

第四章 衛星軌道擾動力分析

人造衛星在太空中繞地球運行時受到的力一般分為兩大類，即中心力與非中心力。中心力是假設地球為一均質剛性球體對人造衛星產生的吸引力，主宰衛星運動之基本規律及特徵，此衛星軌道即所謂二體軌道(Two-Body Orbit)；非中心力是指人造衛星在太空中繞地球運行時所受到的擾動力，會使得衛星運動偏離二體軌道。一般又稱為擾動力，擾動力依來源又可分為引力及非引力兩部份，引力部分為保守擾動力，非引力部分為非保守擾動力，保守擾動力包括：地球非球體引力位擾動、多體擾動、因日月引力引起之地球固體潮擾動及海潮擾動、大氣潮擾動、極潮擾動等。非保守擾動力包括：大氣阻力擾動、太陽輻射壓擾動、地球輻射壓擾動及因相對論效應引起之擾動等，其中以地球引力場的影響最大，而其他作用力造成的加速度相較皆在兩個數量級以下，見表 4-1。

表 4-1 衛星受到各種擾動力的影響[Reigber, 1989]

擾動力來源	衛星加速度(單位：m/s ²)		
	STARLETTE 長軸半徑 (km)	LAGEOS	GPS
地球中心力	7.4	2.6	0.6
非球形引力			
二階帶諧項(C ₂₀)	8×10 ⁻³	2×10 ⁻³	5×10 ⁻⁵
其他球諧項	1×10 ⁻⁴	5×10 ⁻⁶	3×10 ⁻⁷
日月引力	1×10 ⁻⁶	2×10 ⁻⁶	5×10 ⁻⁶
地球固體潮	2×10 ⁻⁷	3×10 ⁻⁸	1×10 ⁻⁹
海潮	3×10 ⁻⁸	2×10 ⁻⁹	1×10 ⁻¹⁰
大氣阻力	1~2×10 ⁻¹⁰	<10 ⁻¹⁰	0
太陽輻射壓	5×10 ⁻⁹	4×10 ⁻⁹	1×10 ⁻⁷

由於人造衛星係繞地球運行，因此上述各種擾動力大多與地球有關，且又與衛星高度有關，衛星愈高所受之擾動力愈小，反之則愈大。本文所研究之二種衛星 CHAMP 及 GRACE，因係屬重力衛星探求地球重力場，軌道愈低愈能感應到

地球重力場，但又因屬低軌衛星 (Low Earth Orbit Satellite, LEO)，所受之擾動力較大不容忽視，更需精確計算，否則對定軌精度或反演重力場精度，將會大打折扣，因此本章將針對低軌衛星所受到之擾動力作一詳述，並以 CHAMP 衛星為例，實際計算各種擾動力之大小及特性。

在慣性坐標系統 (CIS) 中，設衛星在軌道中受到的總加速度為 a_T 中心力為 a_c ，又設衛星在軌道中受到的各種擾動加速度為 p ，則

$$a_T = a_c + p$$

$$p = a_{ns} + a_{nb} + a_{ot} + a_{st} + a_{pt} + a_{at} + a_{re} + a_{sr} + a_{er} + a_{ad} + a_{em} + a_{\Delta} \quad (4-1)$$

其中，

a_{ns} 為地球非球形引力加速度；

a_{nb} 為多體引力加速度；

a_{ot} 為海潮擾動加速度；

a_{st} 為固體潮擾動加速度；

a_{pt} 為極潮擾動加速度；

a_{at} 為大氣潮擾動加速度；

a_{re} 為相對論相應加速度；

a_{sr} 為太陽輻射壓加速度；

a_{er} 為地球輻射壓加速度；

a_{ad} 為空氣阻力加速度；

a_{em} 為經驗加速度；

a_{Δ} 為其他加速度 (包括衛星軌道校正加速度)。

下面就分保守擾動力及非保守擾動力探討。

4.1 低軌衛星的保守擾動力

4.1.1 地球非球形擾動力

地球是衛星運動的主要引力源，但地球並不是一個規則均質的球體，其質量分佈不均勻，形狀也不規則。根據地球引力位理論[Kaula, 1966][Heiskanen and Moritz, 1967]，地球引力位以球諧函數展開表示為[McCarthy, 1992]：

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \quad (4-2)$$

其中，

r 、 ϕ 、 λ 為衛星於地固坐標系之地心距離、地心緯度、地心經度；

M_e 、 a_e ：地球質量及地球參考橢球長軸半徑；

\bar{C}_{nm} 、 \bar{S}_{nm} 為完全正規化球諧係數 (Fully Normalized Spherical Harmonic Coefficient)；

\bar{P}_{nm} 為完全正規化諦合 Legendre 多項式 (Fully Normalized Associated Legendre Polynomial)；

n 、 m 分別為位係數球諧展開的階 (degree) 和次 (order)。

正規化和非正規化諦合 Legendre 函數之間的關係為

$$\bar{P}_{nm} = H_{nm} P_{nm} \quad (4-3)$$

式中，

$$H_{nm} = \left[\frac{(2 - \delta_m)(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}};$$

δ_m 為 Kronecker 運算元；

P_{nm} 為諦合 Legendre 函數 [Heiskanen and Moritz, 1967]。

正規化地球位係數與非正規化位元係數之間的關係為

$$\bar{C}_{nm} = \frac{C_{nm}}{H_{nm}}, \quad \bar{S}_{nm} = \frac{S_{nm}}{H_{nm}} \quad (4-4)$$

式 (4-2) 中右邊第一項為地球中心引力，其餘各項為地球非球形的擾動引力位，記為

$$R_{ns} = \frac{GM_e}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \quad (4-5)$$

實際應用中只能求得某階次以下的地球引力位，設最高階為 n_{\max} ，則式 (4-5) 可改寫為

$$R_{ns} = \frac{GM_e}{r} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \quad (4-6)$$

對 R_{ns} 取梯度，可得地球非球體引力位擾動產生之加速度 a_{ns}

$$a_{ns} = \nabla R_{ns} = \left[\frac{\partial R_{ns}}{\partial x} \quad \frac{\partial R_{ns}}{\partial y} \quad \frac{\partial R_{ns}}{\partial z} \right]^T \quad (4-7)$$

本文探求之地球重力場即是(4-5)式地球非球形擾動位，式中地位係數 \bar{C}_{nm} 、 \bar{S}_{nm} 即是本文所要求之主要未知數，因為地位係數是建立在地球固定坐標系統下，因此求解地位係數時， a_{ns} 必須在地球固定坐標系統下。

4.1.2 多體 (N-body) 擾動力

衛星不但受到地球的引力作用，還受到許多天體的作用，主要是太陽和月亮。如果多體擾動精度要求較高，還應顧及金星、木星、水星、土星、火星、天王星、海王星、冥王星等多個天體的擾動作用。根據 Newton 萬有引力定律，此擾動加速度可表示為[McCarthy, 1992]

$$a_{nb} = \sum_{i=1}^n GM_i \left(-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (4-8)$$

其中， n 、 M_i ：擾動星體個數及第 i 個擾動星體質量

G ：牛頓萬有引力常數 = $6.673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

\mathbf{r} 、 \mathbf{r}_i ：分別為衛星及第 i 個擾動星體在慣性坐標系的位置向量

衛星在慣性坐標系的位置向量可由星歷表查得，本文列入計算的星體包括：日、月及九大行星，目前常用的行星星曆為JPL提供的星曆，有DE200、DE403、DE405、DE406 等幾種，而本文研究使用的是DE200 行星星曆，式(4-8)只考慮了日月的球形部分的引力影響，實際上日月並非真正的圓球，因此日月非球形對低軌衛星也有擾動影響[Cappellari et al., 1976]，擾動加速度約為其球形部分的 10^{-4} ，其擾動加速度公式為

$$\Delta a_{nb} = \frac{M_m}{M_e} \nabla \delta u_m \mathbf{r}_e^m - \nabla \delta u_e \mathbf{r}_m + \frac{M_s}{M_e} \nabla (\delta u_m) \mathbf{r}_e^s - \nabla (\delta u_e) \mathbf{r}_s \quad (4-9)$$

式中，

δu_e 、 δu_m 、 δu_s 分別表示地球、月亮和太陽的非球形部分引起的擾動位；

\mathbf{r}_m 、 \mathbf{r}_s 分別為月球和太陽在地心慣性系中的位置向量；

\mathbf{r}_e^m 、 \mathbf{r}_e^s 分別表示地球在月心慣性系和太陽慣性系中的位置向量。

本文計算CHAMP衛星 2001 年 5 月 21 日所受多體擾動加速度如圖 4-1，其數量級為 10^{-6} m/s^2 。

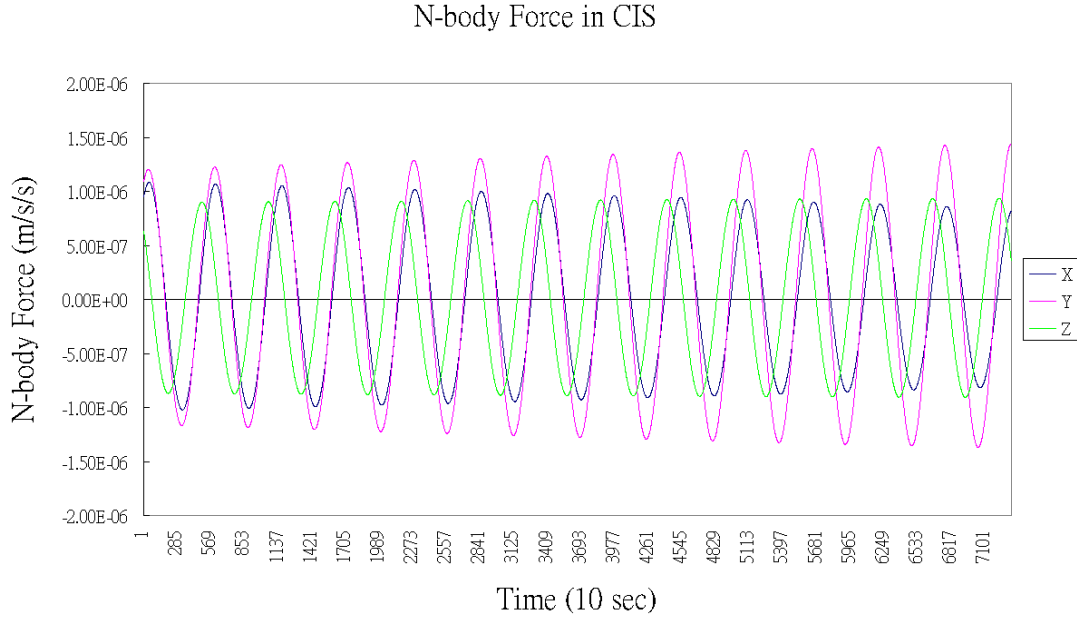


圖 4-1 CHAMP 衛星 2001 年 5 月 21 日所受多體擾動加速度

4.1.3 海潮擾動力

受到日月引力作用，海洋會產生潮汐的變化，該變化使得地球內部質量重新分配，而引起擾動引力位。海潮引起的擾動位與引力位相似，可展開成球諧函數之形式

$$\Delta V_{ot} = \frac{GM_e}{r} \left[\sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \right] \quad (4-10)$$

