

第三章 搭接式多面體之路徑規劃

在機械手的工作空間中必須避免與機台或夾治具和工件及週邊設備等產生接觸之區域，該區域即是所稱障礙區，掃描實際產生干涉之位置，再利用座標轉換將所量得資料改為關節障礙區域，並將這些關節障礙區域全部擺放在架構空間內，即可獲得障礙區域範圍，再以幾個特定幾何外形來界定障礙區域之輪廓規劃避碰路徑。在搭接式多面體之路徑規劃流程係 1.利用網格規劃法以求得任意可通行點至其他可通行點之距離以產生鄰接矩陣。2.再以迪吉斯托來求得軌跡矩陣。3.從軌跡矩陣中自動搜尋最短路徑。

3.1 關節障礙之架構空間

一般在卡氏座標中機械手由一點移動至另一點時，可到達的最短路徑可能只有一條，但轉換成關節的角度，各軸需轉動的角度其解並非唯一，將產生有多重選擇的路徑，造成驅動關節角度的取捨問題，所以在關節架構空間中利用特定輪廓之障礙曲面來搜尋路徑，確立關節角度指定到達目標點的路徑，決定如何到達指定位置並定義架構空間範圍。

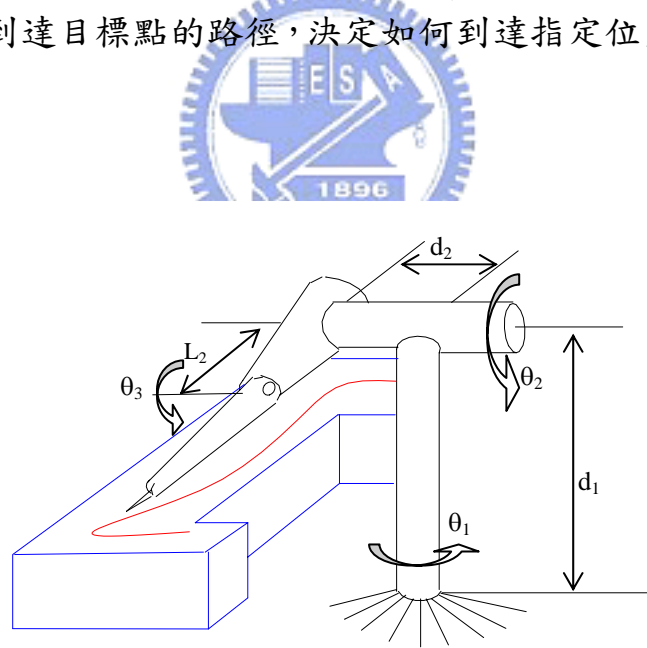


圖 3.1 三軸 PUMA 機械手之示意圖

以三軸PUMA機械手為例做說明如圖 3.1 所示，其轉軸角度與轉軸距離分別標示如圖上之 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 d_1 、 d_2 、以及 L_2 ，依其座標轉換公式可得到連桿3以0座標系來描述的轉換矩陣 0T_3 ，其中 iA_n 表示連桿n以i座標系來描述之轉換矩陣， ${}^iA_n^{-1}$ 表示連桿n以i座標系來描

述之轉換反矩陣。以三軸PUMA機械手在有障礙之機台上工作為例如圖 3.2 所示，假設機台和週邊設備以及工件等可能與機械手碰撞之點座標為 $p(p_x, p_y, p_z)$ ，則每一個 p 值皆可利用矩陣公式(3.1)與(3.2)及(3.3)的計算求出相對映之關節旋轉角度 θ_1, θ_2 和 θ_3 ，然後將可能產生碰撞之關節角度值置入架構空間內。

$${}^0T_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & -C_1 S_{23} & L_2 C_1 C_2 + S_1 d_2 \\ S_1 C_{23} & C_1 & -S_1 S_{23} & L_2 S_1 C_2 - C_1 d_2 \\ S_{23} & 0 & C_{23} & L_2 S_2 - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$${}^0A_1^{-1} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 p_x + S_1 p_y \\ p_z - d_1 \\ S_1 p_x - C_1 p_y \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_1^{-1} {}^0T_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 C_2 \\ L_2 S_2 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$${}^0A_1^{-1} {}^1A_2^{-1} {}^2A_3 = {}^2A_3 \quad (3.3)$$

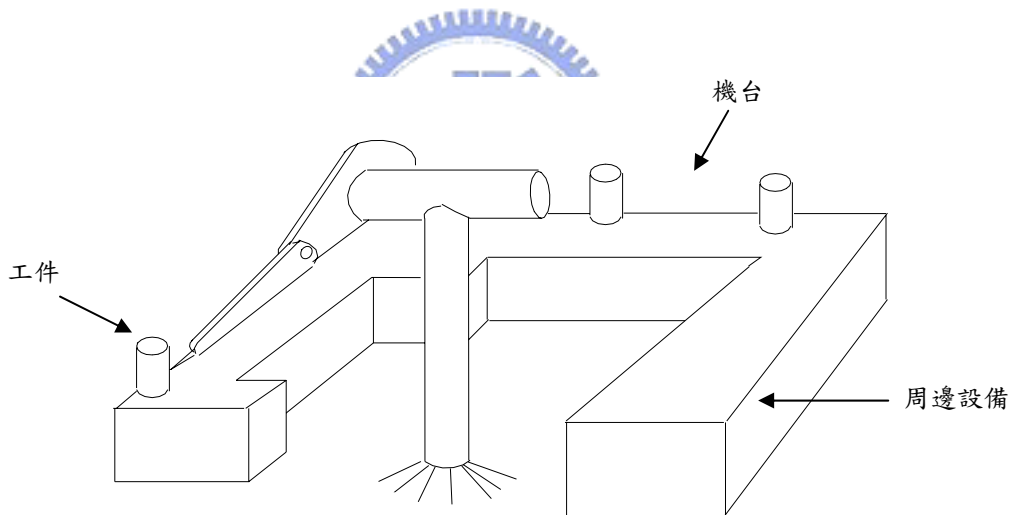


圖 3.2 三軸 PUMA 機械手之工作示意圖

利用B-Spline擬合曲面來建構即可獲得特定形狀之障礙曲面，再將特定輪廓表面之點群資料保留以計算局部之有效路徑，而在避碰路徑規劃中只要知道機械手在移動瞬間之位置與下一步要到達位置即可，因此從起點 P_S 至目標點 P_G 之最短路徑即該兩點之連線如圖 3.3 所示，在連線過程中如與界定障礙區域之多面體發生交集則先繞行該多面體後再回到原直線向量繼續前進。採用網格規劃法並配合迪吉斯托法則來計算由起點至目標點的最短路徑，依網格規劃法來規劃路徑必

