變下，變動短期利率波動性於 0.01 到 0.5 之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|--------|-----------|
| | μ | | r | T | K | N (內差點) |
| 0.01~0.5 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 | 0.9610 | 100 |

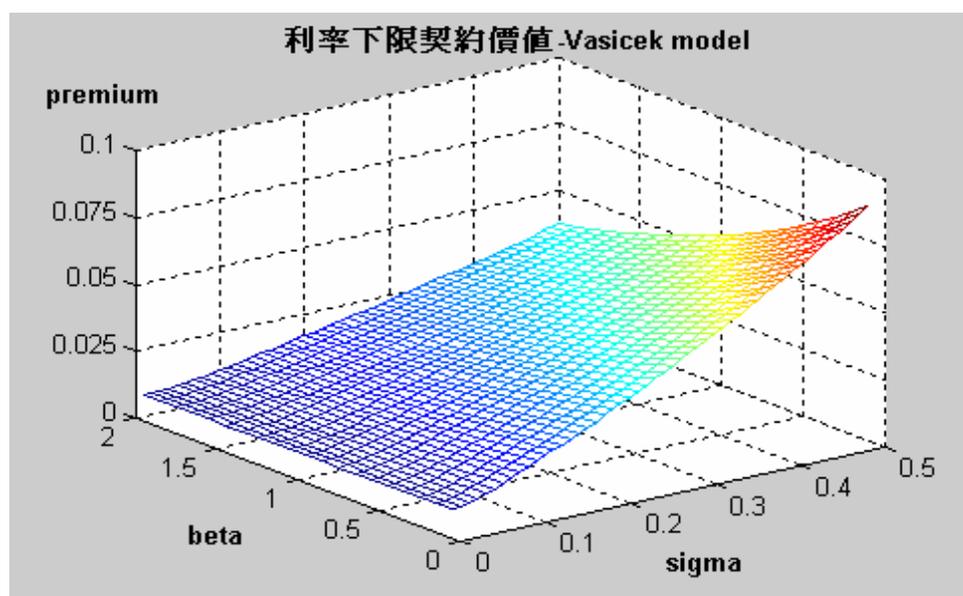


圖 5-6 Vasicek Model 中 sigma 與 beta 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當調整速度較慢時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度較大，速度也較快。反之，當調整速度較快時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度較小，速度也較慢。
- 2、不論短期利率之波動性較大或較小時，利率下限價值隨著調整速度之增加而減少的幅度都相當小，速度也較慢。

3、當短期利率波動性增加時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度，遠高於因調整速度之增加而減少的幅度。因此，在 Vasicek 模型中，短期利率之波動性對利率下限價值，相較調整速度具有影響力。

(三)、利率調整速度()VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.92 到 1 之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|--------|-----|
| μ | β | r | T | K | N(內差點) | |
| 0.039542 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 | 0.92~1 | 100 |

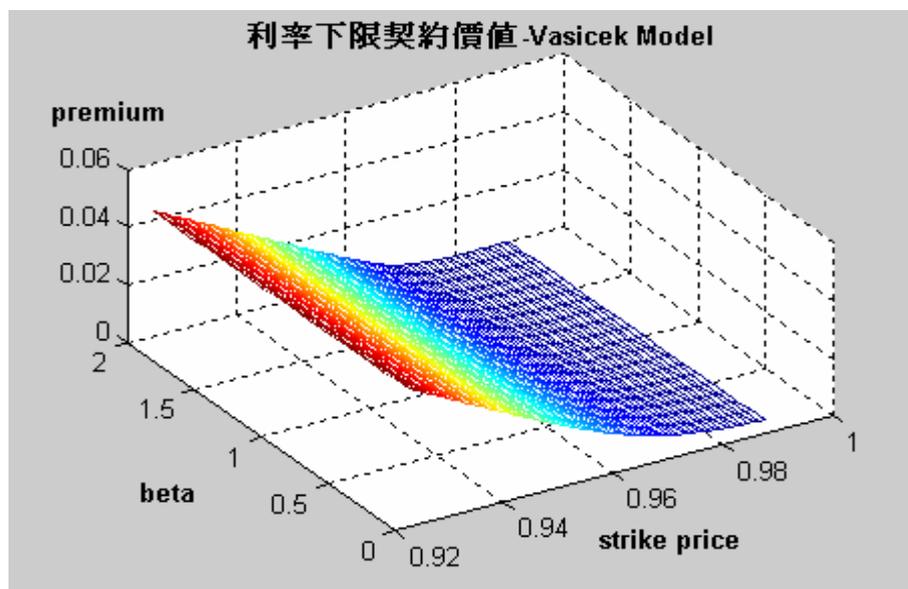


圖 5-7 Vasicek Model 中 strike price 與 beta 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論當調整速度大小時，利率下限價值隨執行利率之上升而大幅的下降，而且速度很快。

2、不論執行價格較大或較小時，利率下限價值隨著調整速度之變動而沒有太大的變化。通常，隨著調整速度的增加，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率而導致利率波動程度下降，因此，利率下限價值會跟著下降。

(四)、距到期日(T) VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.92 到 1 之間，以及距到期限由半年到 1 年之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-------|--------|--------|
| s | μ | β | r | T | K | N(內差點) |
| 0.039542 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5~1 | 0.92~1 | 100 |

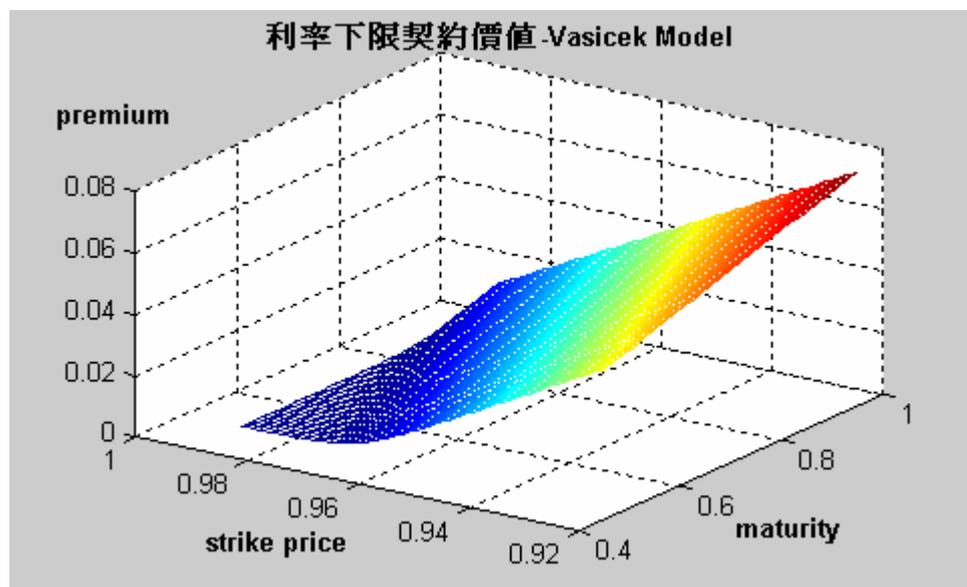


圖 5-8 Vasicek Model 中 strike price 與 maturity 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當執行價格較低時，利率下限價值隨距到期限之增加而增加的幅度較大，速度也較快。反之，當執行價格較高時，利率下限價值隨距到期限之增加而增加的幅度較小，速度也較慢。