在(4-10)式中之球諧係數是海潮引起之變化，Eanes 推出下式[McCarthy, 1992]：

$$\begin{cases} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{cases} = F_{nm} \begin{cases} \sum_s \sum_{n=0} \sum_{m=0} (C_{snm}^+ + C_{snm}^-) \cos \theta_s + (S_{snm}^+ + S_{snm}^-) \sin \theta_s \\ \sum_s \sum_{n=0} \sum_{m=0} (S_{snm}^+ + S_{snm}^-) \cos \theta_s - (C_{snm}^+ + C_{snm}^-) \sin \theta_s \end{cases} \quad (4-11)$$

$$F_{nm} = \frac{4\pi G a_e \rho_w}{GM_e} \frac{1+k_n'}{2n+1} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{om})}}$$

其中， G ：萬有引力常數

a_e 、 M_e ：地球參考橢球體半徑及地球質量

ρ_w ：海水密度

k'_n ：負載洛夫數(loading Love number)，為反應地球內部構造的參數

C_{smm}^\pm 、 S_{smm}^\pm ：為第 s 種海潮模式引起之海潮係數

θ_s ：海潮幅角，由六個Doodson number及六個天文幅角組合而成

$m=0$ 時， $\delta_{om} \neq 0$ ； $m=1$ 時， $\delta_{om} = 0$ 4.1.3.1 海潮擾動模式公式[張莉雪，2003]

在潮高計算中，須知海潮之幅角(argument, θ_s) [McCarthy, 1992]

$$\theta_s = \bar{n} \cdot \bar{\beta} = \sum_{i=1}^6 n_i \beta_i \quad (4-12)$$

其中 \bar{n} 含六個 Doodson number，在海潮模式中，該向量可表示成海潮之幅角數以之作為各分潮之命名。幅角數為連續的六個數字，表示為[McCarthy, 1996]：

$$n_1(n_2+5)(n_3+5).(n_4+5)(n_5+5)(n_6+5) \quad (4-13)$$

$\bar{\beta}$ 含六個天文角，分別為[McCarthy, 1992]：

$$\begin{aligned} \beta_2 &= s = F + \Omega && \text{(月亮之平黃經)} \\ \beta_3 &= h = s - D && \text{(太陽之平黃經)} \\ \beta_4 &= p = s - l && \text{(月亮近地點之平黃經)} \\ \beta_5 &= N' = -\Omega && \text{(月亮升交點之平黃經的負數)} \\ \beta_5 &= p_1 = s - D - l' && \text{(太陽近地點之平黃經)} \\ \beta_1 &= \tau = GMST + \pi - s && \text{(平太陽時)} \end{aligned} \quad (4-14)$$

其中， l 為月亮之平近點角(mean anomaly of the moon)

$$l = 134^\circ 57' 46.733'' + (1325^r + 198^\circ 52' 02.633'')t + 31.310''t^2 + 0.064''t^3 \quad (4-15)$$

l' 為太陽之平近點角(mean anomaly of the sun)

$$l' = 357^\circ 31' 39.804'' + (99^r + 359^\circ 03' 01.224'')t - 13.257''t^2 - 0.012''t^3 \quad (4-16)$$

Ω 為月球軌道升交點的平經度 (Mean longitude of the ascending node of the lunar

orbit)

$$\Omega = 125^{\circ}02'40.280'' - (5^r + 134^{\circ}08'10.539'')t - 7.455''t^2 + 0.008''t^3 \quad (4-17)$$

$$F = 93^{\circ}16'18.877'' + (1342^r + 82^{\circ}01'03.137'')t - 13.257''t^2 + 0.011''t^3 \quad (4-18)$$

$$D = 297^{\circ}51'01.307'' + (1326^r + 307^{\circ}06'41.328'')t - 6.891''t^2 + 0.019''t^3 \quad (4-19)$$

在 (4-15) 到 (4-19) 式中， $1^r=360^{\circ}$ ， t 為儒略世紀數，採用 J2000.0 時間系統。

$$t = (TDB - J2000.0) / 36525 \quad (4-20)$$

其中，J2000.0 為西元 2000 年 1 月 1 日中午之儒略日，TDB 為太陽動力時。

本文計算海潮擾動力時是採用 CSR3.0 海潮模式，此模式是利用 TOPEX/POSEIDON 衛星 89 個週期 (2.4 年) 的測高資料計算而得 [Eanes and Bettadpur, 1996]，由德州大學 Center for Space Research (CSR) 建構。在 CSR3.0 中，考慮 233 種分潮效應，最高考慮階數為 30，由於有些分潮的高階項影響相當小，因此並非將 233 種分潮都列出 30 乘 30 個海潮係數，而是僅記錄影響較大之海潮係數共計 1924 個。目前全世界影響最大的 30 個分潮包括： M_0 、 S_0 、 S_a 、 S_{sa} 、 M_m 、 M_f 、 Q_1 、 O_1 、 M_1 、 π_1 、 P_1 、 S_1 、 mK_1 、 sK_1 、 ψ_1 、 ϕ_1 、 J_1 、 OO_1 、 $2N_2$ 、 μ_2 、 N_2 、 ν_2 、 M_2 、 λ_2 、 L_2 、 T_2 、 S_2 、 R_2 、 mK_2 、 sK_2 等，表 4-2 列出此 30 種常見之分潮相關係數。

CSR3.0 海潮模式除了提供 1924 對球諧係數外，還包括許多潮汐資訊，如地球平均半徑、地球質量及海水密度、30 階負載洛夫數 (Loading Love number)，各分潮之 Doodson number、最高計算階數、振幅、頻率、 χ_s 值及 Wahr χ_k [Wahr, 1981] 值等。CSR3.0 計算之潮汐除了考慮日月及其它天體影響外，另外還包括地球自轉、章動、極移及大氣潮等修正，這些修正值列於 CSR3.0 模式最下面，使用時，必須將這些資料讀入，以此修正 CSR3.0 海潮模式以臻完善 [Eanes and Bettadpur, 1996]。

表 4-2 常見由太陽或月亮引起之海潮模式 [Moritz and Mueller, 1987]

符號	Doodson number	頻率 ($^{\circ}$)/h	振幅 (m^2s^{-2})	來源
長周期潮				

符號	Doodson number	頻率 (°)/h	振幅 (m ² s ⁻²)	來源
M ₀	055.555	0.000000°	-1.326	月亮
S ₀	055.555	0.000000°	-0.615	太陽
S _a	056.554	0.041067°	-0.031	太陽
S _{sa}	057.555	0.082137°	-0.191	太陽
M _m	065.455	0.544375°	-0.217	月亮
M _f	075.555	1.098033°	-0.411	月亮
周日潮				
Q ₁	135.655	13.398661°	+0.126	月亮
O ₁	145.555	13.943036°	+0.660	月亮
M ₁	155.655	14.496694°	-0.052	月亮
π ₁	162.556	14.917865°	+0.018	月亮
P ₁	163.555	14.958931°	+0.308	太陽
S ₁	164.556	15.000002°	-0.007	太陽
^m K ₁	165.555	15.041069°	-0.635	月亮
^s K ₁	165.555	15.041069°	-0.295	太陽
ψ ₁	166.554	15.082135°	-0.007	太陽
φ ₁	167.555	15.123206°	-0.013	太陽
J ₁	175.455	15.585443°	-0.052	月亮
OO ₁	185.555	16.139102°	-0.028	月亮
半日潮				
2N ₂	235.755	27.895355°	+0.020	月亮
μ ₂	237.555	27.968208°	+0.024	月亮
N ₂	245.655	28.439730°	+0.152	月亮

符號	Doodson number	頻率 (°)/h	振幅 (m ² s ⁻²)	來源
v ₂	247.455	28.512583°	+0.029	月亮
M ₂	255.555	28.984104°	+0.795	月亮
λ ₂	263.655	29.455625°	-0.006	月亮
L ₂	265.455	29.528479°	-0.022	月亮
T ₂	272.556	29.958933°	+0.022	太陽
S ₂	273.555	30.000000°	+0.370	太陽
R ₂	274.554	30.041067°	-0.003	太陽
^m K ₂	275.555	30.082137°	+0.069	月亮
^s K ₂	275.555	30.082137°	+0.032	太陽

本文計算CHAMP衛星 2001 年 5 月 21 日所受海潮擾動加速度如圖 4-2，其數量級為 10⁻⁷ m/s²。



Ocean Tide Force in CIS

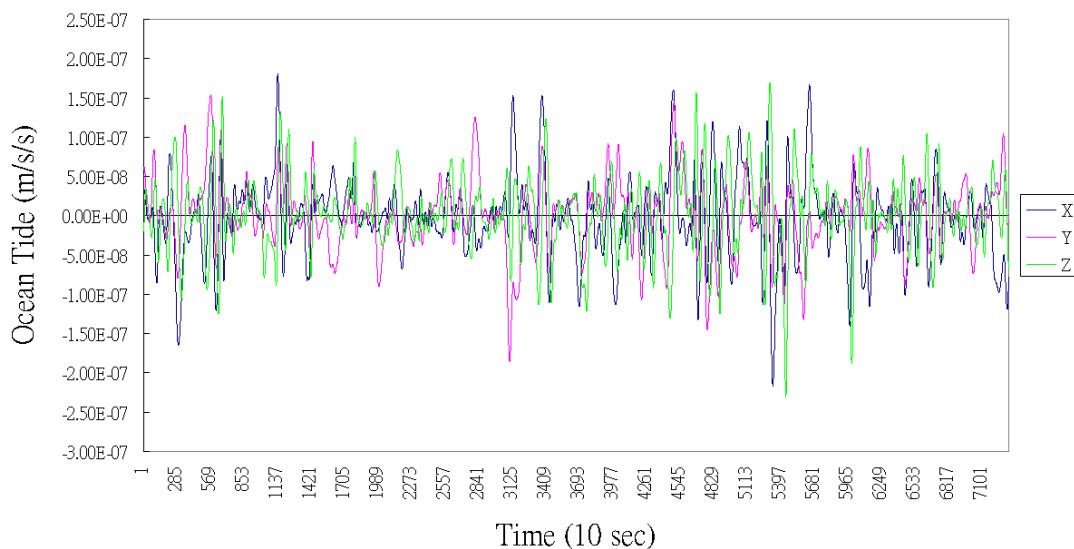


圖 4-2 CHAMP 衛星 2001 年 5 月 21 日所受海潮擾動加速度

4.1.4 固體潮擾動力

由於地球是一個具有一定粘彈性的非剛體，在日月等天體的引力作用下，地球會發生形變，產生固體潮。固體潮擾動引起地球引力位係數的變化，對 CHAMP 和 GRACE 衛星，本文計算之數量級為 10^{-7} m/s^2 。由於地球為一具有彈性之星體，因此受到日月引力的影響會造成地球形狀改變，相對的地球引力位也會發生變化而產生擾動加速度。與引力位相似，固體潮造成之擾動位亦可展開表示成球諧函數之形式

$$\Delta V_{et} = \frac{GM_e}{r} \left[\sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \right] \quad (4-21)$$

