

## 第七章 以直接加速度法分析地球重力場時變：CHAMP 及 GRACE

### 衛星任務為例

#### 7.1 重力場時變之意義及研究回顧

從 1960 年代開始，利用衛星推求地球重力場一直是大地測量學家的夢想與追求的目標，經過 40 年的努力，1990 年代末期能夠僅用衛星資料即可計算到 70 階，係數的精度也從  $10^{-7}$  提升到  $10^{-9}$  量級，再加上地面重力資料，包括空載重力測量、船載重力測量等，能夠發展到 360 階，如 OSU91A、EGM96 及歐洲 GRIM 系列之重力場，直到本世紀初，CHAMP 及 GRACE 等重力衛星之升空，更開創了衛星重力測量的新紀元，也因為 CHAMP 及 GRACE 低軌衛星的特性，使得地球重力場的精度及空間解析度的提升已是不可言喻，且任務壽命長達 5 年，使其具備另一項任務—觀測地球重力場之時變。

地球重力場時變之研究，可追溯到 1970 年代末至今，利用 SLR (Satellite Laser Ranging) 技術加上 DORIS、T/P 等衛星持續探討低階係數之變化。1980 年代末期，超導重力測量及絕對重力測量也加入了觀測地球重力場時變行列，雖然精度高，但僅限於局部的某些點。1990 年代中，GPS 全面進入成熟運作階段，也加入了探討  $J_2$  的行列，隨之而來即是 CHAMP 及 GRACE 衛星，尤其是 GRACE 更是背負著探求重力場時變的重責大任，甚至未來發射之重力衛星，能反演更高階之地球重力場。

地球重力場是地球質量分佈的表現，而地球質量是在不斷運動、變化和重新分佈，如板塊運動、核幔耦合、地核振蕩、冰後回彈、地表水、冰蓋融化、海平面上升、大氣變化等 [Torge, 1989]，這些變化有長周期和短周期的。

當科學家將地球重力場模型用於地球動力學研究及其解釋時，發現重力場的時變與地球動力有關。重力場低階係數  $J_2$  和  $J_3$  的長期變化可以用於研究和解釋地幔滯彈性和冰後回彈問題， $J_2$  和  $J_3$  的周期和短周期變化與固體地球、海洋和大氣的潮汐和非潮汐變化以及季節變化有關。

不同時間尺度的潮汐和非潮汐全球質量再分佈引起地球重力場的長期和周期變化，時間尺度為 12h~18.6yr。地球重力場的長期變化，特別是帶諧係數的

變化，主要是由下地幔的粘性變化、冰後回彈和冰蓋質量變化等引起的，當然還有許多小的地球物理過程的貢獻，如水庫蓄水、高山冰川、地震等。偶階帶諧係數變率  $\dot{J}_n (n = 2, 4, 6, \dots)$  對下地幔粘性特徵比較敏感，而奇階帶諧係數變率  $\dot{J}_n (n = 3, 5, 7, \dots)$  主要來源於冰川質量平衡[Ivins et al., 1993]。

$J_2$  又稱為重力扁率，因而從  $J_2$  的變化可以了解到地球內部或表面質量的重新分佈、大氣質量的改變、地下水位的變化、地幔流動方向及地球內部密度的變化等。因此近二十年來很多科學家投入研究地球重力場之時變，如 Gegout and Cazenave[1993]，Cheng and Tapley[1999]，Wahr and Molenaar[1998]，Yoder et al.[1983]，Cox and Chao[2002]，Cazenave and Nerem[2002] 等人的論文中都利用衛星資料及 SLR 資料發現低階地位係數的變化，尤其是  $J_2$  在一年當中都有規則的變化，而且每年都有減小之趨勢，如 Cox and Chao 論文中分析 1979 年到 2001 年之 SLR 資料，發現 1979~1997， $J_2$  呈現穩定的下降，Yoder et al.[1983] 首次利用 5 年的 Lageos-1 衛星的 SLR 跟蹤觀測資料研究  $J_2$  的長期變化，發現  $\dot{J}_2 = -3.0 \times 10^{-11} / \text{yr}$ ，認為這是由於滯彈性地球冰後回彈造成的，而地震引起的重力變化很小 ( $\dot{J}_2 = -2.0 \times 10^{-12} / \text{yr}$ )。Cheng et al.[1989] 利用 3 年的 Starlette 衛星的 SLR 觀測資料，研究了  $J_2$  的長期變化以及  $J_2$  和  $J_3$  的周年和半年變化。Cheng et al.[1997] 對 Starlette，Lageos 1 and 2，Ajisai，Etalon 1 and 2，Stella 和 BE-C 等 8 顆大地測量衛星的 20 年的 SLR 跟蹤資料進行分析，得出  $\dot{J}_2 = (-2.7 \pm 0.4) \times 10^{-11} / \text{yr}$ ， $\dot{J}_3 = (-1.3 \pm 0.5) \times 10^{-11} / \text{yr}$ ， $\dot{J}_4 = (-1.4 \pm 1.0) \times 10^{-11} / \text{yr}$ ， $\dot{J}_5 = (2.1 \pm 0.6) \times 10^{-11} / \text{yr}$  和  $\dot{J}_6 = (0.3 \pm 0.7) \times 10^{-11} / \text{yr}$ 。但到 1998 年以後  $J_2$  突然上升，也許是 1998 年特別明顯的聖嬰現象所造成，仍有待科學家努力去探求，[Cox and Chao, 2002]。圖 7-3 為 NASA 之 JPL 自 1976 年 7 月至 2004 年 6 月利用 SLR 所觀測之  $J_2$  變化。發現  $\dot{J}_2$  呈現負的現象而且也有季節性的變化，一般來說，夏季變大冬季變小， $\dot{J}_2$  為負說明地球動力學形狀變得越來越圓，而  $\dot{J}_3$  為負表明地球的梨形增強[郭金運, 2004]。

由於大氣及海水質量會隨著時間變化，造成運行中之衛星軌道擾動，如果沒有利用短時間內重複觀測來消除，這些隨著時間而變的擾動力，必須要靠後處理來扣除。因此要探討低階重力場之時變，在觀測資料處理過程中必須也要考慮到大氣及海水質量會隨著時間變化，大氣壓變化所覆蓋的時間頻譜範圍為幾小時到 1 年。短期的非周期性變化和太陽輻射所引起的大氣潮，大多小於 1 hPa，特別

強的半周日太陽潮振幅才會大於 0.1 hPa。與氣旋有關的氣壓變化呈周期性（幾天），季節性的全球氣壓變化為  $\pm 10\text{hPa}$  [Rabble and Zschau, 1985]。因此，氣壓變化導致的重力隨時間的變化，短期內可達幾個  $\text{nms}^{-2}$  的幅度，幾天時間最大為  $200\text{ nms}^{-2}$ ，季節性變化約為  $30\text{ nms}^{-2}$  [Torge, 1989]。

地下水和土壤濕度的變化以及地表水水位的變化都會影響地球重力場。這些過程大多為幾小時至幾天的短期內變化，季節性變化主要是降水和冰雪融化。短期降水量影響重力變化較大，達到幾百  $\text{nms}^{-2}$ ；而季節性地下水變化造成重力變化較小，一般約  $50\sim 100\text{ nms}^{-2}$ 。NASA 曾經想利用 GRACE 衛星觀測中國大陸三峽大壩蓄水前後重力之變化。

GRACE 計畫計算每個月之重力場可提供地球重力場隨季節性變化之擾動。為達此目的，各項擾動力之分析必須非常精確，必須動員各領域科學家之貢獻。因為重力訊號為地球環境變遷之重要訊號，因此研究重力場之時變，讓我們更能了解地球環境之變遷，CHAMP 及 GRACE 更提供長期之監測且涵蓋全球，攜帶之儀器及其精度更是一大突破，也是引發本文研究之動機。

## 7.2 研究方法及實驗數據

本文提出之直接加速度法是希望能由 Bernese5.0 版新增之功能直接解出低軌衛星之軌道，再將軌道二次微分得其加速度，透過加速度與地位係數之關係，利用最小二乘法求得地位係數  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ ，即所謂二步法，本研究之方法優點為快速、易懂、方便，且擺脫 GEODYN 等動力法軟體解算重力場之複雜性。

本研究係利用德國慕尼黑大學 Svehla 博士使用 zero difference 方法所計算之 CHAMP 軌道 GPS 相位零差分數據計算的 CHAMP 衛星幾何定軌結果，選取了 2002 年 3 月 11 日~2003 年 3 月 10 日共計 1 年的資料，GRACE 軌道資料自 2003 年 7 月 1 日至 2003 年 10 月 31 日共 4 個月資料。其提供之軌道有兩種，一種是純用動態（Kinematic）之零差分方法計算而得，精度較差；另一種是加入地球重力場參數之半動力（Reduce Dynamic）方法所計算之軌道。後者之軌道是完整的，每個 epoch 皆可解；但利用 Kinematic 方法所計算之軌道，並非每個 epoch 都能解算[Švehla and Rothacher, 2002]。

本文是利用動態軌道二次微分得知其加速度，若某時刻無法解出，則以內插方式取代之，若長時段無資料，則由動力法軌道取代之，故此衛星加速度純由幾

何方法求得，所以包括各種擾動力。因此要求得純由地球非球形重力場所引起之擾動力，則必須扣除各項擾動力。

本研究扣除之擾動力有：

- (1)非保守力：包括大氣阻力、太陽輻射壓、地球輻射壓，係利用 CHAMP 及 GRACE 衛星酬載之加速度儀資料，經各項修正、轉換獲得衛星在運行中所受到之表面擾動力來替代之。
- (2)保守力：多體擾動力、固體潮、海潮、相對運動力等四種力係利用理論公式扣除之，大氣潮及極潮本文並未扣除之。
- (3)經驗參數：在保守力與非保守力模式當中，有些力模式是在某些假設條件下推導而得，所以在計算過程中仍存在系統誤差或截取誤差，而有些力無法模式化，利用經驗參數來吸收以上誤差，以改善衛星軌道及計算衛星加速度之精度。此經驗參數是在扣除各種擾動力後加入，僅剩地球非球擾動力，本文處理方式為：

$$L = A\bar{X} + a_{emp}^b \quad (7-1)$$

$L: [A_r \quad A_\phi \quad A_\lambda]^T$  為軌道經二次微分後再轉換至以  $(r, \phi, \lambda)$  表示之加速度，即求解地位係數之觀測量