- 2、不論距到期日長或短時，利率下限價值隨執行價格之上升而減少的幅度較大，速度也較快。

(五)、短期利率波動性() VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.92 到 1 之間，以及短期利率之波動性由 0.01 到 0.5 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|--------|--------|
| s | μ | β | r | T | K | N(內差點) |
| 0.01~0.5 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5 | 0.92~1 | 100 |

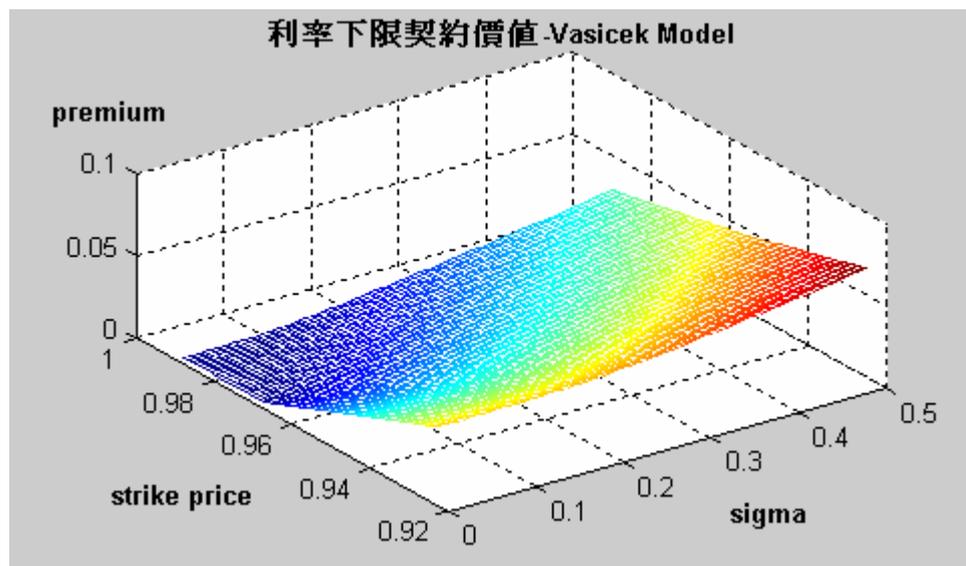


圖 5-9 Vasicek Model 中 strike price 與 sigma 變動之利率下限立體圖分析：

- 1、當短期利率波動幅度(Volatility)，即歷史之市場利率波動性極大時，其利率下限價值會較高。反之，市場利率平穩時，其計算出之利率下限價值也較低。因此，隨著短期利率波動性增加，利率下限價值也跟著上升。

- 2、當執行價格愈低時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加，且其增加的幅度比較明顯。反之，當執行價格愈高時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加，但其增加的幅度較小。
- 3、不論短期利率波動性大或是小時，利率下限價值隨著執行價格之上升而下降，而且其增加的幅度大，速度也較快。

(六)、短期利率變異數() vs 距到期日(T)

假設其他情況不變下，變動距到期期限由半年到 1 年之間，以及短期利率之波動性由 0.01 到 0.5 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|--------|------|-------|--------|--------|
| | μ | | r | T | K | N(內差點) |
| 0.01~0.5 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5~1 | 0.9610 | 100 |

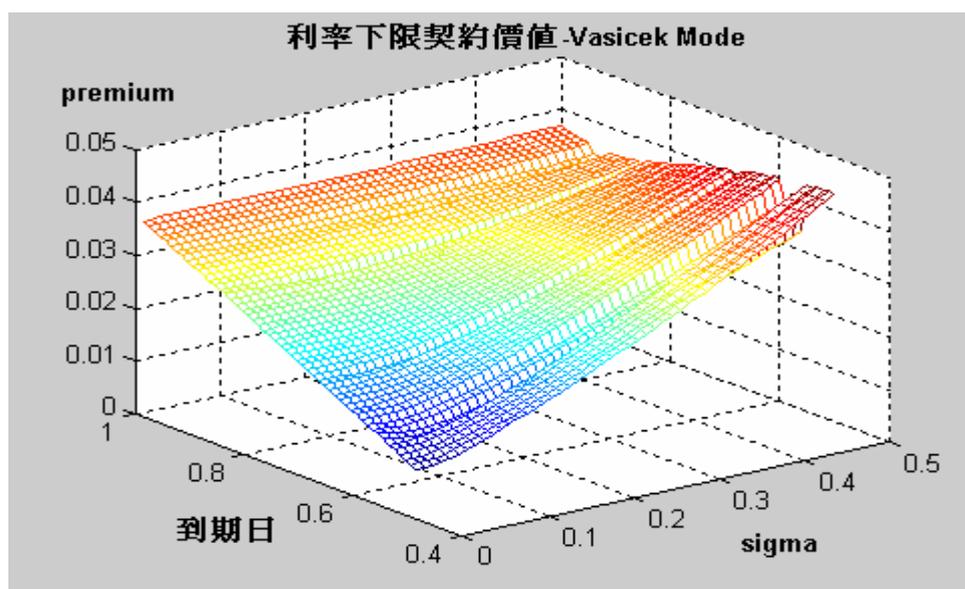


圖 5-10 Vasicek Model 中 maturity 與 sigma 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當距到期期限較短時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加的幅度較大，且速度較快。反之，當距到期期限較長時，隨著短期利率波動性的變動，利率下限價值不會有太大的變化。
- 2、當短期利率之波動性較低時，利率下限價值隨距到期期限之增加而增加的幅度大，而且速度較快。反之，當短期利率之波動性較高時，利率下限價值不會隨距到期期限之增加而增加。

二、二項結構樹評價之參數分析--- CIR model

(一)、利率調整速度() VS 距到期日長短(T)

假設其他情況不變下，變動距到期期限於半年到 1 年之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | | |
|------------|----------|----------|---------|------|---------|--------|-----|
| | μ | β | r | T | K | N(內差點) | |
| | 0.039542 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 ~ 1 | 0.9610 | 100 |

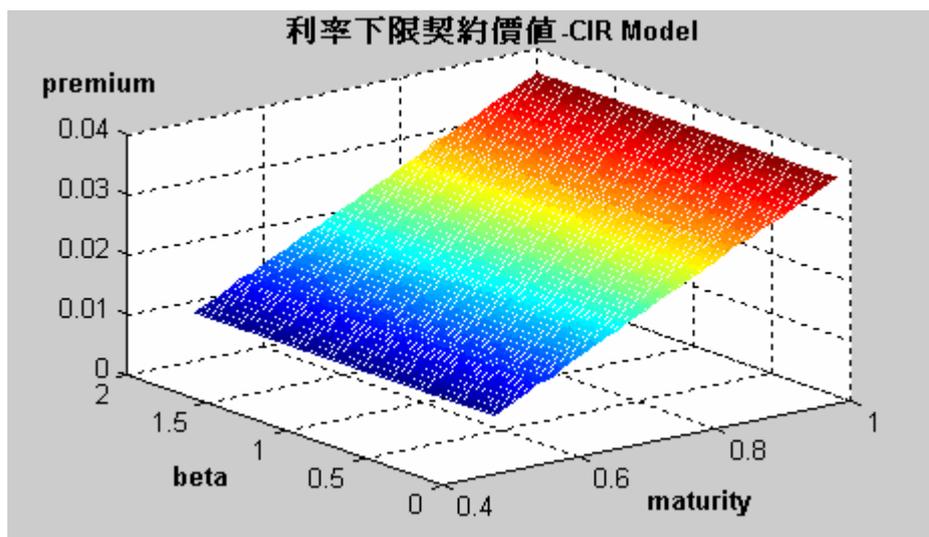


圖 5-11 CIR Model 中 beta 與 maturity 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論調整速度較快或較慢時，利率下限價值隨距到期日之增加而增加的幅度較大，速度也較快。這是由於含有時間價值的關係，到期期限愈長，權利金會隨距到期日期限之增加而增加。
- 2、不論距到期日較短或較長時，利率下限價值隨著調整速度之增加而減少的幅度較小，速度也較慢。