須沿著網格點依序前進，且以網格往前連接方式來建立距離資料庫，配合迪吉斯托法則之資料處理，統計比較並選取總合距離最小之路徑。如所設定之網格大小變更則所獲得的路徑距離總合值亦會不同，而網格大小如何取捨則視所需精度而定，當網格小到一定程度時即將產生收斂之效果。

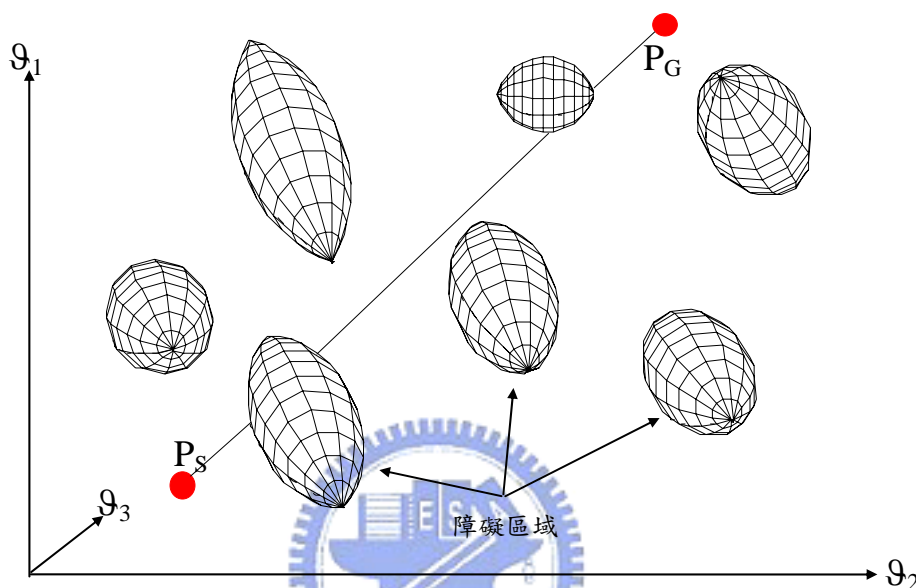


圖 3.3 從起點 P_S 至目標點 P_G 之最短路徑即該兩點的連線

3.2 利用 B-Spline 建構障礙空間曲面

利用雙三次均勻 B-Spline 理論建構各種輪廓外形之多面體，以界定架構空間中之障礙區域，該多面體亦稱為障礙曲面，依 B-Spline 理論將建構的曲面作微小的局部修正，使選用之多面體更符合障礙區域實際形狀，又改變機台的擺設位置或加減週邊設備即可建立不同輪廓外形之障礙曲面。B-Spline 曲面的建構方法有兩種，第一種是以給定點當作控制點來建構曲面，此法所建構的曲面不會通過所給定的點，第二種是以給定點當作擬合點來建構曲面，此法所建構之曲面會通過所給定點，並沿著給定點以平順之方式連接所有的給定點，障礙邊界點就是擬合點，因此採用第二種方法來建構障礙曲面，而以擬合點來建構曲面時需要先行運算反向求出經過該擬合點之控制點。

一個轉換矩陣 0T_3 可由座標轉換來獲得， 0T_3 即為連桿 3 以連桿 0 來表示， iA_n 稱為以 i 座標來表示 n 座標之轉換矩陣， n 表示一個新的座標， i 表示參考座標，另一個符號 ${}^iA_n^{-1}$ 係 iA_n 之反轉換矩陣，因此在下

(3.4)與(3.5)是計算擬合點與控制點曲面之主要方程式，再配合擬合方程式(3.6)即可建立障礙曲面， $2\mathbf{d}_i$ 與 $2\mathbf{e}_i$ 為 v 方向之邊界向量，其中 $2\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_{i,2} - \mathbf{V}_{i,0}$ (扭曲矩陣中最左側之邊界向量)， $2\mathbf{e}_i = \mathbf{V}_{i,n+2} - \mathbf{V}_{i,n}$ (扭曲矩陣中最右側之邊界向量)。上述矩陣之下標符號其中 $i, r = 0, \dots, m+2$ 而 $j, k = 0, \dots, n$ 。

