

## 第六章 多面體路徑規劃之應用

在弧形曲面上之路徑規劃流程係 1.弧線斷面截取之疏密數量係依其形狀轉折變化而定，變化量大則取較密。2.以邊界分割法在每個斷面上分成一定量之點群。3.每個格點最多與其右邊、左前、上方、與右前格點相連接並獲得可通行點之鄰接矩陣。4.以迪吉斯托計算其軌跡矩陣並獲得轉折邊界點。5.連接起點、轉折座標點與終點即可獲得弧形曲面之初最短路徑。6.隨後取各轉折點之原分割點之左右兩點。7.再以布魯霍斯配合 IMSL 計算終最短路徑所通過之邊界轉折點。8.連接起點、轉折座標點與終點即可獲得弧形曲面之終最短路徑。

### 6.1 多面體與弧形曲面(Curve surface)之建立

以綴面為主體之多面體在取得被最短路徑所通過之邊界轉折點後，需以線段連接方式來獲得最短路徑，因為每一個綴面皆以平面來呈現，而弧形曲面在取得被最短路徑所通過之邊界轉折點後，則以 NURBS(Non Uniform Rational B-Spline)擬合點之連接方式來連接各邊界轉折點，在弧形曲面上尋找任意兩點間之最短路徑方面，我們整合邊界分割法、布魯霍斯法則來取得被最短路徑所通過之邊界轉折點，透過迪吉斯托計算最短路徑所通過之邊界轉折點再以 NURBS 之曲線連接方式將起點、各邊界轉折點與終點相連接以獲得貼近弧面之最短路徑，以茶壺形多面體為例來探討介於任意兩點間之最短路徑，首先將茶壺模型分成壺蓋、壺身、壺底、手把和壺嘴等五個部份如圖 6.1 所示，利用掃描量測的方法獲得在茶壺表面上之點群資料，建構通過所有點群資料之茶壺模型，如該模型是由小綴面所組成即是多面體，如該模型之橫向或縱向係由一群圓弧曲線所組成，則此模型即是弧形曲面。

繪製茶壺模型之方法甚多，不論使用何種方法所繪製之茶壺模型，其擁有精準之基本架構是非常重要的，然而以多面體的形式來展現時，綴面數量的多寡會影響到模型之精確度，同時也會影響到模型之整體外觀，以圖 6.1 之茶壺架構為例，選擇幾個固定之轉折點為基本建構資料，如以較大面積之綴面多面體來顯示茶壺的模型，發現其外觀與原實體模型相差甚巨，菱角菱線非常明顯如圖 6.2 所示。如以圖 6.2 相同的基本建構資料，再將每一個綴面縮小為原綴面之四分之一，亦即將綴面 Q 再細分成四個小綴面  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 、 $Q_4$  如圖 6.3 所示，則所有之綴面數量會比圖 6.2 增加四倍，增加之後雖整體多面體之外形較圖 6.2 有改善，但與原實體模型相較仍有差距，菱角菱線部分仍不夠平滑。

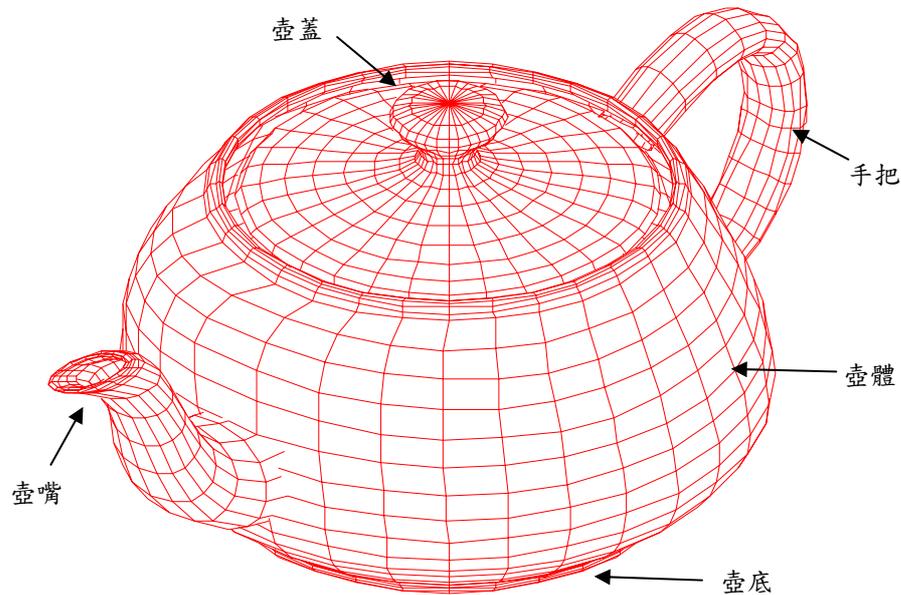


圖 6.1 由五個部分所構成的茶壺模型

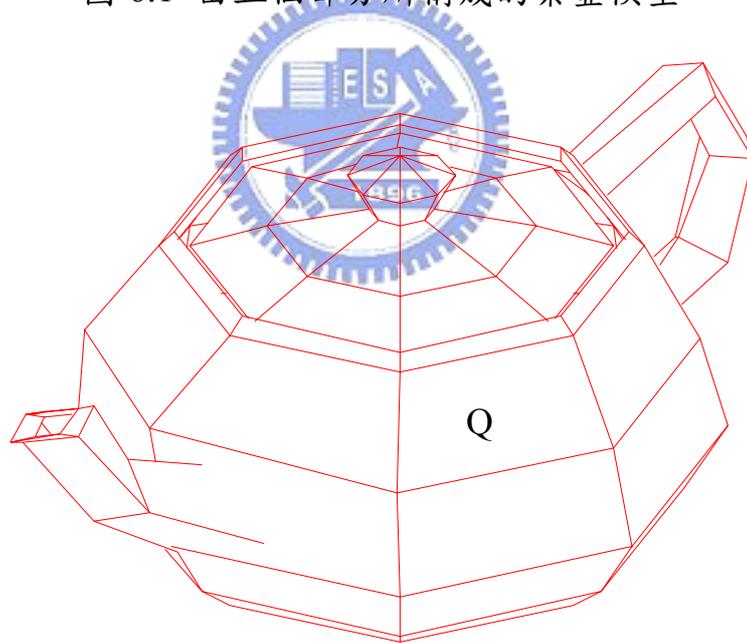


圖 6.2 以較大面積之綴面來顯示茶壺模型

如將圖 6.3 中的每一個綴面再細分成四個綴面，則每一個小綴面是圖 6.2 中綴面 Q 之十六分之一，亦即總綴面數是圖 6.2 中綴面數之 16 倍如圖 6.1 所示。其菱角菱線部分已經獲得改善，在整體多面體之外形與原來的實際模型相差不多，總之綴面數愈多則所求得路徑之精準度應愈好，但其計算量卻相對增加，反之綴面數量愈少則所求得之

