

第四章 封閉式多面體與規則曲面之路徑規劃

應用布魯霍斯法則來獲得介於多面體模型上兩點間之可通行路徑，布魯霍斯法則不但可掌握資料結構並可計算所有可通行之路徑，由起點至目標點所有被最短路徑通過之邊界轉折點均能獲得，此法在結構性方面位於三維空間的可通行平面，在可封閉式多面體之路徑規劃流程係 1.將多面體之線性邊界編號並依序建立。2.任意指定起點與終點位置。3.產生由起點至終點可能經過路線性邊界組合之布魯霍斯方程式。4.經 IMSL 軟體計算各方程式之變數值並獲得邊界轉折點座標。5.連接起點、邊界轉折點與終點而得各種可能路徑之總長度。6.自動比較路徑長度大小並獲得最短路徑之軌跡。

4.1 布魯霍斯法則

在八個頂點座標如圖 4.1 所示 $A(8,0,3), B(8,8,3), H(0,8,3), G(0,0,3), E(8,0,-3), F(8,8,-3), J(0,8,-3), I(0,0,-3)$ 之六面體上任意兩點 P_S 至 P_G 之間規劃最短路徑。

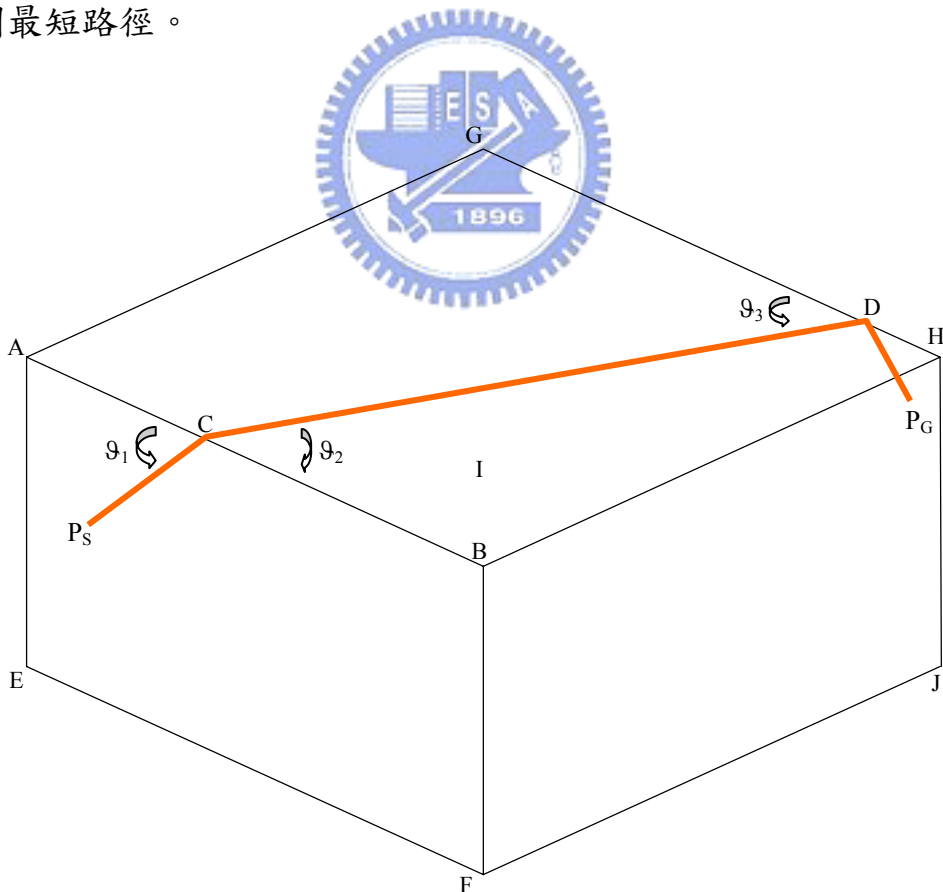


圖 4.1 轉折點 C 與 D 位於共用的邊界上

使用布魯霍斯法則需要滿足一個必要條件即是入角度 θ_1 要等於出角度 θ_2 ，這裡所謂的入角度 θ_1 即是如圖 4.1 所示($=\angle P_S CA$)，而出角度 θ_2 如圖 4.1 所示($=\angle BCD$)，相同的也要滿足入角度 θ_3 ($\angle CDG$)等於出角度 θ_4 ($\angle HDP_G$)。