$\bar{X}$ : 為未知數，即地位係數  $[\bar{C}_{mm} \quad \bar{S}_{mm}]^T$

$A$ : 為加速度與地位係數關係式對未知數偏微分之設計矩陣

$a_{emp}^b$ : 為本文加入經驗加速度以地固坐標之  $(r, \phi, \lambda)$  表示，

由於經驗加速度一般是以軌道坐標系  $(r, t, n)$  表示，即在軌道框架內，經驗加速度分別指向徑向 (radial)，沿軌道 (along-track) 及法向 (cross-track)，每一方向以 3 參數為例說明如下：

$$a_{emp} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_t \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \cos u + a_2 \sin u \\ b_0 + b_1 \cos u + b_2 \sin u \\ c_0 + c_1 \cos u + c_2 \sin u \end{bmatrix} = E\bar{Y} \quad (7-2)$$

式中， $E = \begin{bmatrix} 1 & \cos u & \sin u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos u & \sin u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos u & \sin u \end{bmatrix}$  為經驗參數的

設計矩陣， $\bar{Y} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ c_0 \ c_1 \ c_2]^T$ ， $\bar{Y}$  即經驗參數， $u$  為衛星在克卜勒軌道坐標系的緯度幅角（argument of latitude）。

但 (7-1) 式之各項都是在地固坐標系進行處理，所以在軌道坐標系的經驗加速度  $a_{emp}$  必須轉換至慣性坐標系之經驗加速度  $a_e^I$ ，可依據 2.2 節之 (2-37) 式轉換，即

$$a_e^I = B a_{emp} = B E \bar{Y} \quad (7-3)$$

)



其中  $B = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-u)$ ，為軌道坐標轉到慣性坐標之轉換矩陣

再將慣性坐標系之經驗加速度  $a_e^I$  轉換至地固坐標系之經驗加速度  $a_{emp}^b$ ，以

$(r, \varphi, \lambda)$  表示

$$\text{即 } a_{emp}^b = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_\lambda \end{bmatrix}_{emp} = M^{-1} a_e^I = M^{-1} B E \bar{Y} \quad (7-4)$$

)

$M^{-1}$  為慣性坐標系轉換到地固坐標系之轉換矩陣，見 (5-29) 及 (5-30) 式，則

(7-1) 式可寫成

$$L = A\bar{X} + M^{-1} B E \bar{Y} \quad (7-5)$$

)

組成觀測方程式

$$L+V = A\bar{X} + M^{-1}BE\bar{Y} = \begin{bmatrix} A & M^{-1}BE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} \quad (7-6)$$

)

再由下式

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = (C^T PC)^{-1} C^T PL \quad (7-7)$$

求解未知數  $\bar{X}$  及經驗參數  $\bar{Y}$ ，其中每一個弧段解出一組經驗參數。

本文是使用 10 參數，即三個方向共 30 個參數，參數的形式詳見 4.4 節。



有關本文由軌道求解地位係數之流程如圖 7-1。

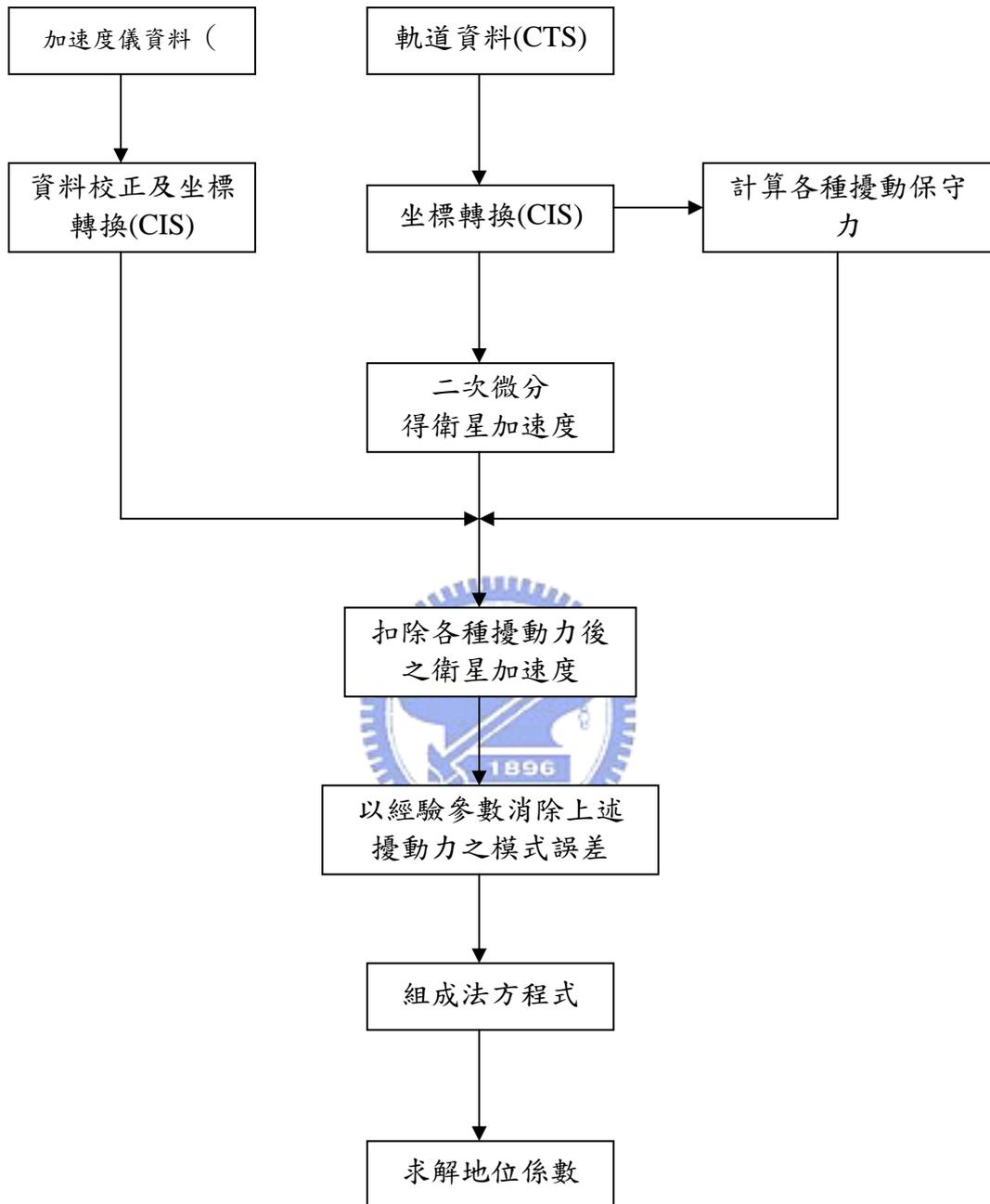


圖 7-1 本文由軌道求解地位係數之流程圖

### 7.3 結果與分析及低階之地位係數之時變

由於電腦計算時間大部分都花在組成法方程的計算，以本人目前使用之電腦 Intel Pentium4 3.0GHz，計算 7 天為一弧段軌道解至 20 階約需花 20 分鐘，解至 50 階約要 9 小時。本文資料處理時是以 7 天為一弧段，即每 7 天解一組地位係數及經驗係數，並儲存法方程式 N 及 U 矩陣，所以本文是將 CHAMP 衛星軌道分成 52 個弧段分別求解，再以累加法方程式方式求解每個月一組地位係數，共 12 組，最後再累加 52 個弧段一次解整年之資料。GRACE-A、GRACE-B 衛星資料處理方式亦同，最後再將 GRACE-A、GRACE-B 及 CHAMP 資料之法方程式累加求解一平均重力場的地位係數。

本研究因探討重力場之時變，因此不加 Kaula 約制條件，且採等權平差。解算時令  $C_{00}=1$ ，且  $C_{10}$ 、 $C_{11}$  及  $S_{11}$  不解算，計算的地位係數為完全正規化球諧係數即  $\overline{C}_{nm}$   $\overline{S}_{nm}$ ，而地球重力場帶諧係數與衛星慣用之引力位元係數之間的關係 [Kaula, 1966] 為

$$J_n = -C_{n0} = -\sqrt{2n+1}\overline{C}_{n0} \quad (7-8)$$

式中， $C_{n0}$  為非正規化球諧係數；

$\overline{C}_{n0}$  為完全正規化球諧係數。

$C_{20}$  是除  $C_{00}$  之外最大的引力位係數，同時  $J_2$  表徵了地球的南北半球不對稱程度，其值為： $J_2 = -C_{20} = -\sqrt{5}\overline{C}_{20}$ 。

在進行大量計算前，吾人先利用 2002 年 4 月 29 日至 5 月 5 日為期一星期之資料，分析加入 Kaula 約制條件與未加入 Kaula 約制條件之差異，發現在展開至 20 階時， $\overline{C}_{20}$  值與同時期 NASA  $\overline{C}_{20}$  比較，會產生較大之偏移 (bias)，絕對值減少約  $5 \times 10^{-8}$ ，此與 Reigber [1989] 認為加入約制條件會使未知數之絕對值變小的說法相符，且  $\sigma_{\overline{C}_{20}}$  僅為  $1.0 \times 10^{-7}$ 。而未加入 Kaula 約制條件時， $\overline{C}_{20}$  值與同時期 NASA  $\overline{C}_{20}$  比較，偏移較小約  $5 \times 10^{-10}$ ， $\sigma_{\overline{C}_{20}}$  為  $2 \times 10^{-9}$ 。由此可知，在解算至 20 階時，理論上加權約制自由度變大，標準偏差應較小才對，但本實驗加入 Kaula 約制條件，反而會使未知數產生偏移，且未知數精度變差，這可解釋為 GRACE 衛星傾角  $89^\circ$ ，資料幾乎涵蓋全球，極溝及混疊問題不大，而且只解算至 20 階，未知數僅

438 個，法方程式不會有秩虧或病態問題 (Ill-Conditioning)，加入約制條件將會使未知數的絕對值變小，所以 GFZ 在解算 EIGEN-GRACE01S 時，70 階以上才加 Kaula 約制條件，所以本文解算重力場至 20 階或 50 階，皆未加 Kaula 約制條件。