在(4-21)式中之球諧係數是固體潮引起相對於平均地球之變化。IERS1992 年技術報告中，固體潮擾動位球諧係數僅計算到二階，而 1996 年技術報告則計算到 4 階，本文計算到 2 階，計算過程分為三部分：

(1) 第一部分使用二階洛夫數 (Love number) 推求受到日、月引力所造成的固體潮球諧係數，即 [McCarthy, 1996]：

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{20} &= \frac{1}{\sqrt{5}} k_2 \frac{a_e^3}{GM_e} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\sin \phi_j) \\ \Delta \bar{C}_{21} - i\Delta \bar{S}_{21} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{5}} k_2 \frac{a_e^3}{GM_e} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{r_j^3} P_{21}(\sin \phi_j) e^{-i\lambda_j} \\ \Delta \bar{C}_{22} - i\Delta \bar{S}_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{5}} k_2 \frac{a_e^3}{GM_e} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{r_j^3} P_{22}(\sin \phi_j) e^{-i2\lambda_j} \end{aligned} \quad (4-22)$$

其中， k_2 ：二階洛夫數(Love number)

a_e 、 M_e ：地球半徑與地球質量

G ：牛頓萬有引力常數

M_j 、 r_j ：擾動星體(日或月)之質量及離地球質量中心之距離

λ_j 、 ϕ_j ：擾動星體(日或月)在地固坐標系統中之經緯度值

而在(4-21)式中，二階洛夫數是地球因變形產生質量重新分配所引起引力位

變化的比例參數，可用來反應地球內部構造的參數，地球為剛體時其值為零，若地球內部均質時則值為 1，根據 Cheng et al.[1997]利用多衛星之 SLR 資料以及 Wu et al.[1999]利用 Lageos SLR 資料計算地球的 k_2 值約為 0.3。

(2) 固體潮球諧係數計算的第二部分主要是修改海洋潮汐對固體潮球諧係數之影響為[McCarthy, 1992]：

$$\delta\bar{C}_{nm} - i\delta\bar{S}_{nm} = A_m \sum_{s(n,m)} \delta k_s H_s \begin{pmatrix} 1 & n+m \text{ even} \\ -i & n+m \text{ odd} \end{pmatrix} e^{i\theta_s} \quad (4-23)$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{Ae\sqrt{4\pi(2-\delta_{om})}}, \quad \delta_{om} = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

其中， $\delta k_s = k_s - k_2$ ， k_2 為二階洛夫數， k_s 為S頻率時之洛夫數

H_s ：海潮之振幅

θ_s ：海潮幅角，由六個 Doodson number 及六個天文幅角組合而成

$\delta\bar{C}_{nm}$ 、 $\delta\bar{S}_{nm}$ ：為(4-22)式球諧係數修正值

而表 4-3 列出八種主要潮汐對固體潮球諧係數修改之參數值。

表 4-3 潮汐對固體潮球諧係數修改之參數值

周日潮 (n=2, m=1)	
Doodson Number	$A_m \delta k_s H_s \times 10^{12}$
145.555 (O ₁)	-16.4
163.555 (P ₁)	-49.6
165.545	-9.4
165.555 (K ₁)	507.4
165.565	73.5
166.554 (Ψ ₁)	-15.2
半日潮 (n=2, m=2)	
255.555 (M ₂)	39.5
273.555 (S ₂)	18.4

(3) 第三部分是針對地球引力場所做之修正，若使用的大地位模式中， C_{20} 項係數已考慮永久潮(Permanent Tide)之影響，則在此必須扣除永久潮零頻項(zero frequency)[McCarthy, 1996]：

$$\overline{\delta C_{20}} = -4.201 \times 10^{-9}$$

本文計算CHAMP衛星 2001 年 5 月 21 日所受固體潮擾動加速度如圖 4-3，其數量級為 10^{-7} m/s^2 。

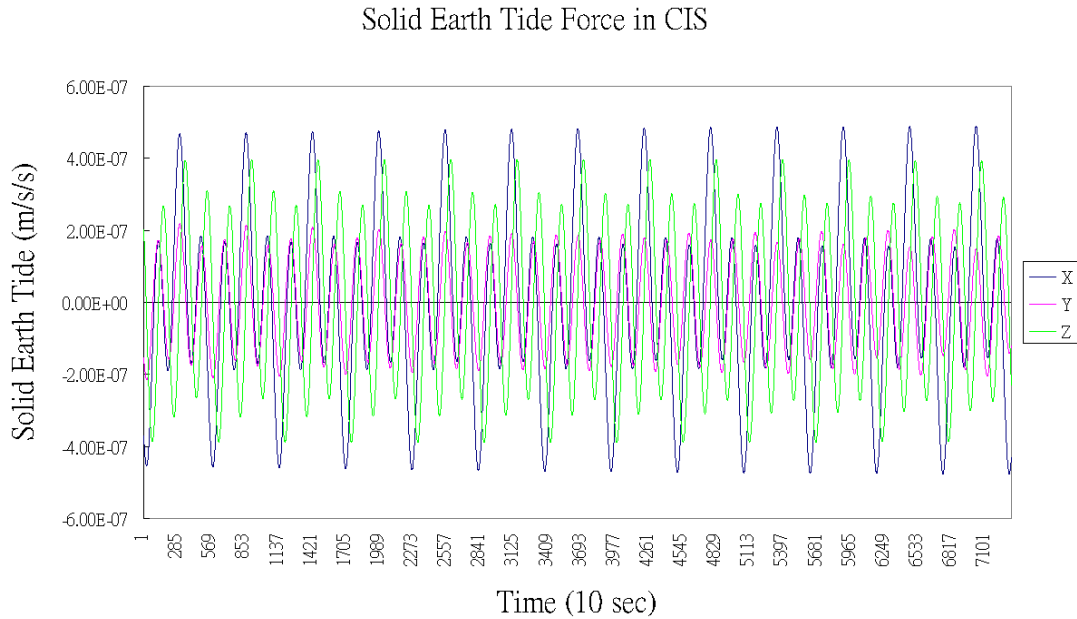


圖 4-3 CHAMP 衛星 2001 年 5 月 21 日所受固體潮擾動加速度

4.1.5 大氣潮

大氣是有質量的，在日月引力作用下，大氣還會出現大氣潮，大氣潮擾動量級小於 10^{-11} [Zhu et al., 1996]，因此主要考慮主潮波 S_2 的影響，計算公式為

$$\Delta \overline{C}_{22} - i \Delta \overline{S}_{22} = -0.858 F_{22} e^{i\theta_s} \quad (4-24)$$

式中，

θ_s 為潮波分量 s_2 的天文幅角；

$$F_{22} = \frac{1.2394 \pi G \rho_a a_e^2}{GM_e} (1 + k'_2) ;$$

ρ_a 為大氣密度；

k'_2 為二階負載洛夫數；

a_e 為地球半徑。

GFZ 在處理 CHAMP 及 GRACE 衛星所受之大氣潮時，有不同的處理方法，

尤其是 GRACE 衛星，因為 GRACE 有探求地球重力場時變之設計，即每月求得一重力場，因此對大氣及海水質量之變化分析更是慎重，茲將處理方式作一說明。

由於大氣及海水質量會隨著時間變化，造成運行中之衛星軌道擾動，如果沒有利用短時間內重複觀測來清除，這些隨著時間而變的擾動力，在觀測資料處理過程中必須要考慮到，由於 CHAMP、GRACE、GOCE 及 COSMICS 任務型態並無法利用重複觀測來消除上述之擾動力，因此，這些擾動力是在求解地球重力場時一併考慮。

這方面之擾動來源可分為二部分：

1. 高頻擾動：潮汐、大氣、海洋、內陸水（雪、冰、地下水）
2. 季節性之擾動：大氣、海洋、內陸水、冰的質量

由 GFZ 分析可知，在大氣質量變化的高頻部分對 CHAMP、GRACE、GOCE 三種衛星任務都有很大之影響，雖然海水質量變化之影響小於大氣質量變化之影響，但對 CHAMP 及 GRACE 衛星仍有不小之影響，由於 GOCE 攜帶之重力梯度儀是量測重力位之二次導數，所以對長波長質量變化之敏感度較小，但是，因為 GOCE 亦有 GPS 接收儀，因此，對長波長重力仍如同 CHAMP 衛星有類似之誤差頻譜資料，意思是說，當結合 GOCE 之 HL-SST 衛星追蹤衛星資料及重力梯度觀測量，仍然可偵測到海洋質量之變化。

整個歐洲每個月之水文訊號（降雨量減去蒸發量），也是可以偵測得到，GRACE 將藉著計算每月之重力場偵測到這個長波長訊號，並以時間序列分析比較，由於 GOCE 任務時間不長，無法得到一整年之資料，而很明顯地，這些每月陸地上水文質量之變化將對 GOCE 衛星造成影響，而且在大氣及海洋質量季節性的變化對 GOCE 之影響仍有類似情形，所幸每個月 GRACE 重力場的解可用於消除 GOCE 觀測量之所謂季節性的影響。

對 GRACE 而言，處理高頻部分是最重要的，因為 GRACE 計畫計算每個月之重力場可提供季節性變化之擾動。由研究指出大氣之高頻質量變化之擾動比海潮擾動大許多。

為了研究大氣對低軌衛星之擾動，GFZ 使用三種不同數值氣象服務中心提供之資料有 Deutscher Wetter Dienst (DWD)、National Center for Environmental Predictions (NCEP) 和 European Center for Medium-range Weather Forecast