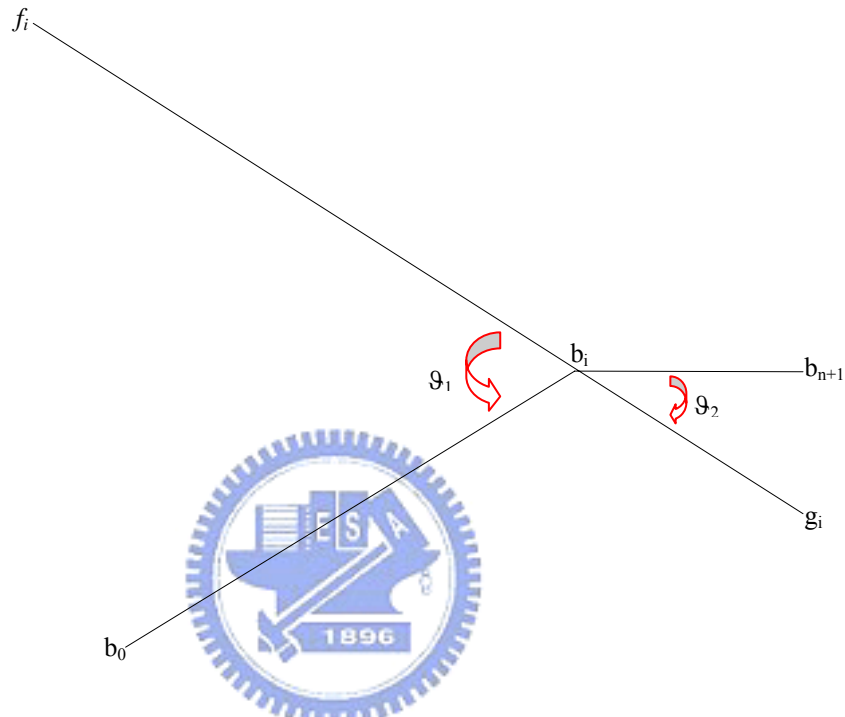


圖 4.2 在轉折邊界上入角度 θ_1 等於出角度 θ_2

布魯霍斯法則提出以邊界方程式($\mathbf{b}_i = \mathbf{f}_i + x_i(\mathbf{g}_i - \mathbf{f}_i)$)來計算線性線段上之邊界轉折點位置如圖 4.2 所示。此式中 \mathbf{f}_i 被定位在轉折點 \mathbf{b}_i 之左側，而 \mathbf{g}_i 被定位在轉折點 \mathbf{b}_i 之右側，其中 x_i 是轉折點 \mathbf{b}_i 位置之比例參數，以每個邊界之入角度皆等於其出角度，亦即 $\frac{\mathbf{b}_{(i+1)}\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{u}_i}{|\mathbf{b}_{(i+1)}\mathbf{b}_i|} = \frac{\mathbf{b}_{(i-1)}\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{u}_i}{|\mathbf{b}_{(i-1)}\mathbf{b}_i|}$ ，兩邊同時平方及移項得 $(\mathbf{b}_{(i+1)}\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{u}_i)^2 - (\mathbf{b}_{(i-1)}\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{u}_i)^2 = 0$ 則所有的布魯霍斯方程式即可被推導出來，並稱之為 Q_i ，如由起點至目標點之路徑通過 i 個共用的邊界線段，這裡的 $i = 0 \dots n$ 。因此有 n 個非線性方程式包含著 n 個未知數如(4.1)式：

$$Q_i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = 0; 1 < i < n. \quad (4.1)$$

在方程式(4.1)中有三個特性：第一個特性是每個方程式皆是四階

的方程式(由入角度等於出角度與單位向量 $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i \mathbf{g}_i / d(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i)$ 之叉積(Cross)後並刪除平方根以上的項目), 第二個特性是多項式 Q_i , $1 < i < n$ 是獨立至多三變數, 稱為 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , 第三個特性是 Q_1 與 Q_n 兩項只有兩個未知數, 因為 b_0 與 b_{n+1} 是兩個已知的點。