路徑其誤差值將愈大，而其計算量將相對減少。

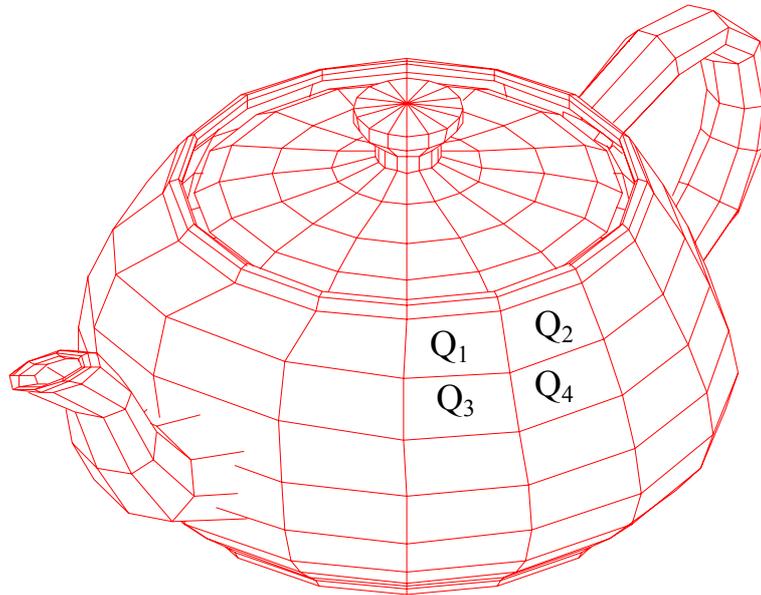


圖 6.3 以四倍於圖 6.2 之綴面來顯示茶壺模型

## 6.2 以 NURBS 曲線連接各轉折點使其更貼近弧面

NURBS 曲線連接方式之優點在於可做局部微調，將其中任一個控制點之位置移動並不會對原曲線形狀產生整體的改變，而是局部形狀修正而已如圖 6.4 所示。除改變控制點之位置外亦可在控制點上加入加權值及節值來改變曲線形狀，另外亦可將現有的給定點當成控制點或擬合點，如已知控制點則擬合點( $P_i$ )的求取可利用(6.3)來求得，反之如已知擬合點則需將(6.3)經反矩陣運算求得控制點( $V_i$ )。

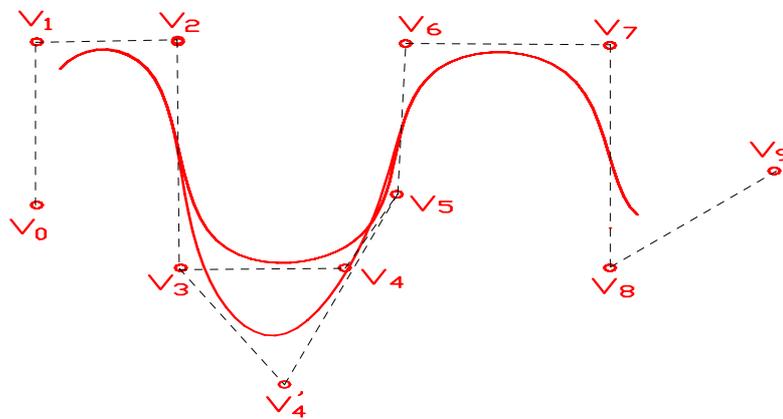


圖 6.4 移動任一控制點僅對曲線產生局部影響

假如將任意的給定點當成控制點，則所繪製之曲線則不會與給定點相連接如圖 6.5 所示，而如將任意給定的點當成擬合點，則所繪製之曲線則將依給定點之順序連接如圖 6.6 所示。

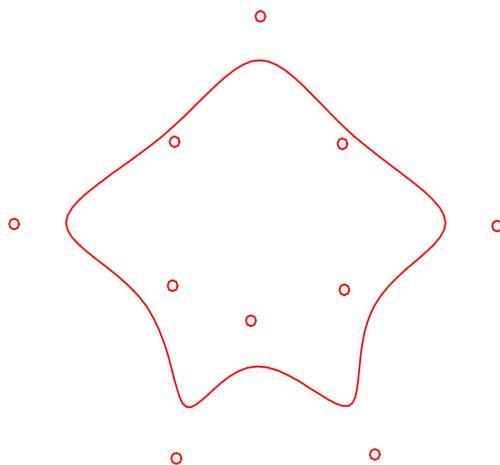


圖 6.5 將給定點當成控制點所獲得之曲線

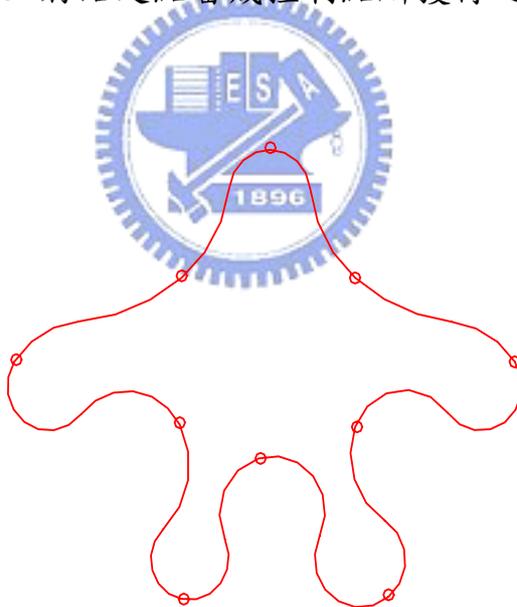


圖 6.6 將給定點當擬合點所獲得之曲線

在 UBS (Uniform B-Spline) 曲線中加入節值(Knot Span)，則成為 NUBS (Non Uniform B-Spline) 曲線其方程式如(6.1)：

$$\text{NUBS 之方程式 } R(u) = \sum_{i=0}^n V_i N_{i,k}(u) = UN_C R \quad (6.1)$$

摻合函數 
$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_{i+1}}$$

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{Other-wise} \end{cases}$$

以三次方為例  $U = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3]$ ，其摻合函數  $N_c$

$$N_c = \begin{bmatrix} \frac{(\Delta_i)^2}{\Delta_{i-1,2}\Delta_{i-2,3}} & (1-n_{11}-n_{13}) & \frac{(\Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1,3}\Delta_{i-1,2}} & 0 \\ -3n_{11} & (3n_{11}-n_{23}) & \frac{3\Delta_i\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1,3}\Delta_{i-1,2}} & 0 \\ 3n_{11} & -(3n_{11}+n_{33}) & \frac{3(\Delta_i)^2}{\Delta_{i-1,3}\Delta_{i-1,2}} & 0 \\ -n_{11} & (n_{11}-n_{43}-n_{44}) & n_{43} & \frac{(\Delta_i)^2}{\Delta_{i,3}\Delta_{i,2}} \end{bmatrix}$$

$R = [V_0 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3]^T$ ， $n_{ij}$  = 矩陣中  $i$  列  $j$  行之元素， $u$  的範圍係  $0 \leq u \leq n-k+2$ ， $n_{43} = -\{n_{33}/3 + n_{44} + (\Delta_i)^2 / (\Delta_{i,2}\Delta_{i-1,3})\}$ ， $k$  表示階數(亦即  $k-1$  次方)， $n$  表示控制點之數量， $V_i$  表示編號第  $i$  個控制點，摻合函數一階至四階所產生之圖形如圖 6.7 所示。

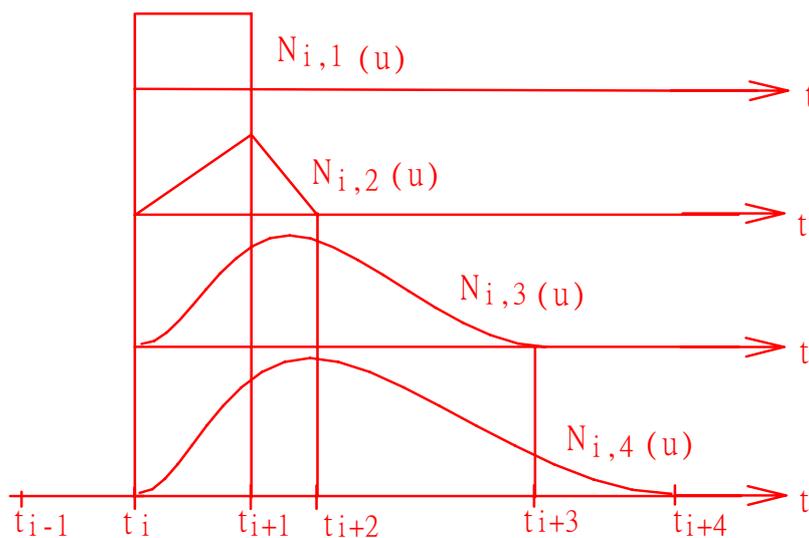


圖 6.7 NUBS 摻合函數一階至四階所產生之圖形

在 NUBS 曲線中即可任意加入節值來改變曲線的形狀，使其更貼近弧形曲面如圖 6.8 所示，在 5 個控制點中加入 6 個節值，則使曲線產生偏離與偏近之效果，如果所有的節值均為 1 則所繪之曲線即為 UBS 曲線，如果節值不同將產生曲線偏向。