(ECMWF)，所需之資料空間解析度為 0.5 度，時間解析度為 6 小時。

目前處理大氣質量變化之擾動力有二種方法，較簡單的一種是利用在地球表面上單一層之球諧分析，將表面之壓力轉換成重力球諧係數展開至 100 階，另一種方法較複雜，但較正確之方法是大氣密度之垂直積分，並利用球諧分析計算地位係數，當結合大氣及海洋擾動分析時需要平均之大氣及海洋質量，以便求得殘餘質量之變化，由於目前沒有足夠精度及解析度之全球水文模式，因此，由於陸地上水之重新分配所引起之短週期變化之擾動，GFZ 並未分析。茲將上述二法簡述如下：

(一) 地表壓力法

經由應用重新率定的球諧函數係數的特定因子，可輕易利用球諧分析及積分將地表壓力資料轉換為重力球諧函數。地球外部任一點的重力位 V ，由於地球內部異質質量分布所形成的重力位，可利用球諧函數展開式表示，式中使用正規化地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} (n 階 m 次的係數)，公式如下 [Heiskanen and Moritz, 1967]：

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \quad (4-25)$$

$$C_{nm} = \frac{1}{(2n+1)Ma^n} \iiint_{Earth} r^n P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda dM \quad (4-26)$$

$$S_{nm} = \frac{1}{(2n+1)Ma^n} \iiint_{Earth} r^n P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda dM$$

引入單位質量、單位體積及單位地表面積：

$$dM = \rho dV = \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\lambda = r^2 q \sin \theta d\theta d\lambda = r^2 q dS \quad (4-27)$$

G ：重力常數

a ：地球半徑

M ：地球質量

P_{nm} ：正規化諦合勒戎德多項式 (Associated Legendre Polynomials)

(r, θ, λ) ：單位質量的球坐標

dM ：單位質量

dV ：單位體積

ρ ：密度

q ：地表負載 (單位地表面積的質量)

dS ：單位地表面積

引入單位體積後，在全球積分時，可將密度視為一因子。密度變化主要發生在水圈（包含大氣及海洋），且在固體地球表面產生變化的負載效應。地表負載以單位地表面積（ q ）的質量表示。由於在地表上，變數 r 以地球半徑 a 代入，則地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} 可表示為

$$C_{nm} = \frac{a^2}{(2n+1)M} \iint_{Earth} q^n P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda dS \quad (4-28)$$

$$S_{nm} = \frac{a^2}{(2n+1)M} \iint_{Earth} q^n P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda dS$$

地表負載表示如下

$$q = \frac{P_s}{g} \rho h \quad (4-29)$$

其中

P_s ：地表氣壓

g ：平均重力加速度

ρ_w ：水的密度（海水 1040，淡水 1000 kg/m³）

h ：水柱高（1 mm = 1 kg/m²）

將（4-29）式代入，則地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} 可表示為

$$C_{nm} = \frac{a^2}{(2n+1)Mg} \iint_{Earth} P_s^n P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda dS \quad (4-30)$$

$$S_{nm} = \frac{a^2}{(2n+1)Mg} \iint_{Earth} P_s^n P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda dS$$

最後，再將變動的負載所產生地球的彈性變形加以考慮，引入代表 n 階的負載球諧係數—負載洛夫數 k_n （load Love number），可得下式

$$C_{nm} = \frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg} \iint_{Earth} P_s^n P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda dS \quad (4-31)$$

$$S_{nm} = \frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg} \iint_{Earth} P_s^n P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda dS$$

其中， k_0 至 k_{100} 之數值如下[Flechtner, 2003]：

$$k_0 = 0 ; \quad k_1 = 0 ; \quad k_2 = -0.308 ; \quad k_3 = -0.195$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= -0.132 ; & k_5 &= -0.103 ; & k_6 &= -0.089 ; & k_7 &= -0.082 \\
k_8 &= -0.078 ; & k_9 &= -0.073 \\
k_{10} \text{到} k_{17} &: -(0.682+0.27 \times (n-10)/8)/n \\
k_{18} \text{到} k_{31} &: -(0.952+0.288 \times (n-18)/14)/n \\
k_{32} \text{到} k_{55} &: -(1.24+0.162 \times (n-32)/24)/n \\
k_{56} \text{到} k_{100} &: -(1.402+0.059 \times (n-56)/44)/n
\end{aligned}$$

資料處理的起始點是規則網格點的地表氣壓，在積分前須先將網格點的地表氣壓計算出區塊平均值，代表該區塊的地表氣壓，而區塊是定義在規則網格上。為了分析由大氣地表氣壓變化所導致的重力變化，資料處理時，須扣除大於一年資料的地表氣壓的平均值，以避免季節性影響，扣除後，其地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} 可表示為

$$\begin{aligned}
C_{nm} &= \frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg_{Earth}} \iint_{Earth} (P_s^n \bar{P}_{nm}) P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda dS \\
S_{nm} &= \frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg_{Earth}} \iint_{Earth} (P_s^n \bar{P}_{nm}) P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda dS
\end{aligned} \tag{4-32}$$

其次，以勒戎德多項式分別針對經度及緯度進行積分，求得剩餘的重力球諧序列，即為由大氣質量變化所生重力變化。

(二) 垂直積分法

當我們考慮大氣層的垂直結構時，必須進行大氣層質量的垂直積分，我們由(4-25)至(4-27)式得下列式子：

$$\begin{aligned}
C_{nm} &= \frac{1}{(2n+1)Ma^n} \iint_{Earth} \left[\int_0^\infty r^{n+2} \rho dr \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda \\
S_{nm} &= \frac{1}{(2n+1)Ma^n} \iint_{Earth} \left[\int_0^\infty r^{n+2} \rho dr \right] P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda
\end{aligned} \tag{4-33}$$

此時，以靜力公式 (hydrostatic equation) 代入

$$\rho dr = -\frac{dP}{g_r} \tag{4-34}$$

得地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} 如下：

$$C_{nm} = -\frac{1}{(2n+1)Ma^n} \iint_{Earth} \left[\int_{Ps}^0 \frac{r^{n+2}}{g_r} dP \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda$$

$$S_{nm} = -\frac{1}{(2n+1)Ma^n} \iint_{Earth} \left[\int_{Ps}^0 \frac{r^{n+2}}{g_r} dP \right] P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda$$
(4-35)

其中，在高度 r 之加速度利用平均重力加速度以下式求得

$$g_r = g \left(\frac{a}{r} \right)^2$$
(4-36)

並代入，得

$$C_{nm} = -\frac{1}{(2n+1)Ma^{n+2}g} \iint_{Earth} \left[\int_{Ps}^0 r^{n+4} dp \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda$$

$$S_{nm} = -\frac{1}{(2n+1)Ma^{n+2}g} \iint_{Earth} \left[\int_{Ps}^0 r^{n+4} dp \right] P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda$$
(4-37)

其中，徑向坐標值 r 為

$$r = r_s + \delta_r = a + \xi + h + \delta_r = a + \xi + z$$
(4-38)

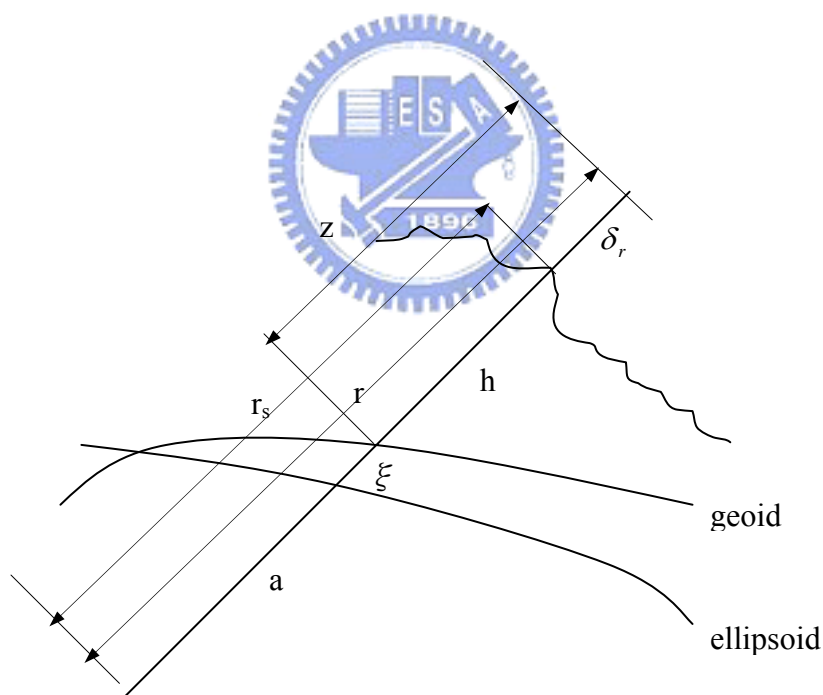


圖 4-4 垂直積分法所用徑向分量 r 示意圖

ξ ：大地水準面在地球平均半徑 ($r = a$) 之上的高度
 h ：地表在大地水準面之上的高度 (地球的表面地形)

$$\Phi = \frac{1}{g_0} \int_0^z g_r dz = a \left(\frac{z}{a+z} \right)$$
(4-39)

$$\Phi = a\left(\frac{z}{a+z}\right) \Rightarrow \frac{\Phi}{a} = \frac{z}{a+z} \Rightarrow z = \frac{(z+a)\Phi}{a} \Rightarrow z = \frac{\Phi a}{a} + \frac{\Phi z}{a} \Rightarrow$$

$$\Phi = z - \frac{\Phi z}{a} \Rightarrow \Phi = z\left(1 - \frac{\Phi}{a}\right) \Rightarrow z = \frac{\Phi}{\left(1 - \frac{\Phi}{a}\right)} \quad (4-40)$$

$$r = a + \frac{\Phi}{1 - \frac{\Phi}{a}} + \xi = \frac{a\left(1 - \frac{\Phi}{a}\right) + \Phi}{\left(1 - \frac{\Phi}{a}\right)} + \xi = \frac{a}{\left(1 - \frac{\Phi}{a}\right)} + \xi \quad (4-41)$$

將 (4-41) 式代入 (4-37) 式，得

$$C_{nm} = -\frac{1}{(2n+1)Ma^{n+2}g_{Earth}P_s} \iint \left[\int_0^{\frac{\Phi}{1 - \frac{\Phi}{a}}} \left(\frac{a}{1 - \frac{\Phi}{a}} + \xi\right)^{n+4} dp \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda$$

$$S_{nm} = -\frac{1}{(2n+1)Ma^{n+2}g_{Earth}P_s} \iint \left[\int_0^{\frac{\Phi}{1 - \frac{\Phi}{a}}} \left(\frac{a}{1 - \frac{\Phi}{a}} + \xi\right)^{n+4} dp \right] P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda \quad (4-42)$$

