

## 第五章 可展開成平面多面體之路徑規劃

以前的學者曾提出很多方法與技巧來推導幾何模型上之路徑規劃，但在可展開成平面之多面體方面其計算過程仍顯煩雜，因此以平面展開及座標轉換之方法來解決上述問題，只要幾何模型能展開成平面即能簡易的求出介於任意兩點間之最短路徑，將在展開平面上所求得之最短路徑透過座標轉換自動繪製在多面體上。

### 5.1 機械手之工作狀況

選擇在平面、十二面體、二十面體、與由圓柱圓錐平面與斜面等所組合而成之多面體為例在其表面上搜尋最短路徑乃因彼等皆可經由簡單計算而獲得真正之最短路徑，並利用其解來驗證此法之可用性，本章的討論重點是如何在展開平面之多面體表面上求取任意兩點間之最短路徑，任意兩點之位置可在該多面體之表面或外面。在可展開式多面體之路徑規劃流程係 1.利用面與面彼此之特定關係，建立資料結構。2.以平移或旋轉將多面體展開成同一工作平面。3.在平面上由起點至終點連一直線即得最短路徑。4.將各轉折點之座標轉換至多面體上。5.連接起點、轉折座標點與終點即可獲得在可展開成平面之多面體上之最短路徑如圖 5.1 所示。



圖 5.1 繪製最短路徑的流程圖

此法在求取最短路徑之應用非常廣泛，本節以機械手在由可展開成平面之多面體所組合的模型上求取介於任意兩點間之最短路徑，在圖 5.2 之中顯示機械手在三維模型表面上，以最短的時間在任意起點與目標點間之工作情況，本文的焦點著重在如何尋找機械手之最短路徑與逆向由展開平面之最短路徑轉換成幾何模型上之路徑。已知在平面上或空間中兩點間之最短距離為該兩點連接線段之直線距離，而起點與目標點為已知，計算繞著三維物件表面並通過該兩點之最短路徑，利用座標轉換的理論將三維的物件轉換成二維的展開平面，以計算所獲得之最短路徑來驗證本文所提方法之可用性及其正確性。

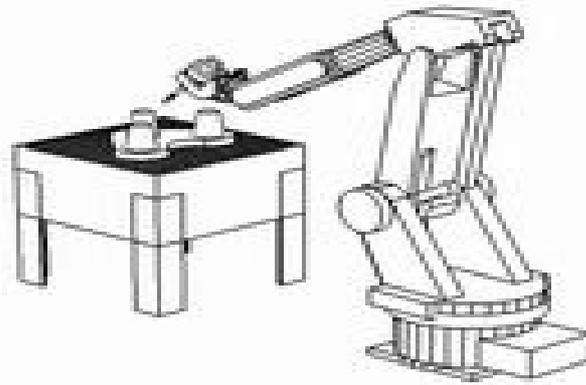


圖 5.2 機器手在三度空間的作業狀態

## 5.2 座標轉換

任何幾何模型物件皆能過透過一定值來做簡單的轉換，轉換後的物件將改變其原先位置、方向及形狀，因此必須利用電腦來儲存該幾何模型在一些座標系統的數值資料，並設計一些轉變資料的方法來表示被改變物件之位置與方向，在本文之中選擇了平移、旋轉等方法來轉換物件之位置與方向，透過座標轉換的功能將該三維的物件轉換成二維的展開平面，然後在展開平面上連接起點與目標點，即可獲得該兩點間之最短距離，直接以參數的方式來表達幾何物件，諸如點、向量、曲線與曲面等來展現他們的改變。

### 5.2.1 由參考座標轉換成新座標

幾何物件的平移意含該物件上每一個點均在給定的方向上移動相同之距離，物件上每一個同質的 $\mathbf{P}_h$  點矩陣以一定的量 $\mathbf{t}$  ( $t_x$   $t_y$   $t_z$ )來平移，將同質的 $\mathbf{P}_h$  點矩陣乘以平移指示矩陣 $\mathbf{T}_h$ ，則由方程式 (5.1) 將可獲得一個新的同質的 $\mathbf{P}_h^*$  點矩陣。

$$\mathbf{P}_h^* = \mathbf{P}_h \mathbf{T}_h \quad (5.1)$$

$$\mathbf{P}_h^* = [x^* \ y^* \ z^* \ 1] \quad (5.2)$$

$$\mathbf{P}_h = [x \ y \ z \ 1] \quad (5.3)$$

$$\mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

同樣的，繞著座標系三個旋轉軸(Z、Y、X)各旋轉 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 的角度，在物件上每一個同質點矩陣 $\mathbf{P}_h$ 均乘以一個簡單的旋轉指數矩陣 $\mathbf{R}_h$ ，則新的點矩陣 $\mathbf{P}_h^*$ 即可由方程式(5.5)來獲得。

$$\mathbf{P}_h^* = \mathbf{P}_h \mathbf{R}_h \quad (5.5)$$

$$\mathbf{R}_h = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \gamma) \quad (5.6)$$

$$= \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & S_\alpha S_\gamma - C_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ -S_\alpha C_\beta & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha S_\gamma + S_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ S_\beta & -C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

