

第五章 以相位法推求地球重力場

本章係開發一個新方法—相位法來探求地球重力場，在 1.3 節說明目前世界上計算重力場之軟體，如 GEODYN II、EPOS 等，其軟體設計都相當複雜且計算工作量相當大，因此尋求一個簡便之方法即是本文研究之動機，由於低軌衛星 CHAMP 衛星上攜帶 GPS 接收儀所接收之 GPS 相位資料，可直接以數值微分方式求得相位之速度及加速度，再利用相位之速度及加速度求得 CHAMP 衛星與 GPS 衛星之視線速度 (Line of Sight Velocity) 及視線加速度 (Line of Sight Acceleration)，再由視線加速度與 CHAMP 之軌道求解 CHAMP 之加速度。衛星所受到之保守擾動力則由第 4 章計算之各擾動力扣除，而非保守擾動力則由 CHAMP 衛星上酬載之加速度儀量測之加速度，運用 4.6 節之解算步驟，計算非保守擾動力後扣除之，得到純由地球非球形所造成之擾動加速度，再建立 CHAMP 衛星加速度與地球重力場地位係數之關係，反演地球重力場。

本章首先介紹 GPS 載波相位之差分，並推導求解衛星加速度之公式，再以 CHAMP 之觀測資料進行方法之驗證、分析以相位法求解衛星加速度之精度，最後再求解地球重力場。因此，載波相位觀測的精度，將直接影響整個求解衛星加速度的結果。

5.1 相位法之理論

5.1.1 相位之基本觀測模式

目前 GPS 衛星的訊號包括載波、測距碼與導航訊息三部分[Leick, 1995]，由衛星所發射 L-band 電磁波傳送，所用 L-band 有 L1 與 L2 兩種載波(carrier wave) 頻率，其頻率及波長如下：

$$L1: \quad f_1 = 154 \times f_0 = 1575.42\text{MHz}, \quad \lambda_1 = 19.03\text{cm}$$

$$L2: \quad f_2 = 120 \times f_0 = 1227.60\text{MHz}, \quad \lambda_2 = 24.42\text{cm}$$

其中，基本頻率 $f_0 = 10.23\text{MHz}$ 是由GPS衛星的原子鐘所產生，由此基本頻率的不同倍數值 (154 倍及 120 倍) 構成兩種PRN碼(Pseudo Random Noise Code)，分別是C/A碼與P碼，其中L1 載波上調制有C/A碼(coarse/acquisition code)與P碼(precise

ranging code)；L2 載波則調制P碼。此外，載波上還載有導航訊息 (Navigation Message)。L1 與L2 載波頻率之差異為 347.82MHz，等於L2 的 28.3%。所以選擇這兩個載波頻率，主要目的在於測量或消除由於電離層效應引起之延遲誤差[曾清涼、儲慶美, 1999]。

由於 GPS 衛星與 CHAMP 衛星之間有相對運動存在，因此衛星訊號之頻率會受到都卜勒(Doppler)效應的影響而改變，然而衛星訊號之相位並不會受到影響，亦即 GPS 衛星訊號在發射時之載波相位與 CHAMP 衛星上接收儀收到訊號時之載波是相同的 [曾清涼、儲慶美, 1999]。因此，理論上由 GPS 衛星發射的載波相位，與接收儀本身振盪器產生的載波相位的差值，僅是量得相當於小數部分的載波相位差，即小數週波值，加上一整數週波未定值(cycle ambiguity)，便可求得載波在衛星與 CHAMP 衛星之接收儀間傳遞的時間差，由此完整週波數乘上載波波長便可求得兩者之間的距離。然而，載波在傳遞過程中會有若干系統性誤差產生，例如：接收儀的時錶誤差、衛星的頻率誤差、傳遞延遲(電離層、對流層效應)及多路徑(multipath)效應等。因此，Teunissen and Kleusberg [1995] 提出了以下的單向(one-way)相位觀測模式：

$$\begin{aligned} \varphi_m^p(t_m) = & \frac{f}{C} \rho_m^p(t_m, t^p) + f(\Delta t_m(t_m) - \Delta t^p(t^p)) \\ & + \varphi_m(t_0) - \varphi^p(t_0) + N_m^p - \frac{f}{C} I_m^p + \frac{f}{C} T_m^p + \delta m_m^p + \varepsilon_m^p \end{aligned} \quad (5-1)$$

其中

- t_m, t^p : 載波被接收與發射的時刻 (sec)
- φ_m^p : 發射自衛星與接收儀產生的相位差 (cycle)
- f : 載波的標準頻率 (s^{-1})
- C : 光在真空中的速率 (m/s)
- ρ_m^p : 衛星發射載波時刻與接收儀接收載波時刻間的距離 (m)
- $\Delta t_m, \Delta t^p$: 接收儀與衛星的時錶誤差 (sec)
- $\varphi_m(t_0), \varphi^p(t_0)$: 接收儀與衛星時錶之初始相位偏移量 (cycle)
- N_m^p : 整數週波未定值 (cycles)
- I_m^p : 電離層 (m)
- T_m^p : 對流層延遲 (m)

δm_m^p : 多路徑效應 (cycle)

ε_m^p : 其他雜訊 (cycle)

(5-1)式中，上標 p 與下標 m 分別表示 GPS 衛星與 CHAMP 衛星，若干誤差已經經過簡化，例如儀器的延遲已被併入接收儀時錶誤差、天線相位中心的位置偏心假設為常數。

5.1.2 相位觀測量無電離層的線性組合

由 GPS 衛星的 L1 及 L2 載波，可以針對不同的目的而進行不同的線性組合，例如無電離層線性組合(Ionosphere-free linear combination, L3 或 LC)、無幾何距線性組合(Geometry-free linear combination, L4)線性組合、寬巷線性組合(Widelane linear combination, L5)及窄巷線性組合(Narrowlane linear combination, L6)等。由於 CHAMP 衛星上的接收儀具有雙頻的接收功能，能同時觀測 L1 與 L2 的載波相位，本文採用無電離層的線性組合 (L3) 以降低系統的誤差。

無電離層線性組合主要的目的在消除載波相位觀測模式(5-1)式中的 I_m^p 項。由於電離層的影響量與頻率平方成反比關係，即 $f_1^2 \times I_{m,1}^p = f_2^2 \times I_{m,2}^p = \text{常數}$ ，吾人可依此關係推導如下：

$$\begin{aligned} \varphi_{m,1}^p &= \frac{f_1}{C} \rho_m^p + f_1(\Delta t_m - \Delta t^p) \\ &+ \varphi_{m,1} - \varphi_1^p + N_{m,1}^p - \frac{f_1}{C} I_{m,1}^p + \frac{f_1}{C} T_m^p + \delta m_{m,1}^p + \varepsilon_{m,1}^p \end{aligned} \quad (5-2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{m,2}^p &= \frac{f_2}{C} \rho_m^p + f_2(\Delta t_m - \Delta t^p) \\ &+ \varphi_{m,2} - \varphi_2^p + N_{m,2}^p - \frac{f_2}{C} I_{m,2}^p + \frac{f_2}{C} T_m^p + \delta m_{m,2}^p + \varepsilon_{m,2}^p \end{aligned} \quad (5-3)$$

其中，下標 1 與 2 分別表示 L1 與 L2。式中的時間參數為了表達方便，在此予以省略。若將(5-2)式乘以 $\alpha = f_1^2 / (f_1^2 - f_2^2)$ ，(5-3)式乘以 $\beta = f_1 f_2 / (f_1^2 - f_2^2)$ ，再令兩式相減，則可得：

$$\begin{aligned}
\varphi_{m,IF}^p &\equiv \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \varphi_{m,1}^p - \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} \varphi_{m,2}^p \\
&= \frac{f_1}{C} \rho_m^p + f_1 (\Delta t_m - \Delta t^p) + \alpha N_{m,1}^p - \beta N_{m,2}^p + \frac{f_1}{C} T_m^p + \\
&\quad \alpha \varphi_{m,1} - \beta \varphi_{m,2} - \alpha \varphi_1^p + \beta \varphi_2^p + \alpha \delta m_{m,1}^p - \beta \delta m_{m,2}^p + \\
&\quad \alpha \varepsilon_{m,1}^p - \beta \varepsilon_{m,2}^p
\end{aligned} \tag{5-4}$$

其中， $(f_1^2 I_{m,1}^p - f_2^2 I_{m,2}^p)$ 項因為頻率與電離層效應的關係而消除， $\varphi_{m,IF}^p$ 則為無電離層載波相位函數，即後述之 $\varphi_{m,3}^p$ 。(5-4) 式中，載波初始相位(常數)項因為吾人在計算衛星加速度時，使用的是相位的速度與加速度，在數值微分過程將被消去。

5.1.3、相位之速度與加速度

在推求衛星加速度的理論中，吾人將利用相位速度與加速度乘上一常數 C/f_1 近似距離的變化量 $\dot{\rho}$ 與其導數 $\ddot{\rho}$ 。由上一節無電離層觀測模式可知，若將(5-4)式即 L3 對時間分別取一次與二次導數，則衛星與接收儀之相位偏移量與週波未定值將被消去。此外，由於對流層效應在短時間段內應是相似，雖然多路徑效應的影響在定位時將可能造成誤差[Jekeli and Garcia, 1997]，但由於 CHAMP 衛星在空中，多路徑效應已降低，因此，本文可由(5-4)式直接以數值微分推得相位之速度與加速度，如下：

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{m,3}^p &= \frac{f_1}{C} \dot{\rho}_m^p + f_1 (\dot{\Delta} t_m - \dot{\Delta} t^p) + \dot{\varepsilon}_{m,3}^p \\
\ddot{\varphi}_{m,3}^p &= \frac{f_1}{C} \ddot{\rho}_m^p + f_1 (\ddot{\Delta} t_m - \ddot{\Delta} t^p) + \ddot{\varepsilon}_{m,3}^p
\end{aligned} \tag{5-5}$$

由於接收儀的時錶誤差較不穩定，而衛星的時錶也有誤差，因此並未在(5-5)式中予以忽略。

在未差分的單向觀測模式中，接收儀時錶誤差是一個較難修正的誤差，因為接收儀一般採用溫度控制的石英鐘(TCXO)，其瞬間穩定性並不理想，所以不容易建立時錶誤差的修正模式。實務上，通常使用三階或四階的多項式來模擬接收儀時錶誤差，但效果並不理想[曾清涼、儲慶美，1999]；另一個估計時錶誤差的方法是採用虛擬距離(pseudorange)觀測量與 GPS 衛星軌道進行平差估

算，不過這種方法解出的誤差值，除了接收儀時錶誤差外，其他的系統誤差如衛星時錶誤差、電離層、對流層效應引起的時間延遲等，也都包含在其中，所以解出的時錶誤差並不正確 [Leick, 1995]，因此本文仍將利用差分的方法來加以處理。

5.1.4 相位之差分 (Differences)

載波相位的基本觀測模式，即(5-1)式中包含了不同類型的未知參數，其中 ρ 為必要參數，而其他參數，如衛星與接收儀的時錶誤差與對流層延遲等，可透過差分的方法予以消除。考慮 GPS 觀測模式的誤差來源，在同一個時刻下常使用的有一次差與二次差 [Rizos, 1996]。

一次差又可區分為地面(between receiver)一次差與空中(between satellite)一次差，不過由於本研究的實驗對象是酬載於 CHAMP 衛星上的單一接收儀，所以本文採用的是對 GPS 衛星的一次差分(即空中一次差)。如圖 2-1 所示，就某一時刻同時對兩顆 GPS 衛星 p 與 q 進行相位觀測，並使用一次差分。在同一時刻，接收儀的時錶誤差 Δt_m 與初始相位偏移 φ_m 是相同的，因此差分時可消除之。本文使用之一次差分的載波相位觀測模式可表示如下：

$$\begin{aligned}\varphi_m^{p,q} &= \varphi_m^p - \varphi_m^q \\ &= \frac{f}{C} \rho_m^{p,q} + f(\Delta t^q - \Delta t^p) - \varphi^{p,q} \\ &\quad + N_m^{p,q} - I_m^{p,q} + T_m^{p,q} + \delta m_m^{p,q} + \varepsilon_m^{p,q}\end{aligned}\quad (5-6)$$

(5-6)式中， p 與 q 分別表示接收儀 m 同時追蹤的兩顆 GPS 衛星，而上標 p, q 則表示兩者的差值。本文採用無電離層相位線性組合 (L3)，再對時間分別做一次與二次微分，則可得無電離層一次差相位速度與加速度，如下：

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{m,3}^{p,q} &= \dot{\varphi}_{m,3}^p - \dot{\varphi}_{m,3}^q = \frac{f_1}{C} \dot{\rho}_m^{p,q} + f_1(\dot{\Delta t}^q - \dot{\Delta t}^p) + \dot{\varepsilon}_{m,3}^{p,q} \\ \ddot{\varphi}_{m,3}^{p,q} &= \ddot{\varphi}_{m,3}^p - \ddot{\varphi}_{m,3}^q = \frac{f_1}{C} \ddot{\rho}_m^{p,q} + f_1(\ddot{\Delta t}^q - \ddot{\Delta t}^p) + \ddot{\varepsilon}_{m,3}^{p,q}\end{aligned}\quad (5-7)$$