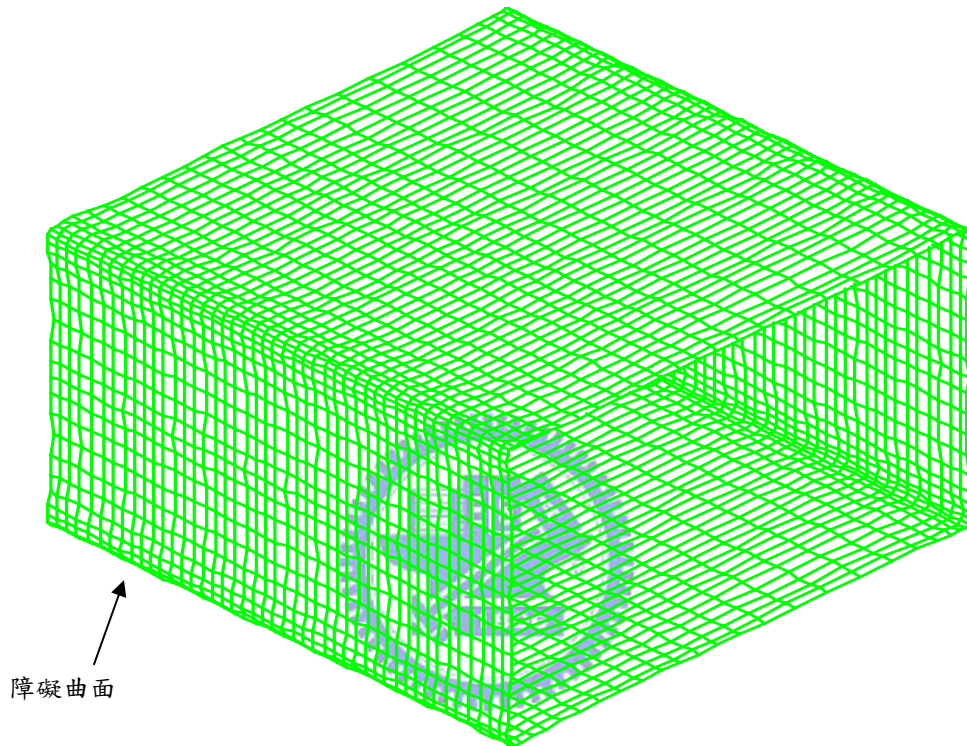


圖 3.4 由方盒形多面體所組成之障礙曲面

在此提出三個特定形狀多面體來界定架構空間中之障礙區，指定最短路徑係由起點往終點方向前進，遇界定障礙之多面體時再沿多面體表面來規劃最短路徑，第一個例子為方盒形障礙曲面如圖 3.4 所示，方盒形是一個對稱的障礙曲面，經展開以後其正方網格的每一個跨距距離是一樣的。第二個例子是瓶子形多面體之障礙曲面如圖 3.5 所示，在這個例子中每一個方向網格的大小是不同的，第三個例子是由兩個不同大小的球形多面體之障礙曲面如圖 3.6 所示，在第三個例子中路徑可能由貼於兩個球面的曲線和一條沿著起點和目標點連線方向的直線所組成。

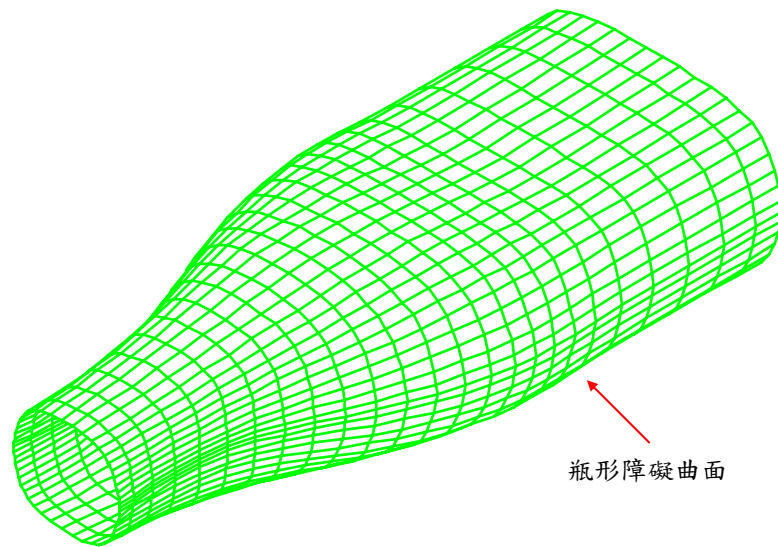


圖 3.5 由瓶子形多面體所組成之障礙曲面

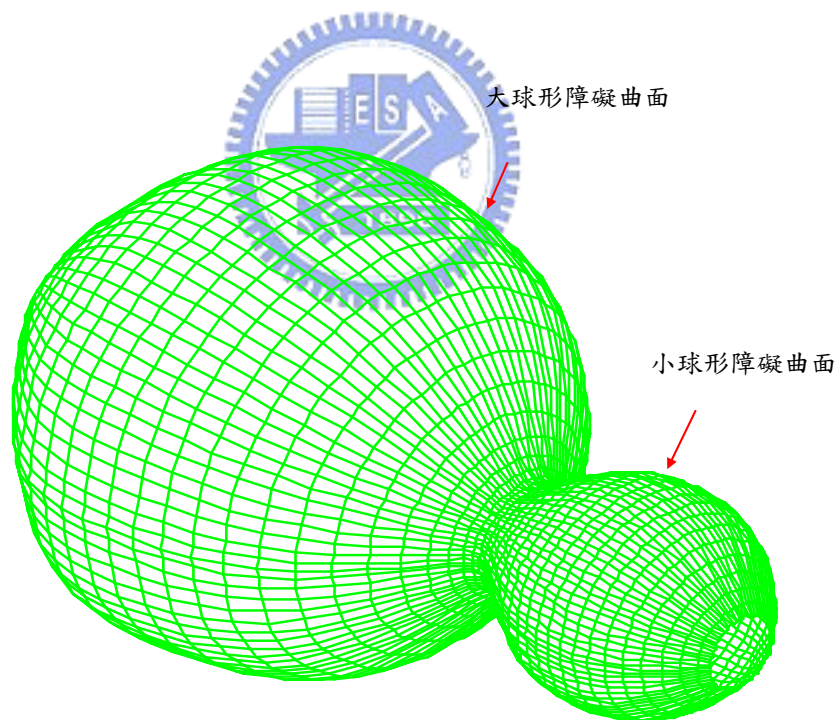


圖 3.6 由兩個不同大小球形多面體所組成之障礙曲面

3.3 機械手臂在障礙曲面上之工作點

以電子零件插入機械手或汽車廠的點焊機械手為例經常在複雜的三度空間中工作，每一個插入點或焊點即是所謂的起點或目標點，而每

一個由工作起點和終點的連線是一條最短路徑，當該直線與所建構的障礙曲面無接觸時，則該直線便是最短路徑，但是當該直線與障礙曲面有接觸時，將每兩個停頓點設定為局部障礙曲面之起點和目標點，然後在起點與目標點之間運用網格規劃法與迪吉斯托法則來計算其可通行路徑中之最短路徑。

3.4 疊代平面 (Overlapping Plane)