調整速度參數，就也是均數回復參數，代表瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度，因此參數值愈大，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率而導致利率波動程度下降所致，使得利率下限價值與均數回歸參數呈負向變動關係。

(二)、利率調整速度() VS 短期利率波動性()

假設其他情況不變下，變動短期利率波動性於 0.01 到 0.5 之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|--------|-----|
| s | μ | R | T | K | N(內差點) | |
| 0.01~0.5 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 | 0.9610 | 100 |

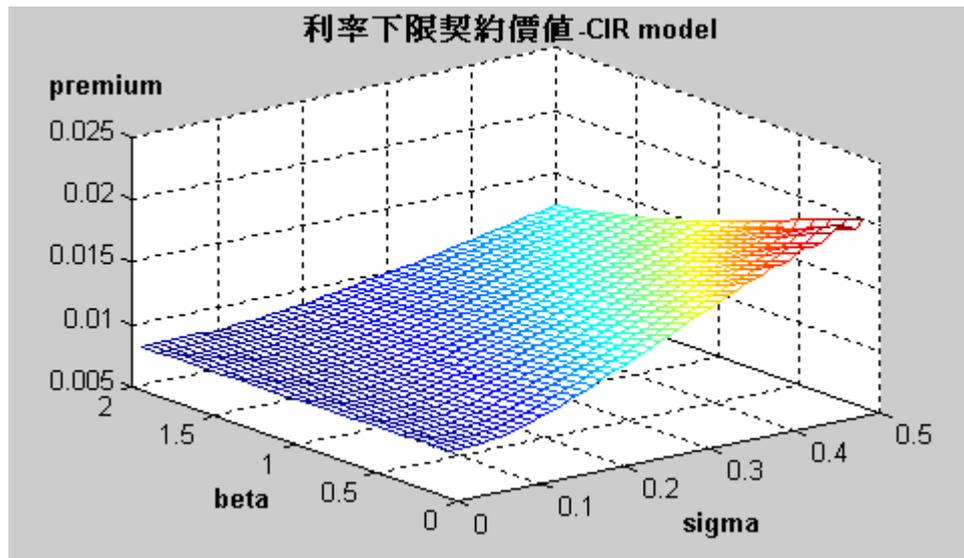


圖 5-12 CIR Model 中 beta 與 sigma 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當調整速度較慢時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度較大，速度也較快。反之，當調整速度較快時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度較小，速度也較慢。
- 2、不論短期利率之波動性較大或較小時，利率下限價值隨著調整速度之增加而減少的幅度都相當小，速度也較慢。
- 3、當短期利率波動性增加時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度，遠高於因調整速度之增加而減少的幅度。因此，在 CIR 模型中，短期利率之波動性對利率下限價值，相較調整速度具有影響力。

(三)、利率調整速度()VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.9610 到 1 之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

利率下限契約參數設定

| | μ | σ | r | T | K | N(內差點) |
|--|----------|----------|---------|------|-----|--------|
| | 0.039542 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 | 100 |

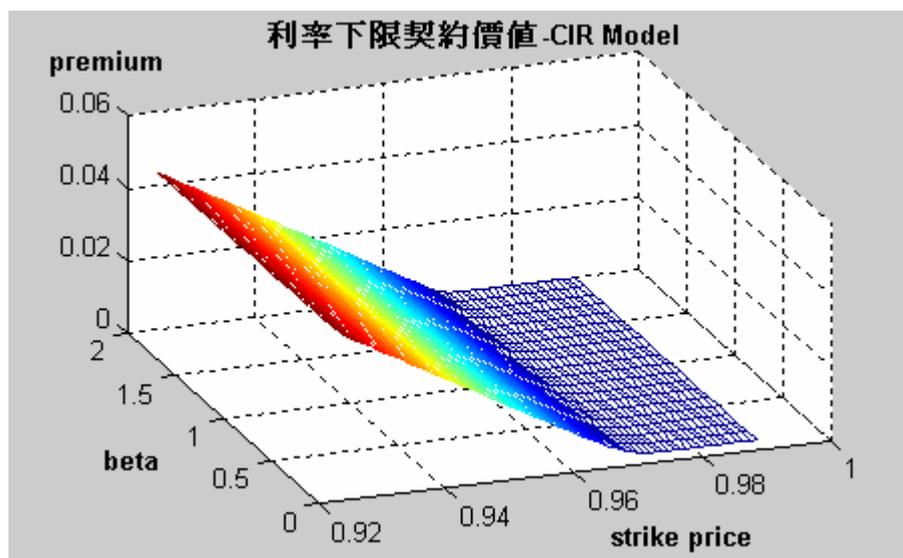


圖 5-13 CIR Model 中 beta 與 strike price 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論當調整速度大小時，利率下限價值隨執行價格之上升而下降的幅度較大，而且速度很快。
- 2、不論執行價格較大或較小時，利率下限價值隨著調整速度之變動而沒有太大的變化。通常，隨著調整速度的增加，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率而導致利率波動程度下降，因此，利率下限價值會跟著下降。

(四)、距到期日(T) VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.9610 到 1 之間，以及距到期期限由半年到 1 年之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

利率下限契約參數設定

| s | μ | β | r | T | K | N(內差點) |
|----------|----------|--------|------|-------|----------|--------|
| 0.039542 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5~1 | 0.9610~1 | 100 |