式中，接收儀的時錶誤差已經由一次差分消除，電離層效應延遲亦透過相位之線性組合消除，差分後的初始相位偏移、週波未定值則因微分而消除。本文在

實際計算時，將(5-7)式的相位速度及加速度乘上 C/f_1 後即得距離變化量 $\dot{\rho}$ 與其導數 $\ddot{\rho}$ 的近似值。

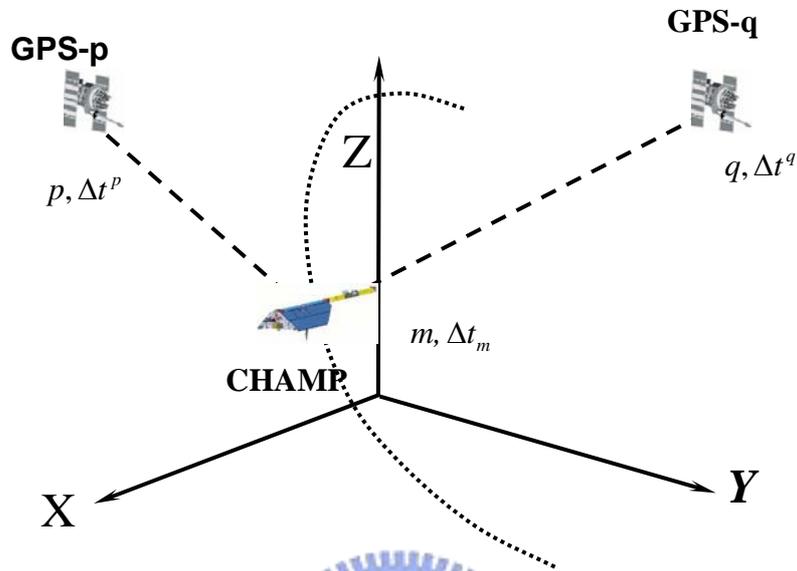


圖 5-1 CHAMP 衛星同時觀測兩顆 GPS 衛星空中一次差示意圖

如果再利用兩個不同的接收儀 m, k 分別追蹤相同的兩顆 GPS 衛星，則可推得相位速度與加速度的二次差觀測模式：

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{m,k,3}^{p,q} &= \dot{\phi}_{m,3}^{p,q} - \dot{\phi}_{k,3}^{p,q} = \frac{f_1}{C} \dot{\rho}_{m,k}^{p,q} + \dot{\epsilon}_{m,k,3}^{p,q} \\ \ddot{\phi}_{m,k,3}^{p,q} &= \ddot{\phi}_{m,3}^{p,q} - \ddot{\phi}_{k,3}^{p,q} = \frac{f_1}{C} \ddot{\rho}_{m,k}^{p,q} + \ddot{\epsilon}_{m,k,3}^{p,q}\end{aligned}\quad (5-8)$$

由上式可發現，GPS 衛星的時錶誤差 $\ddot{\Delta t}^p$ 與 $\ddot{\Delta t}^q$ 皆可於差分過程中消除，如此應能精確的求解必要參數。然本文並未使用二次差分的模式，此乃由於接收儀是酬載於高度 445km 的 CHAMP 衛星上，欲與地面上的固定站同時觀測進行差分並不容易；又 CHAMP 衛星與地面站所接收的 GPS 衛星訊號行經的路徑並不相同，CHAMP 衛星的接收儀不受對流層的影響，而地面站的接收儀會受對流層影響，無法以差分消除之，再則二次差時，觀測量之相關性亦應考慮。

5.2 利用相位法推求衛星之加速度

推求衛星加速度時，應先得知衛星與 GPS 衛星之視線加速度，而視線加速度的公式被廣泛的應用在衛星追蹤衛星(SST)的任務以推求地球重力場的研究上。例如，地球重力場引起的加速度差值便可由兩衛星間的距離及距離變化率求得[Jekeli and Upadhyay, 1990]。本研究便是基於上述理論基礎，吾人將由 CHAMP 衛星(m)與 GPS 衛星(p)間的空間關係，推導出 CHAMP 與 GPS 間之視線加速度與 CHAMP 衛星加速度的關係。CHAMP 與 GPS 衛星間的視線速度 $\dot{\rho}_m^p$ 與視線加速度 $\ddot{\rho}_m^p$ 是直接由 CHAMP 相位速度 $\dot{\phi}_m^p$ 與加速度 $\ddot{\phi}_m^p$ 乘上 C/f 而得。再以最小二乘 (Least-Squares)法計算空間中 CHAMP 衛星加速度。[顏宇俊，2000]

5.2.1 衛星視線加速度之推導

衛星運動方程一般皆是以慣性坐標系表示，因此本節之所有公式推導皆在慣性坐標系 (CIS) 中進行 [Jekeli and Garcia, 1997]。首先，空間中 CHAMP 與 GPS 之距離向量及純量可表示成：

$$\bar{x}_m^p = \bar{x}^p - \bar{x}_m = \rho_m^p \cdot \bar{e}_m^p \quad (5-9)$$

$$\rho_m^p = |\bar{x}_m^p| = \bar{e}_m^p \cdot \bar{x}_m^p \quad (5-10)$$

其中， \bar{x}^p 與 \bar{x}_m 分別表示為 GPS 衛星與 CHAMP 衛星之位置向量， \bar{e}_m^p 則為 \bar{x}_m^p 之單位向量。將(5-9)與(5-10)式分別對時間取一次導數，可得相對距離變化量及視線速度：

$$\dot{\bar{x}}_m^p = \dot{\rho}_m^p \bar{e}_m^p + \rho_m^p \dot{\bar{e}}_m^p \quad (5-11)$$

$$\dot{\rho}_m^p = \dot{\bar{e}}_m^p \cdot \bar{x}_m^p + \bar{e}_m^p \cdot \dot{\bar{x}}_m^p = \bar{e}_m^p \cdot \dot{\bar{x}}_m^p \quad (5-12)$$

由(5-11)式，解得 $\dot{\bar{e}}_m^p$ 如下：

$$\dot{\bar{e}}_m^p = \frac{1}{\rho_m^p} (\dot{\bar{x}}_m^p - \dot{\rho}_m^p \bar{e}_m^p) \quad (5-13)$$

將 (5-13) 式乘以 (5-11) 式，則得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{e}}_m^p \cdot \dot{\bar{x}}_m^p &= \frac{1}{\rho_m^p} (\dot{\bar{x}}_m^p - \dot{\rho}_m^p \bar{e}_m^p) \cdot \dot{\bar{x}}_m^p \\ &= \frac{1}{\rho_m^p} \left(|\dot{\bar{x}}_m^p|^2 - (\dot{\rho}_m^p)^2 \right)\end{aligned}\quad (5-14)$$

將 (5-12)式對時間再取導數，然後將(5-14)式代入則可得視線加速度如下式：

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}_m^p &= \bar{e}_m^p \cdot \ddot{\bar{x}}_m^p + \dot{\bar{e}}_m^p \cdot \dot{\bar{x}}_m^p \\ &= \bar{e}_m^p \cdot \ddot{\bar{x}}_m^p + \frac{1}{\rho_m^p} \left[|\dot{\bar{x}}_m^p|^2 - (\dot{\rho}_m^p)^2 \right]\end{aligned}\quad (5-15)$$

其中， $\ddot{\bar{x}}_m^p$ 為 CHAMP 與 GPS 相對加速度向量。圖 5-2 為 CHAMP 衛星與 GPS 衛星間之距離、視線速度與加速度的示意圖。(5-15)式在實際計算時，分別以(5-7)式的相位速度 $\dot{\phi}_{m,3}^p$ 及相位加速度 $\ddot{\phi}_{m,3}^p$ 乘上常數 C/f_1 代替 $\dot{\rho}_m^p$ 與 $\ddot{\rho}_m^p$ 。不過此一替代過程忽略了時錶誤差造成的影響，將使求得的衛星加速度之精度大大的減低。因此就必須利用差分的方法，來消除 CHAMP 衛星時錶誤差。

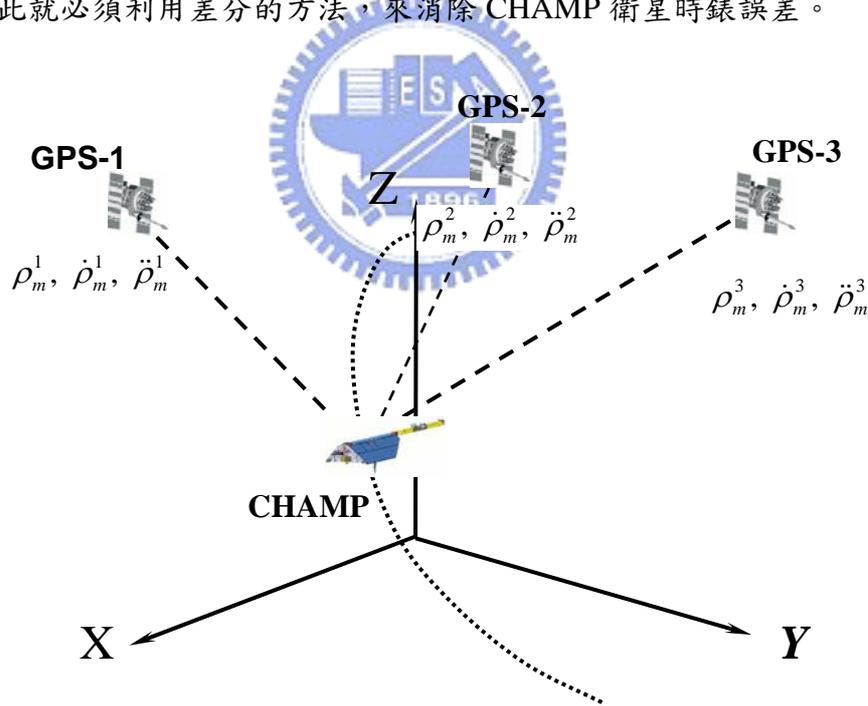


圖 5-2 CHAMP 衛星與 GPS 衛星間之距離、視線速度與加速度的示意圖

5.2.2 一次差分之視線加速度公式

CHAMP 衛星 (m) 同時對兩顆 GPS 衛星 p、q 進行差分，由(5-12)式可得

視線速度之一次差分公式：

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_m^{p,q} &= \dot{\rho}_m^p - \dot{\rho}_m^q \\
 &= \bar{e}_m^p \cdot \dot{\hat{x}}_m^p - \bar{e}_m^q \cdot \dot{\hat{x}}_m^q \\
 &= (\bar{e}_m^p - \bar{e}_m^q) \dot{\hat{x}}_m^p + \bar{e}_m^q \cdot (\dot{\hat{x}}^p - \dot{\hat{x}}^q)
 \end{aligned} \tag{5-16}$$

其中， $\dot{\rho}_m^{p,q}$ 為 CHAMP 至 GPS p, q 衛星的視線速度之差值， $\dot{\hat{x}}^p$ 與 $\dot{\hat{x}}^q$ 則為 GPS 衛星的 velocity 向量。同理，利用(5-15)式及向量分解進行一次差分計算，可得到：

$$\begin{aligned}
 \ddot{\rho}_m^{p,q} &= \ddot{\rho}_m^p - \ddot{\rho}_m^q \\
 &= \bar{e}_m^p \cdot \ddot{\hat{x}}_m^p - \bar{e}_m^q \cdot \ddot{\hat{x}}_m^q + (\dot{\bar{e}}_m^p \cdot \dot{\hat{x}}_m^p - \dot{\bar{e}}_m^q \cdot \dot{\hat{x}}_m^q) \\
 &= -(\dot{\bar{e}}_m^p - \dot{\bar{e}}_m^q) \cdot \ddot{\hat{x}}_m + (\bar{e}_m^p \cdot \ddot{\hat{x}}_m^p - \bar{e}_m^q \cdot \ddot{\hat{x}}_m^q) + (\dot{\bar{e}}_m^p \cdot \dot{\hat{x}}_m^p - \dot{\bar{e}}_m^q \cdot \dot{\hat{x}}_m^q)
 \end{aligned} \tag{5-17}$$

其中， $\ddot{\hat{x}}_m$ 為 CHAMP 的加速度向量， $\ddot{\hat{x}}^p$ 與 $\ddot{\hat{x}}^q$ 則分別為 GPS 衛星 p, q 的加速度向量。比較(5-12)、(5-15)式與(5-16)、(5-17)式，主要差別在於後者使用了一次差分的方法。差分的目的在消除不必要的多餘參數，而本節採用的一次差主要在消除接收儀的時錶誤差，以增加計算的精度。

5.2.3 以最小二乘法求解低軌衛星加速度

在(5-17)式中，單位向量 \bar{e}_m^p, \bar{e}_m^q 及 GPS 之位置由 GFZ 及 IGS 提供之 CHAMP 及 GPS 軌道計算、GPS 速度與加速度則由 GPS 軌道直接微分而得。由(5-17)式可知，欲求解 CHAMP 衛星加速度 $\ddot{\hat{x}}_m$ ，需先求得 GPS 衛星與 CHAMP 的相對速度 $\dot{\hat{x}}_m^p$ 及 $\dot{\hat{x}}_m^q$ 。吾人可利用最小二乘法同時對 n ($n > 4$) 顆 GPS 衛星進行觀測，並根據(5-16)式將向量表示成矩陣形式，可組成如下觀測方程式：

$$\begin{bmatrix} V_{p,1} \\ V_{p,2} \\ \vdots \\ V_{p,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\rho}_m^{p,1} - \bar{e}_m^1 (\dot{\hat{x}}^p - \dot{\hat{x}}^1) \\ \dot{\rho}_m^{p,2} - \bar{e}_m^2 (\dot{\hat{x}}^p - \dot{\hat{x}}^2) \\ \vdots \\ \dot{\rho}_m^{p,n} - \bar{e}_m^n (\dot{\hat{x}}^p - \dot{\hat{x}}^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_m^{p,1} \\ \bar{e}_m^{p,2} \\ \vdots \\ \bar{e}_m^{p,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_m^p \\ \dot{\hat{y}}_m^p \\ \dot{\hat{z}}_m^p \end{bmatrix} \tag{5-18}$$