首先建構一個特定形狀輪廓之多面體來界定障礙區域，在多面體上標上網格點，將每一個網格點和其相鄰的點連接成網格。然後將障礙曲面區分成兩個等份的自由端曲面，並針對障礙曲面的表面與網格關係來分析，由 0 到 180 度的曲面稱為上半部曲面，而 0 到 -180 度的曲面稱為下半部曲面，利用幾何分析法，將每一半之三維曲面對映成二維的平面，在二維平面上分別在網格點間再細分，然後計算微分後點與點間之空間距離，此空間距離包含 u 方向和 v 方向，其中 u(0~360 度或-180~180 度)、v(0~總高度)，將同一個 u 值方向點與點間之距離以累加的方式登錄之，然後將所得之值擺放在 v 方向上，依序增加一個微量的 u 值，再重覆上述的步驟將所得到的值擺放在下一個 v 位置上。相同的方法在 u 方向擺放所得到的同一個 v 值方向的點與點間之距離值，如此所建構的二維之網格平面就非常趨近於三維曲面。

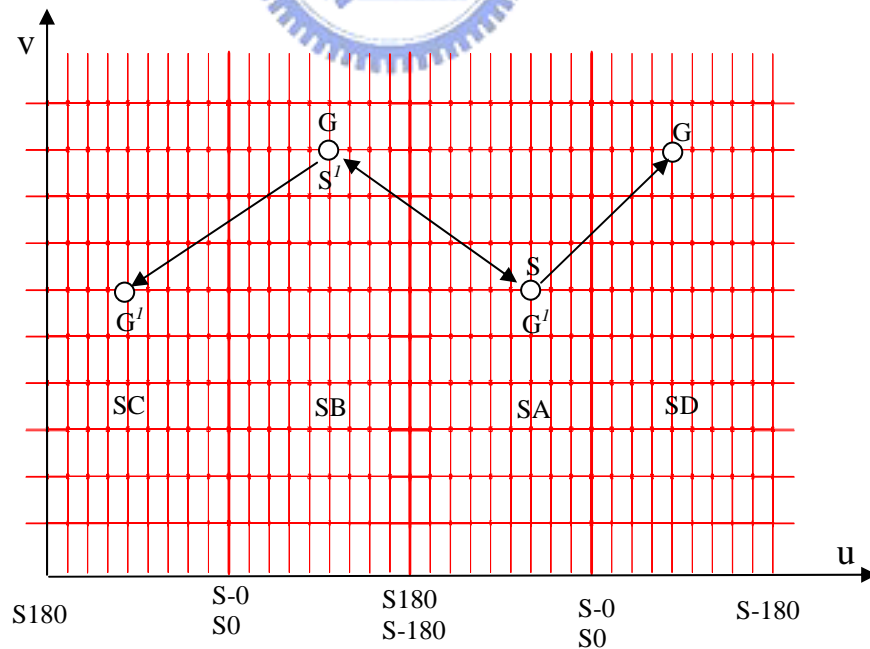


圖 3.7 經展開及疊代後之盒形障礙平面

圖 3.7 是由 SA,SB,SC,和 SD 等四個平面所搭接而成之疊代平面，當起點和目標點均落在同一個平面上時即表示行進路線與障礙曲面的交點均在同半個曲面上，當起點和目標點同時在不同的兩個區域平面上，會有不同繞著障礙曲面的方法產生，例如起點是座落在 SA 平面上，而目標點是座落在 SB 平面上，則表示行進路線係沿著逆時針方向旋轉至目標點，如果起點是座落在 SA 平面上而目標點是座落在 SD 平面上，則表示行進路線係沿著順時針方向旋轉至目標點，依此類推，如果起點座落在 SB 平面上而目標點是座落在 SA 平面上，則表示行進路線係沿著順時針方向旋轉到達目標點，如果起點座落在 SB 平面上而目標點座落在 SC 平面上，則表示行進路線係沿著逆時針方向到達目標點。

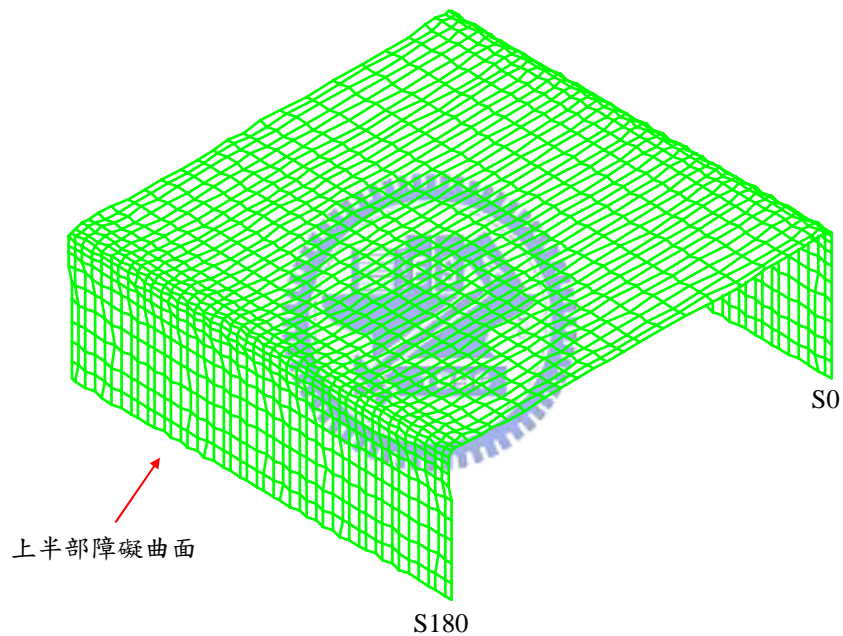


圖 3.8 經切割的上半部盒形曲面

將盒形障礙曲面分割成上下兩個部分，上半部分是由 0 到 180 度所組成，而下半部則由 0 到-180 度所組成，因為上、下兩個半部障礙曲面是對稱的，因此繪製上半部如圖 3.8 所示，利用先前所提過的方法即可得到所對映之平面。依此類推，利用前述的方法各別分割瓶子形障礙曲面與兩個不同大小的雙球形障礙曲面為上半部和下半部如圖 3.9 與圖 3.10 所示，當然用上述的方法得到對映之平面，盒形的曲面是一個規則曲面，所以每一個網格點的大小是相同的，在後兩個例子中因為不是規則性模型所以每個格點跨距的大小都不同，使用一個正方的對映平面來說明，但在對映平面所代表的格點大小是不相