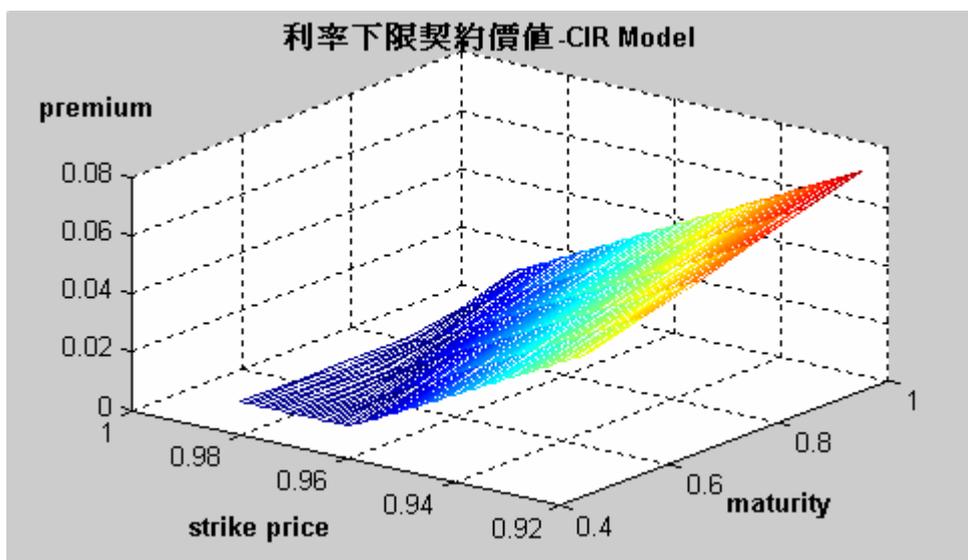


圖 5-14 CIR Model 中 maturity 與 strike price 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當執行價格較低時，利率下限價值隨距到期期限之增加而增加的幅度較大，速度也較快。反之，當執行價格較高時，利率下限價值隨距到期期限之增加而增加的幅度較小，速度也較慢。
- 5、不論距到期期限長或短時，利率下限價值隨執行價格之上升而下降的幅度較大，速度也較快。

(五)、短期利率波動性() VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.9610 到 1 之間，以及短期利率之波動性由 0.1 到 1.5 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

利率下限契約參數設定

| s | μ | β | r | T | K | N(內差點) |
|---------|----------|---------|------|-----|----------|--------|
| 0.1~1.5 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5 | 0.9610~1 | 100 |

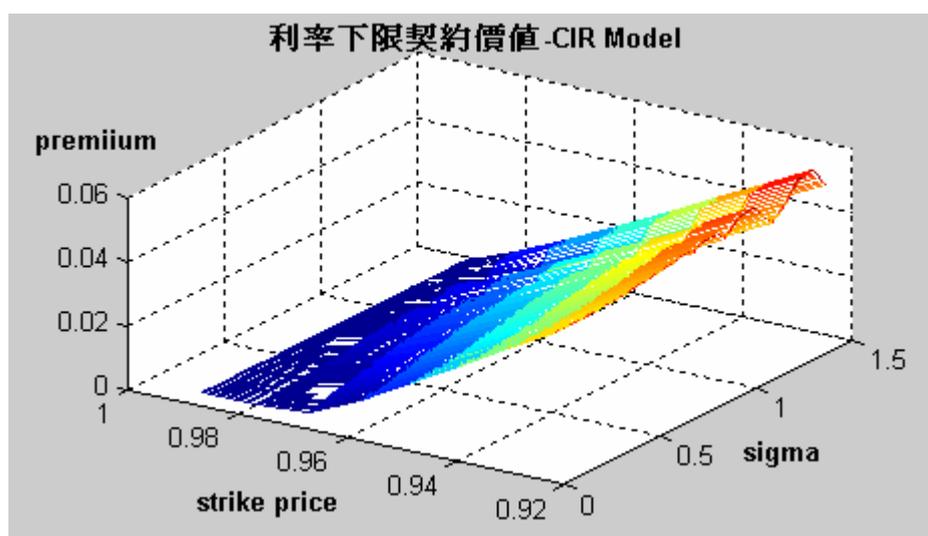


圖 5-15 CIR Model 中 sigma 與 strike price 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當執行價格愈低時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加，但其增加的幅度小，速度也較慢。但是，當執行價格愈高時，利率下限價值幾乎不會隨著短期利率波動性之增加而增加。
- 2、不論短期利率波動性大或是小時，利率下限價值隨著執行價格之上升而下降，而且其下降的幅度大，速度也較快。

(六)、利率變異數() vs 距到期日(T)

假設其他情況不變下，變動距到期期限由半年到 1 年之間，以及短期利率之波動性由 0.1 到 0.9 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|--------|------|-------|--------|--------|
| s | μ | | r | T | K | N(內差點) |
| 0.1~1.5 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5~1 | 0.9610 | 100 |

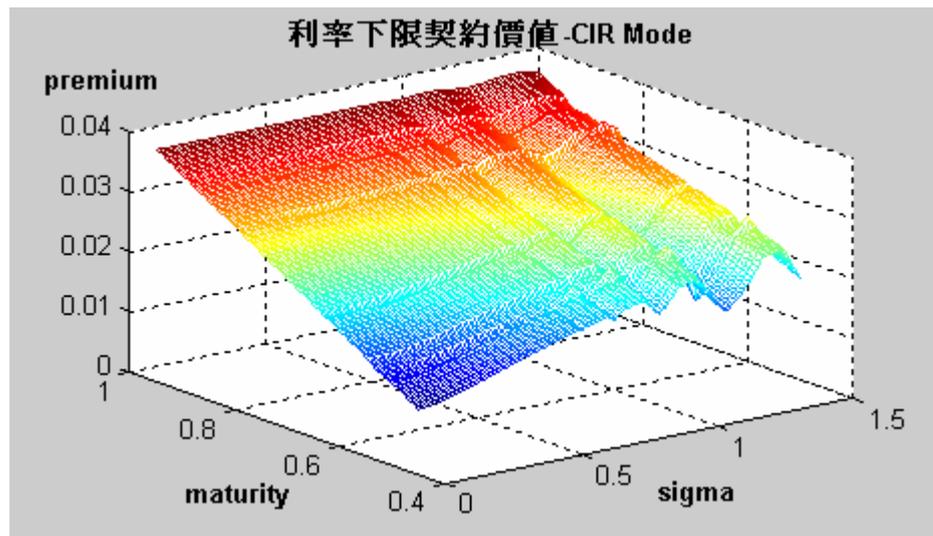


圖 5-16 CIR Model 中 sigma 與 maturity 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當距到期期限較長時，利率下限價值並沒有明顯地隨短期利率波動性之增加而增加。而當愈接近到期日時，利率下限價值會隨短期利率波動性之增加而增加的幅度較大，但速度仍相當慢。
- 2、不論短期利率之波動性較高或較低時，利率下限價值隨距到期期限之增加而增加的幅度大，而且速度較快。

三、三元利率樹評價之參數分析--- Hull - White model

(一)、利率調整速度() VS 距到期日長短(T)

假設其他情況不變下，變動距到期期限於半年到 1 年之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|--------|---------|-------|-----------|--------|-----|
| μ | r | T | K | N(內差點) | | |
| 0.0101 | 0.0601 | 0.1 ~ 2 | 0.059 | 0.5 ~ 0.9 | 0.9610 | 100 |