寫成矩陣形式則為：

$$V_1 + L_1 = A_1 X_1$$

其中

A_1 每一列由 $\bar{e}_m^{p,i}$ 之三分量組成

$$\bar{e}_m^{p,i} = \bar{e}_m^p - \bar{e}_m^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq p$$

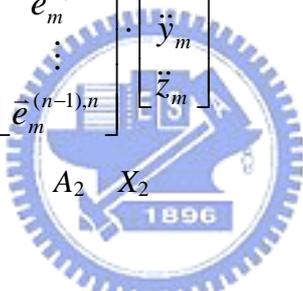
$$X_1 = (\dot{x}_m^p, \dot{y}_m^p, \dot{z}_m^p)^T \text{ 為 } \dot{\hat{x}}_m^p \text{ 的三個分量}$$

各觀測量之間的相關性並未考慮，假設各觀測量為等權，即 $P_1 = I$ ，則可求得 X_1 的估值， $\hat{X}_1 = (A_1^T P_1 A_1)^{-1} (A_1^T P_1 L_1)$ 。以同樣的方法，吾人可以求得 GPS 衛星與 CHAMP 的相對速度 $\dot{\hat{x}}_m^q$ ，於是(5-17)式只剩下三個未知量 $\ddot{\hat{x}}_m = (\ddot{x}_m, \ddot{y}_m, \ddot{z}_m)^T$ ，即衛星 m 之加速度三分量。

為求得 CHAMP 之加速度，吾人再次利用最小二乘法，同時觀測 $n (n > 4)$ 顆 GPS 衛星，並根據 (5-17) 式組成下列觀測方程：

$$\begin{bmatrix} V_{1,2} \\ V_{2,3} \\ \vdots \\ V_{(n-1),n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_m^{1,2} \\ c_m^{2,3} \\ \vdots \\ c_m^{(n-1),n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_m^{1,2} \\ \bar{e}_m^{2,3} \\ \vdots \\ \bar{e}_m^{(n-1),n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ \ddot{z}_m \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

即 $V_2 + L_2 = A_2 X_2$



其中

A_2 每一列含 $\bar{e}_m^{i,j}$ 之三分量

$$c_m^{i,j} = -\ddot{\rho}_m^{i,j} + (\bar{e}_m^i \cdot \ddot{\hat{x}}^i - \bar{e}_m^j \cdot \ddot{\hat{x}}^j) + (\dot{\bar{e}}_m^i \cdot \dot{\hat{x}}_m^i - \dot{\bar{e}}_m^j \cdot \dot{\hat{x}}_m^j),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1; j = i + 1$$

假設上式為等權觀測， $P_2 = I$ ，於是 $\hat{X}_2 = (A_2^T P_2 A_2)^{-1} (A_2^T P_2 L_2)$ ， $\hat{x}_2 = (\ddot{x}_m, \ddot{y}_m, \ddot{z}_m)^T$ 即為衛星之加速度三分量。

5.3 CHAMP 衛星觀測量分析

5.3.1 CHAMP 衛星加速度的計算

在大量計算前，先以一天之資料進行理論之驗證與資料處理方法之改進，本節首先分析之資料為 2001 年 12 月 22 日 24 小時 CHAMP 衛星資料，所需的資料有：

- (1) GPS 衛星精密星曆
- (2) CHAMP 衛星快速軌道
- (3) CHAMP 衛星之 GPS 追蹤資料 (tracking data)

其中，GPS 衛星之精密星曆取自 IGS (International GPS service) 的資料庫(IGS web)。IGS 的精密星曆乃結合 JPL (Jet Propulsion Laboratory)、COD (Center for Orbit Determination in Europe)、SIO (Scripps Institution of Oceanography) 等資料處理中心所計算出。目前 IGS 所提供的 GPS 星曆分為三類，分別為預估(predict)、快速(rapid)及精密(final)星曆。吾人在本實驗中採用精密星曆，其精度在目前可達 5cm 以內。而精密星曆的格式為 SP3 (Standard Product #3) 格式，資料間格為 15 分鐘一筆。CHAMP 衛星之快速軌道與 GPS 追蹤資料則取自 CHAMP 網站 [<http://isdc.Gfz-potsdam.de/champ/>]。其中，CHAMP 快速軌道資料為 30 秒一筆的 SP3 格式，SST 追蹤資料為 10 秒一筆的 RINEX2 (Receiver Independent Exchange Format Version 2) 格式，另外為求坐標轉換尚須 IERS 之 Bulltin B 資料及 DE200 星體星曆。

5.3.2 數值內插與數值微分

在求解 CHAMP 衛星加速度的過程中，吾人以數值內插與數值微分為工具進行大量的計算。數值內插使用的方法是 Divided Differences 多項式內插。假設有 $n+1$ 個等間距的已知點，

$$(x_i, f_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$$

其中， f_i 為 x_i 的函數值，則於 x 處之內插值可表成 n 階內插多項式，如下 [Gerald and Wheatley, 1994]：

$$P_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \quad (5-20)$$

其中， $s = \frac{x - x_0}{h}$ ， $h = x_{i+1} - x_i$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} \quad (5-21)$$

$$\Delta^k f_0 = f_k + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} f_{k-j} \quad (5-22)$$

其誤差項則可表示為 [Shampine and Gordon, 1975]：

$$E(x) = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad (5-23)$$

其中， ξ 為待求點 x 與已知點 x_0, x_1, \dots, x_n 之間的最小間隔。

因為 SST 資料為 10 秒一筆，所以本文利用上述數值內插方法進行 GPS 軌道及 CHAMP 軌道之內插。內插時，使用 14 階內插多項式將 GPS 及 CHAMP 軌道皆內插成 10 秒一筆之軌道。

關於數值微分的計算，本文應用 IMSL MATH/LIBRARY 的 DERIV 副程式，對 GPS 軌道進行數值微分（使用參數：KORDER=1、BGSTEP=1、TOL=10⁻⁹），微分後得 GPS 衛星速度及加速度，同時也對每顆衛星之相位觀測量取微分得相位速度及加速度。



5.3.3 實驗步驟與流程

本階段的實驗流程如圖 5-3 所示。

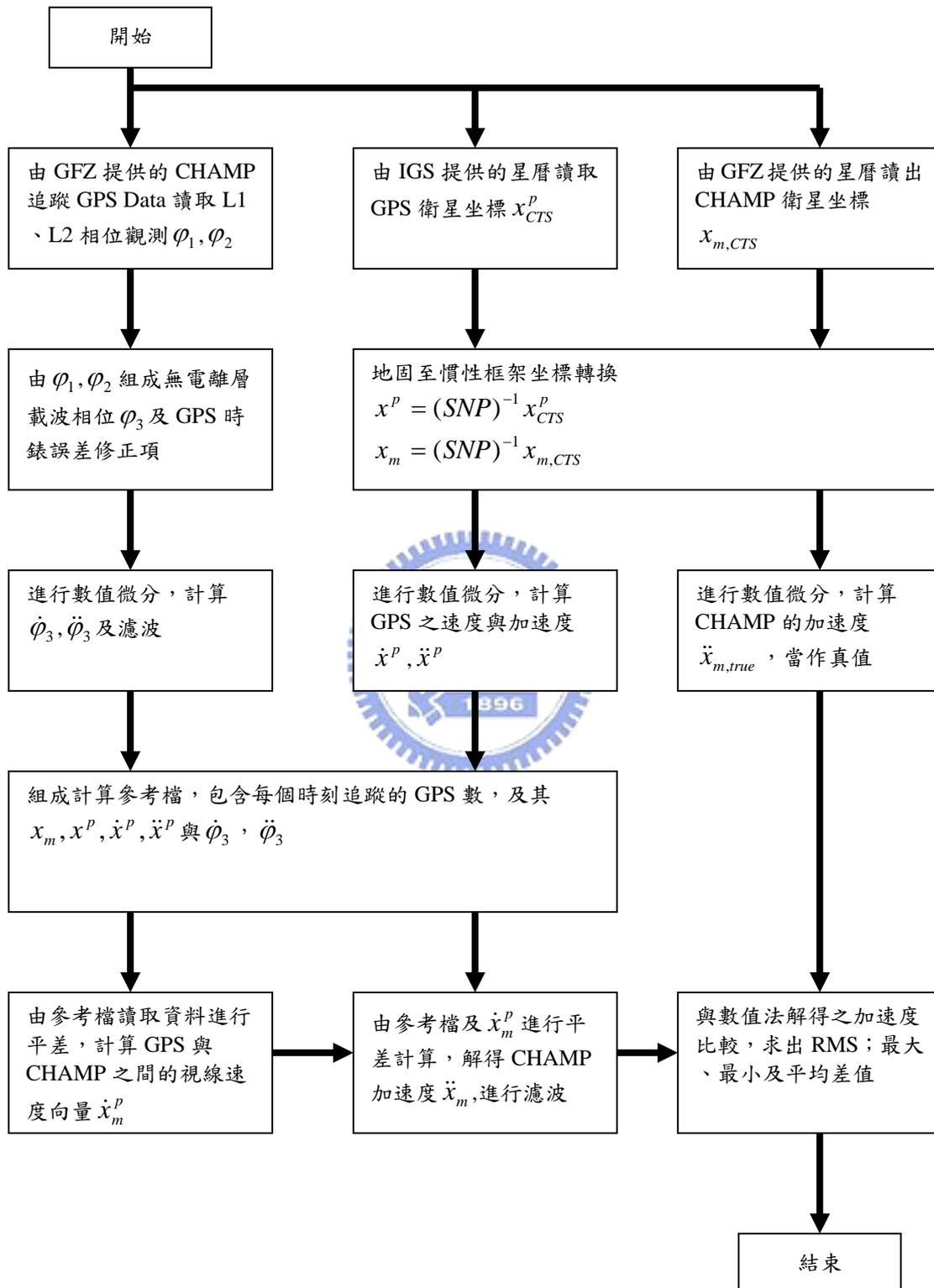


圖 5-3 計算衛星加速度之流程

5.3.4 實驗結果與分析

由於無法取得 CHAMP 衛星加速度的真值，而為評估相位推求得之加速度之精度，吾人將 CHAMP 的快速軌道 (X,Y,Z) (由 GFZ 以動力法求得者) 對時間兩次微分而得“真實”加速度 (當作為真值)，將相位法求得的加速度與其比較。

接收儀所接收之原始載波相位中包含了許多雜訊，因為無法直接以數學模式完全模式化，於是吾人採用平滑處理的方法得到較佳的相位以利計算。本節原始相位資料之平滑處理是採 60 秒波長的高斯濾波器 (Gaussian filter) 且迭代地剔除粗差，在實驗過程中，吾人另外以 120 秒及 180 秒之波長對原始相位進行平滑處理，不過結果並不理想。推測其原因，可能的解釋是由於波長太大，以致於平滑處理後的訊號部分隨著雜訊一併被消除所造成的。而求解加速度之平滑處理是採 1200 秒波長的高斯濾波器 (Gaussian filter) 且迭代地剔除粗差。

為得知相位加速度特性，吾人將 CHAMP 衛星接收到 GPS 1 號、2 號衛星的相位二次微分得相位加速度，由圖 5-4 可知未經週波脫落修正及相位平滑處理之相位加速度有很大的雜訊。由圖 5-4 亦知由未經差分之相位求得之加速度，因含有由接收儀 GPS 衛星時錶誤差，故有異常的振盪。本研究以下所呈現的結果均以相位一次差結果求得，故可消去 CHAMP 衛星上接收儀之時錶誤差。

圖 5-5 為由相位一次差求得之 CHAMP 衛星在地固坐標系之徑向 (radial)，緯度向 (latitudinal) 及經度向 (longitudinal) 三方向之擾動加速度。圖中分別顯示原始相位求得之加速度未經過平滑處理與真值之差異，其差值之 RMS 見表 5-1。未經平滑處理之加速度含有大雜訊，但仍可看到頻率與真值相同，尤其在徑向及緯度向更明顯，顯示理論方法是正確的。

圖 5-6 是相位經過週波脫落修正及濾波處理求得之加速度再經平滑處理後與真值之差異，由圖 5-6 得知原始相位經過 cycle slip 及濾波處理求得之加速度再經平滑處理後與真值之差異已減小許多，其波形頻譜已大致吻合，僅振幅大小不同，仍存某些系統誤差。平滑後之加速度可顯示出重力變化之訊號。

圖 5-7 相位經過週波脫落修正及濾波處理求得之加速度經平滑處理後與真值經濾波處理後之差異，由圖 5-7 值經濾波處理後，其振幅差異更小。

表 5-1 相位求得之加速度與真值之比較。因相位未平滑，故估算與真實加速度之差異甚大。表 5-2 原始相位經濾波及週波脫落修正處理而推求得之加速度與真值之比較。由表 5-2 結果得知，原始相位經後週波脫落修正處理及經濾波處理所得之加速度精度已有顯著改善。再將週波脫落修正及平滑處理之相位推求加速度經平滑處理，其精度可再提升，因此以相位法求解之加速度必須經平滑處理，但也因此平滑後會將重力訊號高頻部分平滑掉，如表 5-3、5-4、5-5 及圖 5-6、5-7 所示。然而其精度仍為百 mGal 等級，與 Jekeli and Garcia [1997] 所提的 1 mGal 相去甚遠。但 Jekeli and Garcia [1997] 使用的資料為地面資料，且取樣率為 1 秒一筆，且使用二次差分技術。

本節使用 GPS 之精密星曆中提供之 GPS 衛星時錶修正，理論上應可消除部分 GPS 衛星時錶誤差，但實際結果精度並未提升，另訊號傳遞延遲及週波脫落，也會損及本方法精度；也許可配合地面站，或是 GRACE 一對衛星之情況，以相位二次差分的方法求解加速度，或許可消除一些系統誤差而改善精度。