再於積分式引入與階相依項，並引入固體地球彈性變形，可得垂直積分時之地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} 如下

$$C_{nm} = -\frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg_{Earth}P_s} \iint \left[\int_0^{\frac{\xi}{1 - \frac{\Phi}{a}}} \left(\frac{a}{1 - \frac{\Phi}{a}} + \xi\right)^{n+4} dp \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda$$

$$S_{nm} = -\frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg_{Earth}P_s} \iint \left[\int_0^{\frac{\xi}{1 - \frac{\Phi}{a}}} \left(\frac{a}{1 - \frac{\Phi}{a}} + \xi\right)^{n+4} dp \right] P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda \quad (4-43)$$

但是，一般由氣象分析中心所得資料並不是以大地起伏 (geopotential height) 表示，而是模組化溫度或特定濕度。因此，在利用 (4-43) 式進行積分前，需先以下列公式計算各級 (all levels) 之大地起伏代入[Flechner, 2003]

$$\Phi_{k+1/2} = \Phi_s + \frac{1}{g} \sum_{j=k+1}^{N_{level}} R_{dry} T_v \ln \frac{P_{j+1/2}}{P_{j-1/2}} \quad (4-44)$$

其中

$\Phi_{k+1/2}$ ：在一半層級之大地起伏 (層界面)

Φ_s ：在地表的大地起伏

R_{dry} ：乾空氣的氣體參數=287 m²/s²K=287 J/kgK

T_v ：虛擬溫度

$P_{k+1/2}$ ：在一半層級之壓力 (層界面)

$$T_v = (1+0.608S) T \quad (4-45)$$

S：特定濕度

T：溫度

$$P_{k+1/2} = a_{k+1/2} + b_{k+1/2} \times P_s \quad (4-46)$$

$a_{k+1/2}$ ：模組相依參數

$b_{k+1/2}$ ：模組相依參數

此二參數由 ECMWF GRIB 檔提供。

各壓力層級的大地起伏可用來計算 (4-43) 式的內圈積分，(4-43) 式的 ξ/a 項可由地球表面地形的大地起伏近似取得，可由 ECMWF 查得。

處理程序首先，先取得地球表面的規則網格點上的地表氣壓值和大地起伏值以及大氣模組的同樣網格點的溫度值和特定濕度，以每一區塊四個角落網格點計算區塊平均值，然後以大氣模組的特定內插係數 (a, b) 代入 (4-46) 式計算出模組各層級的壓力，這些壓力值以及經由 (4-45) 式以實際溫度和特定濕度計算出的各層級的虛擬溫度和地表大地起伏用來計算各層級的大地起伏。同時，必須用到由 WGS84 的參考橢球體上求得的平均重力加速度，以及赤道的正常重力，然後應用模組各層級的大地起伏分別完成每一階的積分，這些中間結果存於以經度、緯度及階為索引的三維陣列，最後，由於考慮 (4-43) 式的與階相依的冪數，球諧分析是分別以每一階的球諧序列進行，最終完整的球諧序列是寫入二元的球諧序列檔內。

為了分析由大氣垂直積分得的氣壓變化所導致的重力變化，資料處理時，須扣除至少一年資料的氣壓的平均值，以避免季節性影響，扣除後，其地位係數 C_{nm} 及 S_{nm} 可表示為

$$\begin{aligned} C_{nm} &= -\frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg_{Earth}} \iint \left(\left[\int_{P_s}^0 \left(\frac{a}{1-\Phi} + \frac{\xi}{a} \right)^{n+4} dp \right] - \bar{P}_{VI} \right) P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda \\ S_{nm} &= -\frac{a^2(1+k_n)}{(2n+1)Mg_{Earth}} \iint \left(\left[\int_{P_s}^0 \left(\frac{a}{1-\Phi} + \frac{\xi}{a} \right)^{n+4} dp \right] - \bar{P}_{VI} \right) P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda \end{aligned} \quad (4-47)$$

\bar{P}_{VI} ：年平均氣壓值

4.1.6 極潮

極移會產生極潮，極潮擾動對二階位係數的影響一般不超過 10^{-9} 量級，因此極潮擾動加速度採用 2 階 1 次引力位係數的變化即可 [Zhu et al., 1996][McCarthy, 1996]，即

$$\begin{cases} \Delta\bar{C}_{21} = -1.348 \times 10^{-9} (x_p + 0.0112 y_p) \\ \Delta\bar{S}_{21} = 1.348 \times 10^{-9} (y_p - 0.0112 x_p) \end{cases} \quad (4-48)$$

式中， x_p 、 y_p 為極移。在 IERS1996 與 IERS2000 技術手冊中，上式僅係數有微小差異而已。

4.1.7 相對論引起之擾動力

由相對論所引起之擾動加速度可以下式表示之：

$$a_{re} = \left(\frac{GM}{|\bar{r}|^3} \cdot \frac{3GM}{C^2 |\bar{r}|} \right) \bar{r} \quad (4-49)$$

其中， C 為光速。因 C^2 甚大，且 r 變動小（相對而言），可視 $\frac{3GM}{C^2 r}$ 為常數（不隨衛星位置而變），因此令：

$$a_{re} = \frac{GM'}{|\bar{r}|^3} \bar{r} \quad (4-50)$$

一般定軌中可視 GM' 為未知數而加以吸收相對論效應。

本文計算 CHAMP 衛星 2001 年 5 月 21 日所受相對運動擾動加速度如圖 4-5，其數量級為 10^{-8} m/s^2 。

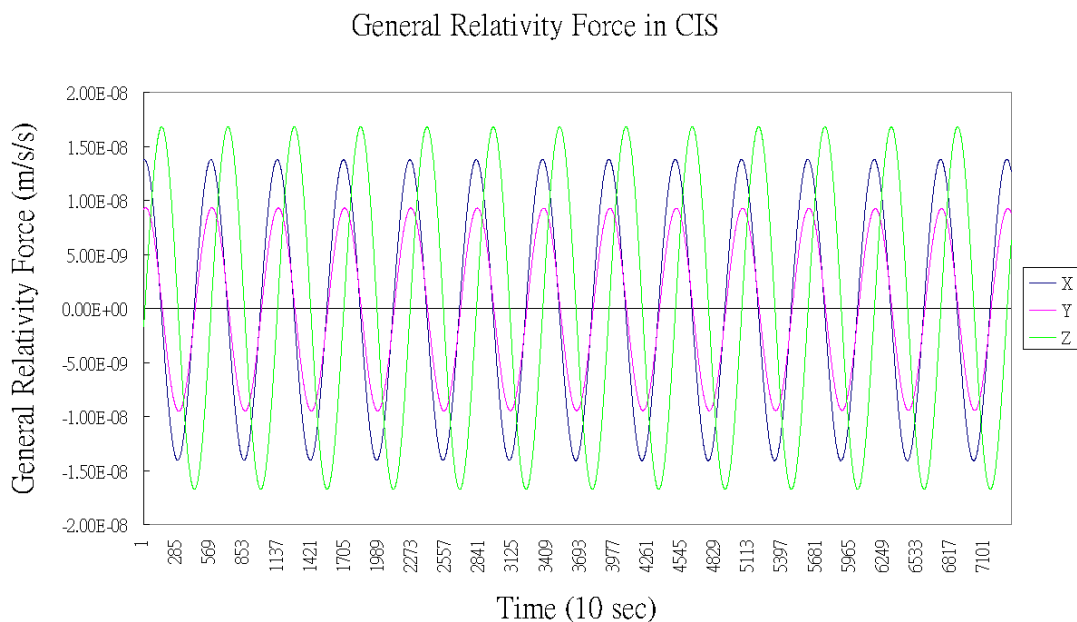


圖 4-5 CHAMP 衛星 2001 年 5 月 21 日所受相對運動擾動加速度

4.2 低軌衛星的非保守擾動力

4.2.1 太陽輻射壓

衛星在太陽光的照射之下，會產生壓力，該壓力與太陽輻射強度和衛星表面積成正比，也與衛星表面的反射特性有關，太陽輻射壓取決於衛星表面材料的反射、吸收、折射、熱輻射等性質，對於有太陽能電池及結構複雜的衛星，這一參數的相對誤差可達 0.1 以上。因此受太陽輻射壓影響，產生的擾動加速度為[Seeber, 1993]：

$$a_{sr} = \nu P_s C_r \frac{A}{m} (au)^2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^3} \quad (4-51)$$

其中， ν ：地球陰影函數

$\nu=0$ ，衛星位於地球陰影區

$\nu=1$ ，衛星位於陽光照射區

$0 < \nu < 1$ ，衛星位於半陰影區

$$P_s : \text{一天文單位距離的太陽輻射壓} = \frac{\text{solar flux}}{\text{velocity of light}} \\ = 4.560 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2 \text{ [McCarthy, 1992]}$$

C_r ：衛星表面積的反射係數

A ：衛星有效橫截面積

m ：衛星質量

\vec{r}, \vec{r}_s ：衛星及太陽的位置向量

太陽輻射壓不同於重力場和大氣阻力，太陽輻射壓擾動幾乎與衛星高度無關，對於低衛星它不是主要問題，而對高衛星則很重要，特別是形狀複雜的 GPS 衛星，它是影響定軌精度的關鍵動力學因素。解決辦法是精化太陽輻射壓模式，如 Bernese 軟體的太陽輻射壓模式，即被各 IGS 分析中心廣泛採用。

4.2.2 地球輻射壓

地球輻射壓是指太陽光照射至地表後，反射回衛星所引起的擾動，此種反射

輻射壓對衛星的影響比直接太陽輻射壓更為複雜，地球的反射面涵括陸地、海洋、雲層，地球上各種物質的反射係數亦不同。為了計算地球輻射壓，把從衛星看到的地球表面劃分為許多面元素，每一個面元素都看成是一個獨特的幅射源，再求出各面元素至衛面的加速度向量和，每一面元素所引起的地球擾力速度為 [Knocke and Ries, 1987]：

$$da_{er} = C_R \left(aE_s \cos \alpha + \frac{eE_s}{4} \right) \frac{\cos \alpha A_s}{mC\pi\Gamma^2} dA\bar{\Gamma} \quad (4-52)$$

其中， a ：反照率 (albedo)

$C_R = 1 + C_r$ (C_r 為衛星反射係數)

e ：反射係數 (emissivity)