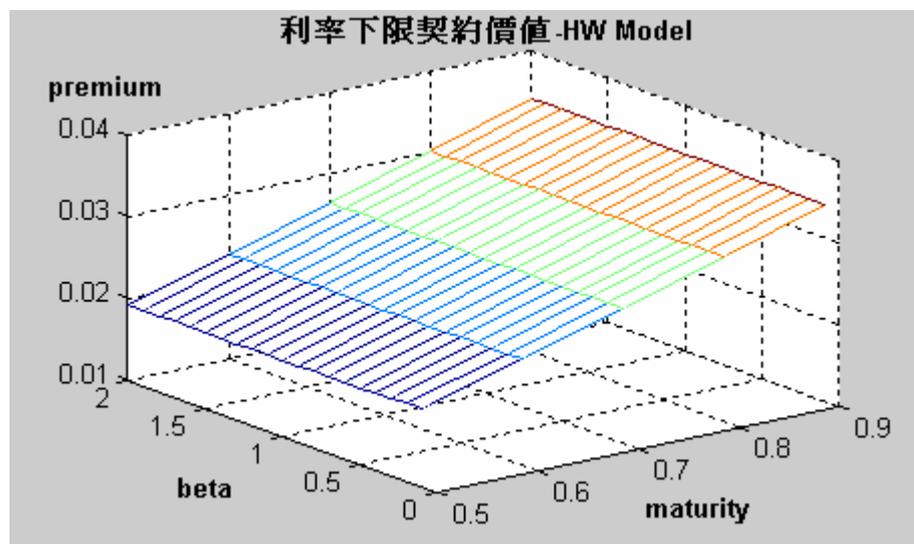


圖 5-17 Hull-White Model 中 beta 與 maturity 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論調整速度較快或較慢時，利率下限價值隨距到期日之增加而增加的幅度較大，速度也較快。這是由於含有時間價值的關係，到期期限愈長，權利金會隨距到期日期限之增加而增加。
- 2、不論距到期日較短或較長時，利率下限價值隨著調整速度之增加而減少的幅度較小，速度也較慢。

調整速度參數，也就是均數回復參數，代表瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度，因此參數值愈大，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率

而導致利率波動程度下降所致，使得利率下限價值與均數回歸參數呈負向變動關係。

(二)、利率調整速度() VS 短期利率波動性()

假設其他情況不變下，變動短期利率波動性於 0.01 到 0.5 之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|--------|-----|
| s | μ | r | T | K | N(內差點) | |
| 0.01~0.5 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 | 0.9610 | 100 |

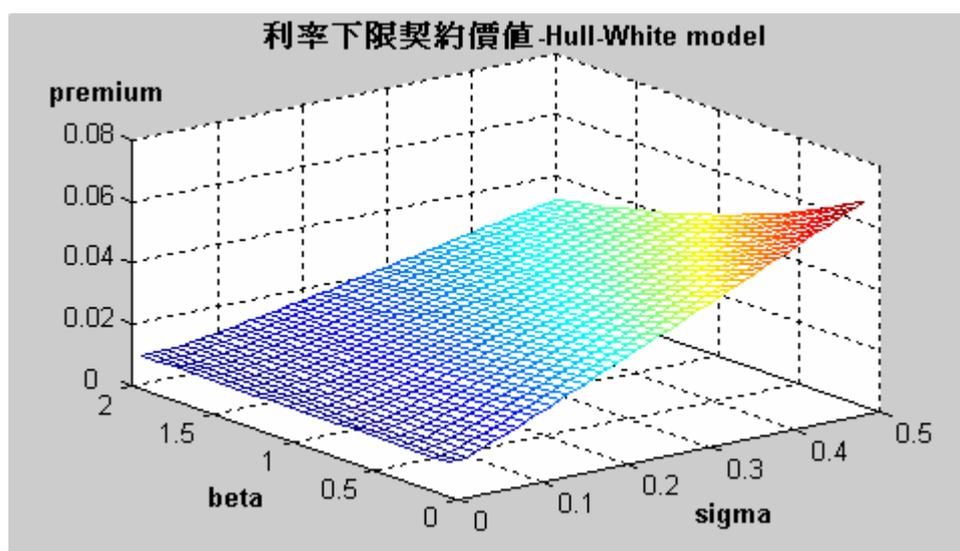


圖 5-18 Hull-White Model 中 beta 與 sigma 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當調整速度較慢時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度較大，速度也較快。反之，當調整速度較快時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度較小，速度也較慢。

- 2、不論短期利率之波動性較大或較小時，利率下限價值隨著調整速度之增加而減少的幅度都相當小，速度也較慢。
- 3、當短期利率波動性增加時，利率下限價值因短期利率波動性的增加而增加的幅度，遠高於因調整速度之增加而減少的幅度。因此，在 Hull-White 模型中，短期利率之波動性對利率下限價值，相較調整速度具有影響力。

(三)、利率調整速度() VS 執行價格(K)

假設參其他情況不變下，變動執行價格於 0.9610 到 1 年之間，調整速度由 0.1 到 2 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|----------|-----|
| μ | β | r | T | K | N(內差點) | |
| 0.039542 | 0.061327 | 0.1 ~ 2 | 0.06 | 0.5 | 0.9610~1 | 100 |

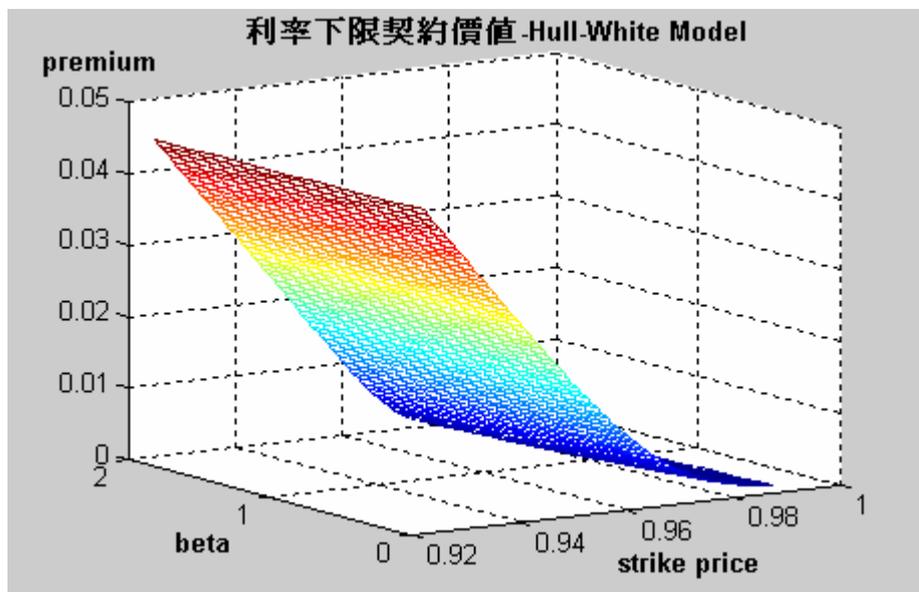


圖 5-19 Hull-White Model 中 beta 與 strike price 變動之利率下限立體圖分析：

- 1、在固定調整速度下，利率下限的價值會隨執行價格的增加而大幅下降，而且下降速度相當快。
- 2、在固定執行價格下，利率下限的價值並沒有隨調整速度而有太大的變化。

(四)、距到期日(T) VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.9610 到 1 之間，以及距到期期限由半年到 1 年之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-------|----------|--------|
| s | μ | β | r | T | K | N(內差點) |
| 0.039542 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5~1 | 0.9610~1 | 100 |