此外，一個同質的點矩陣經過平移及旋轉的轉換，則在物件上每一個同質點矩陣 $\mathbf{P}_h$ 必須乘以平移指數矩陣 $\mathbf{T}_h$ 及旋轉指數矩陣 $\mathbf{R}_h$ ，則新的同質點矩陣 $\mathbf{P}_h^*$ 即可由方程式(5.8)來獲得。

$$\mathbf{P}_h^* = \mathbf{P}_h \mathbf{R}_h \mathbf{T}_h \quad (5.8)$$

$${}^R \mathbf{T}_N = \mathbf{R}_h \mathbf{T}_h \quad (5.9)$$

$$= \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & S_\alpha S_\gamma - C_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ -S_\alpha C_\beta & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha S_\gamma + S_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ S_\beta & -C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$${}^R\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & S_\alpha S_\gamma - C_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ -S_\alpha C_\beta & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha S_\gamma + S_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ S_\beta & -C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \text{旋轉} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \text{平移} & 1 \end{array} \right] \quad (5.12)$$

其中(5.9)為正向轉換矩陣，包含平移轉換與旋轉轉換其乘積如(5.10)而其結果如(5.11)，在(5.11)中左上角之  $3 \times 3$  之子矩陣為旋轉矩陣，而左下角之子矩陣為  $1 \times 3$  的平移矩陣如(5.12)。

### 5.2.2 由已知之新座標轉換成原參考座標

通常於路徑規劃之理論中在展開平面上最短路徑之座標是已知，使用座標轉換的方法將最短路徑轉換至曲面模型上，此即所謂逆向轉換，逆向轉換矩陣  ${}^R\mathbf{T}_N^{-1}$  可利用正向座標轉換矩陣與逆向轉換矩陣之乘積為單位矩陣之關係來獲得，矩陣乘積可利用簡單的點積關係來計算：已知兩個相互平行的向量其點積為 1，而兩個相互垂直的向量其點積為 0。

$${}^R\mathbf{T}_N {}^R\mathbf{T}_N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$${}^R\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & S_\alpha S_\gamma - C_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ -S_\alpha C_\beta & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha S_\gamma + S_\alpha S_\beta C_\gamma & 0 \\ S_\beta & -C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 \\ D & E & F & 0 \\ G & H & I & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$${}^R\mathbf{T}_N^{-1} = \begin{bmatrix} A & B & C & -t_xA - t_yB - t_zC \\ D & E & F & -t_xD - t_yE - t_zF \\ G & H & I & -t_xG - t_yH - t_zI \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

### 5.3 資料結構

在多面體上任意兩點間有數以百計之可通行路徑，但其路徑之最短距離卻只有一個，然而在一個多邊界之多面體上求取任意兩點間之最短路徑其過程應可再簡化，提出以平面展開法來解決此問題，計算合乎規定總行程距離最短之路徑，將三維多面體之平面以二維平面來表示，並建立資料結構以供計算最短距離之需求，然而此法有兩個限制條件：第一是在有效的範圍內平面之號碼不能重覆，第二是資料結構係依序以分層相鄰之關係取得。

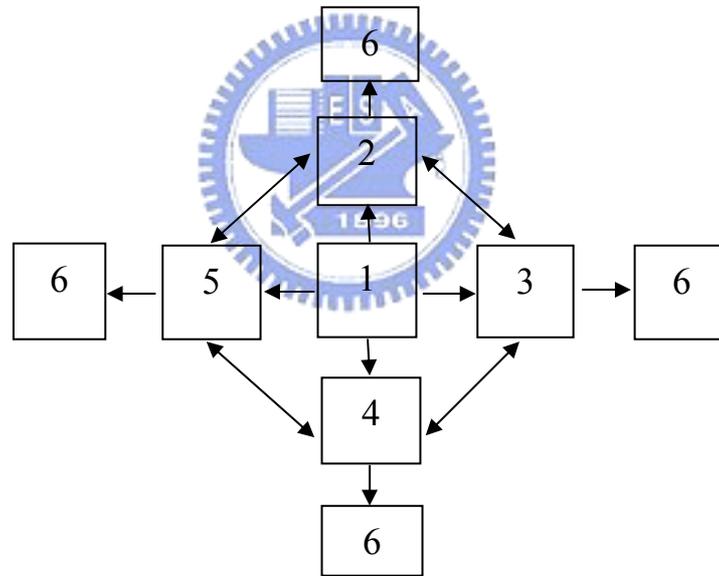


圖 5.3 經過排序之所有可能被通過的邊界組合

在六面體上所有的平面均可利用一系列的資料結構表示成特定關係之展開平面如圖 5.3 所示。雖然利用二維平面來展現三維物體，則在角度變形、面積變形及長度變形等三方面中可能將有一方面會造成失真，不過利用平移與旋轉所建構的展開平面，可顯示相鄰平面間之相對關係，利用此法由面 1 到面 6 可得到 28 種邊界組合如表 5.1，其顯示每個平面到其他相鄰平面之相互關係，以圖 5.4 為例，指定面 1 為起點所座落的平面而面 6 為目標點所座落的平面，而相鄰於面 2