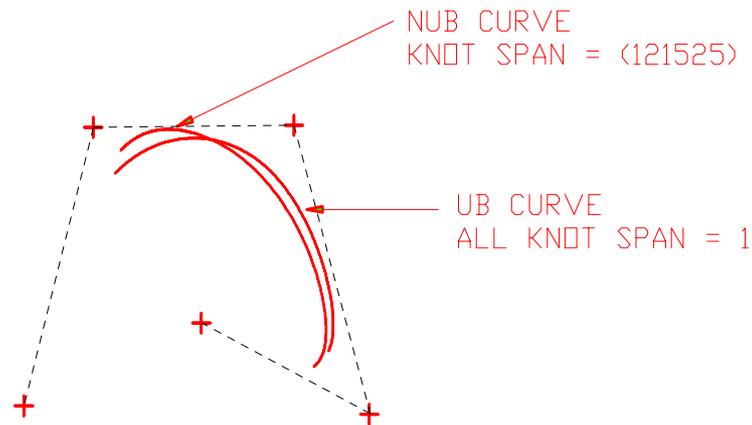


圖 6.8 不同的節值可獲得不同偏向之曲線

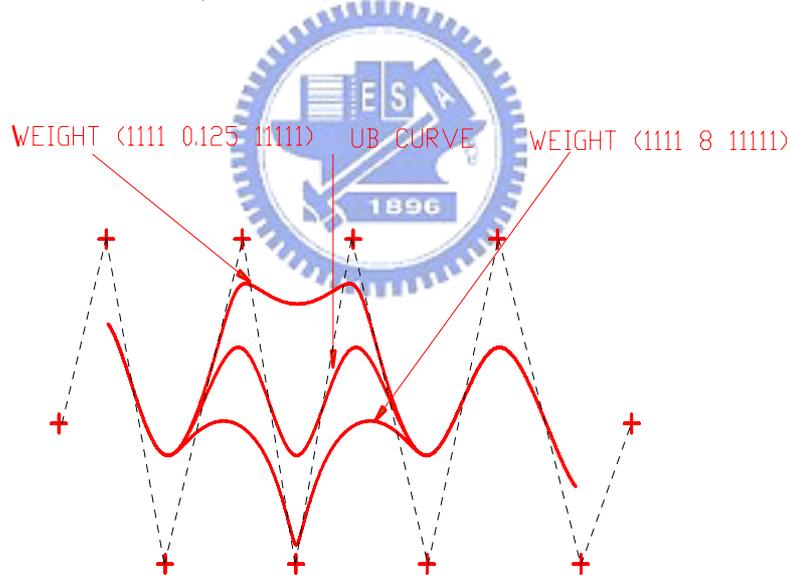


圖 6.9 不同的加權值可獲得局部變更之曲線

如在 UBS 曲線中將每個控制點上加入加權值(Weight)，即為有理化之 URBS (Uniform Rational B-Spline) 曲線其方程式如(6.2)。

$$R(u) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) w_i V_i}{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) w_i} \quad (6.2)$$



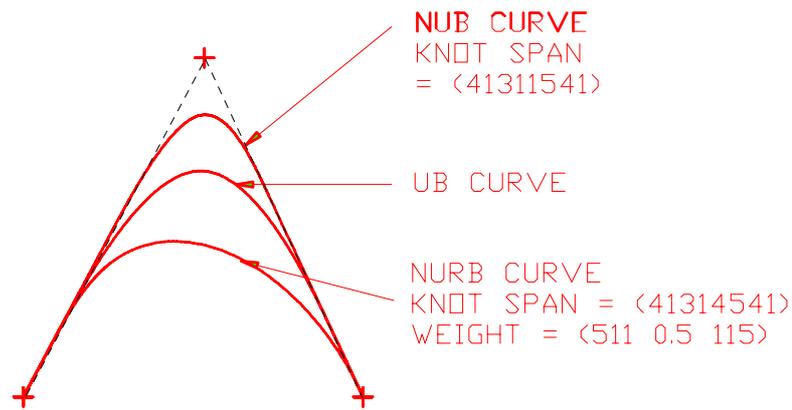


圖 6.10 不同的節值與加權值可獲得局部變更之曲線

應用於多面體之幾何模型時，首先需獲得多面體上每一個轉折邊界之點群資料來規劃最短路徑，依需要之精度將每一個轉折邊線段分割成若干點群，再配合迪吉斯托理論計算所有可通行之路徑並取得距離最短之軌跡，分別以線段連接及曲線連接來比較，因連接方式不同則其結果將有重大的改變如圖 6.11 所示，因此於弧形曲面規劃路徑時改以 NURBS 曲線來連接起點、各轉折邊界點與終點，即可使最短路徑曲線更貼近於弧形曲面之表面。

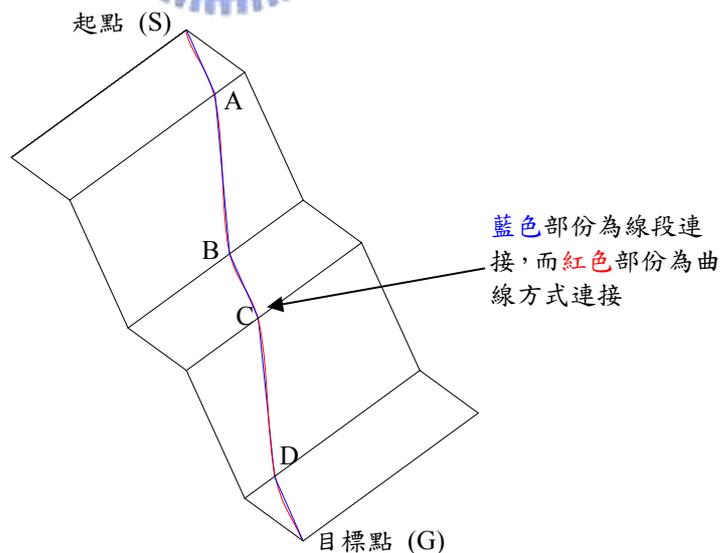


圖 6.11 線段連接與曲線連接之路徑軌跡差異

在階梯式之標的物中其起點與目標點分別座落於不同之平面上如圖 6.11 所示，最短路徑軌跡將通過四個轉折邊界，在計算由起點 S 至目標點 G 之最短路徑前需先定義所有之路徑均需座落於標的物之表面上，經過計算獲得被最短路徑通過之 A、B、C、D 等四個轉折邊界點，如標的物係為綴面所建構而成之多面體則以線段連接方式，連接起點、轉折邊界點與終點如藍色線段所組成之路徑，如將標的物係為弧形曲面則以曲線連接之方式，連接起點、轉折邊界點與終點如紅色曲線所組成之路徑，經過調整後可將曲線連接之路徑貼近於線段連接之路徑。

圖 6.1 中壺嘴之外形近似於自由曲面，選取壺嘴之部分做為路徑規劃說明，假如起點與目標點分別座落在所選取範圍之對角綴面，計算該兩點之最短路徑軌跡，起點與目標點座落於壺嘴上如圖 6.12 所示位置，則以起點座落之綴面左下角網格當計算範圍的左下角，以目標點座落之綴面右上角網格當計算範圍的右上角，所建構之多面體如圖 6.13 所示，在曲面之表面上計算由起點至目標點之最短路徑之轉折邊界，如標的物被視為綴面多面體則以線段連接之方式，連接起點、轉折邊界點與終點如綠色線段所組成之路徑，如標的物被視為弧形曲面則以曲線連接之方式，連接起點、轉折邊界點與終點如紅色曲線所組成之路徑，可得兩者之形狀與大小其差距均很小。