因此可得到 n 個未知之 n 個獨立方程式, 每個邊界轉折方程式皆是最多三變數之四階方程式如(4.1)所示。從平面 ABFE 上點 P_S 至平面 GHIJ 上點 P_G 有兩個相交的邊界如圖 4.1 所示, 因此在此範例中可得到兩個四次二變數的方程式和兩個線性方程式 $\mathbf{b}_i = \mathbf{f}_i + x_i(\mathbf{g}_i - \mathbf{f}_i)$, 這裡的 $i = 0 \dots n$, 由(4.1)來求得參數 x_i 進而獲得轉折點 \mathbf{b}_i , 如圖 4.1 中所示交點 C 即是在線 AB 上之轉折點 \mathbf{b}_1 , D 即是在線 GH 上之轉折點 \mathbf{b}_2 , 而從點 P_S 到點 P_G 沿著多面體表面上之最短路徑即是 $P_S C + CD + P_G D$ 。

然而布魯霍斯法則須從 n 個四階非線性方程式推導其值然後再從各組解之中求取最佳的一組解, 解非線性軟體可從 n 個四階非線性方程式推導其所有之邊界轉折點並計算出最佳之解, 因此所有的邊界轉折點即可自動獲得, 連同最短路徑也可藉由連接起點與所有邊界轉折點和目標點而獲得。最後在 CAD 系統自動地劃出該多面體及由起點至目標點之最短路徑如圖 4.1 所示。

在圖 4.1 之範例中起點是 $P_S(8.0, 1.0, -1.0)$ 終點是 $P_G(0.0, 7.0, 2.0)$, 其中經過兩個轉折邊界 AB(由頂點 $8.0, 0.0, 3.0$ 與頂點 $8.0, 8.0, 3.0$ 所連接的線段)與 GH(由頂點 $0.0, 0.0, 3.0$ 與頂點 $0.0, 8.0, 3.0$ 所連接的線段), 因為通過兩個轉折邊界將產生兩個方程式, 因此由(4.1)之電腦程式來獲得兩個布魯霍斯方程式 Q_1 與 Q_2 。

$$Q_1 = 64 - 1024 * x[0] + 2048 * x[1] * x[0] - 1024 * x[1] * x[1] + 3072 * x[0] * x[0];$$

$$Q_2 = -3136 + 7168 * x[1] - 128 * x[1] * x[0] - 4032 * x[1] * x[1] + 64 * x[0] * x[0];$$

利用解非線性軟體可從上述兩個非線性方程式中推導其最佳之解, $x[0] = 0.35577$ 與 $x[1] = 0.81731$ 。然後分別代入線性的直線方程式 $\mathbf{P}_i = \mathbf{f}_i + x_i(\mathbf{g}_i - \mathbf{f}_i)$ 中即可得到兩個邊界轉折點 $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_{1x}, \mathbf{P}_{1y}, \mathbf{P}_{1z})$ 與 $\mathbf{P}_2(\mathbf{P}_{2x}, \mathbf{P}_{2y}, \mathbf{P}_{2z})$ 。

$$\mathbf{P}_{1x} = 8.0 + 0.35577(8.0 - 8.0) = 8.0$$

$$\mathbf{P}_{1y} = 0.0 + 0.35577(8.0 - 0.0) = 2.84615$$

$$\mathbf{P}_{1z} = 3.0 + 0.35577(3.0 - 3.0) = 3.0$$

$$\mathbf{P}_{2x} = 0.0 + 0.81731(0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$P_{2y} = 0.0 + 0.81731 (8.0 - 0.0) = 6.53846$$

$$P_{2z} = 3.0 + 0.81731 (3.0 - 3.0) = 3.0$$

$$P_S P_1 = ((8.0 - 8.0)^2 + (1.0 - 2.84615)^2 + (-1 - 3.0)^2)^{1/2} = 4.40548$$

$$P_1 P_2 = ((8.0 - 0.0)^2 + (2.84615 - 6.53846)^2 + (3.0 - 3.0)^2)^{1/2} = 8.81097$$

$$P_2 P_G = ((0.0 - 0.0)^2 + (6.53846 - 7.0)^2 + (3.0 - 2.0)^2)^{1/2} = 1.10299$$

上述的計算過程結合 CAD 繪圖軟體與 ObjectARX 程式，以 C++ 語言當溝通介面，將布魯霍斯方程式與解非線性軟體的計算過程全部結合在 ObjectARX 程式內，從圖形的繪製至最短路徑的計算與繪製皆可自動的在 CAD 繪圖軟體內展現。