表 5-1 原始相位求得之加速度未經過濾波處理與真值之差異(單位： m/s^2)

	徑向	緯度向	經度向
差值 RMS	0.0129181475	0.0084791864	0.0038336482
平均差	0.0031256033	0.0000455705	-0.0001315344

表 5-2 原始相位經過濾波處理求得之加速度與真值之差異(單位： m/s^2)

	徑向	緯度向	經度向
差值 RMS	0.0059565166	0.0028257076	0.0015866913
平均差	-0.0001447766	0.0000467944	0.0000089508

表 5-3 經過週波脫落修正及濾波處理之相位求得之加速度再經濾波處理後與真值之差異(單位： m/s^2)

	徑向	緯度向	經度向
差值 RMS	0.0046028075	0.0029120857	0.0002956860
平均差	0.0020548267	-0.0000119852	-0.0000695438

表 5-4 經過週波脫落修正及濾波處理之相位求得之加速度再經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異(單位: m/s^2)

	徑向	緯度向	經度向
差值 RMS	0.0025532042	0.0006976120	0.0002917313
平均差	0.0020302333	-0.0000933100	-0.0000690059

表 5-5 經過週波脫落修正及濾波處理之相位求得之加速度再經濾波處理後減去差值的平均值後與真值經濾波處理後之差異(單位: m/s^2)

	徑向	緯度向	經度向
差值 RMS	0.0015482263	0.0006913435	0.0002834525
平均差	-0.0000000001	0.0000000000	0.0000000000



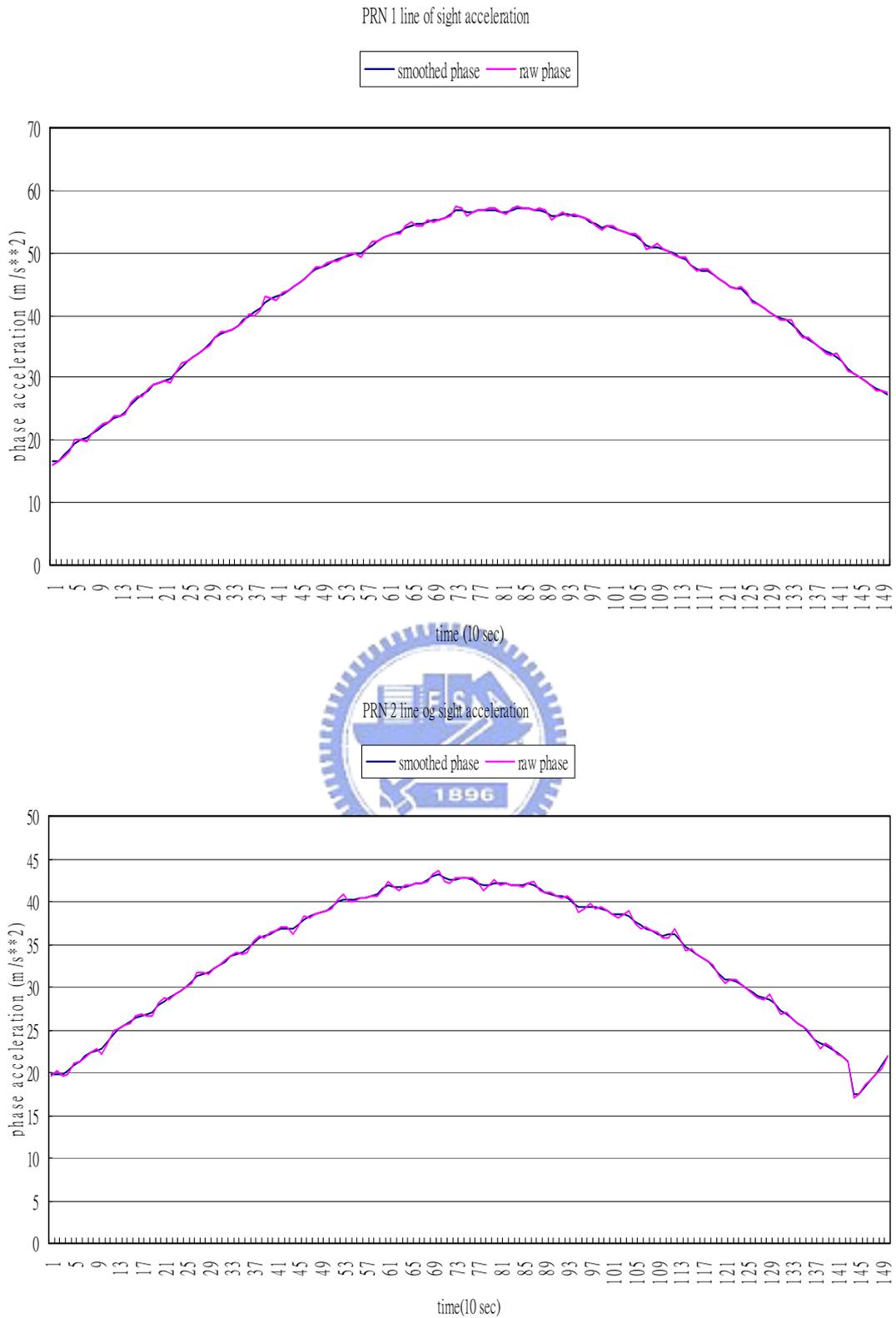


圖 5-4 由相位訊號經濾波處理與未經濾波處理求得之視線加速度比較
上圖為 CHAMP 對 GPS 1 號衛星，下圖為對 2 號衛星。

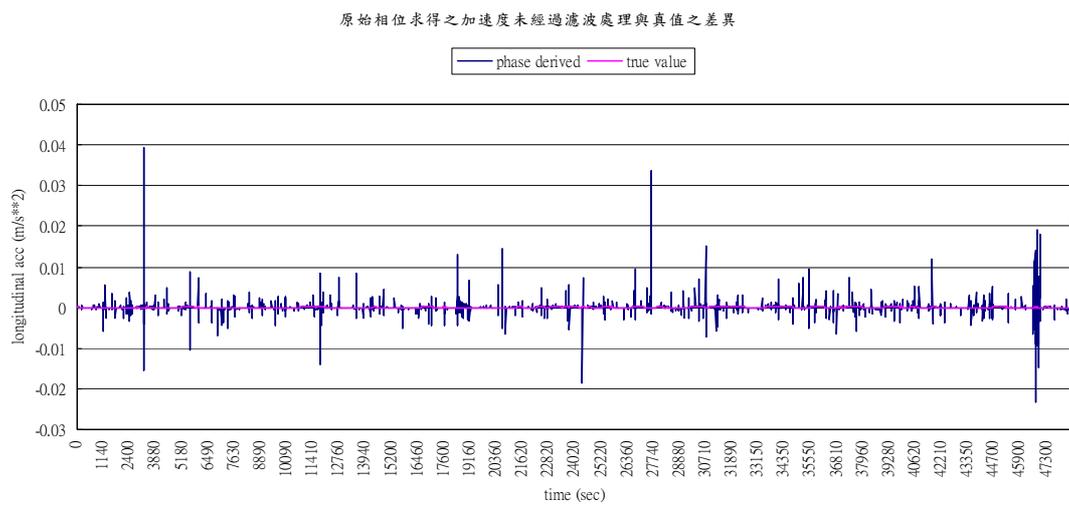
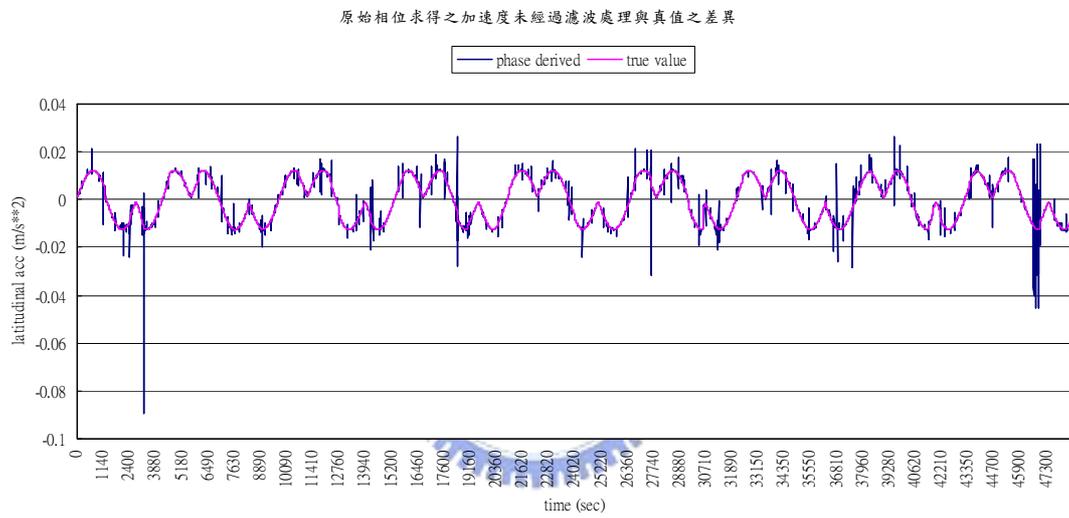
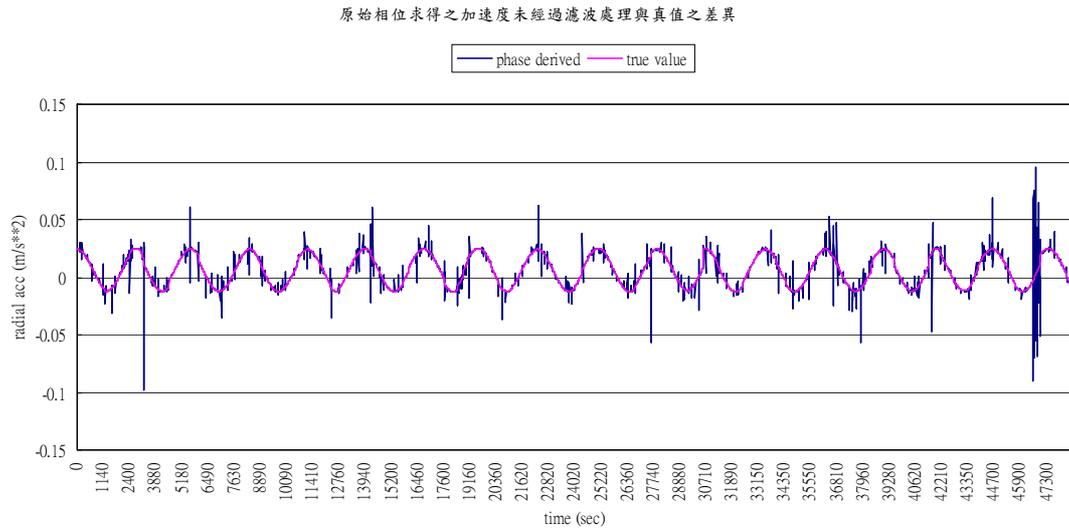
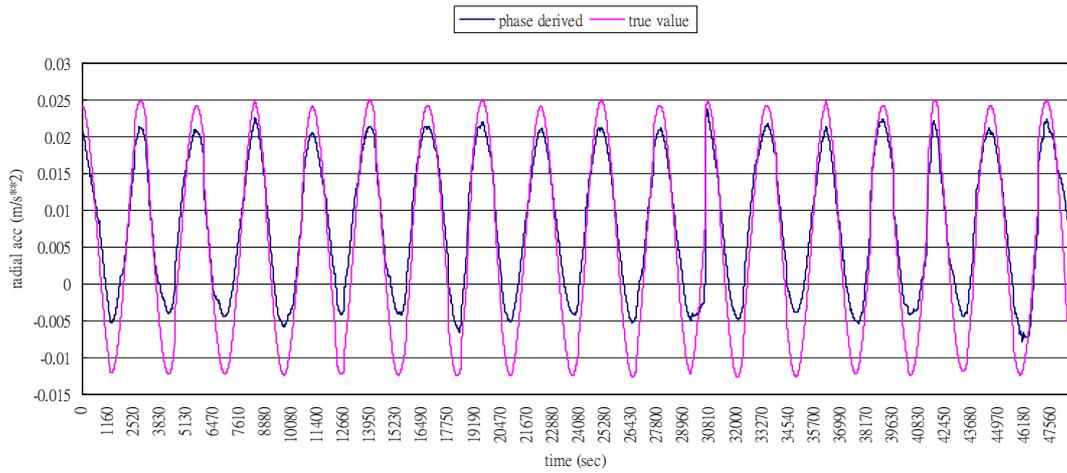
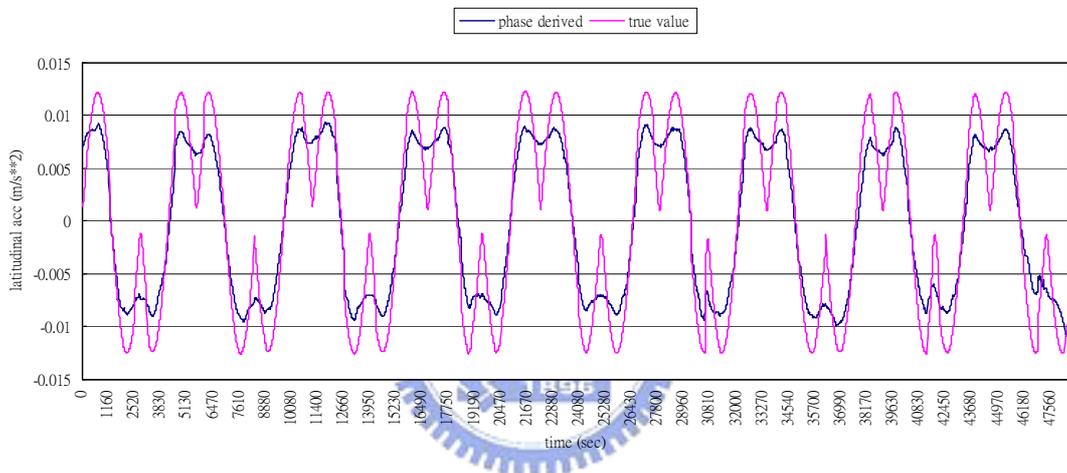