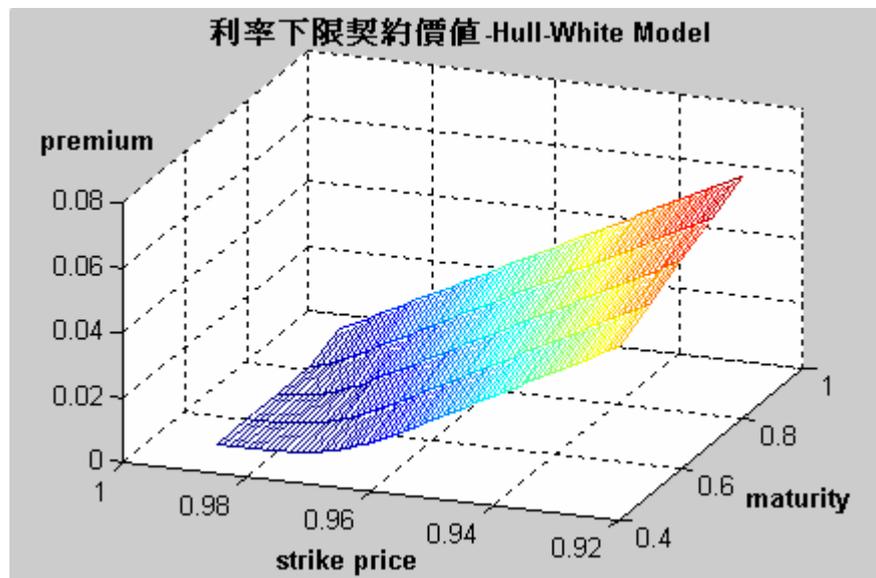


圖 5-20 Hull-White Model 中 maturity 與 strike price 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論執行價格較高或較低時，利率下限價值隨距到期期限之上升而增加的幅度較小，速度也較慢。
- 2、不論距到期期限較長或較短時，利率下限價值隨執行價格之上升而下降的幅度較大，下降速度也較快。

(五)、短期利率波動性() VS 執行價格(K)

假設其他情況不變下，變動執行價格於 0.9610 到 1 之間，以及短期利率之波動性由 0.01 到 0.5 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|---------|------|-----|----------|--------|
| s | μ | β | r | T | K | N(內差點) |
| 0.01~0.5 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5 | 0.9610~1 | 100 |

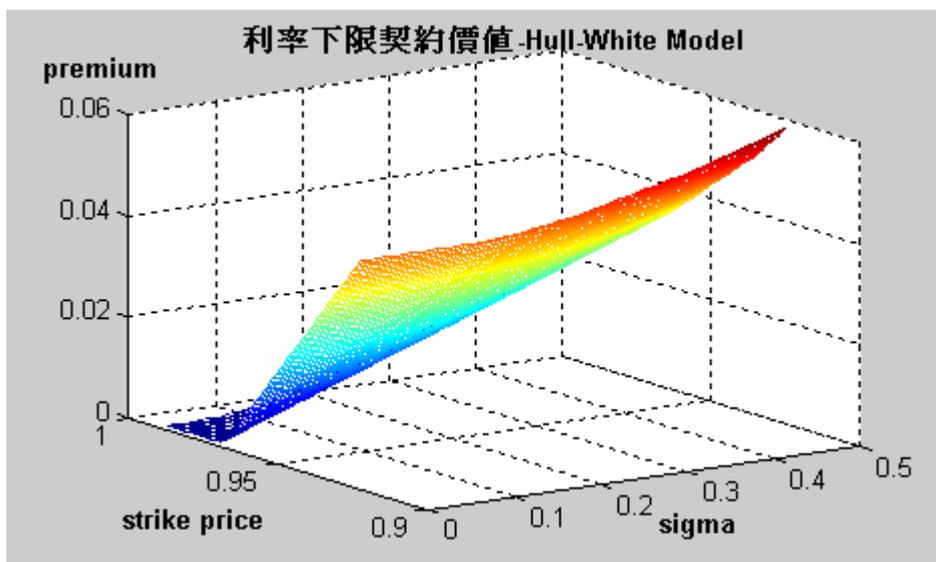


圖 5-21 Hull-White Model 中 sigma 與 strike price 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、不論短期利率波動大或小時，執行價格愈高時，其價值亦隨之愈低。
- 2、當執行價格愈高時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加，且其增加的幅度大，速度也較快。但是，當執行價格愈低時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加，但其增加的幅度較小。

(六)、利率變異數() vs 距到期日(T)

假設其他情況不變下，變動距到期期限由半年到 1 年之間，以及短期利率之波動性由 0.01 到 0.5 之間，則利率下限價值之變動結果如 3D 圖形所示。

| 利率下限契約參數設定 | | | | | | |
|------------|----------|--------|------|-------|--------|-----|
| s | μ | r | T | K | N(內差點) | |
| 0.001~0.05 | 0.061327 | 1.6292 | 0.06 | 0.5~1 | 0.9610 | 100 |

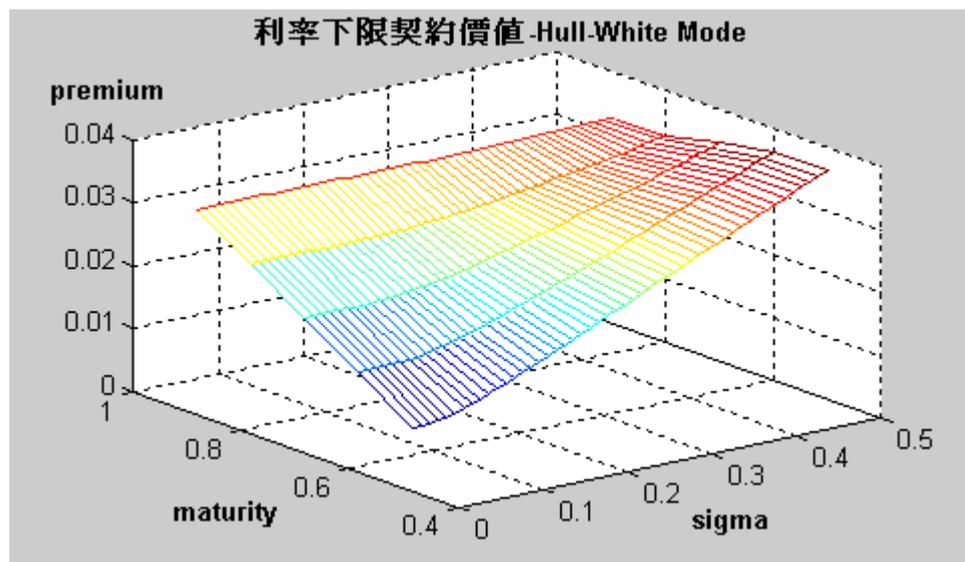


圖 5-22 Hull-White Model 中 sigma 與 maturity 變動之利率下限立體圖

分析：

- 1、當距到期期限較短時，利率下限價值會隨著短期利率波動性之增加而增加的幅度較大，且速度較快。反之，當距到期期限較長時，隨著短期利率波動性的變動，利率下限價值不會有太大的變化。
- 3、當短期利率之波動性較低時，利率下限價值隨距到期期限之增加而增加的幅度大，而且速度較快。反之，當短期利率之波動性較高時，利率下限價值不會隨距到期期限之增加而增加。