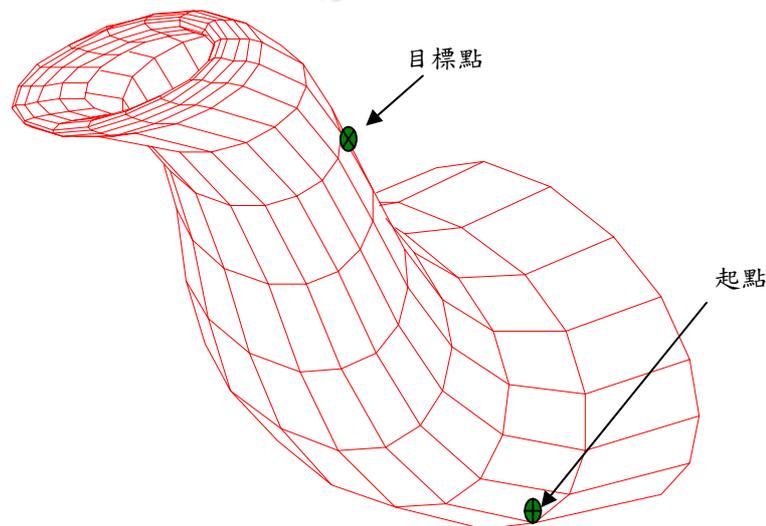


圖 6.12 起點與目標點座落於壺嘴之相關位置

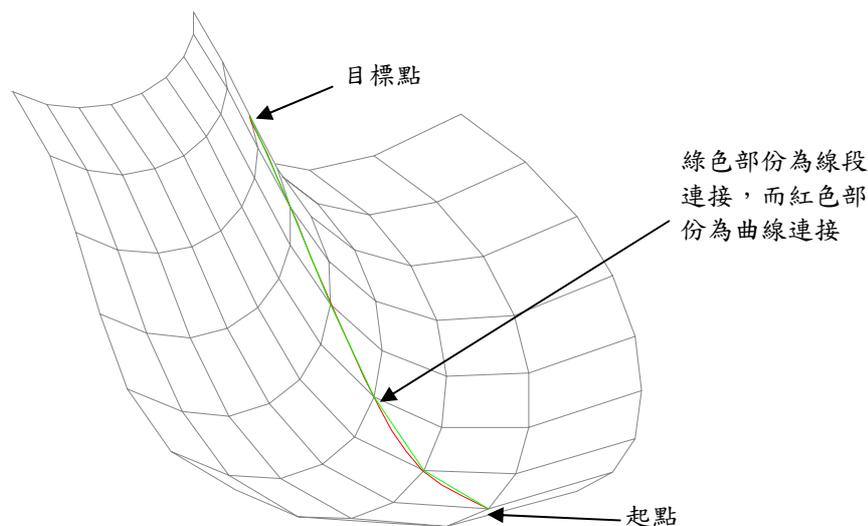


圖 6.13 線段連接與曲線連接之路徑軌跡差異

### 6.3 邊界分割法

邊界分割法乃以網格規劃法為基礎再加以改良，因每一條邊界線之任一分割點均能與下一條邊界線之任一分割點連接，在自由曲面上搜尋兩點間之最短路徑，基於三角形中兩邊相加之和必大於第三邊之原理，同一條邊界上之左右連接將屬多餘，而且為了使所有連接之線段均能沿著自由曲面之表面，則每一條邊界之分割點只能與下一條邊界之分割點連接，因此將省略同條邊界之左右連接線段與非相鄰邊界之連接線段，假如有 $N-2$ 列，每列有 $M$ 個分割點，則其連接線段總數為 $(M^2(N-3)+2M)$ ，由起點至目標點之最短路徑其計算次數必小於連接線段總數，即其最短路徑之計算次數為 $O(M^2(N-3)+2M)$ ，改良後其最短路徑之計算次數減少 $(N \times M \times (N \times M - 1) / 2) - (M^2(N-3) + 2M)$ 。

邊界分割法不僅可運用在資料統計分析，亦可運用於各種幾何路徑規劃問題，此法之優點係不論標的物之外形有多簡單或多複雜，均可求出最佳之路徑，而此法之缺點乃標的物之形狀愈複雜其計算量則相對愈大，本章採用此法來做路徑規劃乃因此法可在弧形曲面上任意兩點間求取近似最短路徑之方向，選取近似之邊界轉折點之左右相鄰點為範圍，然後再以布魯霍斯法則求得較正確之最短不徑。如圖 6.14 所示每個邊界皆被分割成 100 等份，該圖是由很多個線段所組成，其包含起點至相鄰的平面相交線段每一個分割點的連線、平面相交線段間之連線以及平面相交線段與目標點的連線等，在本範例中使用迪吉斯托理論在所有可通行路徑中求得最短的路徑，沿著綴面多面體表面

從點 $P_1$ 到點 $P_2$ 之最短路徑是 $P_1C + CD + P_2D$ 如圖 6.15 所示。

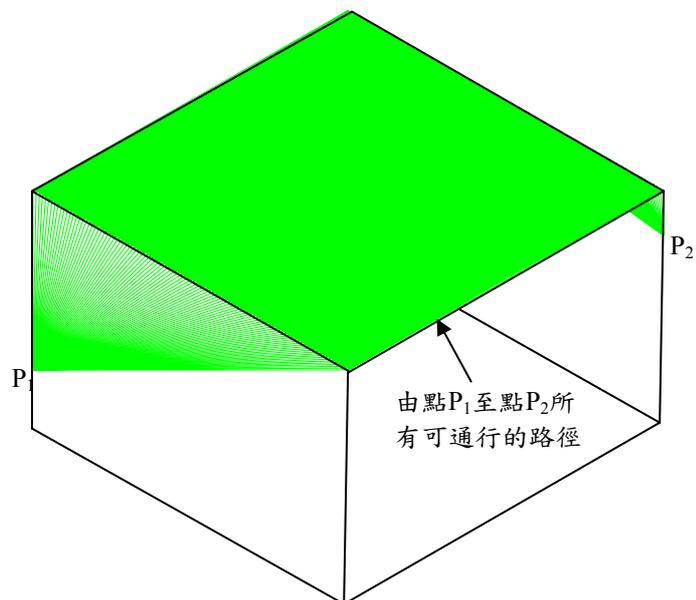


圖 6.14 通過兩個被分割成 100 等份邊界之可通行路徑

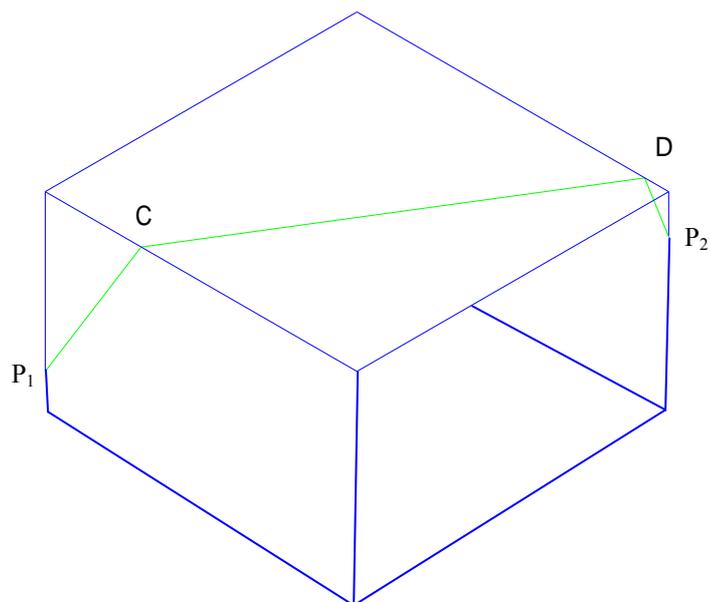


圖 6.15 使用邊界分割法所求得之最短路徑

## 6.4 最短路徑

由網格規劃法或邊界分割法所求得之最短路徑，不論格點如何細分所求得之最短路徑仍是近似值，而以布魯霍斯法則所求得之最短路徑最接近真實的路徑。在曲度較大或形狀較複雜之自由曲面模型上規劃路徑時，其計算過程將較繁瑣，因此選擇以邊界分割法先行求出最短路徑之軌跡方向，然後選取近似邊界轉折點之相鄰分割點再以布魯霍斯法則來求得被最短路徑所通過之邊界轉折點，如標的物為綴面多面體則以線段連接方式求得最短路徑，如標的物為弧形曲面則以 NURBS 曲線連接方式來求得最短路徑。