同的。雖然上述之各種例子都是上下部分對稱，但是此法亦可適用於非對稱之模型。

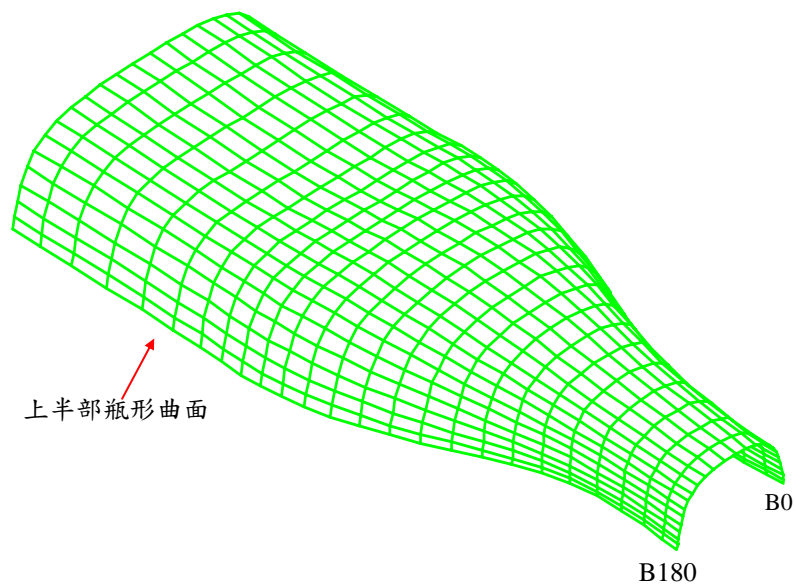


圖 3.9 經切割後的上半部瓶子形障礙曲面

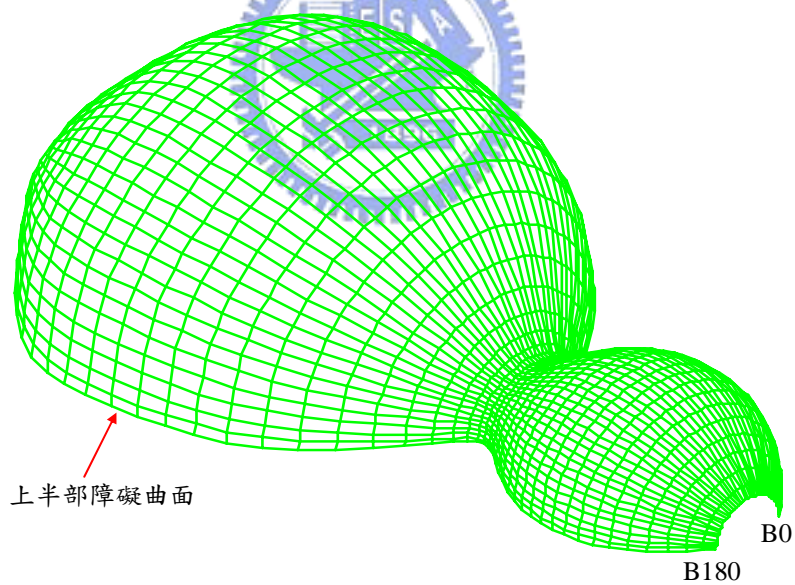


圖 3.10 經切割後的上半部雙球形障礙曲面

由以上的例子中可以發現在多面體曲面上起點和目標點之位置可能發生在同一個對映平面上也有可能發生在不同的兩個對映平面上，當起點和目標點的位置皆發生在同一個對映平面上時其行進路線只有一種，但起點和目標點的位置分別在不同的對映平面上時，由起點至目標點沿著障礙曲面繞行的方式有兩種，一個是繞著順時鐘方向

行進，另一個就是繞著逆時鐘方向行進，亦即要計算最短路徑時必須要先建立如圖 3.11 所示的疊代平面，如何判斷該採用逆時鐘方向旋轉或順時鐘方向旋轉的方法，直接計算由起點至目標點所經過每一個小塊之線性距離總合，並採用線性距離總合較小者，其計算線性距離總合的方程式如(3.12) 所示。

$$D = \sum_{i=0}^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \quad (3.12)$$