在考慮加入經驗參數個數及展開階數時，吾人利用 GRACE-B 衛星的 4 個月 (18 星期) 之資料來分析，將 18 個弧段在不同展開階數及經驗參數個數各計算 18 組地位係數，將 18 組之  $\bar{C}_{20}$  及  $\sigma_{\bar{C}_{20}}$  取平均，平均之  $\bar{C}_{20}$  再與同時期 NASA 之  $\bar{C}_{20}$  比較，如表 7-1，由表 7-1 分析得知，展開至 5 階時，不管有無加入經驗參數，雖然  $\bar{C}_{20}$  與 NASA  $\bar{C}_{20}$  之差異與其它階數比較並無明顯放大，但中誤差比 20 階大 5 倍，展開至 10 階時， $\bar{C}_{20}$  之中誤差比 20 階時大 2.5 倍。在展開 10 階及 20 階時，發現加入 10 參數時，不管是  $\bar{C}_{20}$  的偏值與  $\bar{C}_{20}$  的中誤差都比 5 參數來的大，符合在統計平差上的預估。理論上，參數太多所求解的地位係數應是無偏的，但未知數中誤差會變大 [Koch, 1987]。在表 7-1 中亦可發現一個有趣的現象，就是加入 10 參數時，不管展開至 10 階、20 階或 50 階，其  $\bar{C}_{20}$  與 NASA 之  $\bar{C}_{20}$  偏移方向一致，且大小也幾乎一樣。在各種情況分析中，展開至 20 階時，雖然 5 參數之  $\bar{C}_{20}$  精度比未加參數之  $\bar{C}_{20}$  精度提升 3.5%，但  $\bar{C}_{20}$  與 NASA 之差異卻比未加參數大 4 倍。又展開至 50 階時，雖然  $\bar{C}_{20}$  精度最佳，但本章主要是求重力場之時變，按朱聖源博士 [2003] 經驗，求重力場時變時展開至 20 階以內即可，超過 20 階精度不高，因此本章分析重力場時變係採展開至 20 階且未加經驗參數所得之結果進行分析。建議未來解算至高階靜態重力場時，以加入 5 個經驗參數為最佳。

另在本章分析中亦可發現，直接加速度法所得之精度比第 5 章相位法所得精度提升 2 個數量級，也比快速軌道求解之精度高 2-5 倍，這是由於快速軌道與 SLR 定得之軌道比較，其精度僅約 19cm [Koenig, 2001]。利用直接加速度法求解地球重力場重要關鍵在於軌道之精度，因此，未來 COSMIC 如要採本章之方法反演重力場及其時變，則定軌技術得下一番功夫才得以實現。

表 7-1 不同階數及不同參數求解之  $\bar{C}_{20}$  的偏值及中誤差

展開 階數	經驗參 數個數	地位係數平均值 $\bar{C}_{20}$	中誤差 $\sigma_{\bar{C}_{20}}$	與 NASA 平均值之差 異
5	0	-4.84167313299E-04	1.15160254294E-08	-1.99725405561E-09
5	5	-4.84171732841E-04	1.20077102111E-08	-6.41679633338E-09
10	5	-4.84166977303E-04	5.08442784604E-09	-1.66125766675E-09
10	10	-4.84157459958E-04	5.76890241601E-09	7.85608661122E-09
20	0	-4.84164669444E-04	2.16326548333E-09	6.46600555596E-10
20	5	-4.84167873460E-04	2.09590030529E-09	-2.55741500004E-09
20	10	-4.84158772557E-04	2.38120607385E-09	6.54348766664E-09
50	10	-4.84157740869E-04	8.44805737534E-10	7.57517611111E-09

GRACE 雖僅有四個月資料，但因資料品質較佳，所以計算之地位係數精度較佳，其資料處理方式同 CHAMP，並分 GRACE-A、GRACE-B 分別處理，亦是以每星期 7 天為一弧段求解，並組成法方程式，待 18 個弧段分別求解後，再由法方程式之結合同時求解 18 個弧段的資料，在組成法方程式求解時，係數之精度提升一個數量級。表示 GRACE 衛星軌道精度品質一致性高，因此觀測量愈多求解之地位係數精度愈高。在  $J_2$  變化之分析，係以 18 個弧段個別求解之  $J_2$  減去所有弧段一起求解之  $J_2$ ，二顆衛星在 18 個弧段  $J_2$  變化趨勢如圖 7-3，發現 GRACE-A 及 GRACE-B 的  $J_2$  變化趨勢幾乎一致，當然 GRACE 兩顆衛星僅相距 200km，且所酬載之儀器皆相同，求解之軌道精度應較一致。另外由此可證明本章之直接加速度法理論方法正確，否則無法得到如此一致性的結果。為與 JPL 同時段之  $J_2$  變化比較，吾人將 GRACE 18 個弧段求解之  $J_2$  變化及 JPL 之  $J_2$  變化標準化後如圖 7-8 及圖 7-7，發現二者  $J_2$  變化趨勢相似度甚高，皆有夏天變大冬天變小之趨勢，但二者約有 10 天的位移，可能是因為 JPL 一個月才計算一個  $J_2$  值，其計算之時間段與吾人計算之時間段未必完全相同。

利用 CHAMP 軌道資料作重力場之時變分析，也是利用每個星期求解之  $J_2$  扣除 CHAMP 全年求解之  $J_2$ ，得到  $J_2$  之變化。將  $J_2$  變化以時間序列排列，並扣除誤差甚大之資料，經濾波後所得之  $J_2$  變化標準化後如圖 7-5，同時期 JPL 之  $J_2$  變化標準化後如圖 7-4，由圖 7-2 可知，二者皆有季節性之變化且趨勢相同，在夏天  $J_2$  變大，而冬天變小。

另 CHAMP 全年資料一起求解之  $\bar{C}_{20}$  與各弧段求解之  $\bar{C}_{20}$  取平均之差異甚小，約  $2.64 \times 10^{-10}$ 。而 GRACE-A、GRACE-B 四個月資料一起求解之  $\bar{C}_{20}$  與各弧段求

解之 $\bar{C}_{20}$ 取平均之差異亦甚小，分別約為 $1.03 \times 10^{-10}$ 、 $9.88 \times 10^{-11}$ 。將CHAMP全年資料與GRACE-A、GRACE-B四個月資料一起求解之 $\bar{C}_{20}$ 與各弧段求解之 $\bar{C}_{20}$ 取平均之差異亦甚小，約為 $1.47 \times 10^{-10}$ ，詳見表 7-2。由表 7-2 可知，全年解算之 $\bar{C}_{20}$ 均比個別解算之 $\bar{C}_{20}$ 平均值為大，數量級在 $10^{-10}$ 。

表 7-2 GHAMP 全部弧段解算之 $\bar{C}_{20}$ 值與各弧段 $\bar{C}_{20}$ 之平均值之差異

	全部弧段解算之 $\bar{C}_{20}$ 值	各弧段 $\bar{C}_{20}$ 之平均值	差異值
GRACE-A	-4.841653602130E-04	-4.841654635427E-04	1.033297E-10
GRACE-B	-4.841645706630E-04	-4.841646694702E-04	9.88072E-11
CHAMP	-4.84164655472E-04	-4.84164919650E-04	2.64178E-10
CHAMP+GRACE	-4.84164773006E-04	-4.84164919650E-04	1.46644E-10

本文利用 CHAMP 一年之資料所計算之 $\dot{J}_2 = -2.9 \times 10^{-10} / yr$ ，而同時段 JPL 之 $\dot{J}_2 = -5.4 \times 10^{-11} / yr$ 。可能的原因如下：

1. 本文所使用之資料是 7 天一個弧段，共計算 52 個弧段分析時間不夠長。
2. 本文只採用 CHAMP 一顆衛星的資料，而 NASA 是利用 SLR 技術同時追蹤多顆衛星資料計算所得。
3. 求解之地位係數之間的相關性。
4. 本文僅係直接利用軌道二次微分得加速度，軌道誤差將影響求解之精度。
5. 擾動力模式誤差也會影響求解精度。
6. NASA 資料時間長，本研究資料時間短，只反應短時間之變化，在圖 7-3 中 NASA 30 年之變化，某些時段也可能是 $10^{-10} / yr$ 數量級變化。