4.2 最短路徑

雖然在三維的多面體上由任意平面至另一平面有很多可通行之路徑，但最短距離仍只有一個，可通行之路徑和最短距離的大小將依環境限制不同而有所改變，例如在圓球上由球底至球頂之可通行路徑有很多，而其最短距離卻是唯一即所謂的直徑，如由球底到球頂之最短路徑須沿著球體表面，則仍然有很多之最短路徑即是半個圓週 (πr)，如起點與目標點非座落在球體的球底與球頂則最短路徑之數目可能減少許多，同樣的如起點與目標點分別座落在六面體之對稱平面中心上則將產生六個最短之路徑，當起點與目標點非座落在彼此對稱之位置時則最短路徑即可能只有一個，在同一平面上兩點間之最短路徑是一條筆直的線段，然而在多面體兩個不同平面上之最短路徑則可能是由很多的線段所組成。另外在圓筒或圓錐形的表面上兩點間之最短路徑可由圓筒或圓錐形展開平面上求得而不會失真。然而在圓球、雕刻曲面或其他更複雜之模型直接對映在展開平面即將造成部份失真，因此處理形狀複雜之物件須以多面體來替代以獲得被最短路徑所通過之邊界轉折點。

4.3 範例說明：

經由布魯霍斯法則與解非線性軟體來獲得所有被最短路徑通過之邊界轉折點，結合 CAD 軟體並以 ObjectARX 語言來當界面自動在多面體上繪製最短路徑，在程式中只需要輸入多面體的頂點座標與起點 P_S 和目標點 P_G 的座標即可自動地由資料庫之相對映關係計算並自動繪製多面體上兩點之最短路徑。

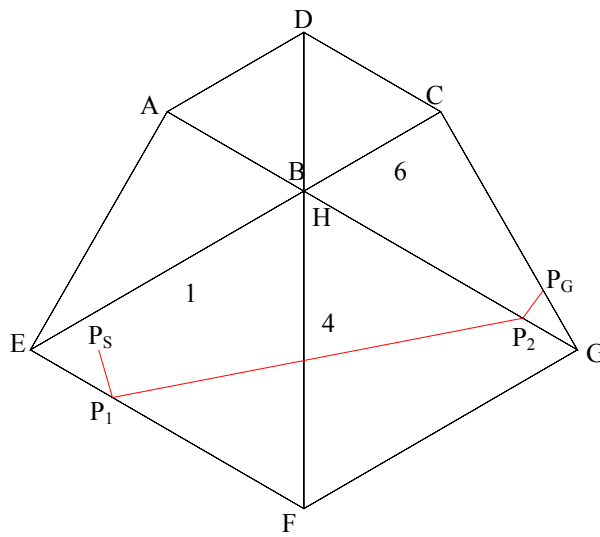


圖 4.3 由 P_S 到 P_G 之最短路徑通過 1、4 和 6 三個平面

如在四歪斜面頂點座標 $A(6,2,3), B(6,6,3), C(2,6,3), D(2,2,3), E(8,0,-3), F(8,8,-3), G(0,8,-3), H(0,0,-3)$ 之六面體上從點 $P_S(8.0, 2.0, -2.0)$ 到點 $P_G(0.0, 7.0, -2.0)$ 之最短路徑通過三個平面(平面 1、4 和 6)和兩個邊界(線段 EF 和 HG)如圖 4.3 所示。因此可由(4.1)來獲得兩個布魯霍斯方程式 Q_1 與 Q_2 。

$$Q_1 = 255.2048 * x[0] + 128 * x[1] * x[0] - 64 * x[1] * x[1] + 4032 * x[0] * x[0];$$

$$Q_2 = -3136 + 7168 * x[1] - 128 * x[1] * x[0] - 4032 * x[1] * x[1] + 64 * x[0] * x[0];$$

利用上述的方法得到 $x[0]=0.3125, x[1]=0.8125$, 可滿足方程式為 0。本例之最短路徑 $P_S P_1 + P_1 P_2 + P_2 P_G$, 其中 P_1 的座標為 $(8.0, 2.5, -3.0)$, P_2 的座標為 $(0.0, 6.5, -3.0)$ 。驗證其入角度與出角度則 $\theta_1 = 63.43495, \theta_2 = 63.43495, \theta_3 = 63.43495, \theta_4 = 63.43495$ 度, 換算其距離 $d_1 = 1.11803, d_2 = 8.94427, d_3 = 1.11803$, 所以最短距離的總合 $= d_1 + d_2 + d_3 = 11.18034$ 。