如果逆時鐘方向旋轉其距離的總合比順時鐘方向旋轉其距離的總合小，則採用逆時鐘方向旋轉的行進路線，反之亦同。

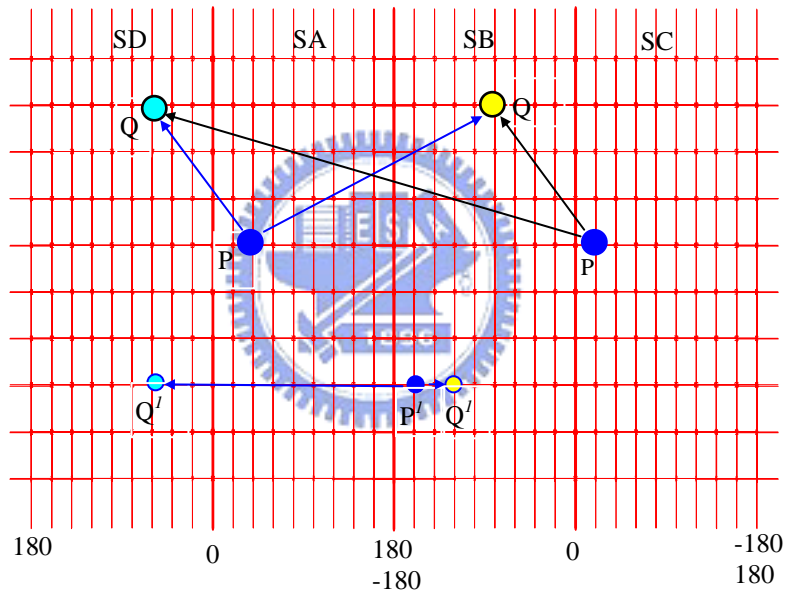


圖 3.11 在疊代之障礙平面上尋找最短路徑

以圖 3.11 為例假設疊代障礙平面是由 SA, SB, SC 和 SD 四個區域平面所組成，如果路徑的規劃是由 SA 到 SB 以及由 SB 到 SC 等方向是屬於逆時鐘方向旋轉，如果是由 SB 到 SA 以及由 SA 到 SD 等方向是屬於順時鐘方向旋轉。事實上在 SA 平面上任一點 P 相對映在 SC 平面上也有相同的點 P 存在，同樣的在 SB 平面上任一點 Q 相對映在 SD 平面上也有相同的點 Q。由 P 點到 Q 點的路徑就有四條；第一個路徑是由 SA 之 P 點至 SD 之 Q 點，第二個路徑是由 SC 之 P 點至 SB 之 Q 點，第三個路徑是由 SA 之 P 點至 SB 之 Q 點，第四個路徑是由 SC 之 P 點至 SD 之 Q 點。但其中由 SA 之 P 點至 SD 之 Q 點

與由 SC 之 P 點至 SB 之 Q 點是一樣的，而且由 SA 之 P 點至 SB 之 Q 點必小於由 SC 之 P 點至 SD 之 Q 點，因為由 SC 平面至 SD 平面必須橫跨過 SB 與 SA 兩個平面，設定工作的起點 P 位於 SA 平面上，則由 P 點到 Q 點的路徑只有二個，它們分別是前述第一與第三路徑。

在圖 3.11 中的另一個路徑由 P^1 點至 Q^1 點可說明順時鐘與逆時鐘旋轉路徑的選擇，SA 平面上的起點 P^1 係在 SA 平面之邊界上緊靠著 SB 平面，而目標點 Q^1 是在 SB 平面上緊靠著 SA 平面，以及 SD 平面之邊界上，因此由 SA 平面之 P^1 至 SB 平面之 Q^1 其距離甚短，但由 SA 平面之 P^1 至 SD 平面之 Q^1 其距離甚遠，以雙球形障礙曲面來描述就更為貼切，當起點在 -179 度的位置而目標點在 177 度的位置時，逆時鐘方向旋轉要 358 度才能到達，而以順時鐘方向旋轉卻只要 2 度即可到達。

3.5 最短路徑

由圖 3.11 中任意 P 點到任意 Q 點的最短路徑採用迪吉斯托的最短路徑搜尋法，將網格節點之間距以資料結構方式儲存，在網格上依序將所有的網格點編號，並計算每一個編號至其他點的距離，以幾種如前述的基楚網格規劃模式來比較並得到一個最有效率的方法，首先將一個網格點與其四個正交的格點相連接，所得到的結果較粗燥其長度較長，第二個方法將一個格點與其四個正交格點連接之外並與其對角的四個格點相連接，其結果較佳和較有效率，第三個方法將網格點與其他的格點相連接，此法所求得的距離最短，但其計算量較大，採用第三種方法來計算堆有效率的路徑規劃，使用鄰接矩陣與軌跡矩陣來計算任意起點 P 到目標點 Q 之最短路徑。

因此要計算由起點至目標點的最短路徑，只要知道起點的位置即可，由三個區域平面所構成的疊代平面求出，假如起點的位置座落於 SA 平面上，則由 SD 與 SA 和 SB 所構成的疊代平面就可計算出如何繞行才可得到最短的距離，相同的起點的位置座落於 SB 平面上，則由 SA 與 SB 和 SC 所構成的疊代平面即可決定是由何方向繞行才可得到最短路徑。如圖 3.12 所示起點 P 座落在 SB 平面上，且在 SA 平面及 SC 平面上找到相同的目標 Q 點，在圖上 P 點的位置在疊代平面上的編號為 39，在 SC 平面上找到 Q 點其位置在疊代平面上的編號為 231，在 SA 平面上找到 Q 點其位置在疊代平面上的編號為 249，由迪吉斯托法則計算得 P39 到 Q231 其距離是 204.78，但由 P39 到 Q249 其距離是 397.57，因此由起點 P 至目標點 Q 其最短路徑是 204.78 而其最短路徑是由 P39 到 Q231。