圖 5-5 由一次差原始相位求解之加速度（共 3 個方向）未經過濾波處理與真值之差異

經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值之差



經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值之差



經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值之差

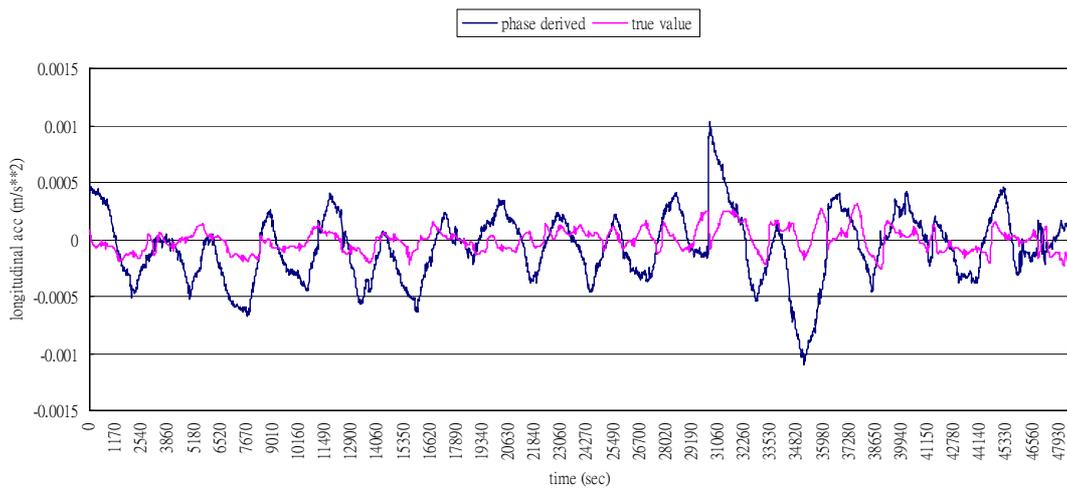
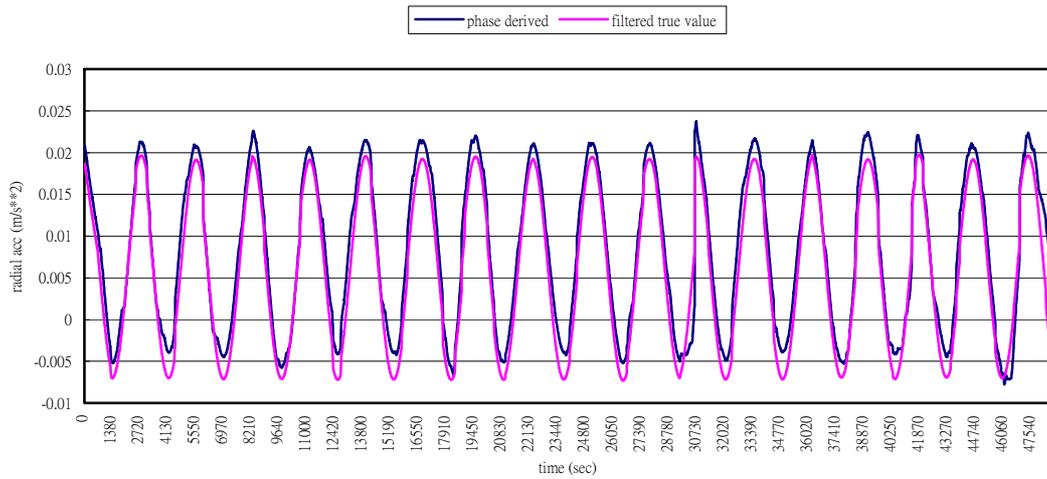
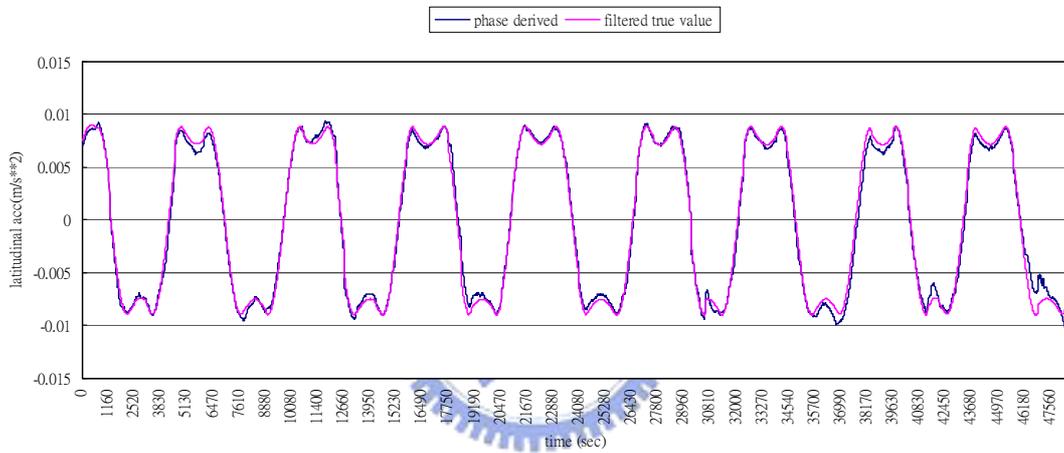


圖 5-6 經過週波脫落修正及濾波處理之相位求得之加速度再經濾波處理後與真值之差異

經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異



經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異



經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異

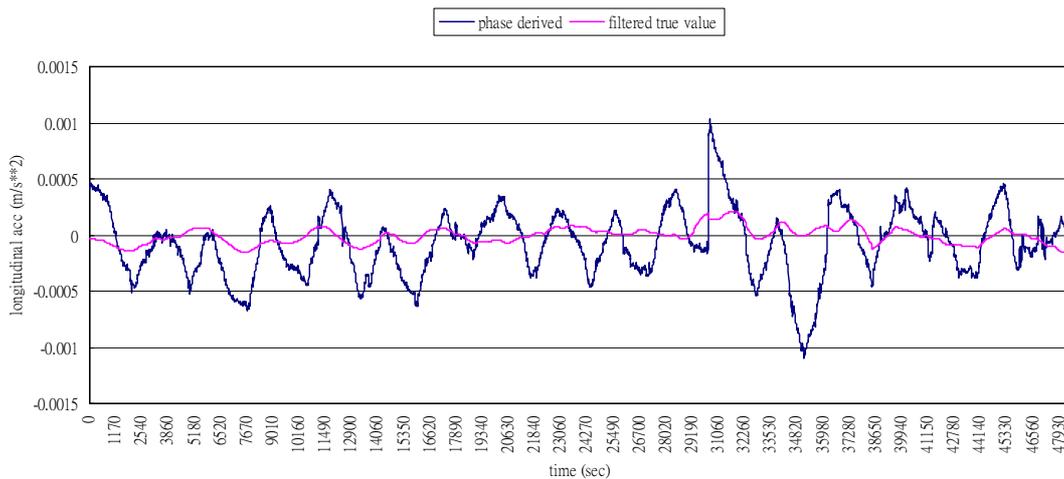
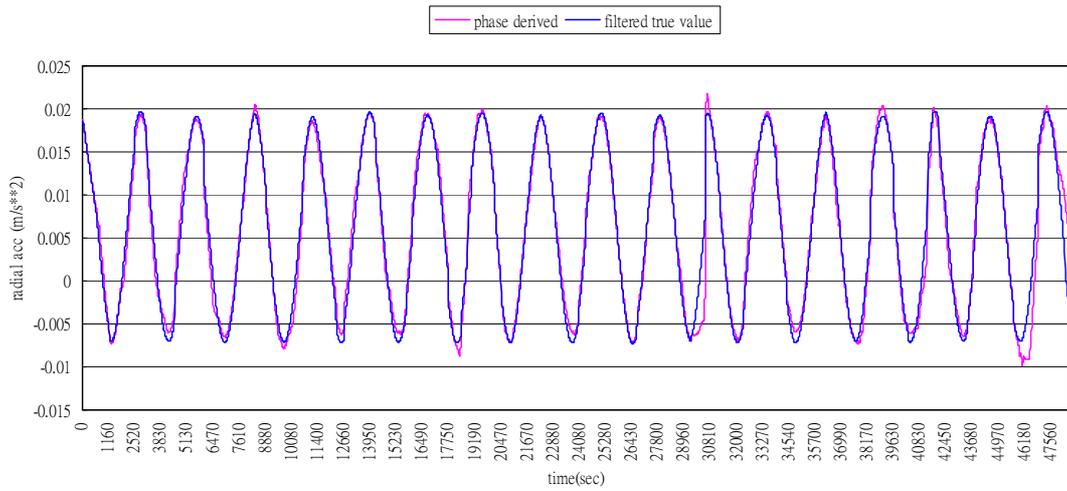
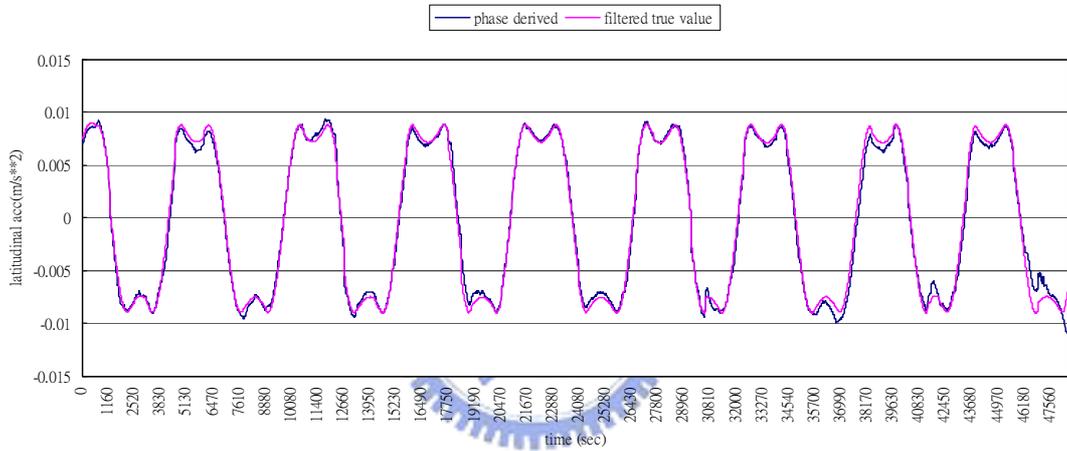


圖 5-7 經過週波脫落修正及濾波處理之相位求得之加速度再經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異

經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後減去差值的平均值後與真值經濾波處理後之差異



經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異



經過cycle slip及濾波處理之相位求得之加速度經濾波處理後與真值經濾波處理後之差異

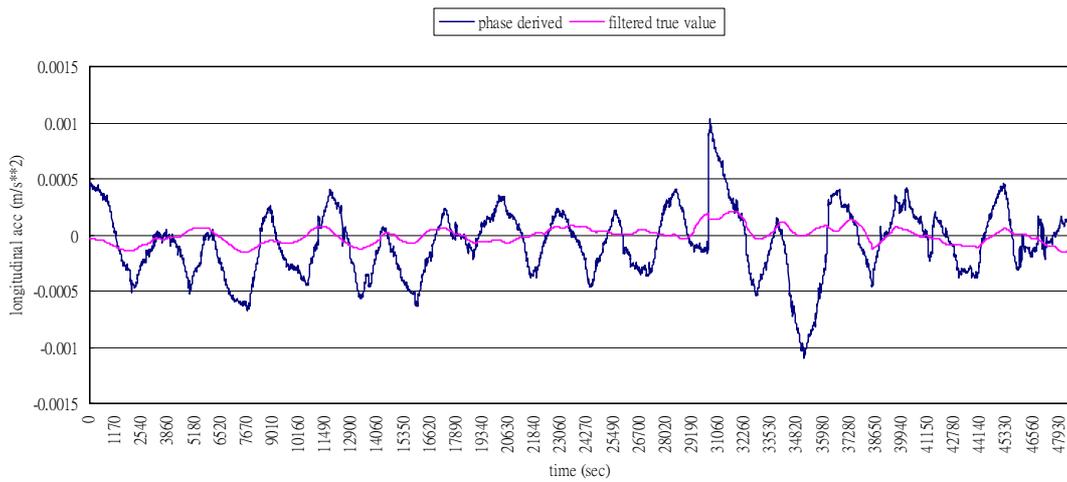


圖 5-8 經過週波脫落修正及濾波處理之相位求得之加速度再經濾波處理後減去差值的平均值後與真值經濾波處理後之差異

5.4 利用衛星加速度求解地位模式

本節係利用上節相位法求解之 CHAMP 衛星加速度，再扣除第四章各種擾動力後，計算地球重力場。首先說明地位係數與衛星加速度之關係，再說明求解之理論方法。本節也利用 GFZ 提供之 CHAMP 之快速軌道資料二次微分所得之加速度解算地位係數，並與 EGM96 比較。