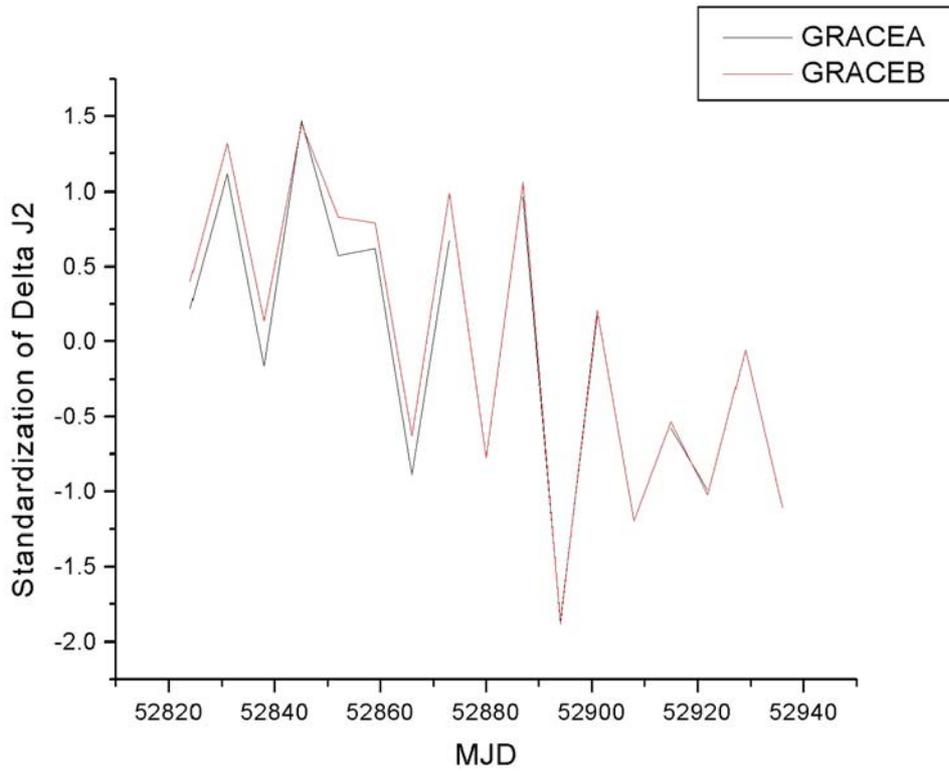


圖 7-2 自 2003 年 7 月至 2003 年 10 月 GRACE-A 與 GRACE-B 觀測之  $J_2$  變化

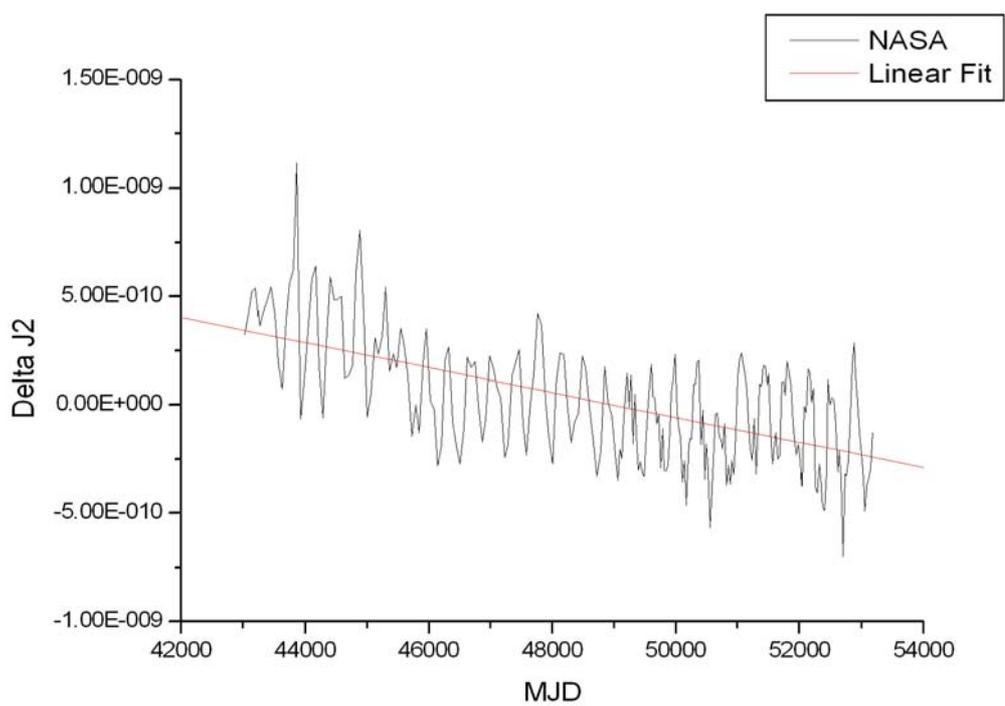


圖 7-3 自 1976 年至 2004 年 NASA 利用 SLR 觀測之  $J_2$  變化

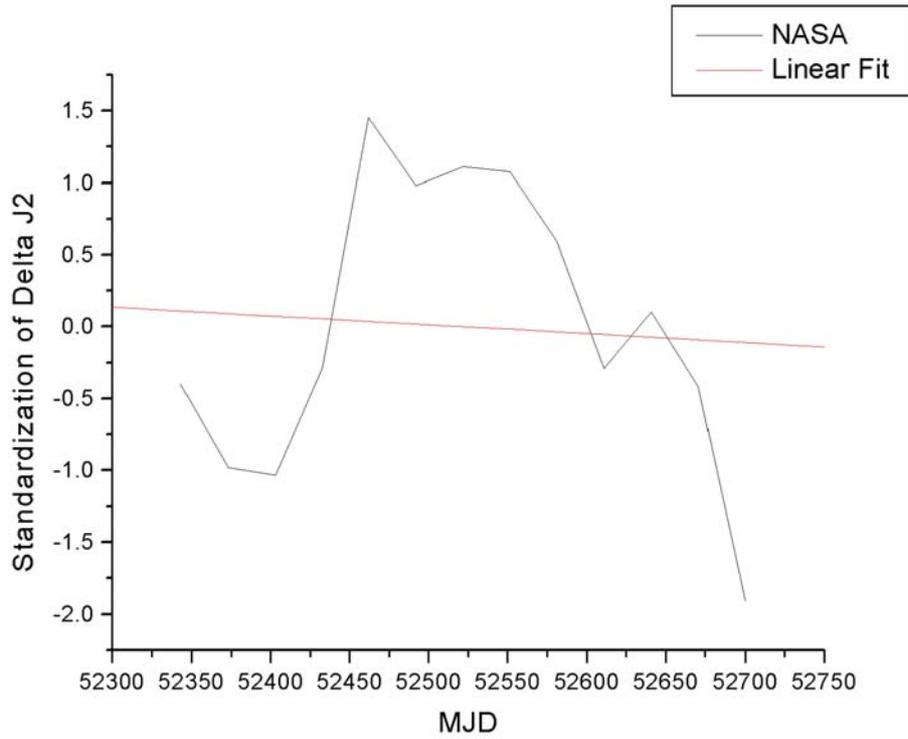


圖 7-4 自 2002 年 3 月至 2004 年 3 月 NASA 利用 SLR 觀測之  $J_2$  變化

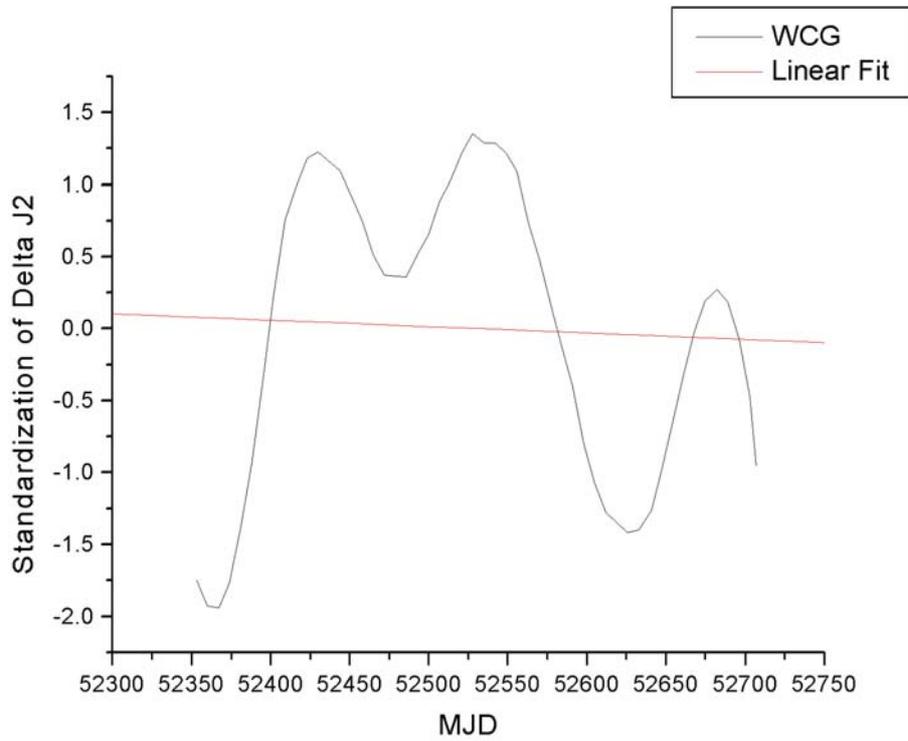


圖 7-5 自 2002 年 3 月至 2004 年 3 月 本文計算 CHAMP 之  $J_2$  變化

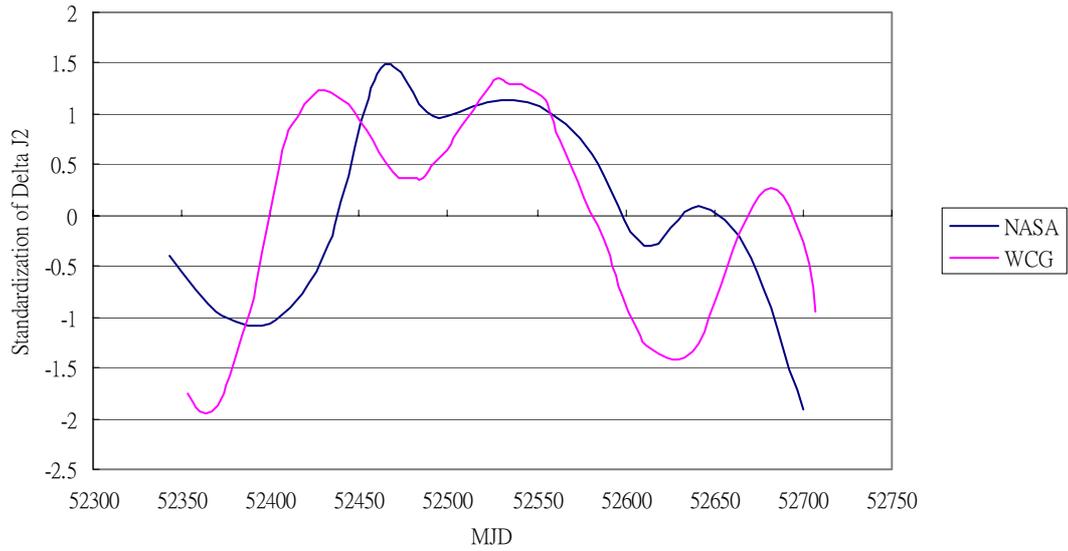


圖 7-6 自 2002 年 3 月至 2004 年 3 月本文計算CHAMP之 $J_2$  變化與NASA利用SLR 觀測之 $J_2$  變化之比較圖

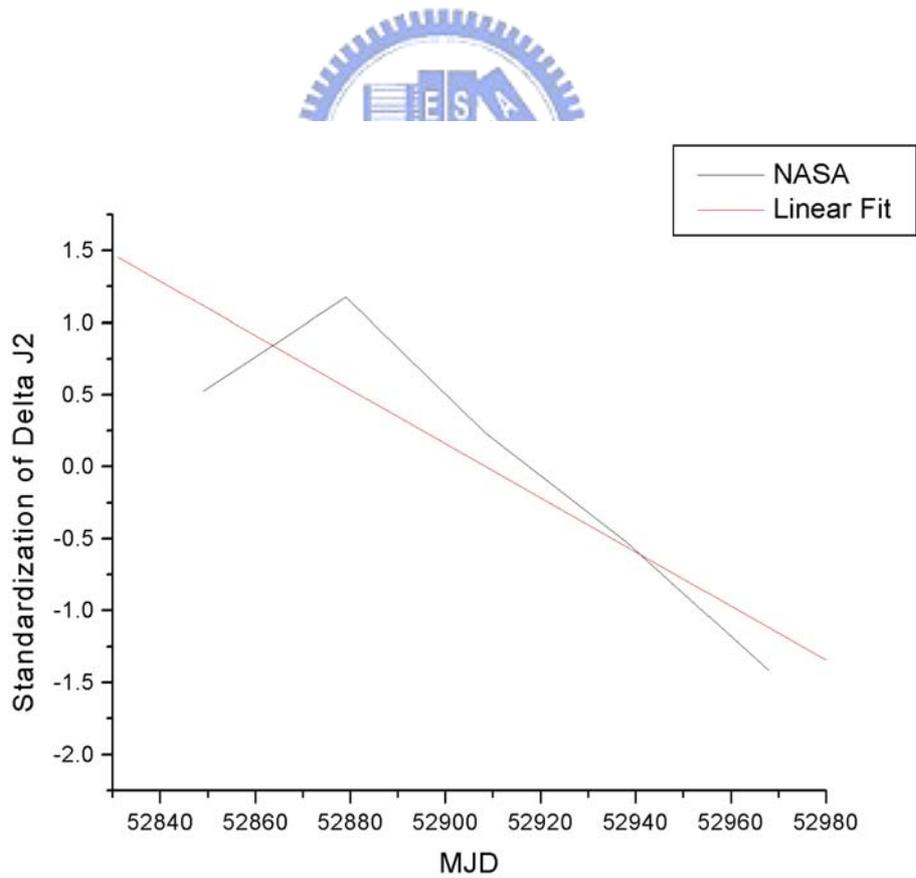


圖 7-7 自 2003 年 7 月至 2003 年 10 月NASA利用SLR觀測之 $J_2$  變化

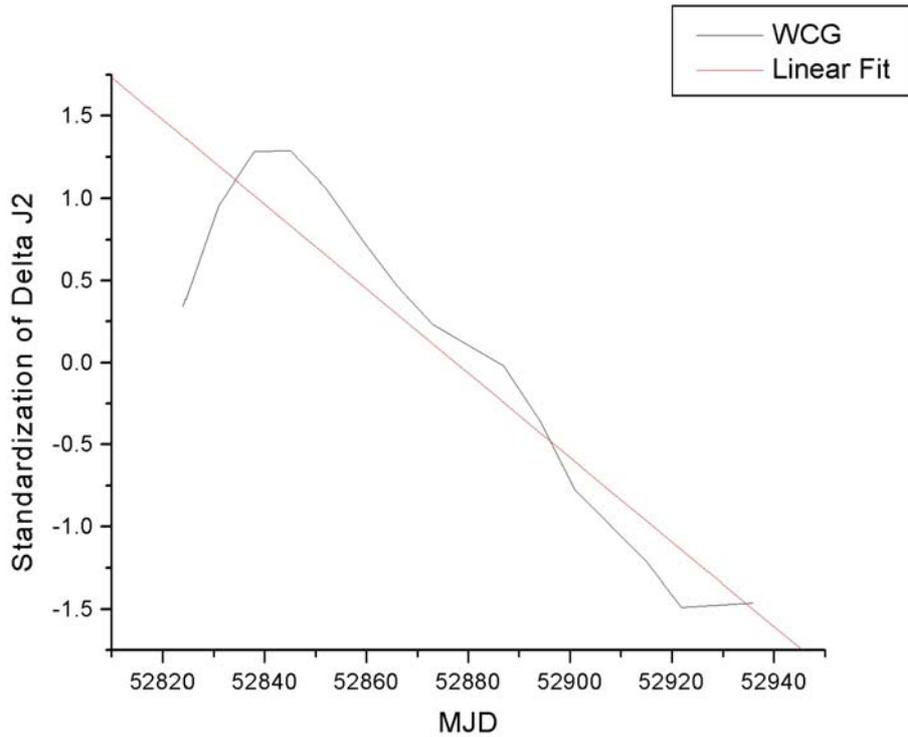


圖 7-8 自 2003 年 7 月至 2003 年 10 月 GRACE 觀測之  $J_2$  變化

#### 7.4 由大地起伏及重力異常探討重力場之時變

在上一節，吾人是直接以地位係數  $J_2$  來探討重力場之時變。本節為探討重力場之時變是否反應在大地起伏及重力異常上，吾人將 CHAMP 一年中每個月個別解算之地位係數及全年以起解算之地位係數利用 (7-9) 及 (7-10) 式轉換至大地起伏及重力異常，並求其差異。大地起伏與地位係數之關係式如下[Heiskanen and Moritz, 1967]

$$N(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_e}{r\gamma} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7-9)$$

重力異常與地位係數之關係式如下[Heiskanen and Moritz, 1967]

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_e}{r^2} \sum_{n=1}^{n_{\max}} (n-1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7-10)$$

本節之處理方式是將 CHAMP 每個月求解之大地起伏減去全年解算之大地起伏，所得之差異再以波長 1500km 之高斯濾波平滑化，如果是減去 GFZ 公布之 EIGEN3S 再平滑化，所得之結果幾乎與前者相同，可見吾人所求解之重力場相當可靠。