的平面有面 3 和面 5，相鄰於面 3 的平面有面 2 和面 4，相鄰於面 4 的平面有面 3 和面 5，相鄰於面 5 的平面有面 2 和面 4，所有可能的邊界須經過排序因此可產生 28 種可能之路徑。

表 5.1 從點  $P_S$  到  $P_G$  最短路徑通過的平面

從點 $P_S$ 到 $P_G$ 最短路徑通過 三個平面	從點 $P_S$ 到 $P_G$ 最短路徑通過 四個平面	從點 $P_S$ 到 $P_G$ 最短路徑通過 五個平面	從點 $P_S$ 到 $P_G$ 最短路徑通過 六個平面
1,2,6	1,2,3,6	1,2,3,4,6	1,2,3,4,5,6
1,3,6	1,2,5,6	1,2,5,4,6	1,2,5,4,3,6
1,4,6	1,3,2,6	1,3,4,5,6	1,3,2,5,4,6
1,5,6	1,3,4,6	1,3,2,5,6	1,3,4,5,2,6
	1,4,3,6	1,4,3,2,6	1,4,3,2,5,6
	1,4,5,6	1,4,5,2,6	1,4,5,2,3,6
	1,5,2,6	1,5,2,3,6	1,5,2,3,4,6
	1,5,4,6	1,5,4,3,6	1,5,4,3,2,6

#### 5.4 平面展開

如起點所座落的平面與目標點所座落的平面分別處在不同的編號平面內，而所有可通行之路徑將通過哪幾個平面須有妥善的規劃，計算多面體上之最短路徑時須事先定義其路徑之可能通過平面，因為在同一個展開平面上兩點間之最短距離是一條筆直的線段，將每個平面之路徑還原後即可產生多轉折之路徑軌跡。

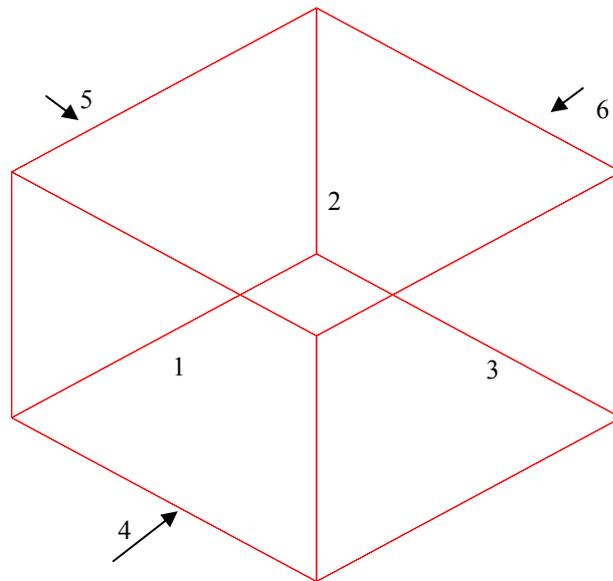


圖 5.4 編號及安排六面體上相鄰之平面

自動計算出被最短路徑所通過之轉折邊界，即能得到在多面體上由起點至終點之多邊形路徑。平面的發展可移動到任意的位置和方向，而不會改變原來的幾何特性，如平面 P 是平行於工作平面，則以平移的方式將平面 P 移動適當量 L 的距離使其座落於工作平面上，如平面 P 與工作平面傾斜一個夾角  $\theta$ ，則讓平面 P 旋轉  $\theta$  角度使其座落於工作平面上，其餘的平面可依循此法展開。

假設起點和終點分別座落於平面 1 和平面 6 上如圖 5.4 所示，而平面與平面之搭接順序包含由平面 1 至平面 6 所有可通行平面的組合，估算最短路徑可能通過的展開平面即像設定一個平面到其他平面的搭接順序，設定  $P_S$  和  $P_G$  是在工作平面上的起點和目標點，則所有可通行之路徑線段皆須在展開平面上，不能跨越出展開平面之外如圖 5.5 所示。