<小結>

：調整速度參數，也就是均數回復參數，代表瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度，因此參數值愈大，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率而導致利率波動程度下降所，使得利率下限價值與均數回復參數呈負向變動關係。在本文敏感度分析中，在其他參數假設不變下，利率下限價值並不會隨調整速度的變動而有太大的變化。

k：當 Floor 所定之執行價格愈高時，其利率下限價值會愈低，這是由於執行價格愈高，其選擇權被執行之機率亦較低。

：當短期利率波動幅度大(Volatility)，也就是當歷史之市場利率波動性極大時，其利率下限價值會較高。反之，市場利率平穩時，其計算出之利率下限價值也較低。因此導致利率下限價值與利率波動程度具有正向變動關係。

T：由於含有時間價值的關係，到期期限愈長，利率下限價值會隨距到期日期限之增加而增加。

另外，由上述敏感度分析可知，不論何種利率模型，當愈接近到期日，或是瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度愈慢時，利率上限價值隨短期利率波動程度的增加而會有較明顯的提高。

第六章 結論與建議

第一節 研究結論

本文透過不同的數值方法，包括二項利率樹、三元利率樹、蒙地卡羅模擬，及蒙地卡羅模擬結合三元利率樹等方法，使用 Vasiek model、CIR model 均衡模型與 Hull-White model 無套利模型，來評價利率下限選擇權，綜而言之，本文結論如下：

在本文中，Vasiek model 與 Hull-White extend Vasiek model 分析數值解的誤差時，都是以公式解作為比較的基礎；使用利率樹、蒙地卡羅兩種方法透過模擬次數的增加及切割期數的縮小，均可以逼近其公式解。而在不易求得公式解的 CIR model，從理論上可以得知，只要在利率樹中，切割期數趨近無窮大，或是增加蒙地卡羅模擬次數至趨近無窮大時，則模擬的價格期望值必然會收斂到理論價格。但實際操作時，只能切割模擬有限次數，因此切割的次數及模擬的次數到達多少才能將誤差降低到可接受的範圍內，才是主要問題。一般作法是先找出一個具有公式解的問題，以模擬的方式觀察切割與模擬的誤差，隨著切割與模擬次數增加時的變化情形，以供參考。

在整個評價過程，發現以數值方法來模擬 CIR model 的期望價格，所獲得的每一元面額公司債利率下限價值為 0.008697 最小，而 Hull-White extend Vasiek model 為 0.0089112 則介於中間，Vasiek mode 為 0.00899128 則最大。而且，Hull-White extend Vasiek model 與 Vasiek mode 較為接近。另外，當均衡模型之二元利率樹切割期數達 250 左右時，利率下限數值解，精確度已經達到小數第三位。至於無套利模型之三元利率樹切割期在 500 時，也收斂至非常精確的數值。由此結果可知，誤差值會隨著利率樹切割期數增加，而產生逐漸遞減的情形，公式解與利率樹之

數值方法的價格收斂行為，與理論的預期相符合。

另外，利用利率樹可以評價美式選擇權的優勢，由本文模擬結果得知，不論短期利率的波動程度為何，利率下限之美式選擇權恆大於等於利率下限之歐式選擇權，主要是由於美式買權有可能提前履約。接著，本文為了解決，利率樹無法適合用於路徑相依之利率選擇權的評價，因此，採用了另一種數值方法，即蒙地卡羅模擬結合三元利率樹，來評價路徑相依的利率下限選擇權。但是，由於蒙地卡羅模擬造成的估計誤差太大，因此本文採用對消變異的模擬技巧，來降低誤差到可接受的範圍。本文研究發現，使用對消變異可以使估計的精確度提高，並且更快收斂至三元利率樹之數值解；因此，相當適合用於評價路徑相依之利率選擇權。

最後，針對本文所探討以利率樹來評價三個利率模型，Vasicek model、CIR model 與 Hull-White model 的基礎，假設其他情況不變下，選出執行利率、距到期期限、短期利率之波動性與調整速度等進行敏感度分析，而結果大致與預期吻合。由研究結果發現：

：調整速度參數，也就是均數回復參數，代表瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度，因此參數值愈大，表示瞬間短期利率愈快移向長期平均利率而導致利率波動程度下降所，使得利率下限價值與均數回復參數呈負向變動關係。在本文敏感度分析中，在其他參數假設不變下，利率下限價值並不會隨調整速度的變動而有太大的變化。

k：當 Floor 所定之執行價格愈高時，其利率下限價值會愈低，這是由於執行價格愈高，其選擇權被執行之機率亦較低。

：當短期利率波動幅度大(Volatility)，也就是當歷史之市場利率波動性極大時，其利率下限價值會較高。反之，市場利率平穩時，其計算出之利率下限價值也較低。因此導致利率下限價值與利率波動程度具有正向變動關係。

T：由於含有時間價值的關係，距到期期限愈長，利率下限價值會隨距到期日期限

之增加而增加。

另外，由上述敏感度分析可知，不論何種利率模型，當愈接近到期日，或是瞬間短期利率向長期平均利率水準移動的速度愈慢時，利率上限價值隨短期利率波動程度的增加而會有較明顯的提高。

第二節 研究建議與限制

1、模型的選擇：

本文所選擇的三個模型，一因子 Vasicek 模型、CIR 模型及 Hull-White extended Vasicek 模型，其中 Vasicek 模型其隨機過程是服從 Ornstein-Uhlenbeck(OU)的隨程，假設短期無風險利率的波動服從常態分配，而 CIR 模型則是服從卡方分配，但其實際上短期利率資料情況，分配為何?還需進一步驗證。另外，本文所研究之利率模型均採一因子模型，對分析上將有所限制。

2、參數的估計：

本文採用台灣貨幣市場商業本票利率，作為評價利率下限的指標利率，進行一因子參數的估計，其利率資料是否為無風險利率需進一步驗證。

3、市場收益率曲線的估計：

由於 Hull and White extended Vasicek 模型需配置市場收益率曲線，而一般利率上下限，其指標利率大都缺乏長天期的利率指標，加上台灣市場可參考的長期利率有限，因此本文以 Vasicek 模型中的零息債券價格推導出殖利率曲線配置來假設，由於本文重點是對利率模型評價利率下限選擇權，故在此以最簡單方式假設指標利率的市場收益率曲線。

4、本文主要是透過對消變異方法來降低蒙地卡羅估計誤差的技術，對於本文後續研究可嘗試其他方法來分析。

參考文獻

一、中文部分

- 1、李賢源、謝承熹、陳其財，新奇利率衍生性金融商品— 平均利率上限契約之評價、避險及應用，台灣大學財務金融所碩士論文，民國九十年六月。
- 2、林容竹，「利率上限與利率下限之評價與應用」，國立台灣大學財務金融研究所之碩士論文，民國八十四年六月。
- 3、許嘉玲，「利率交換契約之利差期間結構模型：吻合殖利率曲線與分析解」國立台灣大學財務金融研究所之碩士論文，民國九十二年六月。
- 4、張智星(2000) MATLAB程式設計與應用。
- 5、游登茂，「公司債附有利率上限、利率下限之定價與應用」國立台灣大學財務金融研究所碩士論文，民國八十四年六月。
- 6、楊振海，「平均利上限契約之評價與應用」國立台灣大學財務金融研究所碩士論文，民國八十八年六月。
- 7、黃健榮，「利率交換衍生性商品之應用及相關問題探討」，大華債券部研究報告。
- 8、葉仕國，「以最大概似估計法進行Extended Vasicek利率期限結構模型之實證」，管理學報，第14卷，p533-557，民國八十六年十二月。
- 9、蘇金祥，「利率選擇權之應用」，寶來金融季刊第十七期。