4.4 規則曲面之最短路徑

4.4.1 起點與終點均座落在圓柱表面上之路徑

以起點與終點均座落在圓柱表面上為條件, 求取通過該兩點在圓柱表面上之最短路徑, 假設圓柱上的第一個圓心是 $C_1(1.0, 1.0, 1.0)$, 其半徑是 $R_1 = R_2 = 2$, 第二個圓心是 $C_2(7.0, 1.0, 1.0)$, 而起點與終點之位置分別設置為 $P_S(1.0, 2.59727, 2.20363)$ 與 $P_G(7.0, -0.46271, 2.364)$ 。

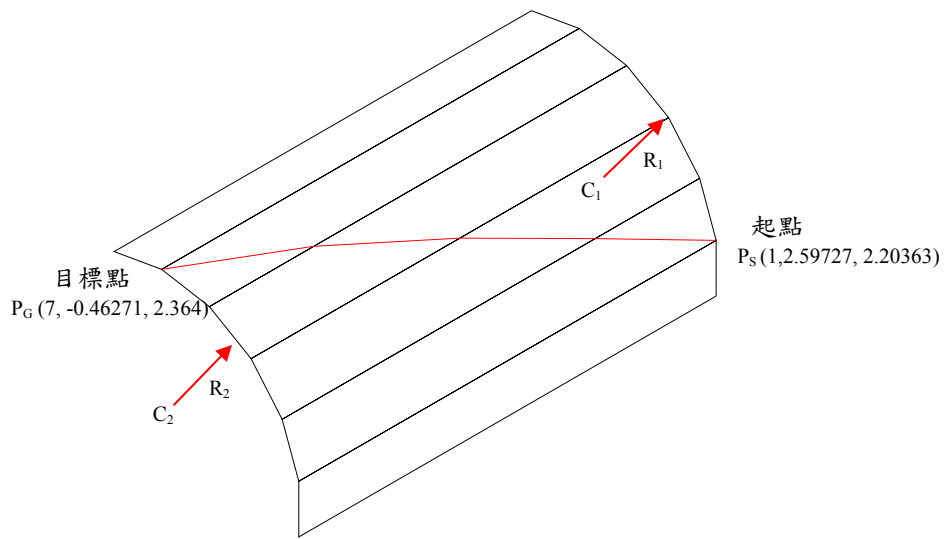


圖 4.4 在圓柱分割成 18 等份由起點至終點之最短路徑

在圖 4.4 中由起點至終點之最短路徑它通過 5 個邊界轉折點，然後連接起點、所有邊界轉折點、與終點即可得其最短路徑之距離為 6.61206cm。圖 4.5 將圓柱分割成 75 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 21 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.87189 cm。圖 4.6 將圓錐分割成 100 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 28 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.89261 cm。在此範例中邊界轉折點的數量較上例多，且最短距離也同樣增加，其值較上例更接近真實圓柱經展開後所求得之結果，由此可見欲得愈準確的結果其分割數就得愈多。