5.4.1 地位模式的關係

在所有衛星的擾動力中，以地球的非球形引力最為重要，其數量級也最大，比其它擾動力大 2~3 個數量級。而非球形引力意指地球的引力場中，除了中心力以外，因為地球的形狀不規則、質量分佈不均所造成的引力。根據地位理論，衛星在地球重力場所受的非球形擾動位 (nonspherical potential) 可以球諧函數展開如 (4-5) 式 [Heiskanen and Moritz, 1967]。由 (4-5) 式可知地球重力場之球諧展開是建立在地固坐標系。

由於衛星加速度為擾動位的梯度，若將加速度表示成地固坐標，則衛星加速度與擾動位的關係如下：[GSFC, 1970]

$$\bar{a}_{NS}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{NS}}{\partial x_b} \\ \frac{\partial V_{NS}}{\partial y_b} \\ \frac{\partial V_{NS}}{\partial z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_b} & \frac{\partial \phi}{\partial x_b} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_b} \\ \frac{\partial r}{\partial y_b} & \frac{\partial \phi}{\partial y_b} & \frac{\partial \lambda}{\partial y_b} \\ \frac{\partial r}{\partial z_b} & \frac{\partial \phi}{\partial z_b} & \frac{\partial \lambda}{\partial z_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{NS}}{\partial r} \\ \frac{\partial V_{NS}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial V_{NS}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

其中， (x_b, y_b, z_b) 為地固坐標。而 $\left[\frac{\partial V_{NS}}{\partial r} \quad \frac{\partial V_{NS}}{\partial \phi} \quad \frac{\partial V_{NS}}{\partial \lambda} \right]^T$ 則可展開成：

$$\frac{\partial V_{NS}}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (n+1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \quad (5-26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{NS}}{\partial \phi} = & \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \\ & \left[\sqrt{(n-m)(n+m+1)/(1+\delta(m))} \bar{P}_{n,m+1}(\sin \phi) - m \tan \phi \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \right] \end{aligned} \quad (5-27)$$

$$\frac{\partial V_{NS}}{\partial \lambda} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (\bar{S}_{nm} \cos m\lambda - \bar{C}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \quad (5-28)$$

其中

$$\begin{cases} \delta(m) = 1, & \text{當 } m = 0 \\ \delta(m) = 0, & \text{當 } m \neq 0 \end{cases}$$

由 (5-25) 式及 (x_b, y_b, z_b) 與 (r, ϕ, λ) 的關係，吾人可推得：

$$\bar{a}_{NS}^b = \begin{bmatrix} \frac{x_b}{r} & \frac{-x_b z_b}{r\sqrt{x_b^2 + y_b^2}} & \frac{-y_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \\ \frac{y_b}{r} & \frac{-y_b z_b}{r\sqrt{x_b^2 + y_b^2}} & \frac{x_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \\ \frac{z_b}{r} & \frac{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{NS}}{\partial r} \\ \frac{\partial V_{NS}}{r \partial \phi} \\ \frac{\partial V_{NS}}{r \cos \phi \partial \lambda} \end{bmatrix} = M \bar{a} \quad (5-29)$$

式中， \bar{a} 為以地固坐標表示的加速度向量，即 (A_r, A_ϕ, A_λ) ，而 M 為旋轉矩陣。若不考慮歲差、章動與極移之影響，吾人可直接將慣性空間之坐標 (x, y, z) 代入 (5-29) 式而得 [Hwang and Lin, 1998]：

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{-xz}{r\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{r} & \frac{-yz}{r\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{z}{r} & \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_I \quad (5-30)$$

其中， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，下標 I 表示慣性坐標系。因此可由 (5-30) 式得到衛星加速度在慣性坐標系及地固坐標系的關係。

5.4.2 以約制條件之最小二乘法求解地位模式

為透過加速度求解地位模式，吾人可以將 (5-26)、(5-27) 與(5-28)式中的未知參數 $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ 提出分別組成未知數向量 X 與設計矩陣 A ，而觀測量 L 則可透過慣性坐標的衛星加速度經 (5-30)式轉換得到。於是原始觀測方程式如下：

$$V + L = AX \quad (5-31)$$

利用最小二乘法 $V^T P V = \min$ 之條件 (5-32)

而權矩陣 $P = \sigma_0^2 C_l^{-1}$

σ_0 為權單位先驗中誤差， C_l 為觀測量之間之變方-協變方矩陣，所以

$$P_l^{-1} = C_l / \sigma_0^2 = Q_l \quad (5-33)$$

Q_l 為權倒數矩陣

如果觀測量視為不相關，一般衛星追蹤資料都是假設不相關，因此權矩陣可以表示如下式：

$$P_l = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & & & 0 \\ & \sigma_2^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^{-2} \end{bmatrix} \quad (5-34)$$


σ_i^2 是第 i 觀測量之變方，因此，

$$\text{解未知數 } \hat{X} = (A^T P_l A)^{-1} A^T P_l L = N^{-1} U \quad (5-35)$$

由誤差傳播定律，未知數 \hat{X} 解之權倒數矩陣可表示為

$$Q_{\hat{X}} = (A^T P_l A)^{-1} = N^{-1} \quad (5-36)$$

而未知數 \hat{X} 解之變方-協變方矩陣 $C_{\hat{X}}$ 可表示為

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{\hat{X}} \quad (5-37)$$

式中 $\hat{\sigma}_0^2$ 為後驗權單位變方，可表示為

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} = \frac{(L^T P_l L - U^T \hat{X})}{n - u} \quad (5-38)$$

(5-37) 式中之對角線元素，即為每個未知數 \hat{X}_i 之變方，即

$$\hat{\sigma}_{\hat{X}_i} = (C_{\hat{X}}^{ii})^{1/2} \quad (5-39)$$

而第 i 個未知數 \hat{X}_i 及第 j 個未知數 \hat{X}_j 之間之相關係數，可表示為

$$K_{ij} = \frac{C_{\hat{X}}^{ij}}{(C_{\hat{X}}^{ii} \cdot C_{\hat{X}}^{jj})^{1/2}} \quad (5-40)$$

在軌道或大地參數 (geodetic parameter) 的求解過程中，由於資料無法分布全球，會有極溝(polar gap)及混疊(aliasing effect)問題，會造成法方程式奇異或病態，因此常需要對未知參數加以約制條件 [Reigber, 1989]。吾人可以透過適當的權 (weight) 組成條件方程，再與原始觀測方程式一起平差求解未知參數。在最近許多求解重力的研究中，一般都使用修改過的 Kaula [1966] 地位模式變方 (variances)，如下 [Reigber, 1989]：

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \approx 5 \times 10^{-11} / n^4 \quad (5-41)$$

即在地位係數 \bar{C}_{nm} ， \bar{S}_{nm} 加入一約制條件，相當於未知數有一虛擬觀測量

$$\bar{C}_{nm} = 0 \quad P_{\bar{C}_{nm}} = 7 \times 10^{-6} / n^2$$

$$\bar{S}_{nm} = 0 \quad P_{\bar{S}_{nm}} = 7 \times 10^{-6} / n^2$$

因此與 (5-31) 式聯合組成觀測方程式

$$\begin{bmatrix} V \\ V_X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} X \quad (5-42)$$

其中， L_X 為某地位模式之觀測量，在本文中為 0，而聯合觀測量之權矩陣為：

$$P = \begin{bmatrix} P_\ell & 0 \\ 0 & P_X \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

其中， $P_X = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_n^2})$ ，是由 $1/\sigma_n^2$ 組成的對角線矩陣。在此，吾人假設 L 與

L_X 為非相關的觀測量，因此其非對角元素為‘零’。

依帶有約制條件之間接觀測平差方式解未知數，則

$$\hat{X} = (A^T P_\ell A + P_X)^{-1} (A^T P_\ell L) \quad (5-44)$$

求解的地位係數之變方—協變方為

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P_\ell A + P_X)^{-1} \quad (5-45)$$

式中，後驗權單位變方可表示為下式

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P_l V}{n - u + r} \quad (5-46)$$

n 為觀測量數， u 為求解未知數個數， r 為加權未知數個數。

利用 Kaula 約制條件，主要優點是當解至高階時，法方程式不會有秩虧問題，可得到一個穩定的解及精度預估，但缺點是因為引入地位係數之虛擬觀測量為 0 的約制條件，所得之地位係數其絕對值會有變小趨勢。

5.4.3、實驗結果與分析

由於衛星受到的擾動主要是地球重力場低階的帶諧球諧係數所引起的，從 CHAMP 資料計算之加速度分量圖中可發現這些現象。因此本研究採一個月計算一星期的資料，一年中共有 12 組資料分別計算得 CHAMP 之加速度，再扣除衛星上之加速度儀量得的非引力所造成的加速度及其它引力如日、月引力、海潮、地球固體潮等，則得純由地球擾動引力所造成之擾動加速度，但因相位法求得之衛星加速度精度僅達 $10^{-3} \sim 10^{-4} \text{m/s}^2$ ，所以扣除各種擾動力後計算所得地位係數精度並未提升。

本文利用最小二乘法計算 12 組地位係數，再利用法方程式的累加技術可解算全年之平均重力場即靜態重力場，靜態重力場為一平均、與時間獨立的重力場，可用於計算大地水準面、重力異常等，應用於高程測量、板塊結構解釋及軌道積分等。又可從 12 組低階的帶諧係數 (J_2 、 J_5 、 $J_6 \dots$) 觀察到低階之地位係數隨時間之變化。而地球重力場變化乃由於地球大氣結構變化、海水質量重新分佈、地下水位起伏、地幔結構產生變化等因素引起，因此在適當的約制條件下，可藉觀測的重力場變化而反演上述機制的變化。此法之優點有不需龐大程式如 GEODYN、不需 CHAMP 之精密軌道及地面追蹤站資料，也無須解整數週波

未定值，且簡單又快速。

本文使用的資料為 CHAMP 快速軌道資料加上相位資料所求得之加速度，扣除其它保守擾動力，再以加速度儀資料所得之擾動力替代空氣阻力、太陽輻射壓、地球輻射壓等非引力所造成之擾動力。CHAMP 之快速軌道是以先驗的 GRIM5C1 重力場模式及 GPS 追蹤資料所推求而得，可說是動力軌道，事實上快速軌道與利用 SLR 資料定軌的精確軌道其位置差的 RMS 值達 19 cm[Koenig, 2001]。

CHAMP 衛星上雖酬載有加速度儀，但其線性加速度在徑向方向之加速度資料有誤差，且角加速度有兩個分量亦有問題，即 a_{Psi} 及 a_{Theta} [CHAMP Newsletter, 2001]，但經過 GFZ 的努力，已將上述誤差的分量做修正 [CHAMP Newsletter, 2002]。資料處理方式見 4.5 節。

CHAMP 升空至今將屆 5 年，第一個純由衛星資料推求之地球重力場為 EIGEN1S，地位係數展開至 100 階，係利用 88 天的 CHAMP 資料[Reigber et al., 2001]，另一個為 TEG5，其利用 80 天的 CHAMP 資料[Tapley et al., 2002]；OSU 亦利用 16 天的 CHAMP 快速軌道資料及加速度儀之 Y 方向資料推得 OSU02A，地位係數展開至 50 階，發現 OSU02A 與 GRIM5C1 較為接近，這是很合理的。因為 OSU02A 是利用 CHAMP 快速軌道資料，而快速軌道資料是以 GRIM5C1 來定軌。嚴格來說，如以快速軌道來求解地球重力場，並非純由衛星資料推求，因為 GRIM5C1 含有地面重力資料及衛星測高資料。

本節分析之資料是 CHAMP 自 2001 年 5 月至 2002 年 5 月共 12 個月，取每個月的第 21 天至第 27 天的資料，所求得之地位係數(只解算到 50 階)與 EGM96 比較。圖 5-9 為加權約制求解之帶諧地位係數與 EGM96 之差異，由圖中可知重力場的時變主要反映在 \bar{C}_{20} ，故 \bar{C}_{20} 的變化較明顯，但其差異的數量級比上述文獻大 1 個數量級，主要原因是本文僅由 CHAMP 快速軌道資料來求定地位係數，又 CHAMP 快速軌道是以 GRIM5C1 定軌的動力軌道，而非 EGM96 之動力軌道，因此所求解之地位係數含有系統誤差存在。

圖 5-10 為未加權約制求解之帶諧地位係數與 EGM96 之差異，由圖 5-9 及 5-10 可知未加權約制與加權約制所求得之地位係數差異不大，其原因應是 CHAMP 資料涵蓋南北極 87 度的資料，極溝 (polar gap) 不大且觀測量甚多 (每 10 秒一筆，共七天的軌道資料)。

圖 5-11 及圖 5-12 分別為七天 CHAMP 快速軌道及 EGM96 推求之重力場計

算全球大地起伏等值圖，由圖中可知二者結構大致相同，但圖 5-11 雜訊較多且較不平滑，應是快速軌道精度所致。

由圖 5-13、5-14 發現本章求解之地位係數之全球大地起伏與 GFZ EIGEN-1S 之訊號趨勢相似，顯示相位法理論可行，但仍有改善空間。

由圖 5-15 發現本章求解之地位係數之全球大地起伏與 EIGEN-1S 之全球大地起伏差異，其最小差異為-134.9cm，發生在經度 298° ，緯度 -13.5° ，最大差異為 134.4cm，發生在經度 287° ，緯度 -23.5° ，差異平均值 3.6cm，差異之 RMS 值 38.9cm。