### 6.4.1 以網格規劃法在綴面多面體上規劃最短路徑

選擇茶壺之壺身來規劃綴面多面體上由起點至目標點之最短路徑，依前述之網格規劃法將壺身分成多個綴面之多面體，由點  $P_1$  至點  $P_2$  之最短路徑通過 15 個轉折邊界如圖 6.16 所示，為了驗證最短路徑之正確性，選擇非常貼近最短路徑兩個相鄰的軌跡來做比較，在最短路徑之下方取得一個通過 15 個轉折邊界的軌跡稱為軌跡 1，在最短路徑之上方取得一個通過 15 個轉折邊界的軌跡稱為軌跡 2，計算軌跡 1、軌跡 2 與最短路徑之距離來做比較如圖 6.17 所示，獲得最短路徑之距離是 91.246mm，軌跡 1 之距離是 91.524mm，軌跡 2 之距離是 92.724mm 如表 6.1。

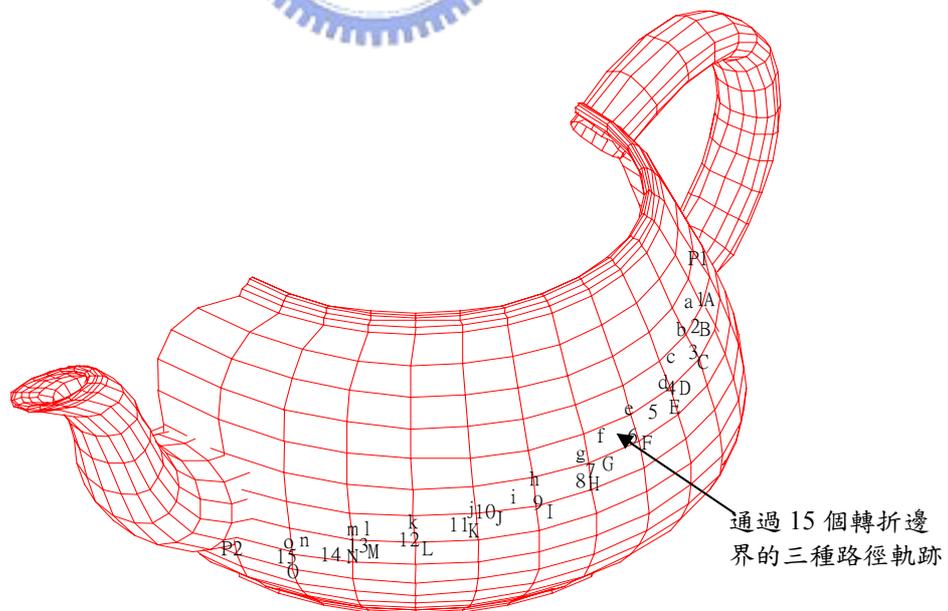


圖 6.16 通過 15 個轉折邊界的三種路徑軌跡

表 6.1. 在茶壺上三種軌跡的距離

軌跡	軌跡 1	軌跡 2	最短路徑
距離	91.524mm	92.724mm	91.246mm

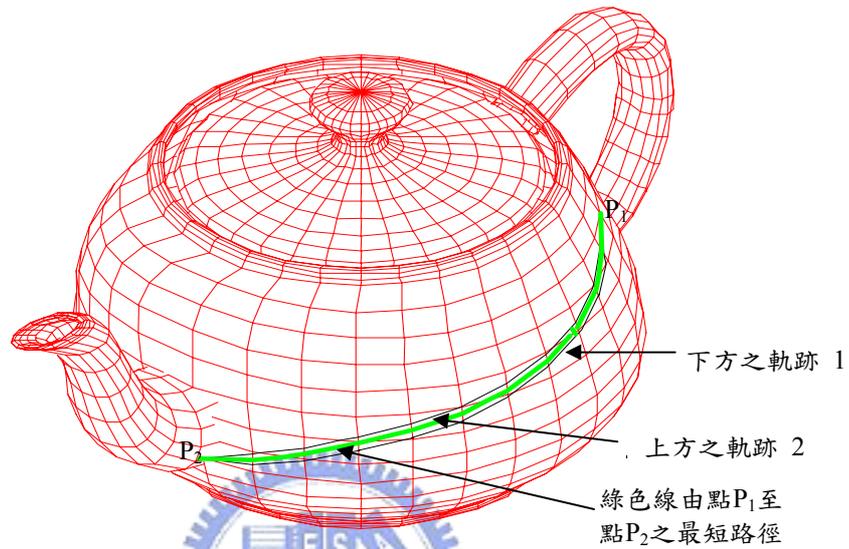


圖 6.17 由點 $P_1$ 至點 $P_2$ 的三個路徑軌跡

#### 6.4.2 以邊界分割法在弧形曲面上規劃最短路徑

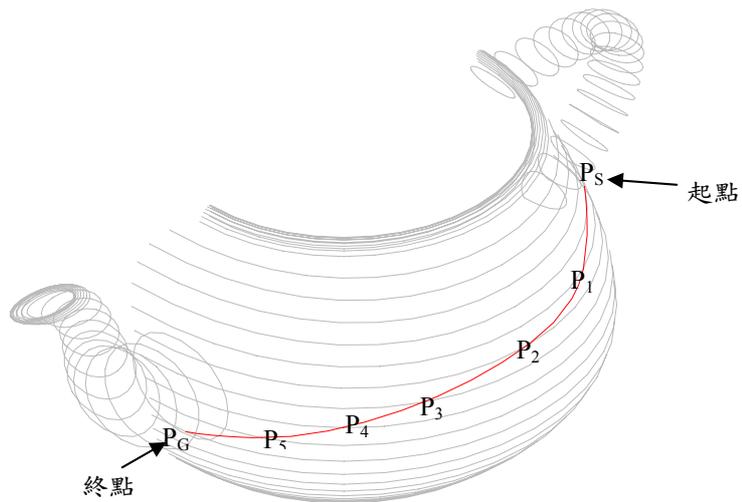


圖 6.18 在弧形曲面上由起點至終點通過五個邊界轉折點

假如起點 $P_S$ 與終點 $P_G$ 的位置被置放在弧形曲面上，為了使路徑能更貼近弧形曲面之表面，點與點間之連接不能使用線段連接，而需使用NURBS來連接起點、邊界轉折點與目標點以獲得弧面上之最短路徑如圖 6.18 所示，起點與終點之座標與圖 6.17 相同，在圖 6.18 中有五個轉折邊界會被最短路徑所通過，使用此法獲得五個邊界轉折點，連接起點、邊界轉折點及目標點之後可獲得其最短路徑並計算其總弧長為 91.273mm，將圖 6.18 所得到的結果與圖 6.17 比較，利用NURBS連接之弧面路徑軌跡較在綴面多面體上以線段連接之路徑軌跡大 (91.273mm > 91.246mm)，兩者是全弧長與總弦長之關係，其距離相差 0.027mm，如圖 6.19 所示藍色部份係利用網格分割法通過 15 個邊界轉折點並利用直線連接的路徑軌跡，紫色部份係利用邊界分割法通過 5 個邊界轉折點並利用NURBS連接的弧面路徑軌跡。