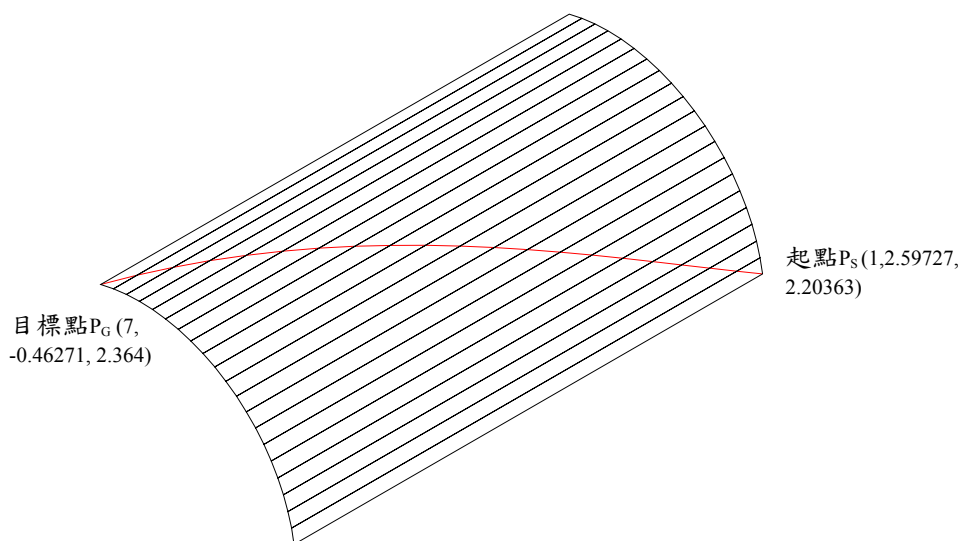


圖 4.5 在圓柱分割成 75 等份由起點至終點之最短路徑

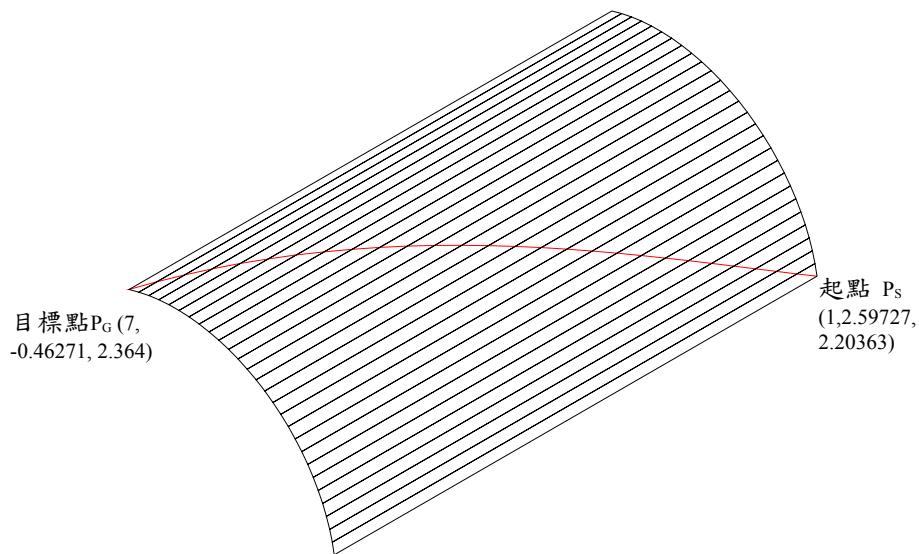


圖 4.6 在圓柱分割成 100 等份由起點至終點之最短路徑

在圖 4.7 之中將圓柱分割成 200 等份，由起點至終點之最短路徑它通過 56 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.92396 cm。在圖 4.8 之中將圓柱分割成 360 等份，由起點至終點之最短路徑它通過 100 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.92402cm。