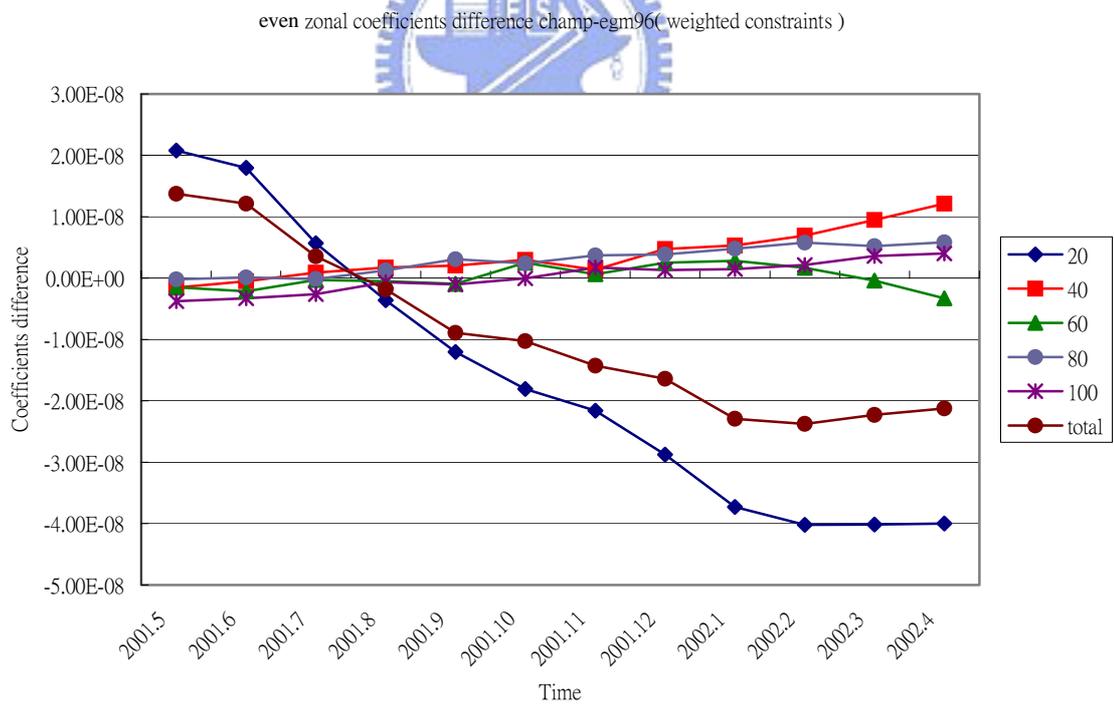
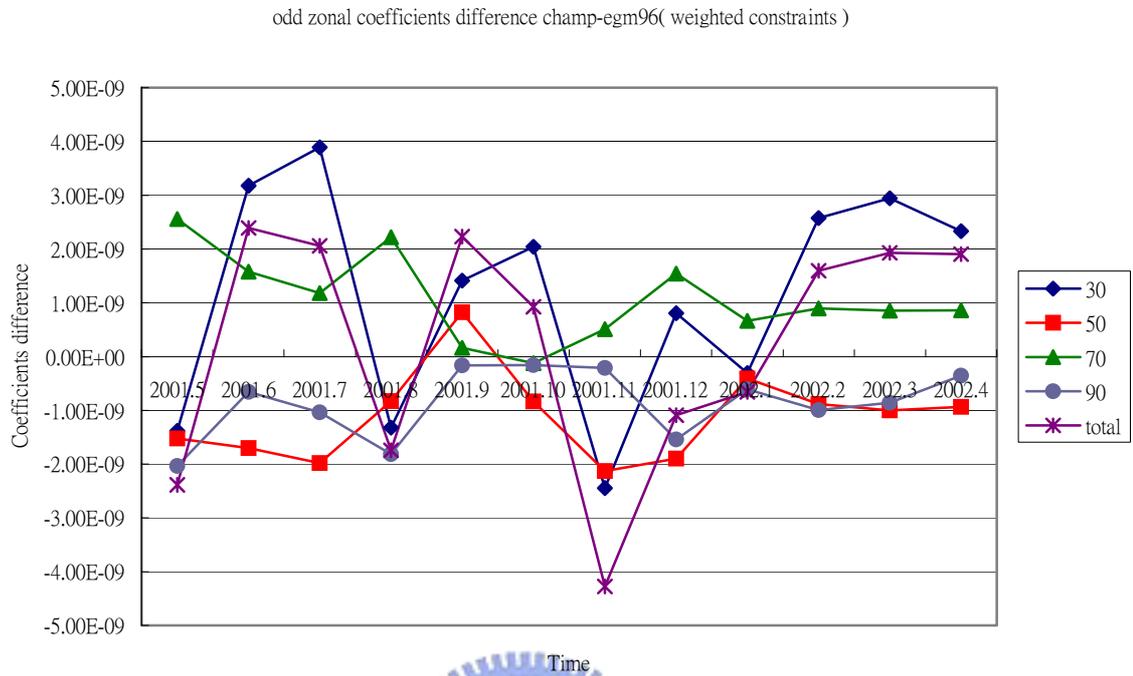
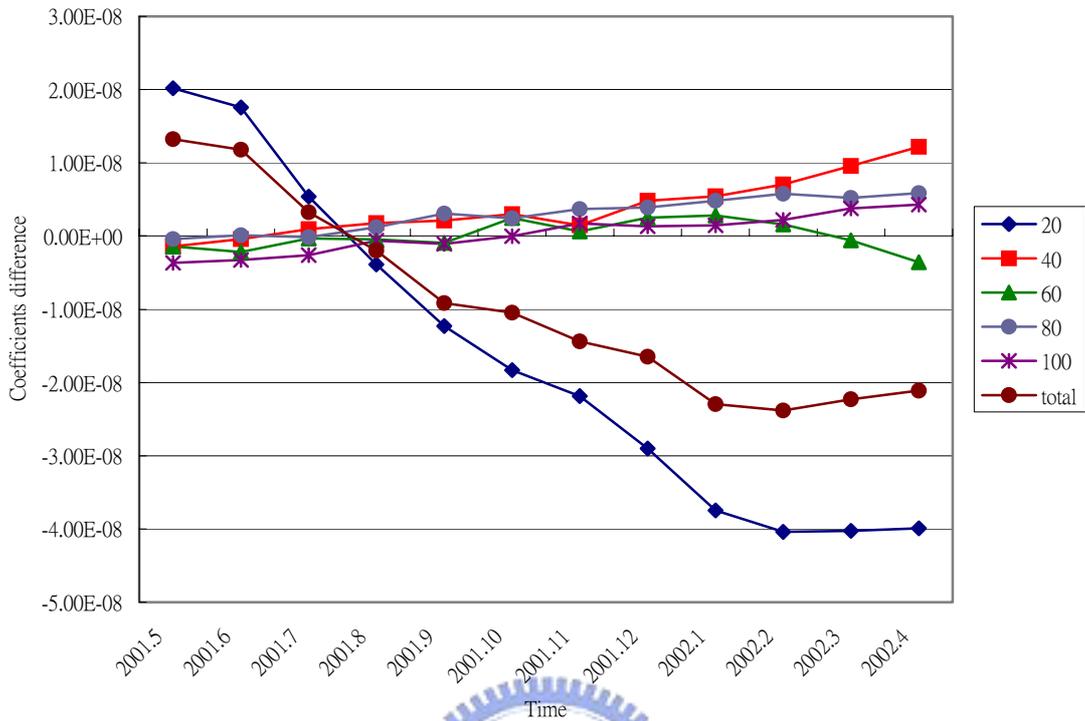


圖 5-9 加權約制求解之低階帶諧地位係數與 EGM96 之差異

even zonal coefficients difference champ-egm96(no weighted constraints)



odd zonal coefficients difference champ-egm96(no weighted constraints)

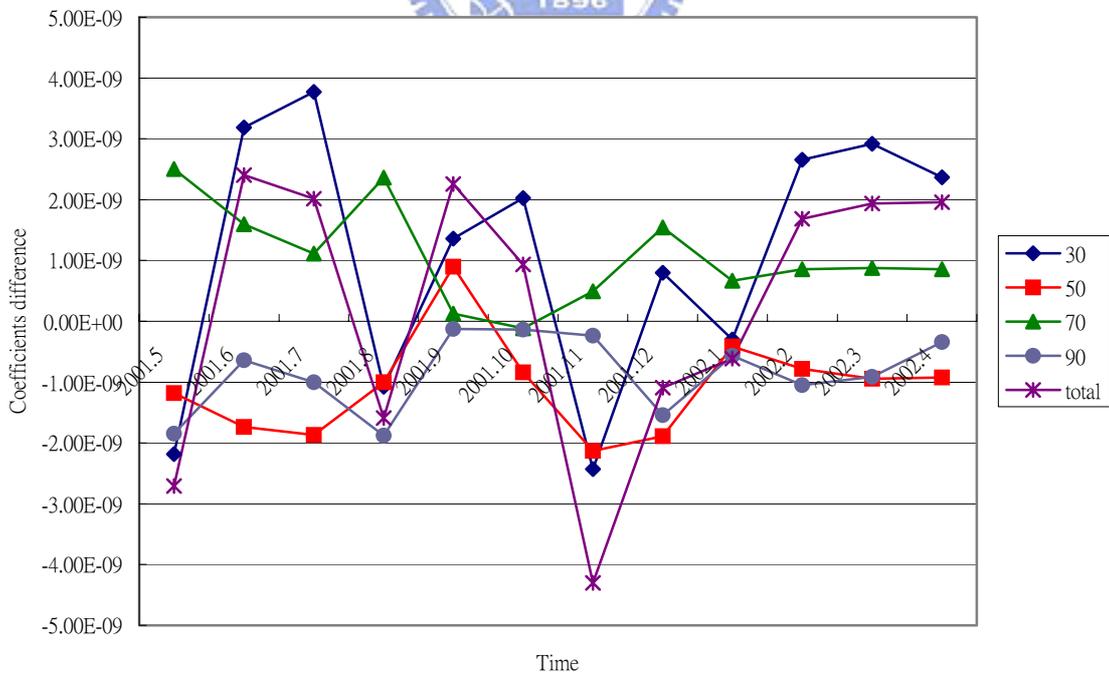


圖 5-10 未加權約制求解之低階帶諧地位係數與 EGM96 之差異

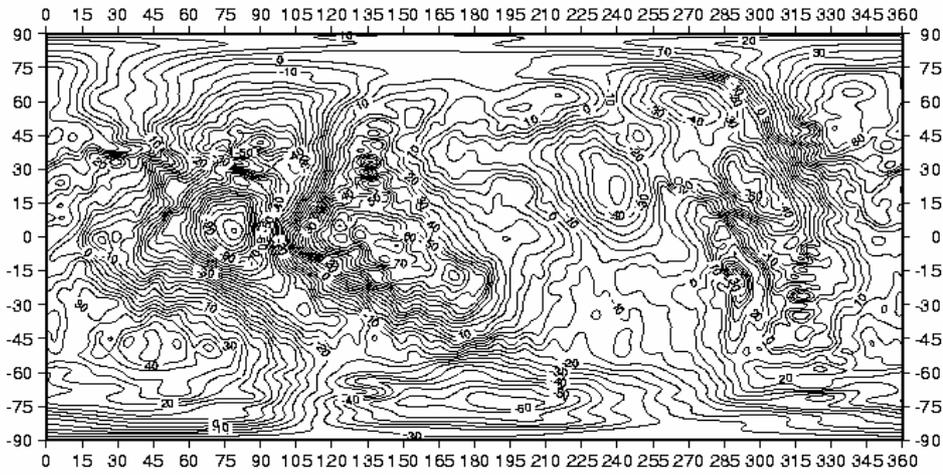


圖 5-11 本文推求之重力場計算全球大地起伏等值圖 30' * 30' 50 階(單位:公尺)

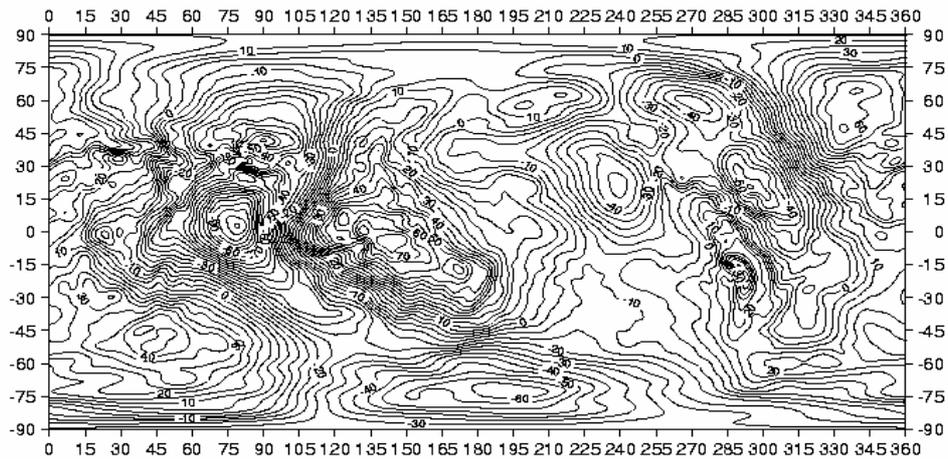


圖 5-12 EGM96 重力場計算全球大地起伏等值圖 30' * 30' 50 階(單位:公尺)