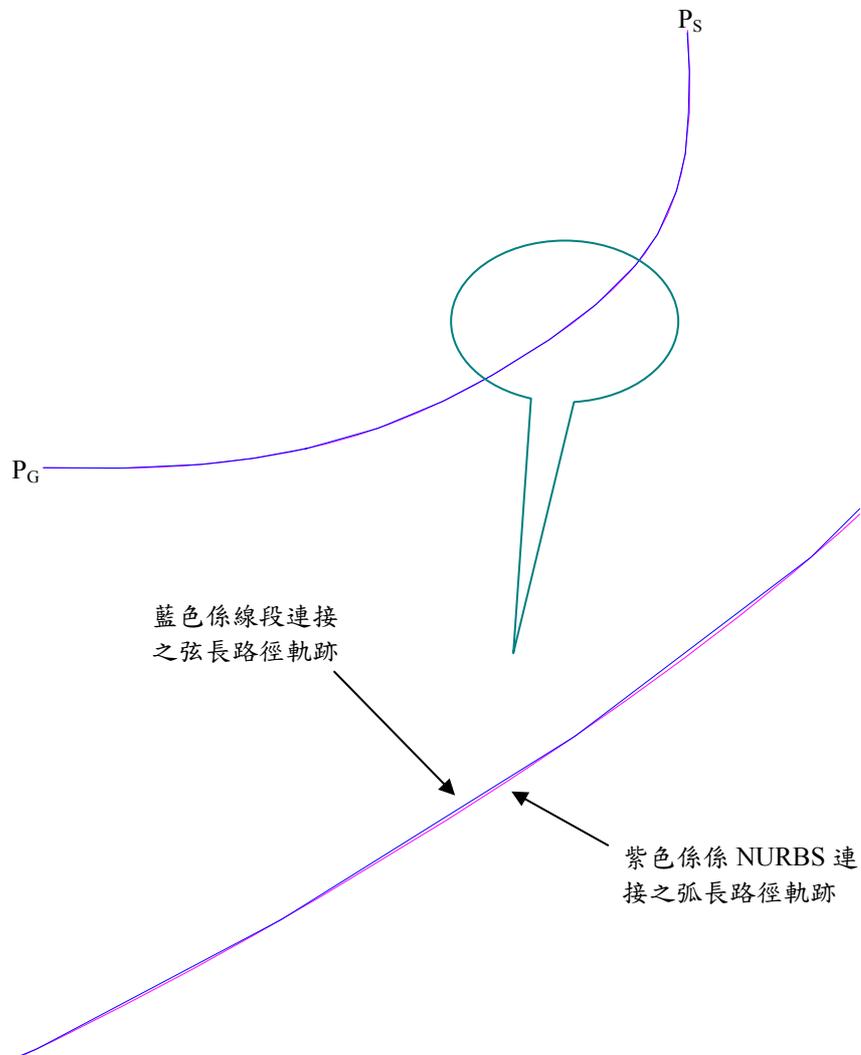


圖 6.19 NURBS 連接之弧長與線段連接之弦長比較

### 6.4.3 以布魯霍斯法再求取精確之最短路徑

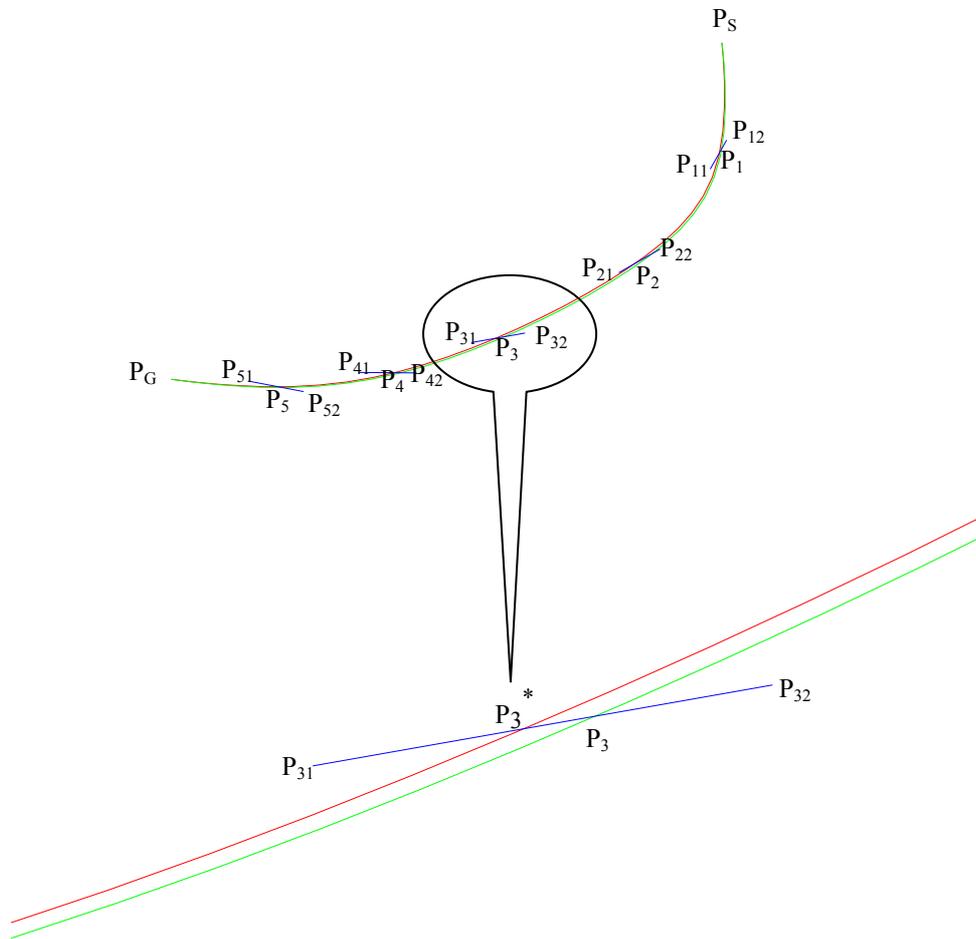


圖 6.20 取邊界轉折點之前後相鄰點再以布魯霍斯法求最短路徑

以邊界分割法先行求出最短路徑之軌跡方向，然後選取近似邊界轉折點之相鄰分割點再以布魯霍斯法則來求得被最短路徑所通過之邊界轉折點，前者之最短路徑計算次數為 $O(m^2(n-3)+2m+(m(n-2)+2)^2)$ ，而後者之最短路徑計算次數為 $O((n-2)^2)$ ，因此在多面體上計算邊界轉折點之總計算次數為 $O((n-2)^2+m^2(n-3)+2m+(m(n-2)+2)^2)$ ，在弧形曲面上計算邊界轉折點前者之最短路徑計算次數為 $O(4nm-3n-11m+14+(m(n-2)+2)^2)$ ，而後者之最短路徑計算次數為 $O((n-2)^2)$ ，因此在弧形曲面上計算邊界轉折點之總計算次數為 $O((n-2)^2+4nm-3n-11m+14+(m(n-2)+2)^2)$ ，圖 6.20 中截取 $P_1 \sim P_5$ 等五個左右兩邊相鄰分割點，並將 $P_{11}$ 至 $P_{12}$ 、 $P_{21}$ 至 $P_{22}$ 、 $P_{31}$ 至 $P_{32}$ 、 $P_{41}$ 至 $P_{42}$ 、 $P_{51}$ 至 $P_{52}$ 等分別視為五個線段，依布魯霍斯法則計算被最短路徑所通過之新的邊界轉折點

如圖 20 中之 $P_3^*$ ，綠色部份為原先最短路徑，而紅色部份為新的最短路徑，使用NURBS連接方式將起點、新的邊界轉折點、及終點連接可得最貼附於弧形曲面之最短路徑並計算其總弧長為 91.258mm如圖 6.19 所示，其路徑軌跡之總長度介於網格分割法與邊界分割法所求得路徑軌跡總長度之間( $91.246 < 91.258\text{mm} < 91.273 \text{ mm}$ )，得到的結果較採線段連接者更平順，亦較只以邊界分割法所求得之結果更貼附於弧形曲面上。