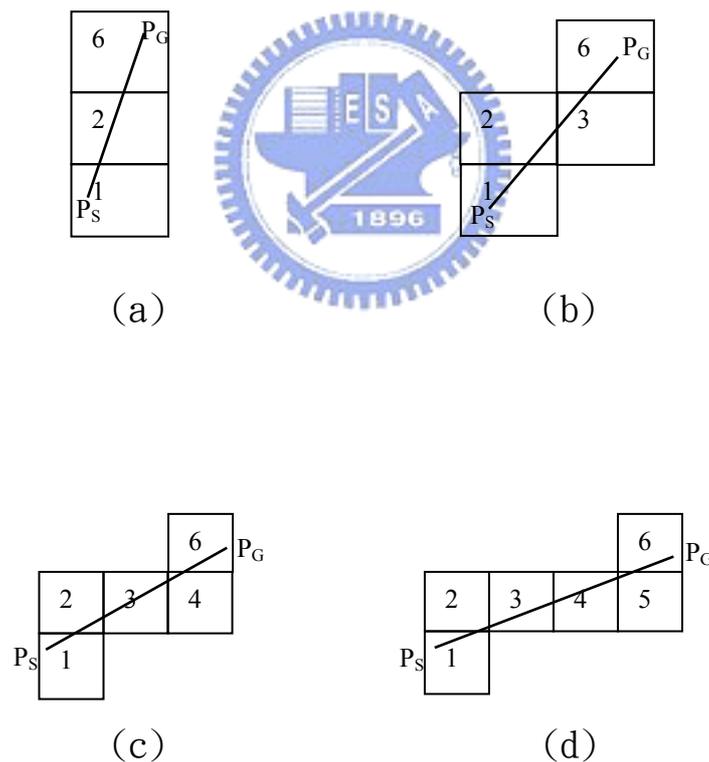


圖 5.5 以彼此特定的關係展開平面最短路徑通過的平面

在此範例中平面 6 座落於最上層，平面 1 座落於最下層，彼等可被置放在同一層之任意位置，雖然平面 2、3、4 和 5 皆座落在中間層，

但其可改變的位置須依循下列順序：平面 2 須緊鄰著平面 3 和 5，平面 3 須緊鄰著平面 2 和 4，平面 4 須緊鄰著平面 3 和 5，平面 5 須緊鄰著平面 2 和 4，在此範例中可產生 28 組之可通行路徑。一個有效率確認展開平面是否合法的方法，其步驟如下：假定  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ 、... $e_n$  是展開平面的邊界順序，連接  $P_S$  與  $P_G$  線段觀察是否與每一個  $e_i$  相交來判斷其展開是否合法。很明顯的如  $P_S$  與  $P_G$  連接的線段越過展開平面則表示展開的範圍或展開的過程是不合法，這是一種簡單的測試方法，看線段有無在整個展開平面之邊界內。因此上例則有四組從  $P_S$  到  $P_G$  通過三個平面的可通行路徑如圖 5.5(a)，有八組從  $P_S$  到  $P_G$  通過四個平面的可通行路徑如圖 5.5(b)，有八組通過五個平面的可通行路徑如圖 5.5(c)，有八組通過六個平面的可通行路徑如圖 5.5(d)。

依此類推可將更複雜的多面體加以展開成平面如 12 面體及 20 面體等，在圖 5.6 中每一個元件均是五角形，展開平面即是由 12 個五角形平面所組成，其中每一個元件均可依據需求經過平移或旋轉來符合工作平面之需求以計算由起點  $S$  至終點  $G$  之路徑，因此展開平面是將編號 12 置放在最上層，編號 7、8、9、10、11 等置放在第三層，編號 2、3、4、5、6 等置放在第二層，編號 1 置放在最下層，第二層與第三層均可依相鄰之順序移動。