E_s ：太陽幅射

Γ 、 $\bar{\Gamma}$ ：衛星至地表面元素距離及衛星至地表面元素單位向量

C ：光速

A_s 、 m ：衛星的橫截面積及衛星質量

α ：地球面元素法線到衛星的夾角

dA ：地球面元素面積



由於(4-52)公式複雜，再者因為地球輻射壓引起的擾動量遠小於太陽輻射壓引起之擾動量，絕大部份都不到太陽輻射壓之百分之十，舉例而言：地球輻射壓對 GPS 衛星引起之擾動，只有太陽輻射壓擾動之 1%~2% [Seeber, 1993]。有鑑於此，可以下式取代(4-52)，同樣獲得可接受之精度：

$$a_{er} = \nu P_e C_r \frac{A(\bar{r})}{m|\bar{r}|} \quad (4-53)$$

其中， ν, C_r, A, m 皆同於 (4-51) 式，而 P_e 為一天文單位距離的太陽反射輻射壓，與地表的反射特性有關。

4.2.3 空氣阻力擾動

衛星在太空中運行時，會受到大氣層的阻力作用，而產生擾動加速度，大氣阻力對衛星的擾動模式不易模擬，原因有三，其一為在高空中，空氣密度的特性

很複雜，很難精確的知道，其二是因為在計算空氣阻力產生的影響時，其作用力方程式必須考慮到衛星本體的幾何形狀，最後是空氣中各種氣體與衛星之間的相互影響，亦會改變大氣阻力[Montenbruck and Gill, 2001]。

空氣阻力對衛星產生之擾動加速度為[Seeber, 1993]：

$$a_{ad} = -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_d) |\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_d| \quad (4-54)$$

其中， C_D ：空氣阻力係數

ρ ：大氣層密度，由模式推導而得

A ：衛星有效橫截面積

m ：衛星質量

$\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}_d$ ：衛星及大氣速度向量。

空氣阻力係數 C_D 因衛星形狀、材料不同而不同，球形衛星可以較準確測定，但對於非球形衛星，因為衛星在運行中常處於搖動狀態，故難以準確測定，但一般來說，該值約在 1.5~3.0 之間[Montenbruck and Gill, 2001]， C_D 通常於定軌計算中當做未知數推求。大氣阻力與大氣密度成正比，大氣密度誤差很大，特別是低衛星，相對誤差在 0.1 或更大。

ρ 隨衛星高度快速減小，所以對高衛星 GPS、LAGEOS 無甚影響。但對低衛星則是影響精度的致命因素之一，特別是帶有天線的衛星，因為 A/m 較大。解決辦法為每隔一段時間解算一個 C_D 係數，或解用多項式、三角函數表達的比例因數，另一辦法如 CHAMP GRACE 採用加速度儀測定。

4.3 其他非保守擾動力

由於各種擾動的作用，衛星的軌道和姿態不可避免的發生變化。對於如 CHAMP 的低軌衛星，由於受到較大的大氣阻力，衛星軌道高度每月下降約 1.5 km，如圖 4-6 所示。為了按預定軌道運動，必須對衛星軌道和姿態進行調控，就會出生調控擾動。同時，對衛星的軌道和姿態進行調控，要消耗一定的燃料，從而改變了衛星的質量，就影響到與衛星質量有關的模型，必須進行改正。

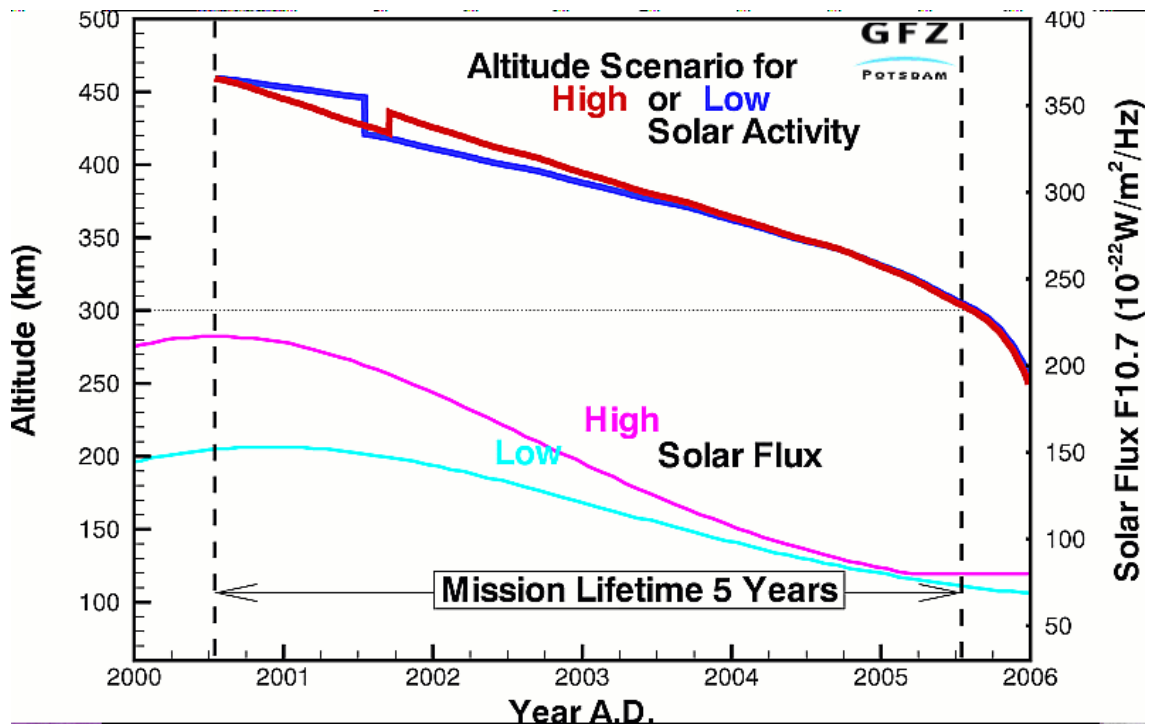


圖 4-6 CHAMP 衛星計畫軌道高度[GFZ homepage]

4.4 經驗加速度

有些模型是在一定假設下導出的，各模型在計算過程中還會有截尾誤差和近似誤差，同時還有許多力無法模式化，這對衛星定軌和衛星重力計算影響比較大，為此引進經驗加速度[Hwang, 2001]。

$$a_{em} = a_0 + a_1 \cos u + a_2 \sin u + a_3 t \cos u + a_4 t \sin u + a_5 t^2 \cos u + a_6 t^2 \sin u + a_7 t + a_8 t^2 + a_9 t \sin 2u + a_{10} t \cos 2u + a_{11} \cos 2u + a_{12} \sin 2u \quad (4-55)$$

其中 a_0, a_1, a_2 為常數及 one cpr (one-cycle-per-orbital-revolution) 項；

a_3, a_4, a_5, a_6 為以時間及振幅有關之共振項；

a_7, a_8 為以時間一次,二次間之共振項；

$a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ 為 two cpr 項；

t 為自每個弧段起始時間起算之時間；

u 為緯度幅角 (argument of latitude)。

在軌道框架內，經驗加速度分別指向徑向、沿軌和法向。經驗加速度沒有明確的物理背景，只是吸收各擾動力模式誤差。嚴格來說，加上經驗加速度參數後，就不再是完全的動力法了。CHAMP 衛星採用 GRIM5 模型加經驗加速度參數，定軌精度可達數公分精度。

4.5 CHAMP、GRACE 衛星加速度儀量測之非保守擾動加速度

由於本文研究之 CHAMP、GRACE 衛星上皆載有加速度儀，因此針對 4.2 所述之各種非保守擾動力，吾人並不以模式計算，而是以加速度儀所量測之衛星表面所受到之加速度取代所有非保守擾動力。因此本節說明星載加速度儀觀測量實際計算之流程。

由 4.2 節對非保守力擾動的模式化可以看出：非保守力擾動的模式十分複雜且難以精確模式化，特別是對於實施 SST 任務的 LEO 衛星，空間環境十分複雜，對於定軌的精度要求比較高，一般常用的模式化方法已經不能勝任，於是提出非保守力擾動之替代方式，主要有兩種方式：[GFZ homepage]

1. 自動補償模式。即將衛星設計成無阻尼衛星，在衛星運動中進行即時補償，讓衛星運行軌跡等同於在只有保守力影響的空間中的運行軌跡，如 GOCE 衛星。
2. 精密測量模式。即利用高精度的星載加速度儀，精密量測附加在衛星上的非保守力，在資料處理時利用星載加速度儀觀測量替代所有的非保守力擾動加速度。

兩者的物理實質一致，但是實現難度卻有很大差別。自動補償模式(即無阻尼衛星)對控制系統要求甚高，且需要較多的推動能量。利用星載加速度儀精密測定非保守力加速度的模式，是目前普遍認為較為可行的方法。而在加速度儀類型的選取上，由於三軸靜電懸浮加速度儀具有結構相對簡單、成本相對較低、靈敏度高、易於自動化資料獲取等特點，因而在目前的衛星重力場探測中被廣泛採用。此外，有些衛星計畫還在研究採用特殊撓性金屬測量加速度的星載設備 [Iafolla et al., 2000]。本節的研究主要集中在 CHAMP 和 GRACE 所載的加速度儀的研究和資料處理。

4.5.1 資料處理流程

從星載加速度儀獲得的觀測資料，經過適當的轉換，可用這種資料取代所有的非保守力加速度 a_{ng} (即大氣阻力、太陽輻射壓、地球輻射壓、推力和姿態控制系統的加速度等)，如下式。所以，通常將星載加速度儀的觀測量稱為替代加速度，即

$$a_{ng} = a_{ad} + a_{sr} + a_{er} \quad (4-56)$$

由於加速度儀安置誤差以及加速度儀本身還存在偏值和標度因素等影響，加速度儀測量的任一瞬間的加速度尚需進行改正及轉換

$$a_{ng} = Q(K\bar{A} + \bar{B}) \quad (4-57)$$

其中： Q ：從加速度儀 IFX 坐標系到 CTS 的旋轉矩陣

K ：是加速度儀 IFX 三軸之尺度因子（Scale factor）改正的對角矩陣

\bar{B} ：為加速度儀 IFX 三軸之偏值（Bias）改正向量

\bar{A} ：是基於加速度儀 IFX 三軸坐標系的加速度觀測向量

矩陣 Q 的定義如下：

$$Q = Q_C Q_B Q_A \quad (4-58)$$

其中：

Q_A ：加速度儀 IFX 到 SBF 的旋轉矩陣 = $R_1(-90^\circ) R_3(90^\circ)$

Q_B ：SBF 到慣性坐標系的旋轉矩陣

Q_C ：慣性坐標系到地固坐標系的旋轉矩陣

Q_A 於加速度儀安置時就已決定了， Q_B 由下式確定：

$$Q_B = f(\theta, \phi, \psi) \quad (4-59)$$

其中 θ 、 ϕ 、 ψ 是衛星姿態角。 Q_B 常使用四元素法計算，其方法為由恆星敏感器觀測的四元素（ q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 ）直接計算 [GFZ homepage]，