圖 7-9 是 CHAMP 每個月計算之大地起伏與全年解算之大地起伏值的全球差異分布圖，由圖中可發現大地起伏會隨著時間變化，2002 年 3、4 月與全年之差異皆在 4cm 以內，8、9、10、11、12 月份發生較大之變化，可能與全球環境變遷、海水質量變化或大氣質量變化有關，值得注意的是，在南美洲及西藏地區的變化相當明顯，每個月之大地起伏從 mm 至 10cm 等級。

圖 7-10 是 CHAMP 每個月計算重力異常與全年解算之重力異常全球差異分布圖，同樣在上述之地區與時間段皆與大地起伏差異趨勢相同，差異在 0.001mGal 至 0.05 mGal 之間，綜上分析，本章所提之直接加速度法分析 CHAMP 衛星資料，可藉由大地起伏及重力異常之變化看到地球重力場隨時間而變之現象。

GRACE 資料之處理方式同 CHAMP，圖 7-11 是利用 GRACE 衛星資料每月解算之大地起伏與 4 個月解算之大地起伏差異之變化，由圖中可發現，在全球某些地區，如秘魯與智利交界外海、西藏地區、塔里木盆地西邊及巴拿馬群島北方海域（大西洋）等地區，於 4 個月內都有明顯的變化，變化之數量級在幾 mm 至幾 cm 之間，尤其在 9 月、10 月差異更明顯，例如 9 月份在上述地區大地起伏大，但 10 月就變小，而在 9 月份大地起伏小的地區，10 月份反而變大，上述地區大地起伏變化相當明顯且一致，極可能是氣候變化、海水質量或大氣質量重新分配所致。

由圖 7-12 之重力異常變化及圖 7-13 大地起伏變化等值圖，亦可看到重力場之訊號變化，綜上，由 CHAMP 及 GRACE 之資料分析重力場時變，可以知道 GRACE 能看較細緻之變化，另一現象是變化較大之區域都是在約北緯 50°~南緯 50°之間，尤其在熱帶及亞熱帶地區，而在寒帶及南、北極地區重力場變化訊號較小。

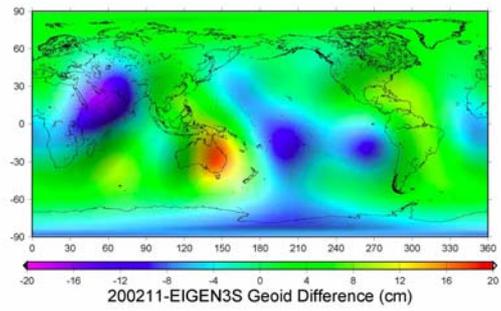
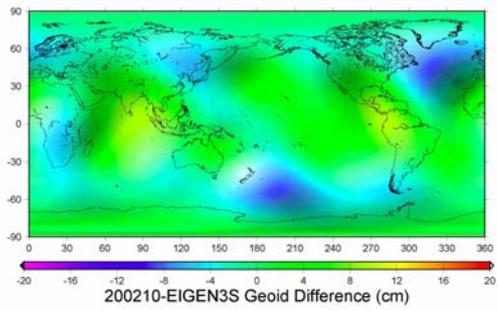
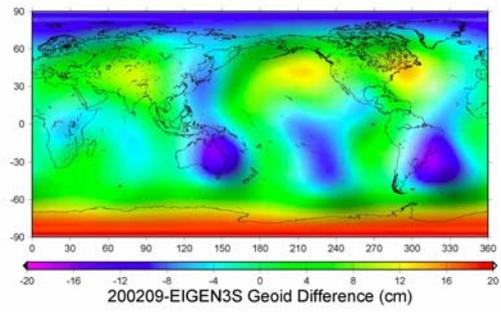
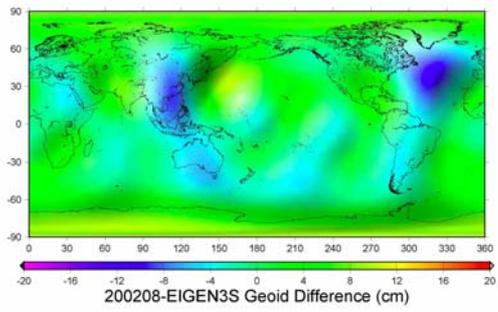
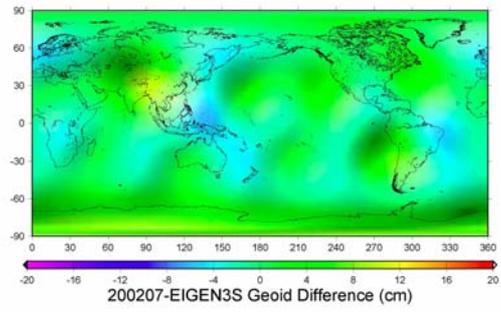
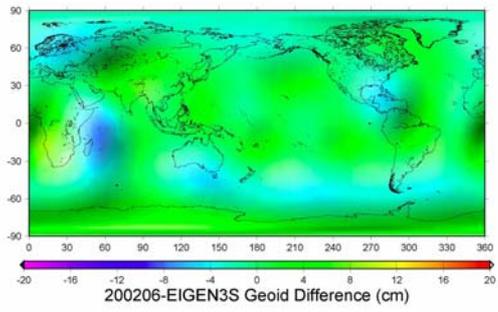
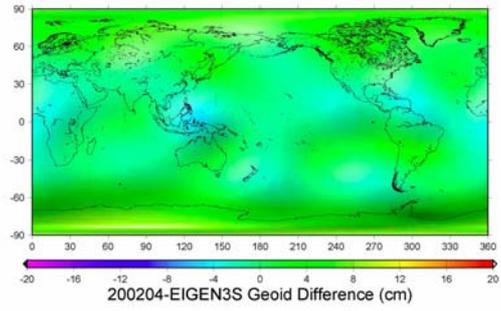
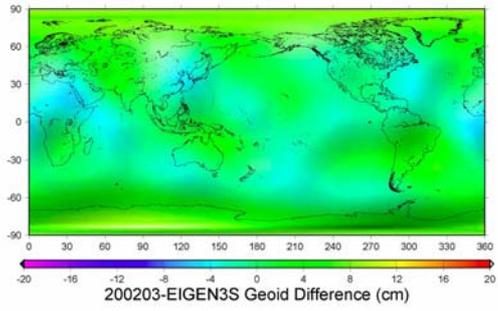
又由表 7-3 可知單月求解之大地起伏與四個月求解之大地起伏差值之平均值皆接近於 0.2 公分，RMS 均約 1~2 公分，表 7-4 可知單月求解之重力異常與四個月求解之重力異常差值之平均值皆接近於 0 mGal，RMS 均約 0.01mGal，但其差值最大、最小每月均發生在不同地方，顯示重力場確實有變化。