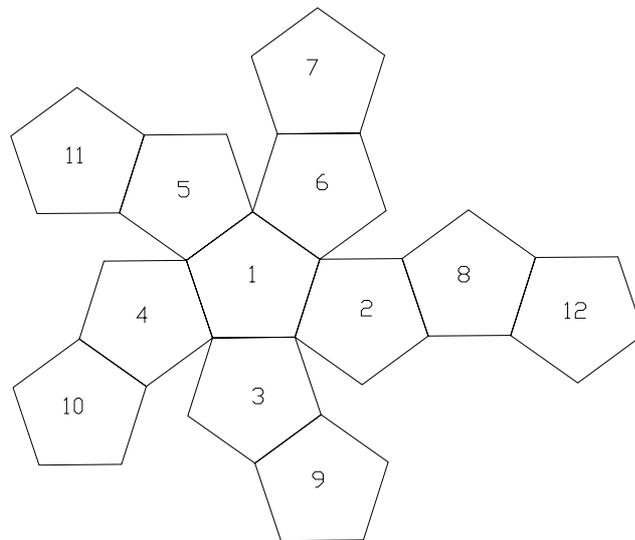


圖 5.6 由 12 面體模型所發展之平面

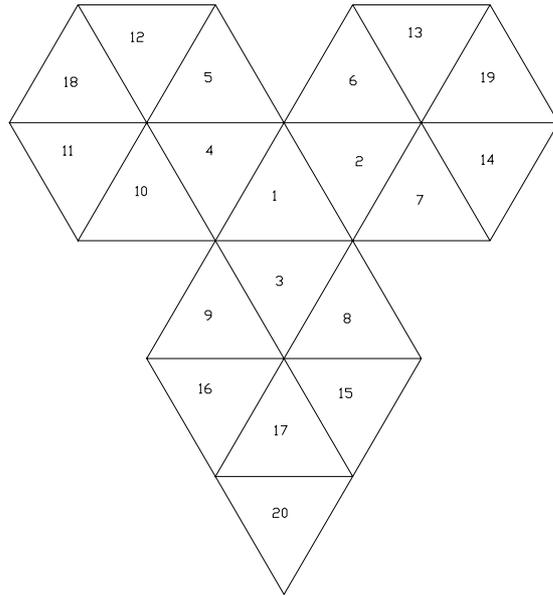


圖 5.7 由 20 面體模型所發展之平面

在圖 5.7 中每一個元件均是三角形，展開平面即是由 20 個三角形所組成，其中每一個元件均可依據需求經過平移或旋轉來符合來符合工作平面之需求以計算由起點 S 至終點 G 之路徑，因此展開平面是將編號 20 置放在最上層，編號 17、18、19 等置放在第五層，編號 11、12、13、14、15、16 等置放在第四層，編號 5、6、7、8、9、10 等置放在第三層，編號 2、3、4 等置放在第二層，編號 1 置放在最下層，第二、三、四等層均可依相鄰之順序任意移動。

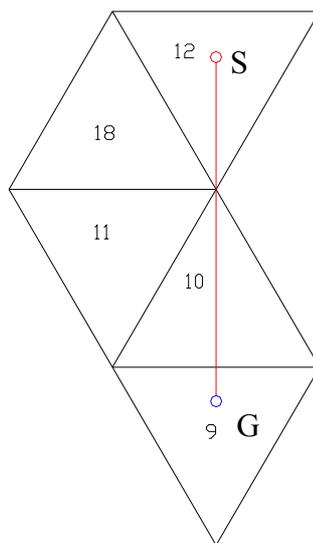


圖 5.8 將編號 9 經過平移及旋轉來計算路徑

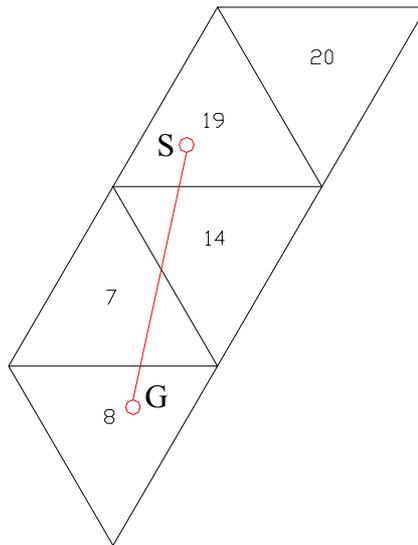


圖 5.9 將編號 8 經過平移及旋轉來計算路徑

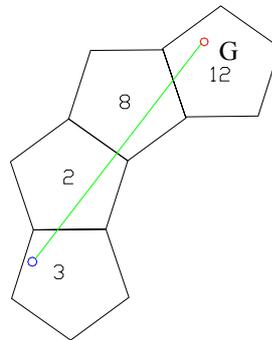


圖 5.10 將編號 3 經過旋轉來計算路徑

S

例如計算 20 面體上由 S 至 G 之路徑，則將元件 9 利用彼此相互連接之共邊界關係經過平移及旋轉至元件 10 下方以符合計算之需求，如圖 5.8 所示由 S 至 G 之路徑通過三個元件，其經過平面元件之順序為 9、10 及 12。另外將元件 8 利用彼此相互連接之共邊界關係經過平移及旋轉至元件 7 的下方以符合計算的需求，如圖 5.9 所示由 S 至 G 之路徑通過四個元件，其經過平面元件的順序為 8、7、14 及 19。又如計算 12 面體上由 S 至 G 之路徑，則將元件 3 利用彼此相互連接之共邊界關係經過平移及旋轉至元件 2 之下方以符合計算的需求，如圖 5.10 所示，其計算結果由 S 至 G 之路徑經過平面元件之順

序為 3、2、8 以及 12。

### 5.5 圓柱的展開

以圓柱或圓錐來隱含各種不同的障礙物的概念，然後即可輕易的在曲面模型上規劃避碰路徑，因為圓柱與圓錐均可利用座標轉換的關係來求得其真正之最短路徑，因此本文選擇以圓柱及圓錐來說明，並以此法所求得之值與座標轉換所計算之值來做比較，以驗證此法的正確性及效率性。

首先將圓柱分成兩個部份，第一個部份由 0 度至 180 度所組成的展開平面，第二個部份由 180 度至 360 度所組成的展開平面，而第二部份亦可視為由 0 度至 -180 度所組成的展開平面，如果起點與終點均座落在同一個展開平面上，則該兩點間之最短距離即該兩點所連接之線段，如果起點與終點並非座落在同一個展開平面上，則選擇起點所在的展開平面當基準面，而將終點所在的平面當搭接面，然後再利用疊代平面法分別將兩組終點所在的平面與基準面相連接而成疊代平面如圖 5.11 所示。