即

$$Q_B = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

4.5.2 星載加速度儀資料分析

CHAMP 所載 STAR 和 GRACE 衛星所載 SuperSTAR 型加速度儀均是 CNES (Centre National d' Etudes Spatiales) 提供的。它由位於法國 Chalillon 的 ONERA (Office National d' Etudes et de Recherches Aeronautiques) 製造。由於 GRACE 衛星的低振盪設計和溫度的高穩定度，用於 GRACE 計劃的加速度儀的測量範圍可達到 $\pm 5 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ ，加上其他的改進措施，其精度可達到 10^{-10} ms^{-2} 。無論是

由衛星軌道運動來推算地球重力場，還是基於某一地球重力場模式進行精密軌道確定時，非保守力如大氣阻力、太陽輻射壓力、衛星作軌道機動時的附加推力等等和地球重力一起作用於衛星。因此過去和現在的衛星重力測量中的一個主要問題是如何將這些非保守擾動力對衛星軌道運動的擾動精確地加以排除，本文並不以模式計算，而是以加速度儀所量測之衛星表面所受到之加速度取代所有非保守擾動力。

CHAMP 的 STAR 星載加速度儀與 SuperStar 屬於同一系列的星載微加速度儀，表 4-4 可以比較 STAR 和 SuperSTAR 的出廠設定值[ONERA, 2003]。

表 4-4 STAR 與 SuperSTAR 比較

加速度儀	測程	敏感度(雜訊水平)
STAR	$\pm 10^{-3} ms^{-2}$	$< 3 \times 10^{-9} ms^{-2}$
SuperSTAR	$\pm 5 \times 10^{-5} ms^{-2}$	$10^{-10} ms^{-2}$

而 CHAMP 所載 STAR 加速度儀在參數上做了一些調整，見表 4-5。

表 4-5 CHAMP 所載 STAR 加速度儀的技術參數

角加速度量測： 解析度 $1 \times 10^{-7} rad \times s^{-2} (\phi)$ $5 \times 10^{-7} rad \times s^{-2} (\theta \text{ 和 } \psi)$
先驗的加速度儀漂移和尺度因數的溫度穩定性 漂移的溫度變化因數 $5 \times 10^{-6} ms^{-2} \times C^{-1} (X \text{ 方向})$ $1 \times 10^{-8} ms^{-2} \times C^{-1} (Y \text{ 方向和 } Z \text{ 方向})$ 尺度的溫度變化因數 $2 \times 10^{-3} C^{-1} (X \text{ 方向})$ $5 \times 10^{-3} C^{-1} (Y \text{ 和 } Z \text{ 方向})$

本節係利用 2002 年 5 月 22 日 CHAMP 衛星之加速度儀資料分析其特性，GFZ 提供資料的 level-2 包含了 0.1 Hz 的加速度儀數據以及相應的模式改正數。當進行地球重力場方面的研究工作時，由於 CHAMP 衛星的軌道較低（軌道高度約為 450 km），而精密的大氣阻力模式、太陽輻射壓和地球輻射壓模式等都不易

獲得，而其星載的加速度儀所觀測的線性加速度就作為替代加速度。

本文處理 CHAMP 加速度儀資料之步驟如下：

1. 對於 0.1 Hz 加速度儀原始觀測量的改正主要有兩項：第一項是洛倫茲力加速度 (Lorentz force acceleration)；第二項是由法國太空總署 CNES 提供模式計算的 CHAMP 星載加速度儀 x 方向 (IFX) 的改正數。需要特別注意的是：由於 STAR 加速度儀固有的特性，即 x 軸的敏感程度比較低，加入 CNES 的改正十分必要。比較圖 4-7 和圖 4-8 可以看出，加入改正後替代加速度的離散程度迅速減小，而且其加速度值的方向也產生了變化。由於該方向的非保守力部分的擾動力主要來源於地球熱輻射壓力和地球反射壓，所以這種現象可能是季節性的，但是也不排除加速度計在該方向上存在線性漂移。
2. 經由尺度因子及偏移改正得真正的 IFX 系統加速度如圖 4-9
3. 經由 Q_A 旋轉到 SBF 坐標系統之加速度如圖 4-10
4. 經由 Q_B 旋轉到 CIS 坐標系統之加速度如圖 4-11
5. 再轉換至地固坐標系 (r, φ, λ) 之加速度如圖 4-12