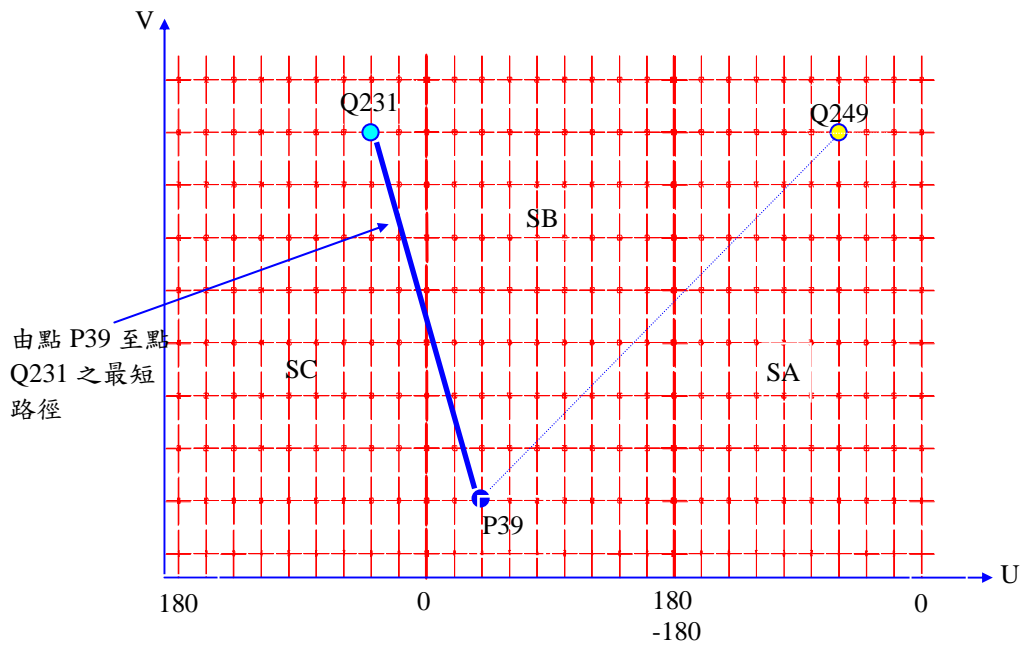


圖 3.12 由下半部點 P 至上半部點 Q 的最短路徑

3.6 範例說明

在第一個例子中，一個盒形障礙曲面是由四個正交的平面所組成，是規則的對稱曲面，其每一個跨距都相等，使用迪吉斯托法則來搜尋最短路徑並將二維所得之值轉換成三維曲面之對映位置，將圖 3.12 所求得之值代入則可得到在盒形障礙曲面上從點 P 至點 Q 之最短路徑如圖 3.13 所示。在此例中我們們企圖將其他方法計算所得之值與此法所求得之值作比較，並依據其結果來確認此法的可行性，然而如何求得點 C 是求取真解之重要關鍵，尋求真解的方法：選擇直線 A 到 B，它是介於上半部平面和側平面相交的直線如圖 3.13 所示。其最短路徑 CD 就是由直線 P 到 Q 和直線 A 到 B 之共垂線向量求得，其交點 C 即可求得，最短路徑的真解即是距離 PC 和距離 CQ 之總和如圖 3.14 所示。以求解最短路徑之另一個條件是最短路徑通過每個邊界線之入角度 θ_1 要等於出角度 θ_2 ，在此例中其角度 $\theta_1 = \theta_2$ 其值為 45 度，而以網格規劃與迪吉斯托搜尋法所求得之角度 θ_1 為 44.9784 度而角度 θ_2 為 45.0217 度。

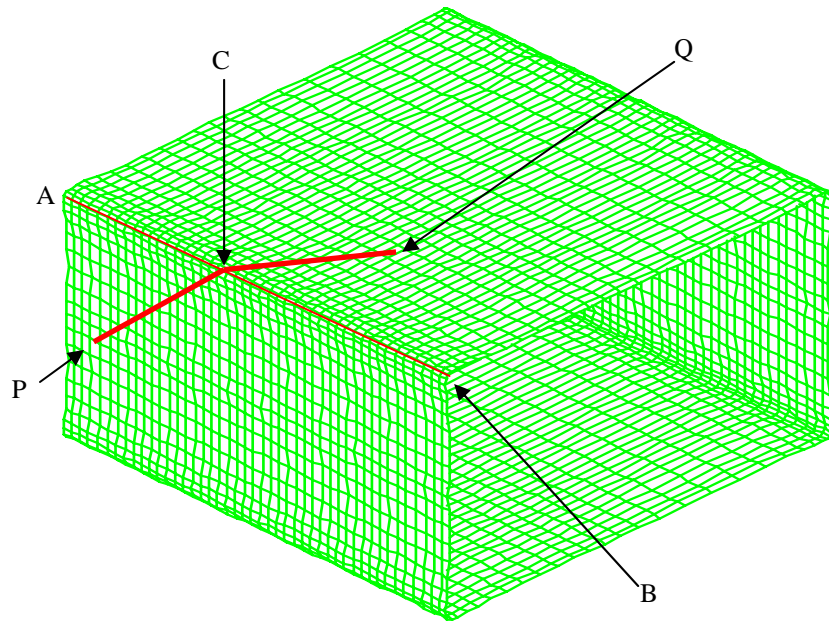


圖 3.13 在盒形障礙曲面上由 P 點至 Q 點的路徑規劃

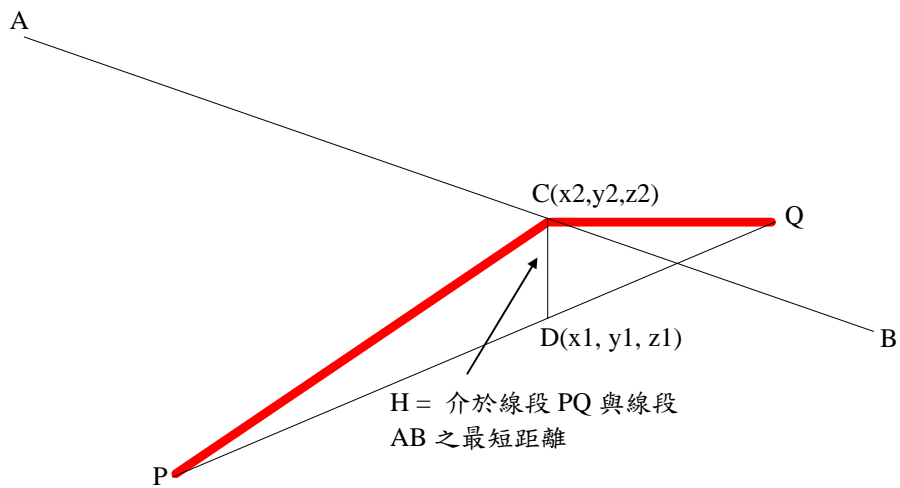


圖 3.14 交點 C 同時垂直於直線 PQ 與直線 AB

表 3.1 計算結果比較及誤差值

計算所求得的真解	$H = 70.71068$	$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45$
此法所求得的解	$H = 70.71090$	$\vartheta_1 = 44.9784$ $\vartheta_2 = 45.0217$
誤差值	0.00022	0.0433

表 3.1 中此法所求得之解的統計數字是將每一個單位再分成 10 等份所求出之數字，如果網格跨距縮小將可以得到更準確的答案。

在第二個例子中最短路徑就是沿著起點至目標點的連線直線，如果起點和目標點均不在障礙曲面上如圖 3.14 所示，設定其路徑是沿著由起點 A 至目標點 B 的直線，當該直線與瓶子形障礙曲面相交時，其交點稱為 P 點和 Q 點。除此之外，介於 P 點和 Q 點間之行進軌跡總是沿著障礙曲面上由 P 點向 Q 點前進。因此一個有效率的路徑由 A 到 P 的直線、P 到 Q 的線短段組合、與 Q 到 B 之直線所組成如圖 3.15 所示。