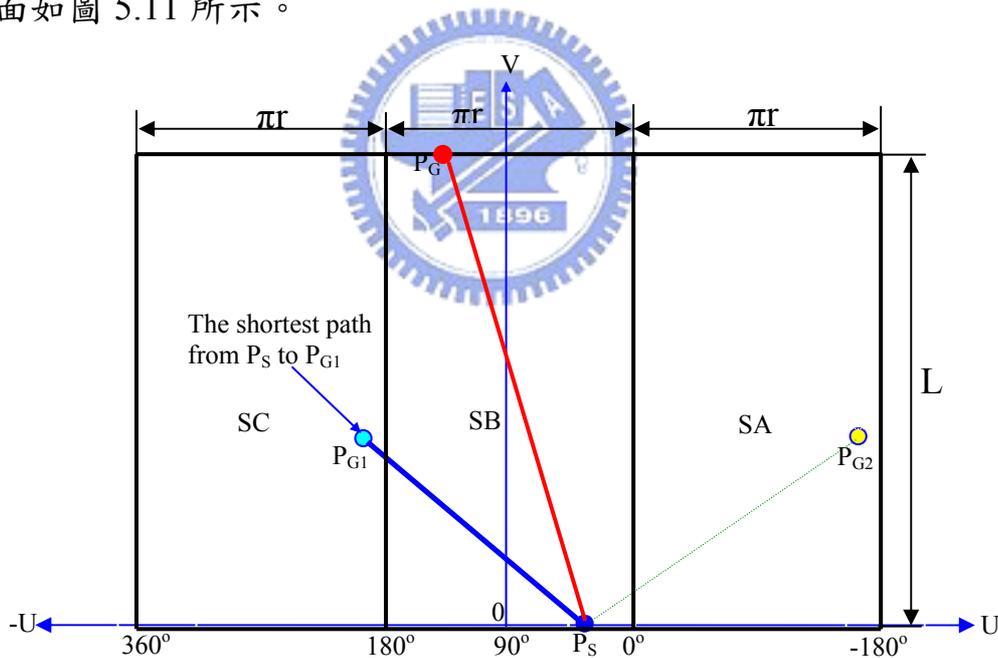


圖 5.11 在圓柱疊代平面上由起點  $P_S$  至兩組終點  $P_G$  之最短距離

由圖 5.11 來判斷由起點  $P_S$  至兩組終點  $P_{G1}$  或  $P_{G2}$  何者之距離較短，選擇距離較短者的方向即是最短路徑的纏繞方向，然後再將起點至終點以線段連接，此線段即是該兩點間之最短路徑。同理在計算由起點至目標點之最短距離，只要知道起點之位置座落於那一個平面上，以起點所座落的平面當中間，由三個區域平面構成重疊平面，假

如起點  $P_S$  與終點  $P_G$  之位置均座落於同一平面  $SB$  上，則將起點  $P_S$  與終點  $P_G$  之連接即可得最短之距離。同理起點  $P_S$  之位置座落於  $SB$  平面上，而在同理平面上找到同理目標  $P_G$  點，在  $SC$  平面上找到  $P_{G1}$  點，在  $SA$  平面上找到  $P_{G2}$  點，因此其最短路徑即是由  $P_S$  到  $P_G$  ( $P_{G1}$  或  $P_{G2}$ )。如圖 5.11 中在展開後的平面上  $V$  方向之大小並無改變，但在  $U$  方向即以  $\pi(90-\theta_i)/180\cos\theta_i$  的放大倍率來呈現展開後大小。

### 5.6 圓錐的展開

首先將圓錐分成上半部及下半部兩個部分，上半部是  $SB$  扇形平面，下半部扇形平面有正向與負向兩組，其中正向下半部是  $SA$  扇形平面，負向下半部是  $SC$  扇形平面，如果起點與終點均座落在同一個扇形平面上，則該兩點間之連接線段即該兩點之最短距離。然而如果起點與終點並非座落在同一個展開扇形平面上，則選擇起點所在的展開扇形平面當基準面，然後再利用疊代平面法分別將兩組終點所在的扇形平面與基準面相連接而成組合平面如圖 5.12 所示。