二、英文部分

- 1、Abken, Peter A., “Valuing Default-Risky Interest Rate Caps: A Monte Carlo Approach” Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1989.
- 2、Barraquand J., Martineau D. “Numerical evaluation of high-dimensional multivariate American securities,” working paper, Solomon Brothers Int. 1995
- 3、Baxter, Martin and Andrew Rennie., (1996) ,*Financial Calculus.*, Cambridge, U.K. : Cambridge University Press.、Brace, A., Gatarek, D. and Musiela, M., (1997) , “The Market Model of Interest Rate Dynamics” , Mathematical Finance,
- 4、Black, F., E. Derman , and W. Toy. “A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options.” Financial Analysts Journal, pp.33-39. January -February 1990.

- 5、 Black, F. and P. Karasinski. , “ Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. ” , Financial Analysts Journal, pp.52-59, July- August, 1991.
- 6、 Boyle, P.P. “ Options : A Monte Carlo Approach. ” Journal of Financial economics, pp.1267-1321 , 4,1977.
- 7、 Boyle, P.P. “ Options Valuation using a Three-Jump Process. ” International Options Journal, 7-12, 3,1986.
- 8、 Boyle, P.P., Broadie, M., Glasserman, P., “ Monte Carlo Methods for security pricing ” working paper, University of Waterloo, Ontario, Canada. 1995.
- 9、 Brennan, M.J. and E.S. Schwartz., “ An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency. ” , Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17, 3, pp.301-29 , September, 1982.
- 10、 Briys, Eric, Michel Crouhy, and Rainer Schobel, “The Pricing of Default-Free Interest Rate Cap, Floor, and Collar Agreement,” The Journal of Finance pp.1987- 1982 , 1991.
- 11、 Chen, R. and L. Scott , “ Maximum Likelihood Estimation of a Muti-Factor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates”, Journal of Fixed Income, Vol.3, No.3, pp.14-32, December, 1993.
- 12、 Chen, R. and Yang, “ An Integrated Model for the Term and Volatility Structures of Interest Rates”, Working Paper, Rutgers University and Office of Housing Research, Fannie Mae, 1995
- 13、 Cox, J.C., and S. A. Ross. “ The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. ” Journal of Financial Economics, pp.145-166,3(1976).
- 14、 Cox, J. c., and S. A. Ross ; and M. Rubinstein. “ Option Pricing :a Simplified Approach. ” Journal of Financial Economics, pp229-264,7(Oct.1979).
- 15、 Cox, J.C.E. Ingersoll, and S. A. Ross. “ A Theory of the Term Structure of Interest Rates, ” Econometric, m 985-407, 53(1985).
- 16、 Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A., “ Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation ” , Econometrica , P.77-105, 1992
- 17、 Ho,T.S.Y.,and S.B.Lee, “ Term Structure Movements and Pricing of Interest Rate Claims,” Journal of Finance 41, pp1011-1029, 1986.
- 18、 Hull, J. , and A. White, “ The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. ” Journal of Finance, 42, pp. 281-300 (June 1987).
- 19、 Hull,J. and A. White, “ The Use of the control Variate Technique in Option Pricing.” Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23,3, pp 237-251 (September 1988).
- 20、 Hull, J., and A. White, “ Pricing Interest Rate Derivative Securities. ” ,Review of Financial Studies, 3,4, p573-592, 1990a.
- 21、 Hull, J., and A. White, “ Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Derivatives. ” Journal of Derivatives, 1, 1, pp.21-31 (Fall 1993).

- 22、 Hull, J., and A. White, “ Using Hull-White Interest Rate Trees. ” Journal of Derivatives, 26-36, Spring 1996.
- 23、 Hull, J. (2000) , Options, Futures, and Other Derivative Securities, 4th .
- 24、 Hwang, Dar-Yeh, “ An Empirical Examination of Taiwan’s Bull and Be Floaters : Black versus Hull-White Approach, ” Advances in Financial Planning and Forecasting, Vol. VI,1995.
- 25、 John H. “ A C++ Encoded Hull-White Interest Rate Tree-Builder ” (2002)
- 26、 Johnson, H. E.,and D. Shanno. “ Option Pricing when the Variance is Changing. ” Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22,pp. 143-151 (June 1987).
- 27、 Kemna, A. G. Z., and A. C. F. Vorst. “ A Pricing Method for Options on Average Asset Values. ” Journal of Banking and Finance, 14, 113-129 (1990).
- 28、 Leippold, M. and Z. Wiener, “ The Term Structure of Interest Rate II :The Hull - White Trinomial Tree of Interest Rates. ” (1999)1-17.
- 29、 Levy, E, “Pricing European Average Rate Currency Options”, Journal of International Money and Finance , P.474-491.,1992.
- 30、 Longstaff. F. A. and E. S. Schwartz., “ Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two Factor General Equilibrium Model. ” Journal of Finance, 47, 4, pp. 1259 - 82 , September,1992.
- 31、 Longstaff, F.A., “Hedging Interest Rate Risk with Options on Average Interest Rates”, Journal of Fixed Income (March) , P.307-45,1995.
- 32、 Masaki Kijima. and Izumi Nagayama. “ Efficient Numerical Procedures for the Hull -White Extended Vasicek Mode. ” Journal of Financial Engineering, 3, 4:275 - 292, September/December 1994.
- 33、 Pelsser, A. “ An Efficient Algorithm for Calculating Prices in the Hull-White Model. ” Working paper, ABN-Amro Bank, Derivative Product Research and Development, 1994.
- 34、 Prentice-Hall, Inc. Hull, J. and White, A. , “Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and The Implementation of The LIBOR Market Model”, Journal of Fixed Income,P.46-62 (Sep.2000) .
- 35、 Ricardo Rebonato, “ Interest Rate Option Models. ” John Wiley & Sons, 1996.
- 36、 Schaefer, S. M. ,R. and E. S. Schwartz., “ Time-Dependent Variance and the Pricing of Options. ” Journal of Finance, 42, pp.1113-28,December,1987.
- 37、 Schwartz, E. S. “ The Valuation of Warrants :Implementing a New Approach. ” Journal of Financial Economics, 4, 79-93 (Jan.1977).
- 38、 Stapleton, R.C. and Marti G. Subrahmanyam, “ Interest Rate Caps and Floors, ” in Financial Options : From Theory to Practice, Edited by Stephen Figlewski, William L. Silber and Marti G. Subrahmanyam, pp.220-280, 1990.
- 39、 Tilley J.A “ Valuing American options in a path simulation model”, Trans. Soc. Act.,45,83-104,1993.

- 40、 Vasicek, T., “ An Equilibrium Characterization of the Term Structure ” , Journal of Financial Economics, P.179-193 (1977) .
- 41、 Wang, Huang-Wen. “ A Comparative Study of Numerical Algorithms for Interest Rate Models ” Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 1997.