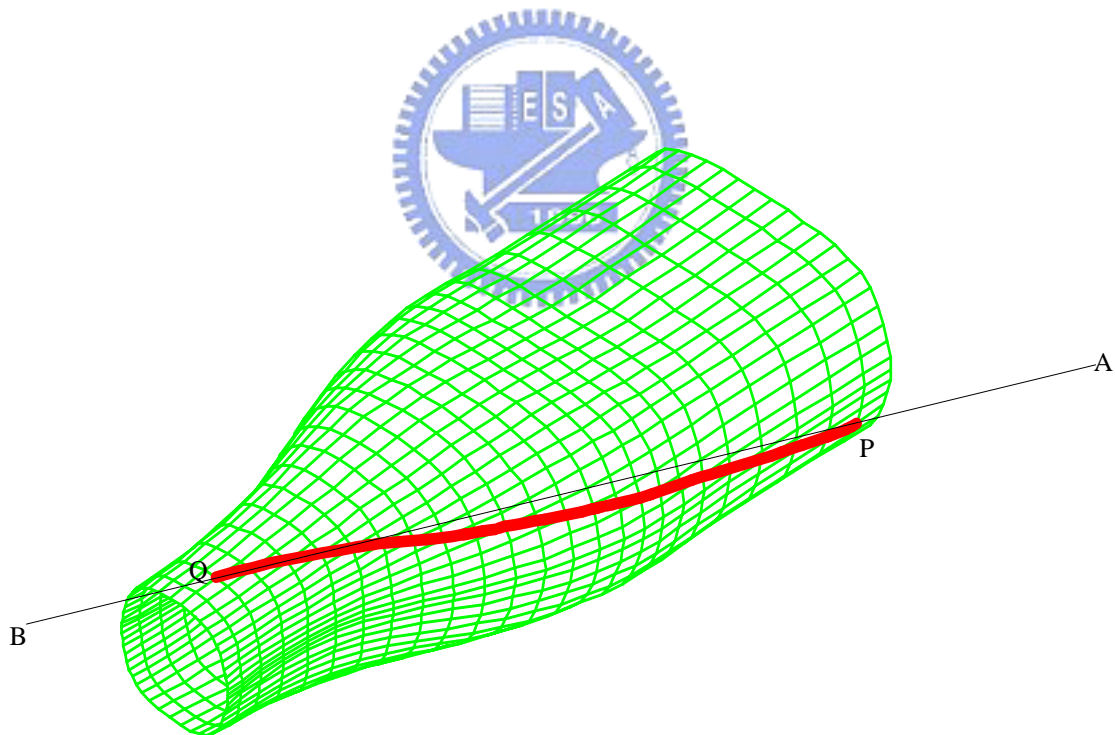


圖 3.15 在瓶子形障礙曲面上由 B 點至 A 點的路徑規劃

在第三個例子中企圖在兩個不同大小的圓球形障礙曲面上尋求一個有效率的路徑，由點 A 到點 F 所構成的直線與兩個不同大小的圓球形障礙曲面有四個交點，它們被稱為分別是 B、C、D 和 E 如圖

3.16 所示，有效率的路徑是沿著由 A 至 F 的直線之三個線段與沿著曲面表面之兩個線段組合所組成，三個直線線段部份是指 A 到 B、C 到 D 與 E 到 F，兩個曲線段部份是指 B 到 C 與 D 到 E 如圖 3.16 所示。

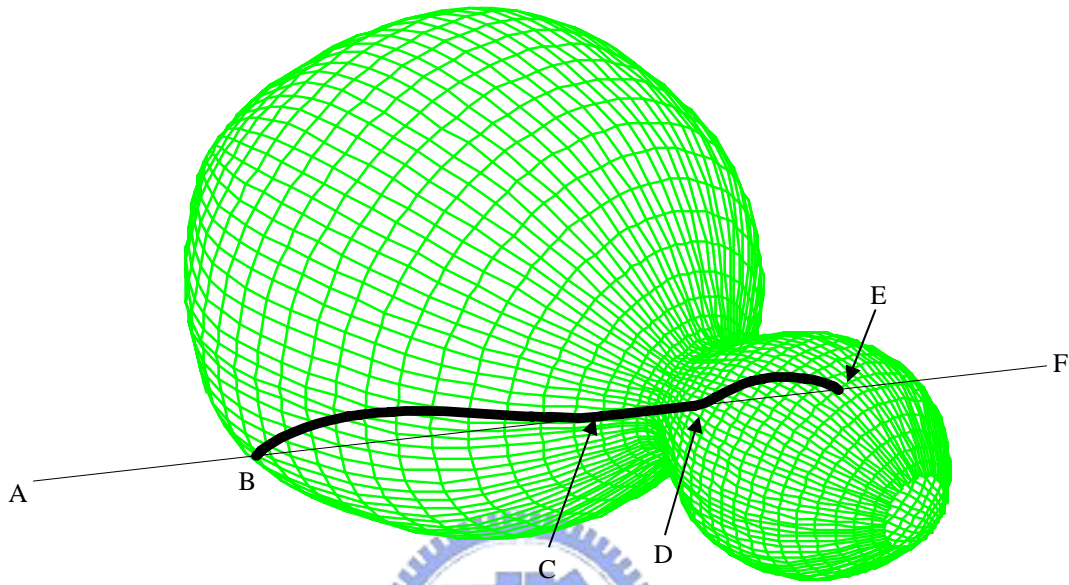


圖 3.16 在雙球形障礙曲面上由 A 點至 F 點的路徑規劃

3.7 討論

利用關節架構空間障礙曲面來描述機械手的路徑軌跡較為容易，且其路徑對映在卡氏座標中是具有唯一性，在控制上也較簡單，以上述的幾個範例說明及驗證，此法所得到的結果是一個很有效率的路徑軌跡，雖然整體來看全部的距離總合並不一定是最短，但在局部範圍內其每一階段的距離是最短的。在架構空間中由起點至目標點之途徑有很多，此法提供了一個快速且簡易的路徑規劃方法。以網格理論而言在空間中會造成碰撞的點集合遠較不會碰撞的點集合來得少，此法以分析碰撞點來替代可通行點，因此計算時間要節省許多，此法不只可運用在三軸機械手臂之路徑規劃，亦可使用在其他領域之路徑規劃。