表 7-3 本文 WCG\_GRACE 模型大地起伏單月平均值與四個月平均值的差值比較結果

單月 大地起伏差值(cm)	7 月	8 月	9 月	10 月
最大差值	7.18	3.78	7.13	9.00
經度 (deg)	53	286	73	330
緯度 (deg)	-14	39	34	39
最小差值	-6.91	-4.15	-5.17	-7.71
經度 (deg)	71	167	320	80
緯度 (deg)	25	83	35	28
差值平均	-0.76	-0.26	0.24	0.24
差值之 RMS	2.73	1.53	1.85	2.43

表 7-4 本文 WCG\_GRACE 模型重力異常單月平均值與四個月平均值的差值比較結果

單月 重力異常差值(mGal)	7 月	8 月	9 月	10 月
最大差值	0.036	0.020	0.033	0.046
經度 (deg)	56	286	74	328
緯度 (deg)	-12	42	33	37
最小差值	-0.040	-0.021	-0.028	-0.043
經度 (deg)	71	162	318	82
緯度 (deg)	25	82	36	30
差值平均	-0.003	-0.001	-0.000	-0.001
差值之 RMS	0.013	0.008	0.009	0.013



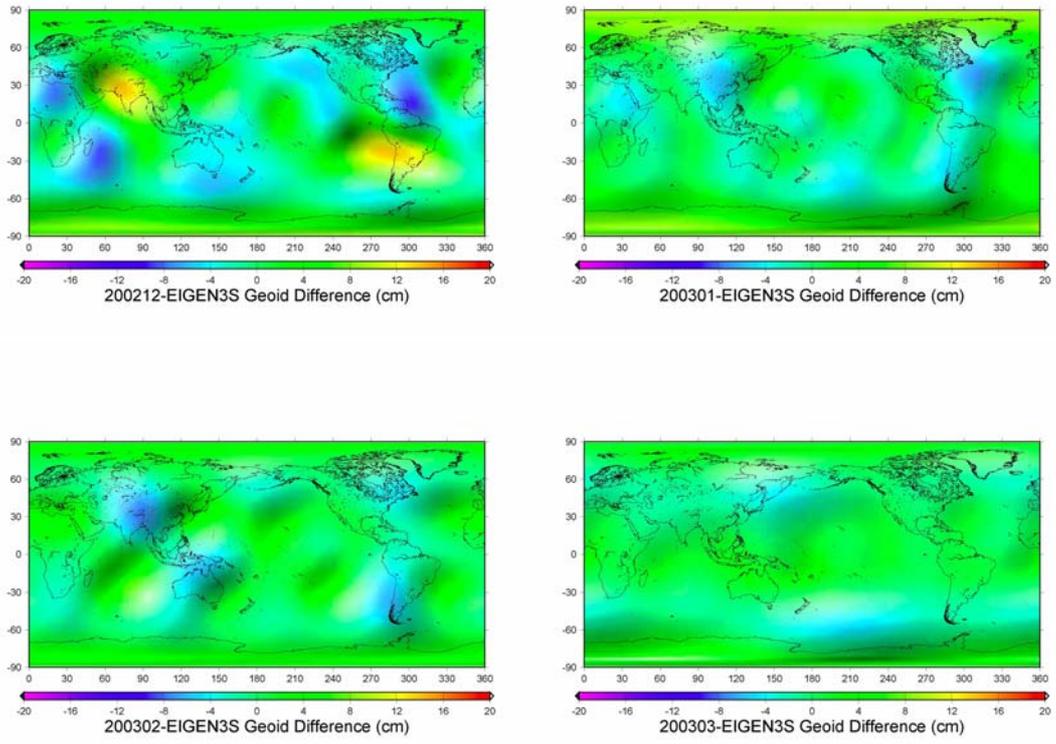
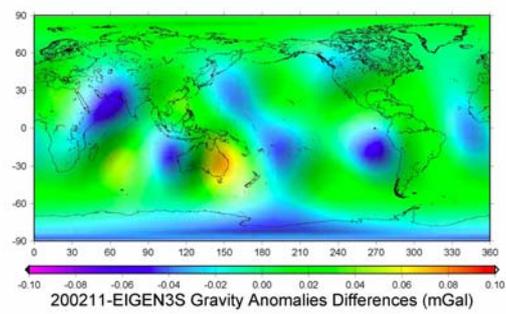
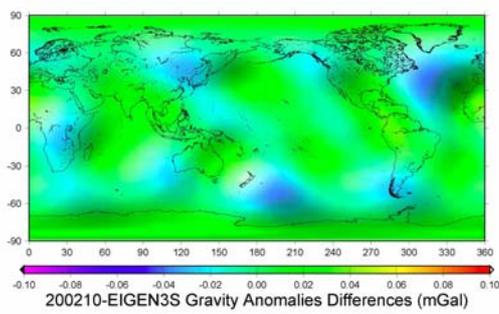
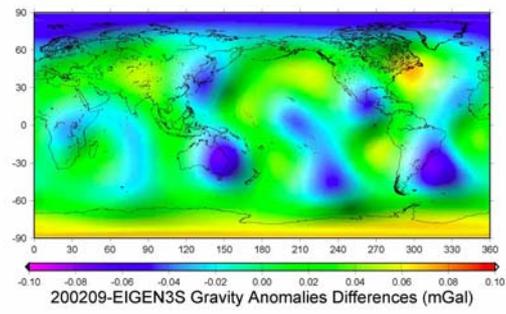
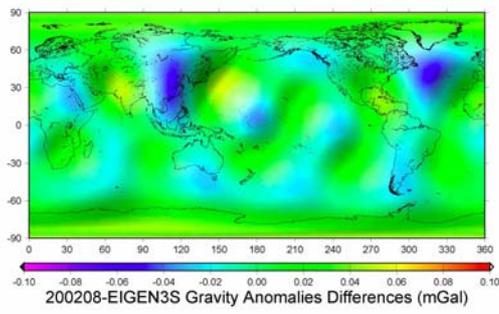
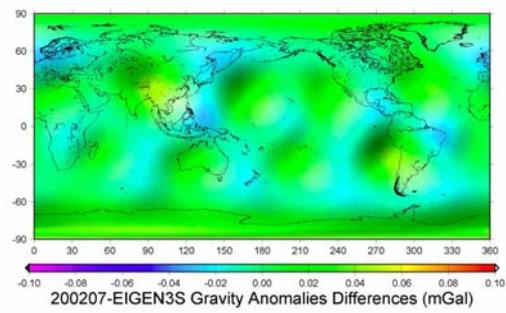
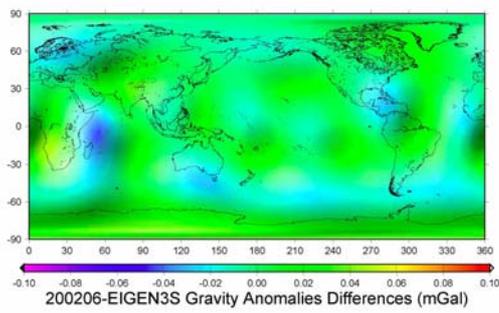
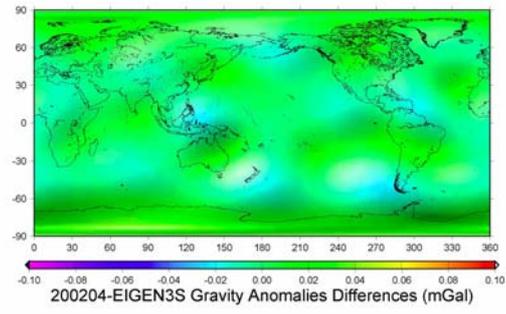
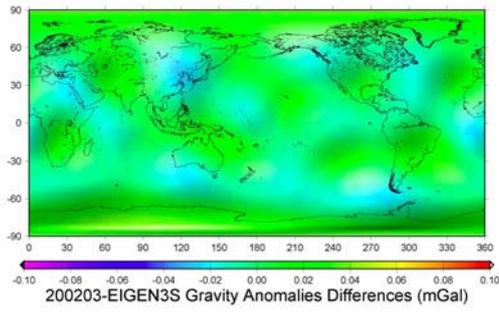