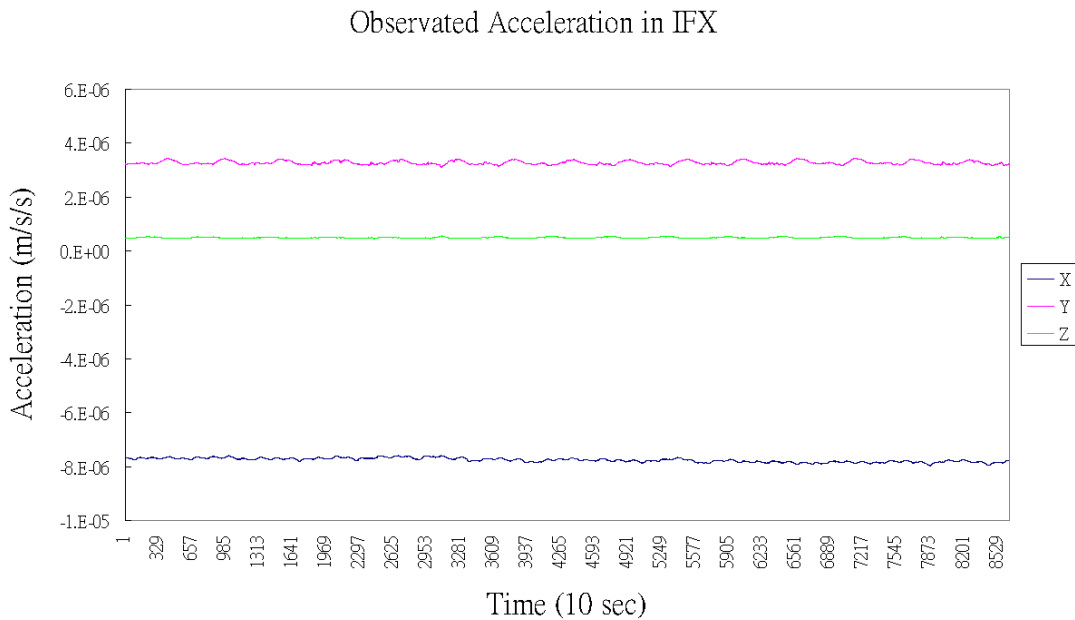


圖 4-7 加速度儀之原始觀測量

Corrected Acceleration in IFX

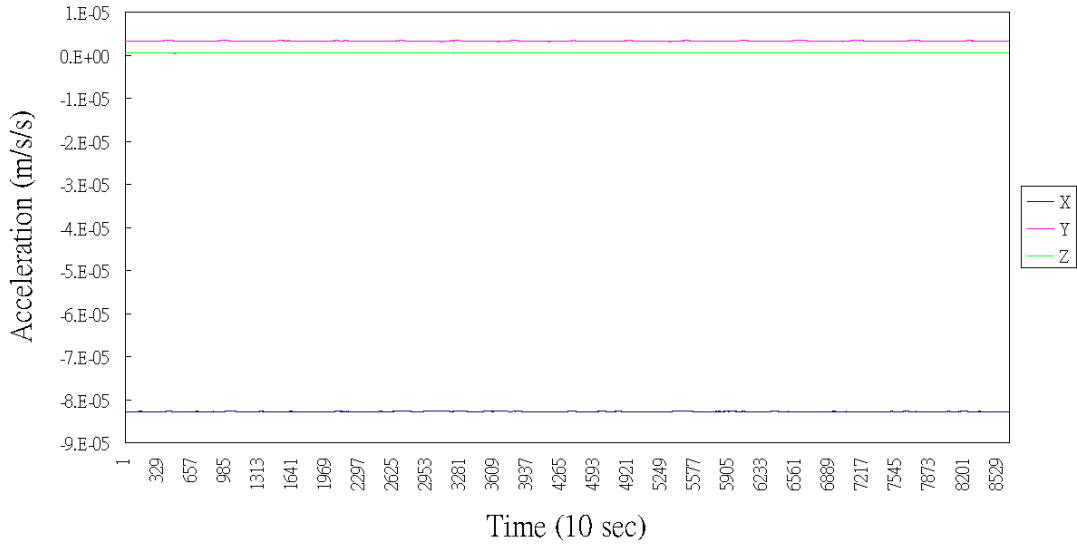


圖 4-8 加速度儀之原始觀測量經洛倫茲力加速度及 X 方向 (IFX) 改正後之加速度



Scale and Bias Corrected Acceleration in IFX

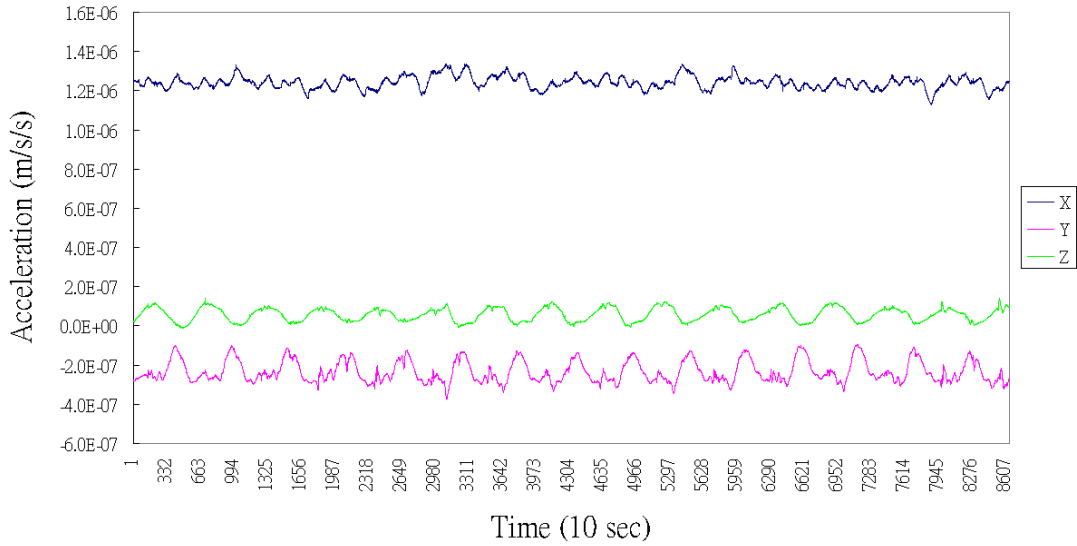


圖 4-9 加速度儀之原始觀測量經洛倫茲力加速度、X 方向 (IFX) 改正、尺度因子及偏移改正後之加速度

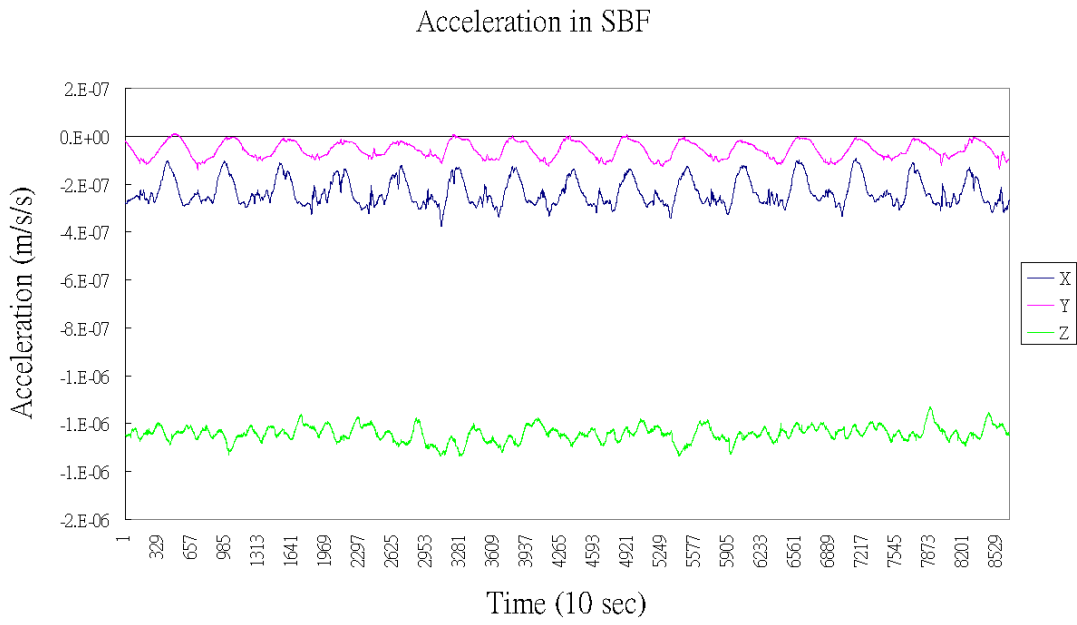


圖 4-10 旋轉至 SBF 坐標系統之加速度

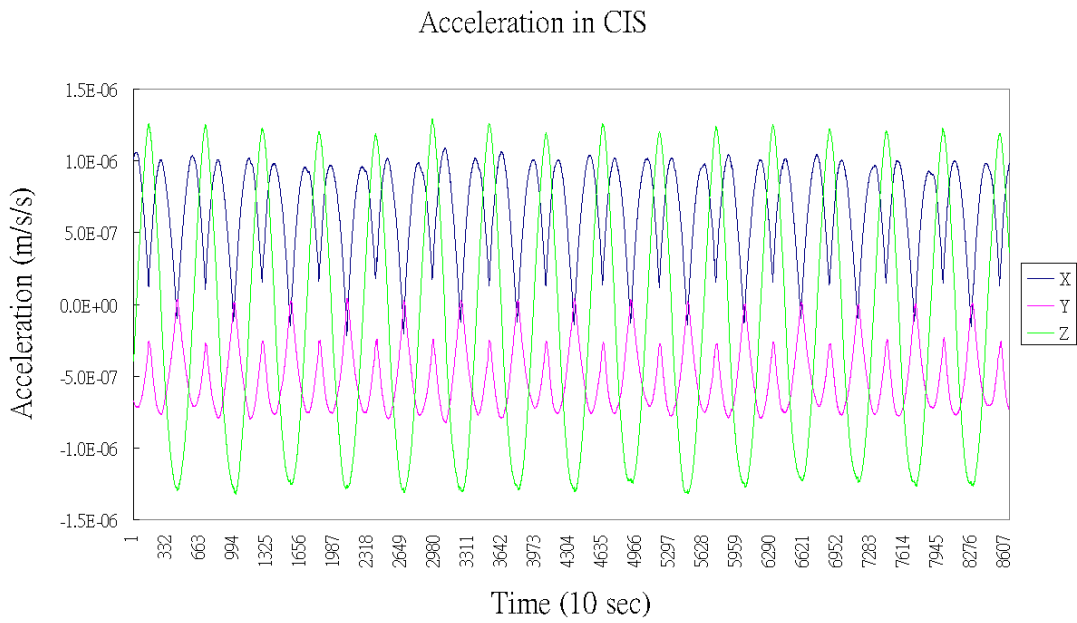


圖 4-11 旋轉至 CIS 坐標系統之加速度

Acceleration in RPL

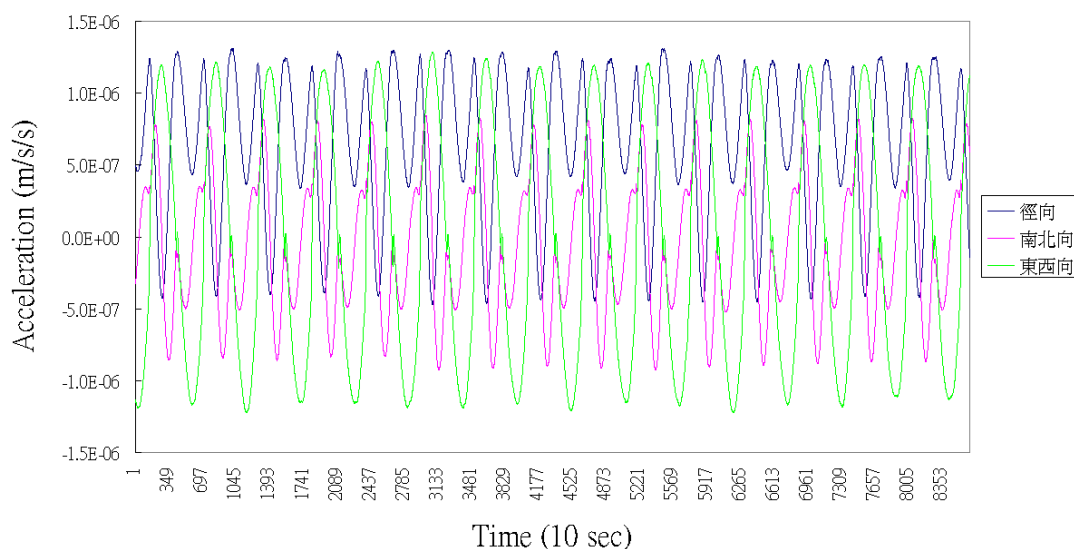


圖 4-12 旋轉至地固坐標系 (r, φ, λ) 之加速度

由圖 4-9 可知加速度儀之原始觀測量經洛倫茲力加速度、X 方向 (IFX) 改正、尺度因子及偏移改正後之加速度才可發現 1-cpr 現象。

4.6 加速度儀應用之探討

加速度儀測定所有非保守力的組合，對精密定軌和重力場模型的解算很有益處。在重力衛星的設計中是僅次於低軌道、星載 GPS 的第三要素。目前只有三顆衛星 (CHAMP 及 2 顆 GRACE) 安裝了加速度儀，而 CHAMP 上的加速度儀的三個分量中有一個壞了，可以說成功率為 70% 左右。加速度儀有一技術難點就是加速度儀必需嚴格安裝在衛星的質心位置，只允許 0.1 mm 的誤差，而且在衛星進行姿態和軌道調整噴火後，仍然要求保證這一精度要求。機械加工精密性要求很高，目前國際上具有這一技術的公司不多。需根據技術能力、經費、精度要求等綜合考慮。

加速度儀資料在平差中是做為隨機觀測量，這種方法理論上是嚴格的作法，但程式實現非常複雜，如求偏導數和線性化問題，如本文第六章之方法。另一作法是在平差中直接加入加速度儀的觀測值，即把加速度儀的觀測資料，當做沒有隨機誤差的“真實”值，但允許加入比例因數和常數誤差 (bias) 改正。為此必須根據積分步長的時刻將加速度儀的觀測值進行內插。目前 GFZ、CSR 及 JPL

都採用這種方法。本文第七章、第八章也是採用此方法處理加速度儀資料。

GFZ 和 JPL 已分別對 CHAMP 和 GRACE 上加速度儀的原始觀測資料進行了預處理，理論上其他分析中心在定軌和重力場解算時不必再做預處理，只需加入比例因數和常數誤差 (Bias)。且 GRACE 上的加速度儀資料品質好，可直接按上述做法使用。可能在資料空缺時段，需另外進行內插處理。

CHAMP 上的加速度儀功能有些障礙，GRGS 和 ONERA 公司做了二年的研究，嘗試採用了各種補救辦法(多解各種參數，如溫度效應、線性變化參數等等)，寫了上千頁的報告，但無實質性的改善。GFZ 在使用 CHAMP 的加速度儀資料進行精密定軌和重力場解算時，在預處理組提供的資料(網上可獲取)的基礎上，再另外進行了一些特殊處理。這些做法都無明確的物理基礎，只是經驗做法，以改善其加速度儀資料的問題。

對 CHAMP 而言，如用 SLR 觀測的殘差來評定衛星軌道的精度，則從幾十個弧段的統計數位來看，用加速度儀後的定軌精度，比不用加速度儀資料只採用模式，精度只提高 10% 或更低，有時還可能變差。這是因為加速度儀的一些參數(如比例因數和常數誤差等)與重力場係數有較強的相關性，解算大量的這些參數可能對重力場的解有壞的影響。但對 GRACE 而言，使用加速度儀的資料後，定軌精度有明顯的改善，如表 4-6[Zhu and Shi, 2003]。

表 4-6 不同方式處理非保守擾動力對定軌精度之比較

	SLR	K-波段測距	K-波段距離變化率
用加速度儀資料	3cm	1cm	10 μ m/s
用擾動力模式	4.5cm	1.5cm	14 μ m/s

K-波段和 SLR 觀測資料，沒有參加平差，只做為質量控制使用。可以看出使用加速度儀後，精度提高約 30% 以上，由此可見加速度儀的重要貢獻。當然應該在經費和技術條件與精度提高的程度之間做一定的妥協。我國福衛三號並無加速度儀，但無論如何，即使不安裝加速度儀，如果各種擾動力模式化精確且其他指標都正常的情況下，福衛三號的幾何優勢應有可能解算出良好的重力場模型，且應比 GRIM5、EGM96 模型有顯著的改進，惟尚待進一步努力。