## 6.5 範例比較

以網格規劃法則需經過 15 個轉折邊界所求得之最短路徑為 91.246mm，以邊界分割法求得之最短路徑為 91.273 mm，再經過布魯霍斯法則所求得之最短路徑為 91.258 mm，其路徑軌跡則較前者小 0.015mm，雖其值仍較以網格規劃法所求得之值大 0.012mm。

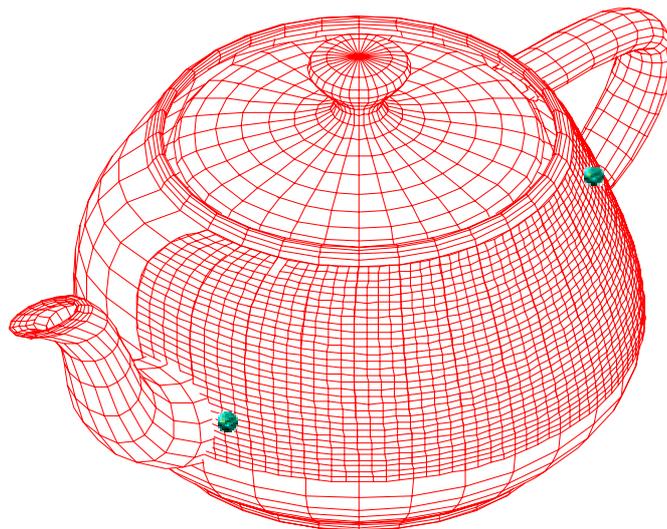


圖 6.21 在茶壺形之弧形曲面上尋找最短路徑

以圖 6.21 利用各種不同方法來規劃路徑並分別計算比較，以改良前之網格規劃法其計算次數小於  $2.2766744 \times 10^8$ 。而整合邊界分割、與布魯霍斯、之最短不徑計算次數為  $1.3576092 \times 10^8$ ，如表 6.2 所示。在表 6.2 中改良前網格規劃法係整合邊界分割與布魯霍斯之 1.68 倍如圖 6.22 所示。

表 6.2 在茶壺上以各種方法之路徑計算次數比較

作者與方法	計算次數	計算結果	變數之定義
改良前(多面體)之網格規劃法	$O((N(N-1)/2) + (N)^2)$	小於 $2.2766744 \times 10^8$	$n=28$ 列邊界數, $m=440$ 為各邊界之 分割數, $N=nm$
改良前(弧形曲面)之網格規劃法	$O(8N-10n-6m+12+(N)^2)$	小於 $1.51878052 \times 10^8$	$n=28$ 列邊界數, $m=440$ 為各邊界之 分割數, $N=nm$
(多面體)之整合邊界分割與布魯霍斯	$O((n-2)^2+m^2(n-3)+2m+(m(n-2)+2)^2)$	小於 $1.3576092 \times 10^8$	$n=28$ 列邊界數, $m=440$ 為各邊界之 分割數
(弧形曲面)之整合邊界分割與布魯霍斯	$O((n-2)^2+4N-3n-11m+14+(m(n-2)+2)^2)$	小於 $1.3096441 \times 10^8$	$n=28$ 列邊界數, $m=440$ 為各邊界之 分割數, $N=nm$

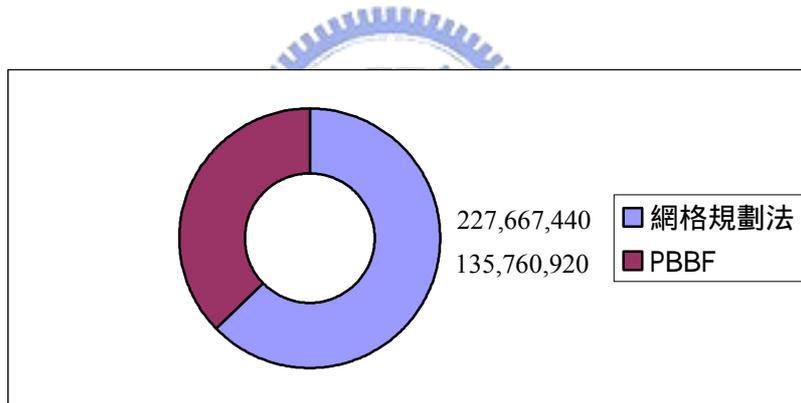


圖 6.22 各種方法運用於多面體之計算次數比較

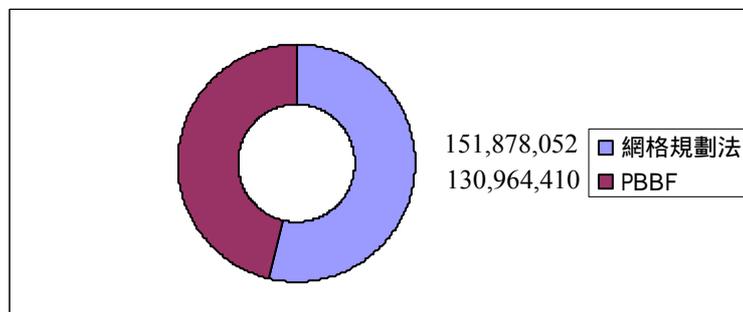


圖 6.23 各種方法運用於弧形曲面之計算次數比較

以相同的格點數或分割數及轉折邊界數量來規劃最短路徑，而結合邊界分割法與布魯霍斯在多面體之表面上直接計算最短路徑時其計算次數將較傳統之網格分割法少，以圖 6.22 為例結合邊界分割法與布魯霍斯其計算次數將較傳統之網格分割法減少 40.37%。而在弧形曲面之表面上直接計算最短路徑時其計算次數將較傳統之網格分割法少，以圖 6.23 為例結合邊界分割法與布魯霍斯其計算次數將較傳統之網格分割法減少 13.78%。

## 6.6 應用

整合邊界分割理論與布魯霍斯法則除可解決弧形曲面之最短路徑規劃問題外，可應用於材料包裝之纏繞路徑規劃，以二面歪斜之六面體為例，設定由點 A 開始纏繞，隨後等距增加至點 B 為止，如僅考慮距離最短來計算時在纏繞包裝時會出現偏向之現象如圖 6.24 所示，若同時考量距離最短、繩索寬度、及不得重復纏繞等限制，則可獲得較佳之纏繞結果如圖 6.25 所示。

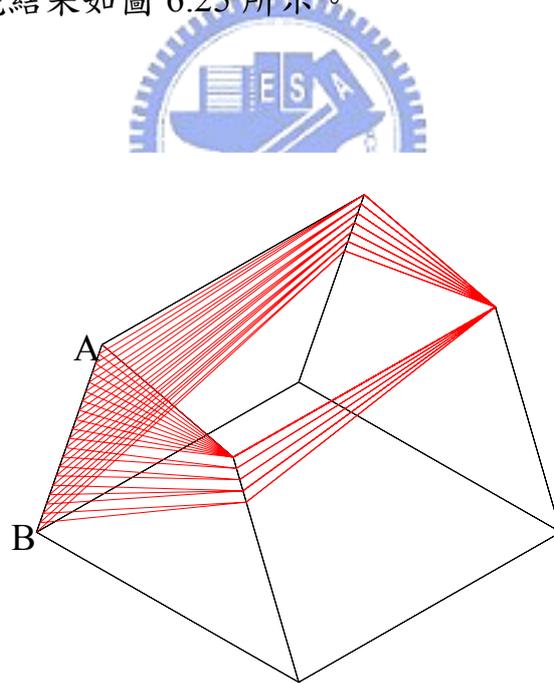


圖 6.24 在二面歪斜的六面體上以最短路徑方法纏繞結果

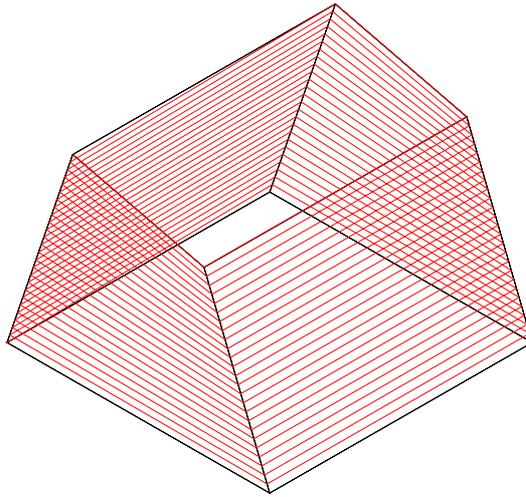


圖 6.25 在二面歪斜的六面體上之實際纏繞結果

PBBF 理論亦可應用於數值控制之機械加工路徑規劃；以汽車部份模型曲面為例，首先量測欲建構部份之點群資料，再利用(6.4)以點群資料來建構欲加工部份之模型曲面如圖 6.26。