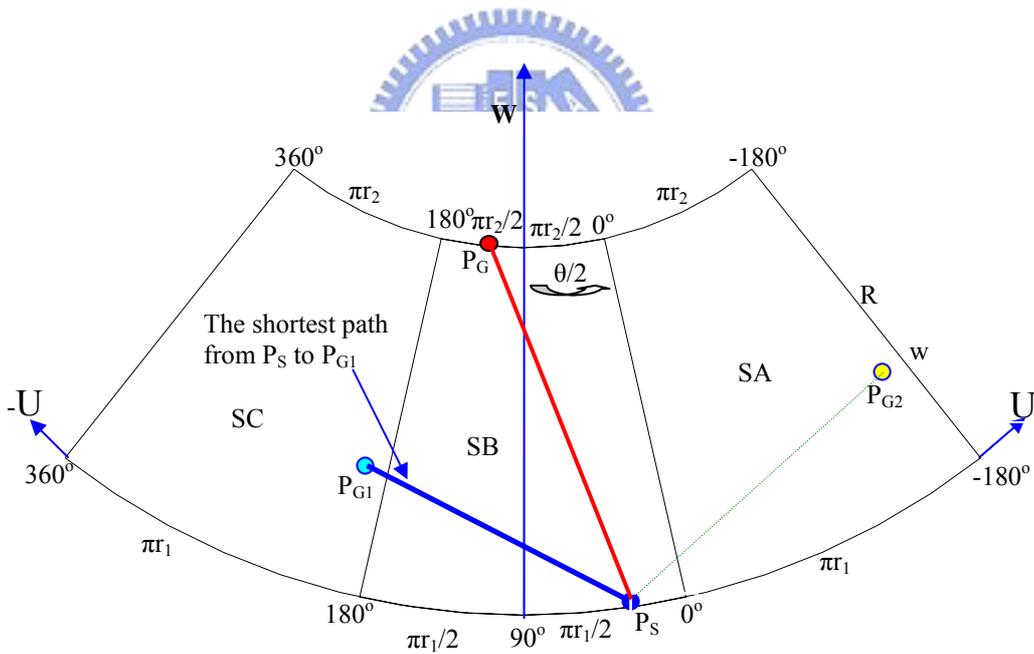


圖 5.12 在圓錐疊代平面上由起點  $P_S$  至兩組終點  $P_G$  之最短距離

由圖 5.12 來判斷由起點  $P_S$  至兩組終點  $P_{G1}$  或  $P_{G2}$  何者之距離較短，選擇距離較短者其方向即是最短路徑之纏繞方向，然後再將起點至終點以線段連接，此線段即由起點至終點之最短路徑。同理要計算由起點至目標點之最短距離，只要知道起點之位置座落於那一個平面上，以起點所座落的平面當中間，由三個區域平面構成疊代平面，假

如起點 $P_S$ 與終點 $P_G$ 之位置均座落於同一扇形平面SB上，則將起點 $P_S$ 與終點 $P_G$ 連接即可得最短距離。同理起點 $P_S$ 之位置座落於SB扇形平面上，而在同理平面上找到目標 $P_G$ 點，在SC扇形平面上找到 $P_{G1}$ 點，在SA扇形平面上找到 $P_{G2}$ 點，因此很容易判斷其最短路徑是由 $P_S$ 到 $P_G$  ( $P_{G1}$  或  $P_{G2}$ )。在此範例中SB、SA及SC都是由扇頂弧寬 $=\pi r_2$ ，扇身長度 $L=(R^2-(r_1^2-r_2^2))^{1/2}$ 及圓錐角度 $\theta=2\sin^{-1}((r_1-r_2)/R)$ 度所組成的扇形平面，在錐面上距離傘底 $w$ 處的圓形半徑 $r_w = r_2 + (R-w_i)\sin(\theta/2)$ 。如圖 5.12 中在展開後的扇形平面上沿著傘心 $R$ 方向的大小沒有改變，但在 $\theta$ 方向即以 $\pi r_w / (2R-w)$ 的倍率來呈現展開後的實際大小，其改變的大小則隨著 $w$ 之位置而改變。

### 5.7 最短路徑

在展開之疊代平面上獲得起點與目標點之位置，因在平面上兩點間最短距離為該兩點之連接線段，因此在平面上可輕易取得兩點間之最短路徑，再經座標轉換將該線段轉換並繪製在多面體模型上，此法之優點係在最短路徑之計算次數可縮小至一次。

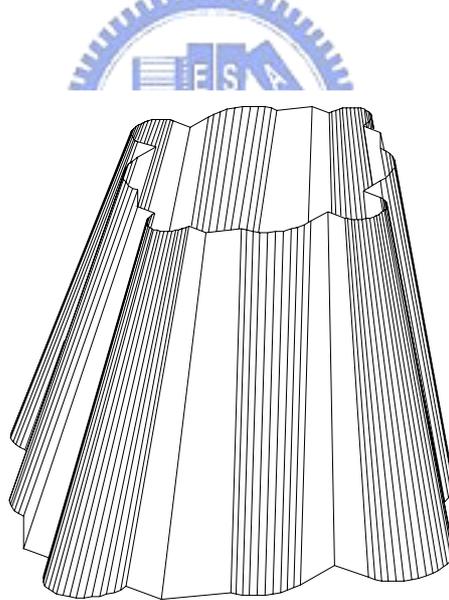


圖 5.13 由圓柱、平面、斜面及圓錐等可展開成平面之多面體

以圖 5.13 為例機械手係在由圓柱、平面、斜面及圓錐等組合而成可展開成平面之多面體上工作，為了簡化過程，從其中選擇一部分曲面來規劃介於兩點之間而沿著模型表面之最短路徑如圖 5.14 所示，然而僅需要依上述的方法將每個綴面展開至疊代平面上，並利用直線連接的方式在疊代平面上將起點  $P_S$  與終點  $P_G$  相連接如圖 5.15