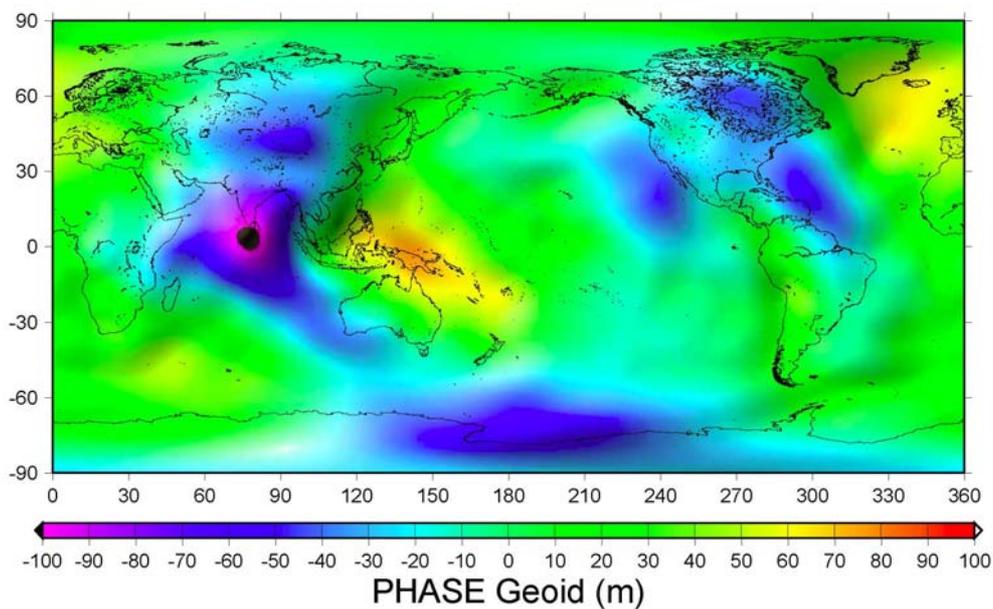


圖 5-13 本章求解之地球重力場計算之大地起伏 (n=20)

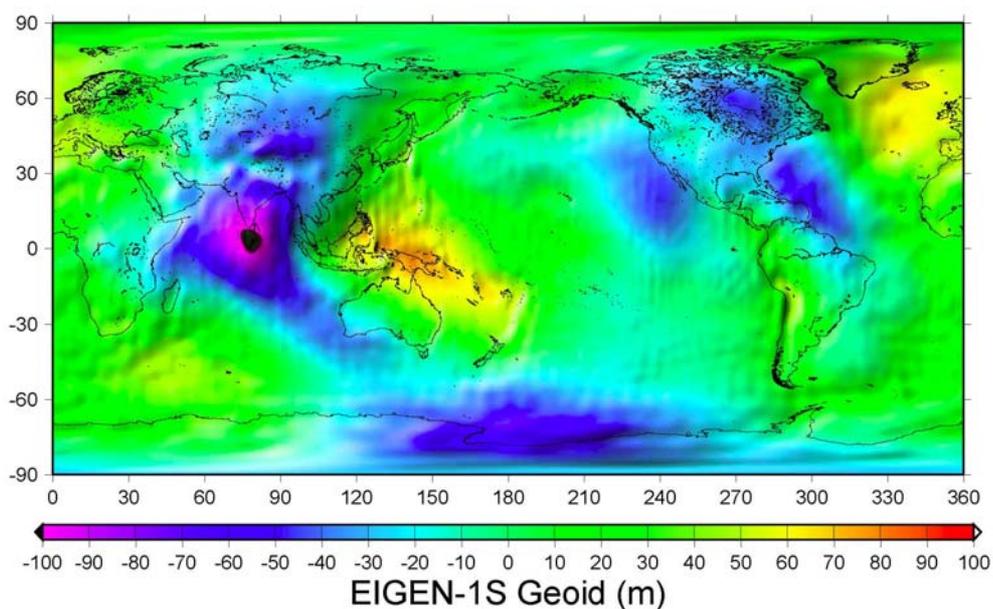


圖 5-14 GFZ EIGEN-1S 地球重力場計算之大地起伏 (n=100)

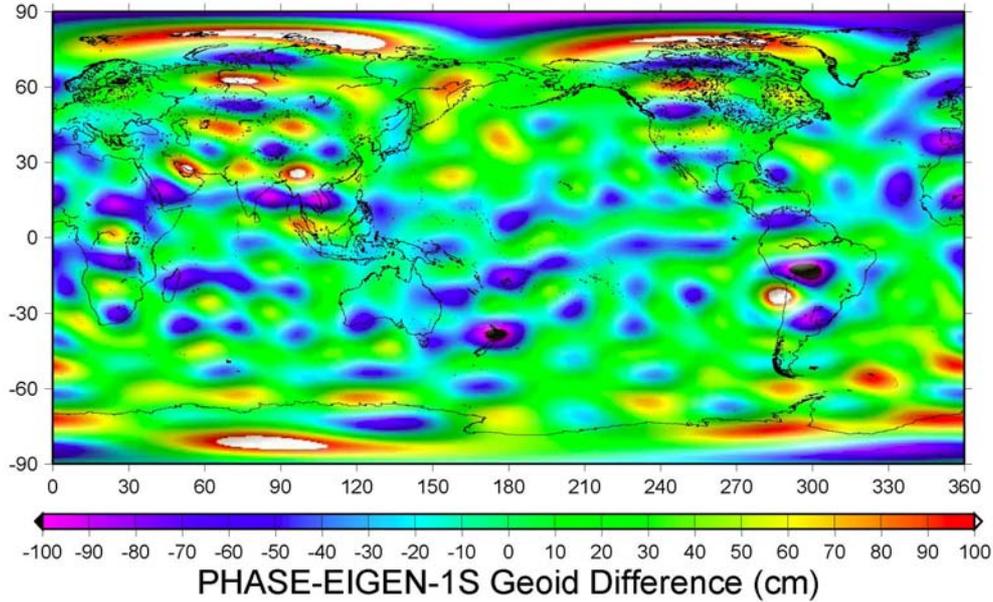


圖 5-15 本章求解之大地起伏與 EIGEN-1S 求解之大地起伏之差異

5.4.4 利用 CHAMP 快速軌道所求解之地位係數精度之評估

本節利用係數的相對誤差來評估求解地位係數之外在精度(external accuracy)，公式如下

$$E_{nm}^c = \left| \frac{\bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^{egm}}{\bar{C}} \right| \quad E_{nm}^s = \left| \frac{\bar{S}_{nm} - \bar{S}_{nm}^{egm}}{\bar{S}} \right| \quad (5-47)$$

\bar{C}_{nm} ， \bar{S}_{nm} 是利用本法所求得之地位係數

\bar{C}_{nm}^{egm} ， \bar{S}_{nm}^{egm} 是 EGM96 模式之地位係數

而內在精度之評估是利用每一階大地起伏誤差，依 Brun's 公式

$$N = \frac{\Delta V}{\gamma} \quad (5-48)$$

其中 γ 為正常重力， ΔV 為擾動位， N 為大地起伏

$$N = \frac{1}{\gamma} \frac{GM}{r} \sum_{m=2}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

$$\text{令 } \gamma = \frac{GM}{a_e^2}, \quad r = a_e$$

$$\begin{aligned} \text{則 } N &= \frac{a_e^2}{GM} \frac{GM}{a_e} \sum_{m=2}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ &= a_e \cdot \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (5-49)$$

$$\therefore \sigma_{Nn} = a_e \cdot \sqrt{\sum_{m=0}^n (\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 + \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2)} \quad (5-50)$$

式中 a_e 為地球平均半徑， $\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2$ 、 $\sigma_{\bar{S}_{nm}}^2$ 為 \bar{C}_{nm} 、 \bar{S}_{nm} 之標準偏差。

圖 5-16 加權約制求解之帶諧地位係數與 EGM96 比較之相對誤差，而未加權約制之結果仍同圖 5-16，由圖可知 14 階以下，其相對誤差皆在 0.1 以下，一般來說低階的帶諧地位係數之相對誤差都比高階小，本文求解的 \bar{C}_{20} 的相對誤差為 0.00006， \bar{C}_{30} 的相對誤差為 0.0008，圖中亦可發現 $\bar{C}_{15,0}$ ， $\bar{C}_{30,0}$ 有很大的誤差，乃是因其為共振項，較難回復。

圖 5-17 為 CHAMP 的七天資料及 EGM96 之每階地位係數誤差所造成大地起伏之誤差，圖中亦顯示 CHAMP 一年資料的解對大地起伏之誤差，係利用經驗公式：一年解的誤差 = 七天解的誤差 / $\sqrt{52}$ ，此經驗公式已證明可行[Wahr et al,1998]，由圖可知七天 CHAMP 資料的解每階所造成大地起伏誤差都比 EGM96 大。但 15 階以下，每階所造成之誤差變化不大，但愈高階則誤差愈大。

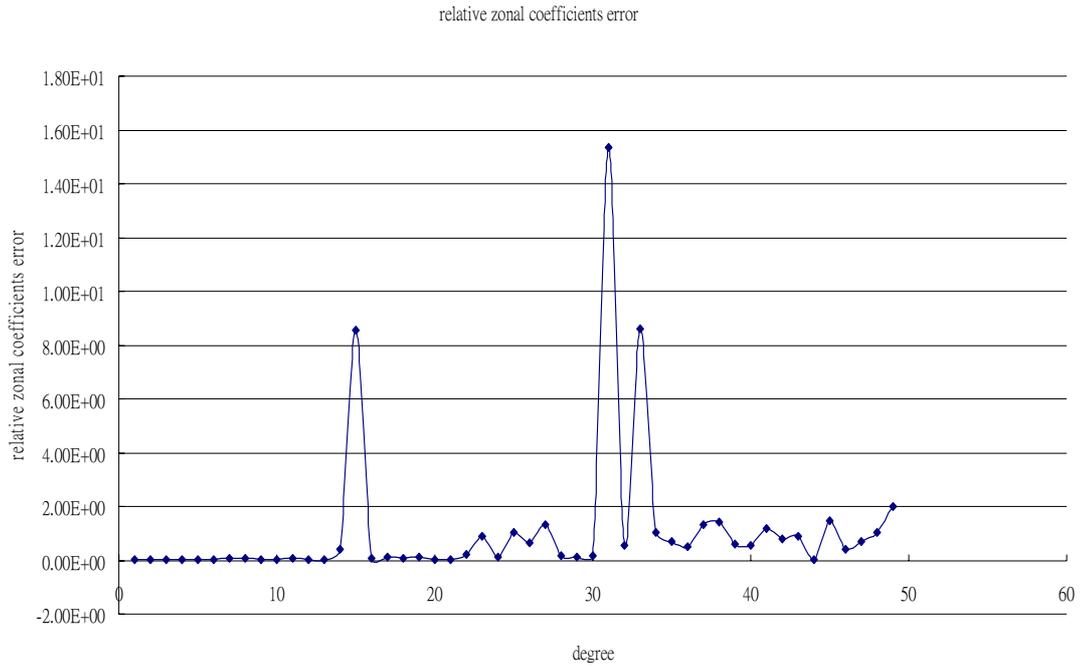


圖 5-16 加權約制求解之帶諧地位係數與 EGM96 之相對誤差

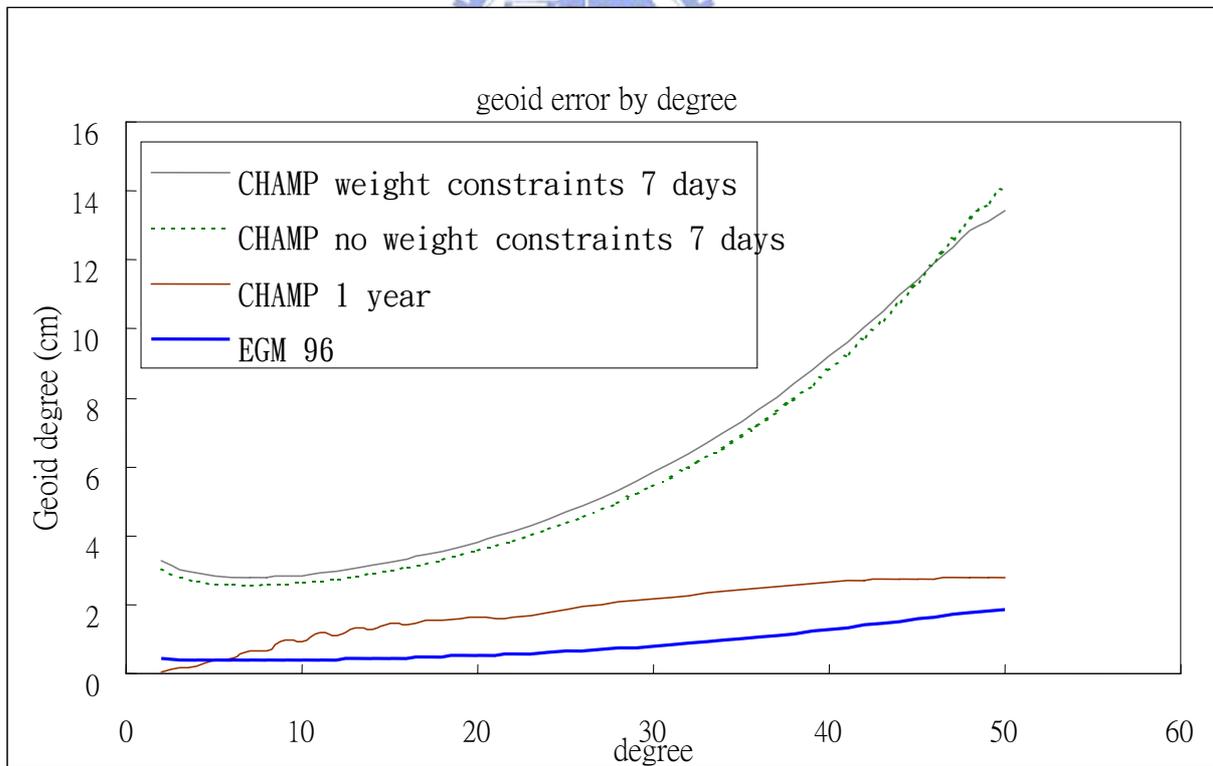


圖 5-17 利用 CHAMP 七天資料求解地球重力場之大地起伏誤差與 EGM96 之比

較