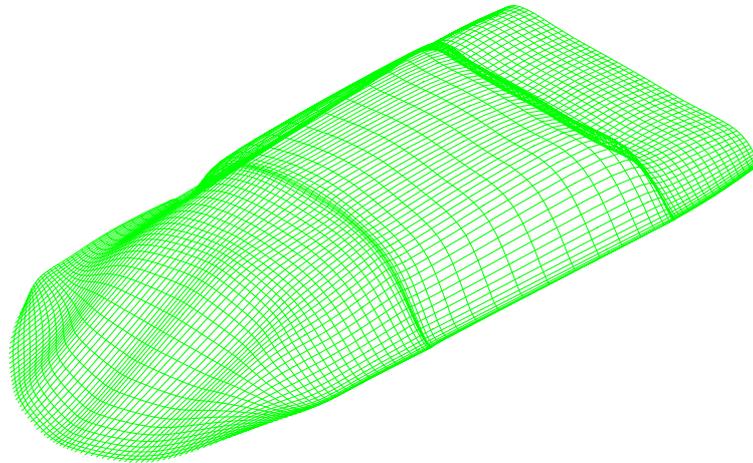


圖 6.26 規劃加工之局部汽車模型曲面

如欲從圖 6.26 之模型曲面上直接規劃加工路徑，其計算量必相當龐大，因此以整合後之路徑理論簡化計算過程僅以 19 條橫向基準線，並規劃由車頭朝車尾、橫向移位、再由車尾往車頭方向重復來回實施切削加工，考量刀具條件(刀具補償、精度及粗糙度)如圖 6.27、機器設定(主軸轉速、進刀量)、與精加工之預留量等並以(6.7)及(6.8)產生刀具球心之路徑及 NC 粗加工之程式碼如圖 6.28 所示。

$$\text{NURBS 曲面方程式： } R(u,v)=\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_i^m(u)N_j^n(v)V_{ij} \quad (6.4)$$

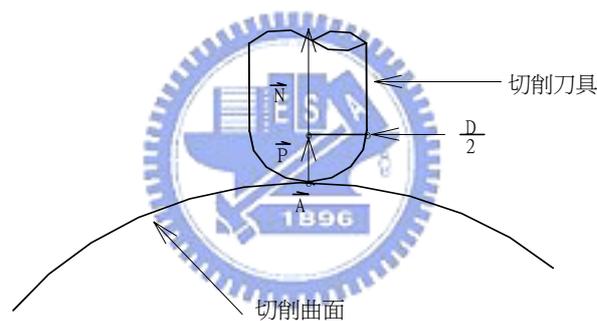
$$\text{對 } u \text{ 方向偏微分式： } R^u(u,v)=\frac{dR(u,v)}{du}=\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{dN_i^m(u)}{du} N_j^n(v)V_{ij} \quad (6.5)$$

$$\text{對 } v \text{ 方向偏微分式： } R^v(u,v)=\frac{dR(u,v)}{dv}=\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_i^m(u) \frac{d(N_j^n(v))}{dv} V_{ij} \quad (6.6)$$

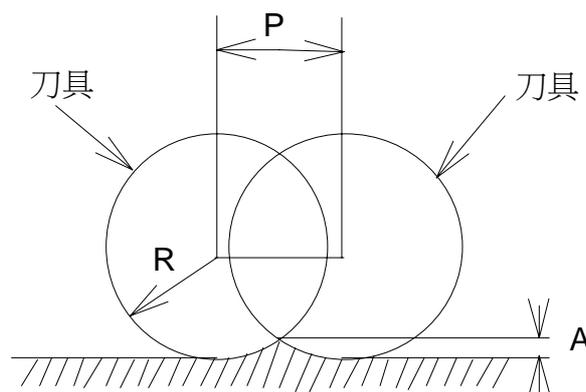
$$\text{法線偏置向量式(軸向)： } \vec{N}=R^u(u,v) \times R^v(u,v) \quad (6.7)$$

$$\text{其面粗糙度 } A=R-\sqrt{R^2-(\frac{P}{2})^2} \quad (6.8)$$

$$\text{球端銑刀 } (\phi D) \text{ 的場合 } \vec{P}=\vec{A}+(D/2) \cdot \vec{N} \quad (6.9)$$



球端銑刀之刀具補償



球端銑刀之加工精度

圖 6.27 刀具條件(刀具補償、精度及粗糙度)

上式中  $R$  = 球端銑刀之刀具半徑  $P$  = 橫向進刀間距。

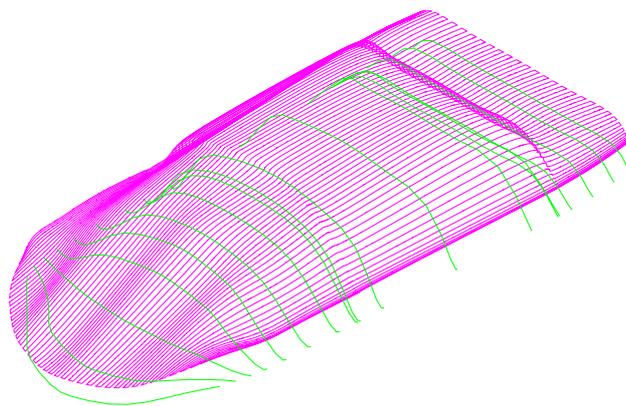


圖 6.28 將路徑規劃理論應用於粗加工路徑

上述之加工路徑位置係指 NC 刀具球心之位置，而真實切屑完成時，模型之外圍必緊貼於該時 19 條基準線，假如欲在上述加工完成模型之表面上做彩繪、噴漆、或塗裝，則貼近模型表面之工作路徑，即變成新的加工路徑如圖 6.29 所示。

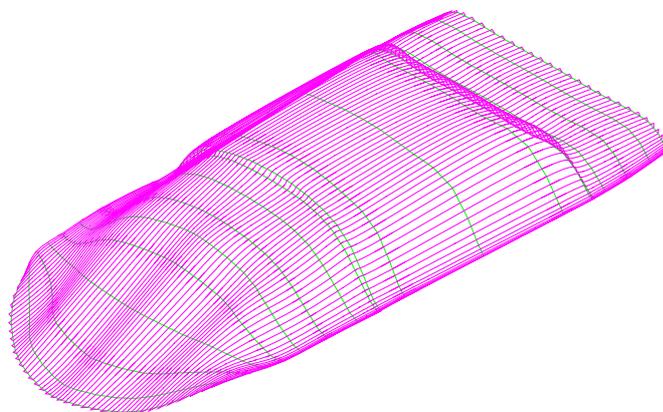


圖 6.29 將路徑規劃理論應用於不考慮補償之表面加工

## 6.7 結論

到目前為止並無相關的文章討論在弧形曲面上直接規劃最短路徑，經由我們提出的方法即可以直接在弧形曲面(包含各種複雜外形之凸形或凹形)之表面上直接規劃最短路徑。