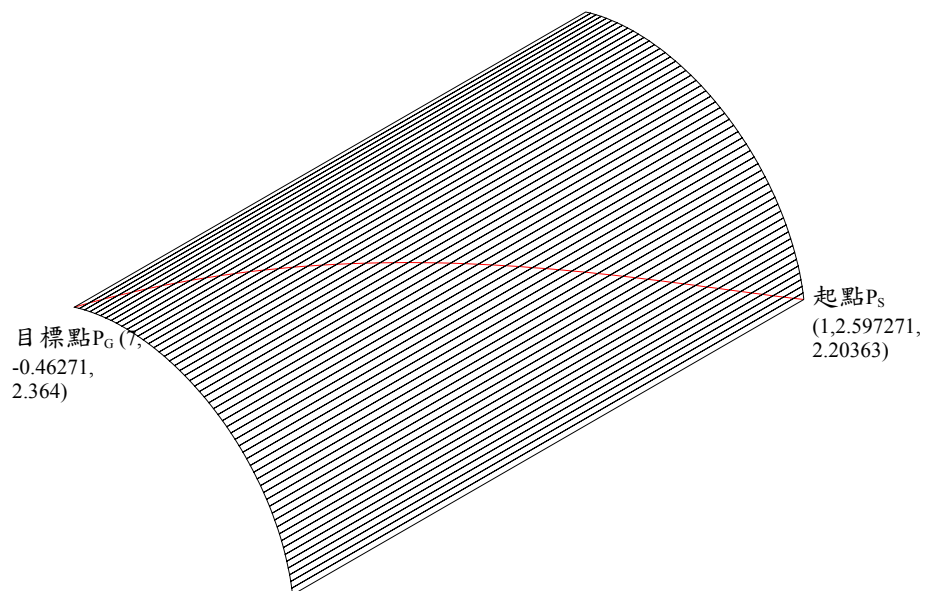


圖 4.7 在圓柱分割成 200 等份由起點至終點之最短路徑

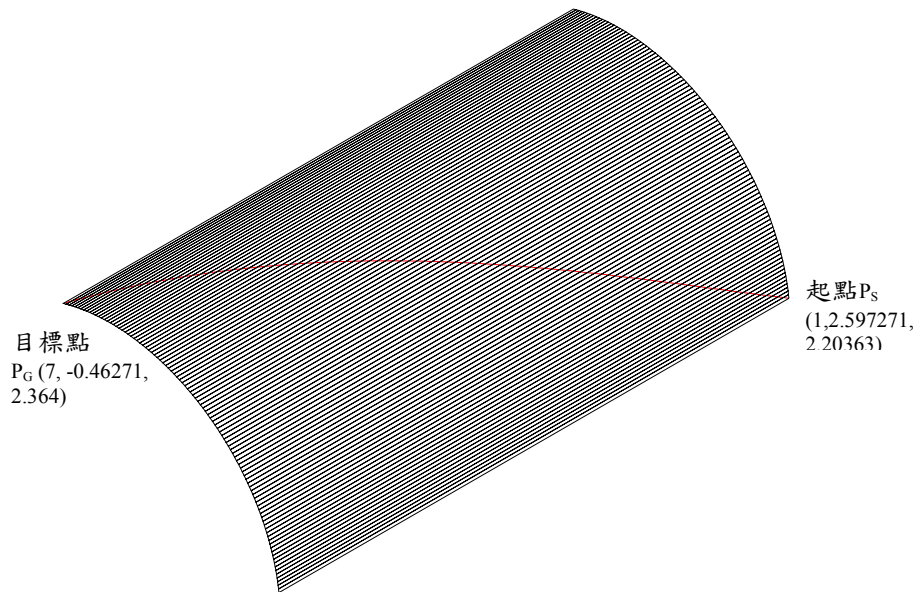


圖 4.8 在圓柱分割成 360 等份由起點至終點之最短路徑

在展開平面上求取之最短路徑計算解為 6.92608cm，因此整合計算解與上述範例的結果如表 4.1 所示，在表 4.1 中上述範例經過計算所求得的结果是分割成 360 等份者最大，可看出一個趨勢：分割的數量愈多則其路徑之距離總值愈大，而且其值愈接近真實之最短路徑，經過計算所求得的结果是最大，因為弧長總比弦長大的緣故。

表 4.1 在圓柱上計算結果與不同等份所求得之結果

分割數	18	24	45	75
路徑長度	6.61206	6.76856	6.87104	6.87189
分割數	100	150	200	360
路徑長度	6.89261	6.91348	6.92396	6.92402
真實圓柱長度	6.92608			

4.4.2 起點與終點均座落在圓錐表面上之路徑

以在圓錐上求取兩點間之最短路徑為例來說明，假設圓錐上的第一個圓心 $C_1(1.0,1.0,1.0)$ ，半徑是 $R_1=2$ ，第二個圓心 $C_2(7.0,1.0,1.0)$ ，其半徑 $R_2=1$ ，起點之位置 $P_s(1.0,2.59727,2.20363)$ 較靠近第一個圓錐底、終點之位置 $P_G(7.0,-0.46271,2.364)$ 較靠近圓錐頂，在圓錐的表面上以不同的分割數來觀察其最短路徑的變化，圖 4.9 將圓錐分割成 18 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 5 個邊界轉折點，這些邊界轉折點都會在最短路徑的軌跡上，連接起點、邊界轉折點與終點即可得其最短路徑之距離為 6.35160 cm。