圖 7-9 CHAMP 每月解算之大地起伏與全年一起解算之大地起伏差異之變化





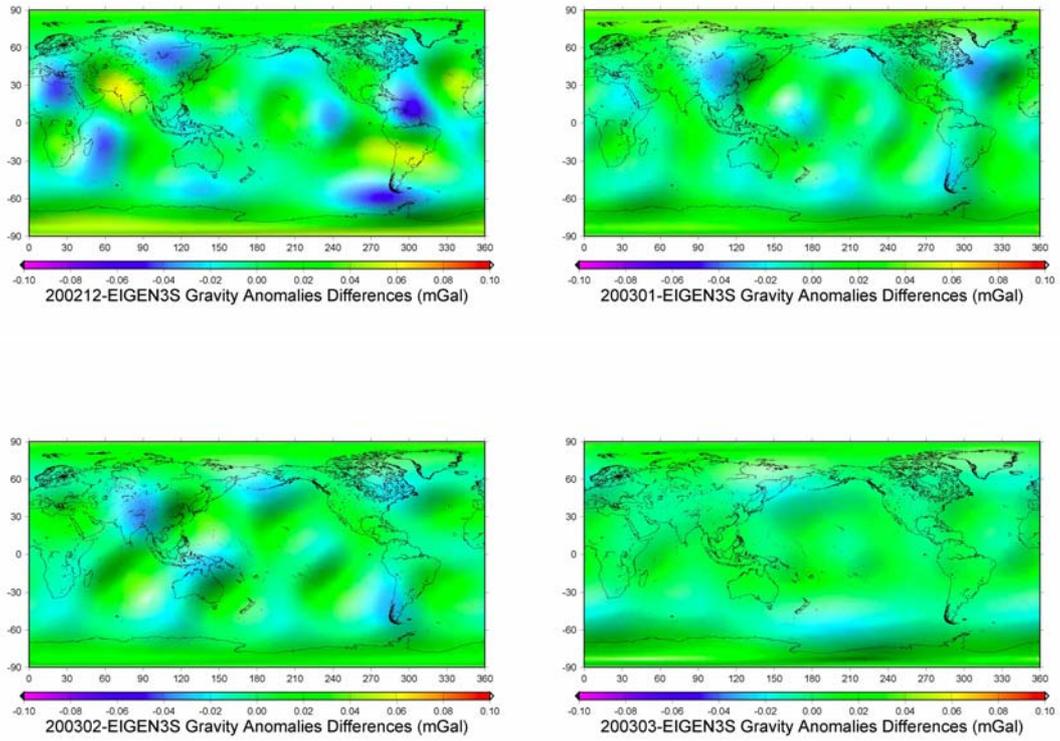


圖 7-10 CHAMP 每月解算之重力異常與全年一起解算之重力異常差異之變化

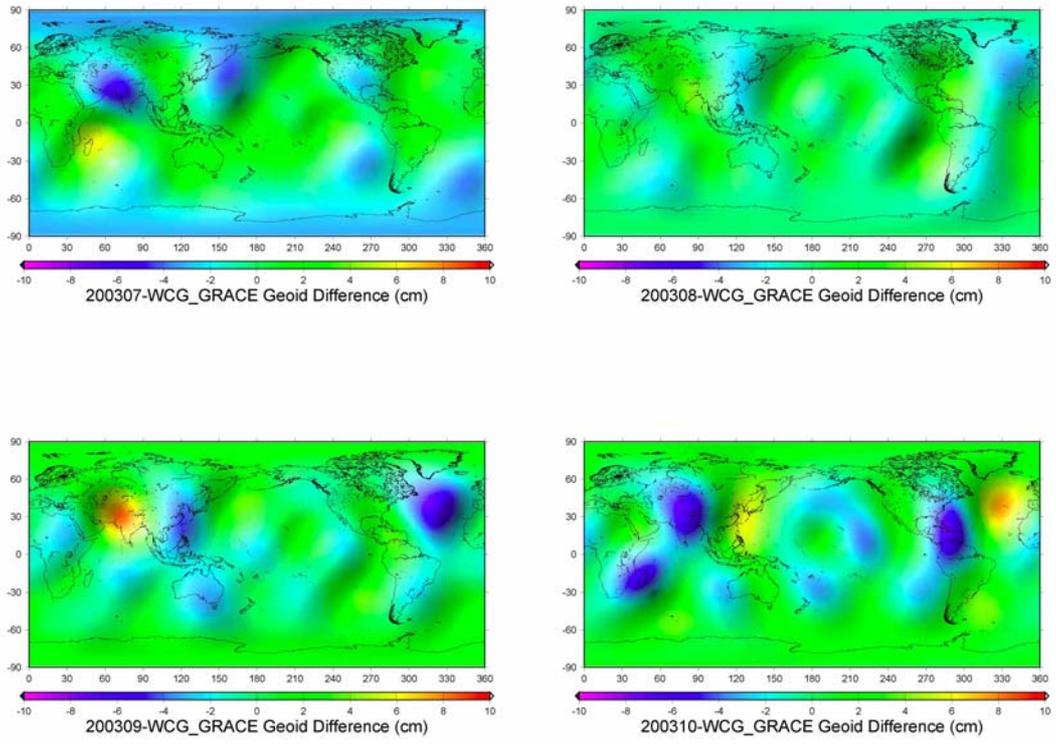


圖 7-11 GRACE 每月解算之大地起伏與 4 個月一起解算之大地起伏差異之變化

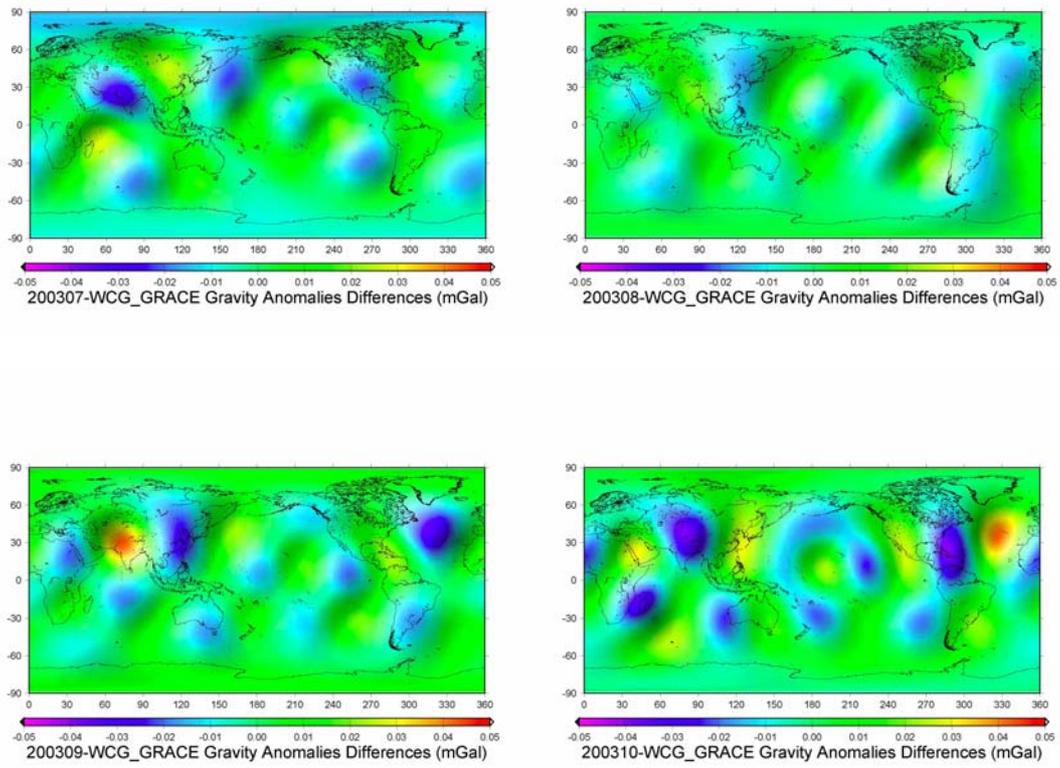
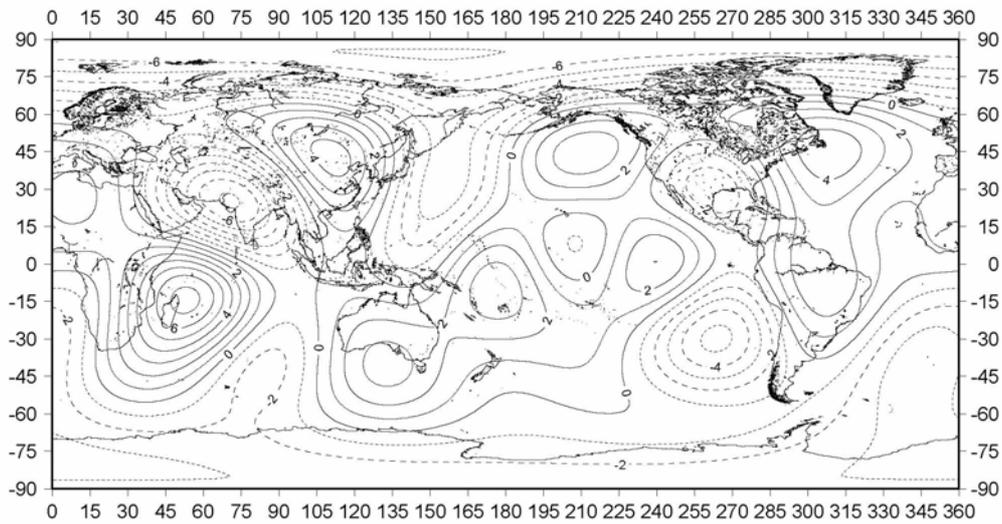
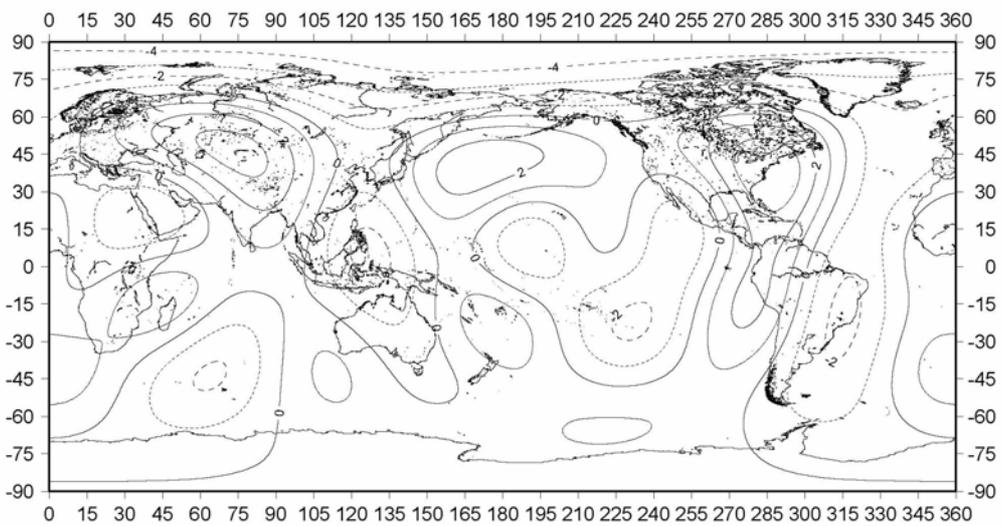