所示，後依據上述的方法將疊代平面上的路徑轉換至可展開成平面之多面體上，發展的程式只需提供起點與終點之位置，則能自動的將最短路徑繪製在可展開成平面之多面體上如圖 5.16 所示。

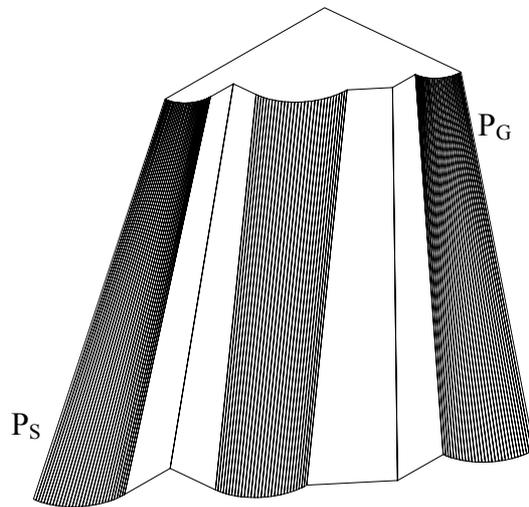


圖 5.14 將圓柱及圓錐分割成若干等份的平面

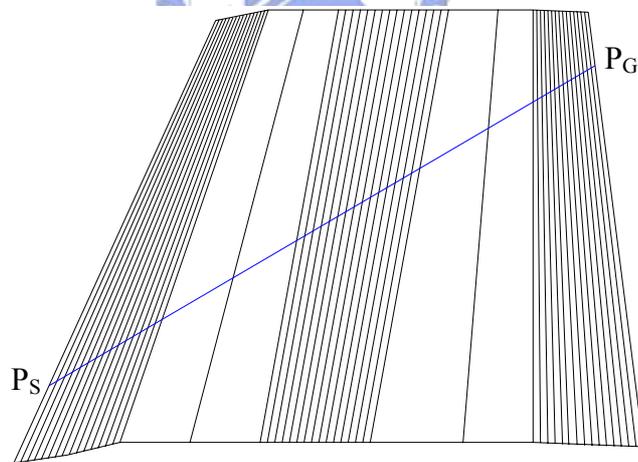


圖 5.15 將所有的平面及斜面直接貼放於疊代平面上

包含圓柱、平面、斜面及圓錐等外形所組合而成的可展開成平面之多面體，先將圓柱及圓錐分割成若干等份的平面如圖 5.14，然後依序將所有的平面及斜面直接貼放於疊代平面上，在疊代平面上將起點與終點以直線連接，該直線必須在疊代平面內如圖 5.15，再以座標轉換將每個轉折邊界之交點，依其比例轉換至曲面模型上，即可求得介

於起點與終點間之最短路徑如圖 5.16 可得平面展開法轉換後之路徑與利用布魯霍斯法則所得之計算結果相比較，兩者之路徑相當貼近，其間若有差值應係為計算誤差。

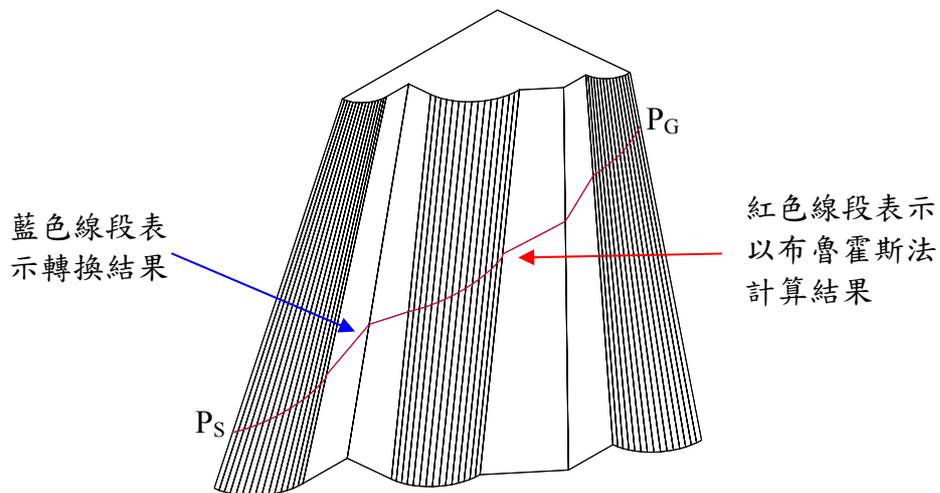


圖 5.16 在可展開成平面之多面體上由起點至終點之最短路徑

## 5.8 討論

任何呈線性關係之平面經平移或旋轉後在展開後之同平面上任何被最短路徑通過之線段其入角一定等於出角，在平面上任意兩點間之最短路徑即是該兩點之連接線段，獲得最短路徑後再以座標轉換將該路徑分別繪製在多面體上即可獲得在多面體上之最短路徑。我們建立一個資料結構展開規則，記錄每個編號平面之分層與緊鄰關係，以快速獲得可能被最短路徑通過之路線組合。