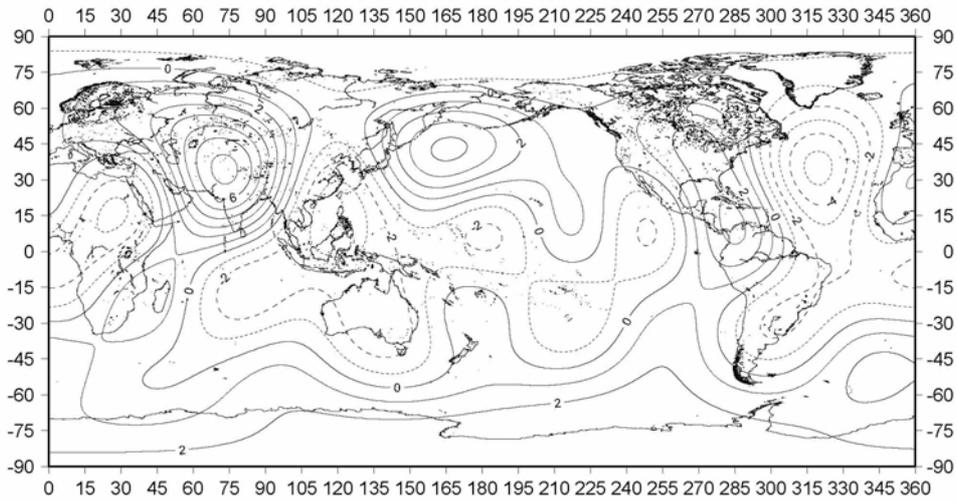
圖 7-12 GRACE 每月解算之重力異常與 4 個月一起解算之重力異常差異之變化



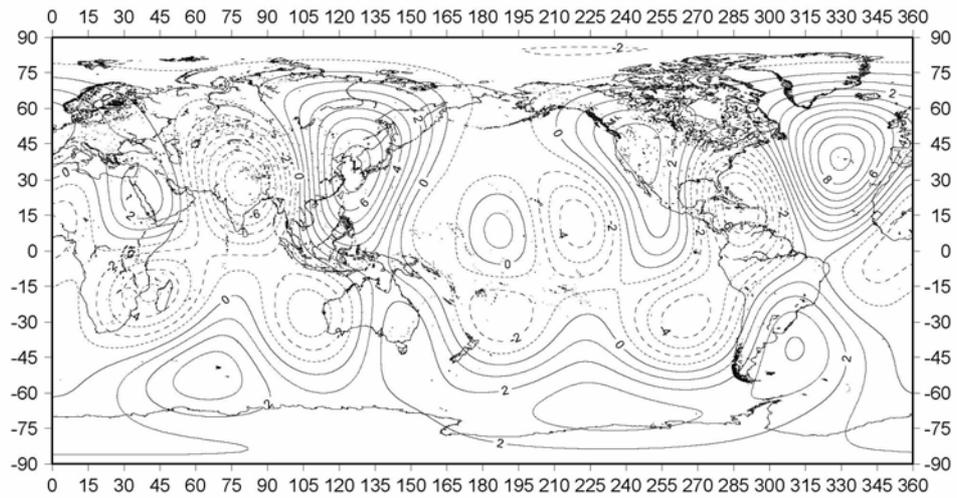
2003年7月



2003年8月



2003年9月



2003年10月

圖 7-13 GRACE 每月解算之大地起伏與 4 個月解算之大地起伏差異之等值圖  
(實線為正、虛線為負、單位公分)

## 7.5 低階係數變化之探討

表 7-5 為德國 GFZ 與美國德州大學 CSR 解算 CHAMP 及 GRACE5 之各種地球重力模型，表中  $\dot{J}_2, \dot{J}_3, \dot{J}_4$  是以 1997 年 1 月 1 日為起算基準，”—“ 表示未解算。EIGEN1S 是德國地學研究中心 GFZ 僅利用 CHAMP 衛星 88 天的 GPS 觀測資料、加速度計觀測資料等，因此以 GRIM5 為參考重力場，利用 EPOS 軟體解算的不完全到 119 階次的全球重力場模型[Reigber et al., 2002]。所以解算之  $\dot{J}_2, \dot{J}_3, \dot{J}_4$  與其他模型差異較大。

地位係數  $\bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}$  與地心位置有關[Heiskanen and Moritz, 1967]，因為地球質心為

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{e \text{ earth}}} \int \mathbf{s} \rho(\mathbf{s}) d^3 \mathbf{s} \quad (7-11)$$

式中， $\rho(\mathbf{s})$  為地球中位置  $\mathbf{s}$  處的密度。

根據引力位理論[Heiskanen and Moritz, 1967][Montenbruck and Gill, 2001]，地球引力位 1 階係數為

$$\begin{cases} C_{10} = \frac{1}{M_e R_{earth}} \int s \sin \phi \rho(\mathbf{s}) d^3 \mathbf{s} = \frac{dz}{R} = \sqrt{3} \bar{C}_{10} \\ C_{11} = \frac{1}{M_e R_{earth}} \int s \cos \phi \cos \lambda \rho(\mathbf{s}) d^3 \mathbf{s} = \frac{dx}{R} = \sqrt{3} \bar{C}_{11} \\ S_{11} = \frac{1}{M_e R_{earth}} \int s \cos \phi \sin \lambda \rho(\mathbf{s}) d^3 \mathbf{s} = \frac{dy}{R} = \sqrt{3} \bar{S}_{11} \end{cases} \quad (7-12)$$

式中， $s, \lambda, \phi$  為位置  $\mathbf{s}$  的地心球坐標。

一般皆假設坐標系原點為地球質心，則  $C_{10} = 0, C_{11} = 0, S_{11} = 0$ 。因地球並非剛體，所以地球參考框架的各點受到各種地球動力學的影響，存在非一致性位移，如板塊運動、構造活動、地殼載荷、冰後地殼回彈、地震、岩漿膨脹、潮汐載荷、質量重新分配等。因此，地球參考框架原點與地球質心之間存在地心運動，使得  $\bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}$  均不等於 0。由式 (7-12) 可得

$$\begin{cases} dx = RC_{11} = \sqrt{3}RC_{11} \\ dy = RS_{11} = \sqrt{3}RS_{11} \\ dz = RC_{10} = \sqrt{3}RC_{10} \end{cases} \quad (7-13)$$

在各種模型中皆有解出地位係數 $\bar{C}_{21}$ 、 $\bar{S}_{21}$ ，而 $\bar{C}_{21}$ 、 $\bar{S}_{21}$ 是描述坐標軸之位置，可說是自轉軸之變動，發現當吾人解算多年資料時，其多年之平均坐標軸位置與同時期之自轉軸平均位置幾乎一致，其細微差異是由於大氣、海洋或地涵流體之長期變動。

在 1994 年時[McCarthy, 1996]

$$\begin{aligned} \bar{C}_{21} &= \sqrt{3} \cdot x_p \cdot \bar{C}_{20} = -1.87 \times 10^{-10} \\ \bar{S}_{21} &= -\sqrt{3} \cdot y_p \cdot \bar{C}_{20} = 1.195 \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (7-14)$$

$x_p$ ， $y_p$  代表 ITRF 坐標框架極運動量，其值為

$$x_p = 2.23 \times 10^{-6} \text{ 徑度}$$

$$y_p = 1.425 \times 10^{-6} \text{ 徑度}$$

在 2000 年 1 月 1 日時[McCarthy, 2003]

$$\begin{aligned} \bar{C}_{21} &= \sqrt{3} \cdot x_p \cdot \bar{C}_{20} - x_p \cdot \bar{C}_{22} + y_p \cdot \bar{C}_{22} = -2.23 \times 10^{-10} \\ \bar{S}_{21} &= -\sqrt{3} \cdot y_p \cdot \bar{C}_{20} - y_p \cdot \bar{C}_{22} - x_p \cdot \bar{C}_{22} = 1.448 \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (7-15)$$

其中，

$$x_p = 0.262 \times 10^{-6} \text{ 徑度，}$$

$$y_p = 1.73 \times 10^{-6} \text{ 徑度，}$$

$\bar{C}_{21}$ 、 $\bar{S}_{21}$  是會隨著時間而變動的，代表著坐標軸的變動。

表 7-5 各種地球重力模型之  $\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}, j_2, j_3, j_4$  比較

重力模型	$\bar{C}_{00}$	$\bar{C}_{10}$	$\bar{C}_{11}$	$\bar{S}_{11}$	$j_2$	$j_3$	$j_4$
GGM01C	1	—	—	—	—	—	—
GGM01S	1	—	—	—	—	—	—
GGM02C	1	—	—	—	$-2.6 \times 10^{-11}$	—	—
GGM02S	1	—	—	—	$-2.6 \times 10^{-11}$	—	—
EIGEN-1S	1	—	—	—	$-1.6 \times 10^{-11}$	$5.7 \times 10^{-12}$	$-2.2 \times 10^{-11}$
EIGEN-2	1	—	—	—	—	—	—
EIGEN-3P	1	$-7.7 \times 10^{-10}$	$2.0 \times 10^{-10}$	$3.1 \times 10^{-11}$	$-2.6 \times 10^{-11}$	$-1.3 \times 10^{-11}$	$-1.4 \times 10^{-11}$
EIGEN-3S	1	$-8.3 \times 10^{-10}$	$-2.5 \times 10^{-10}$	$5.5 \times 10^{-11}$	$-2.6 \times 10^{-11}$	$-1.3 \times 10^{-11}$	$-1.4 \times 10^{-11}$
GRACE01S	1	—	—	—	—	—	—
GRACE02S	1	—	—	—	$-2.6 \times 10^{-11}$	$-1.3 \times 10^{-11}$	$-1.4 \times 10^{-11}$
EIGEN-CG01C	1	$-1.1 \times 10^{-9}$	$-3.4 \times 10^{-10}$	$1.1 \times 10^{-10}$	$-2.6 \times 10^{-11}$	$-1.3 \times 10^{-11}$	$-1.4 \times 10^{-11}$