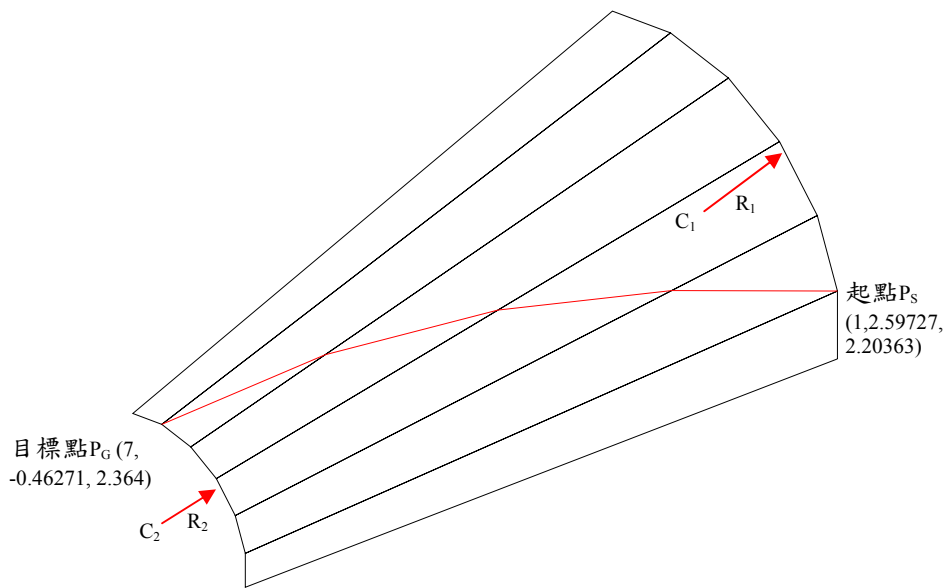


圖 4.9 在圓錐分割成 18 等份由起點至終點之最短路徑

企圖增加其分割數來觀察其最短路徑軌跡的變化，圖 4.10 將圓錐分割成 75 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 21 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.50991 cm。圖 4.11 將圓錐分割成 100 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 28 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.52247 cm。

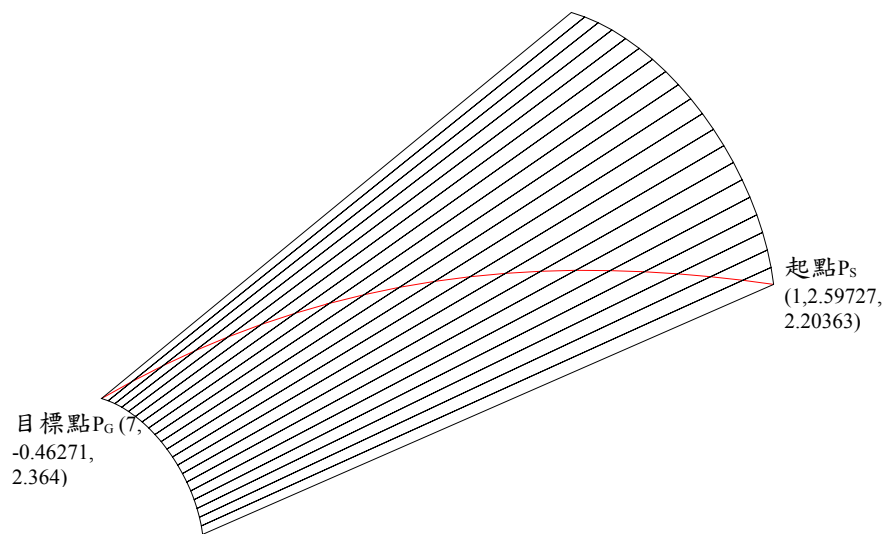


圖 4.10 在圓錐分割成 75 等份由起點至終點之最短路徑

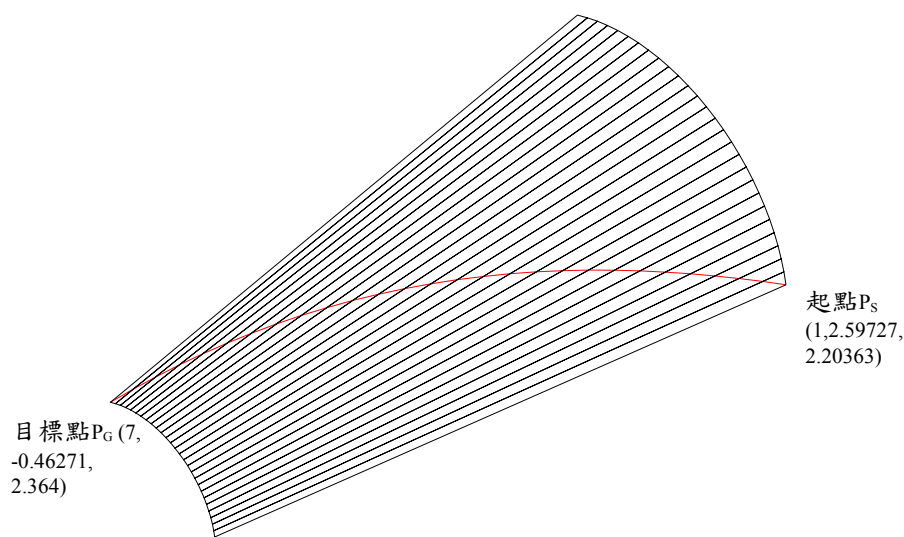


圖 4.11 在圓錐分割成 100 等份由起點至終點之最短路徑

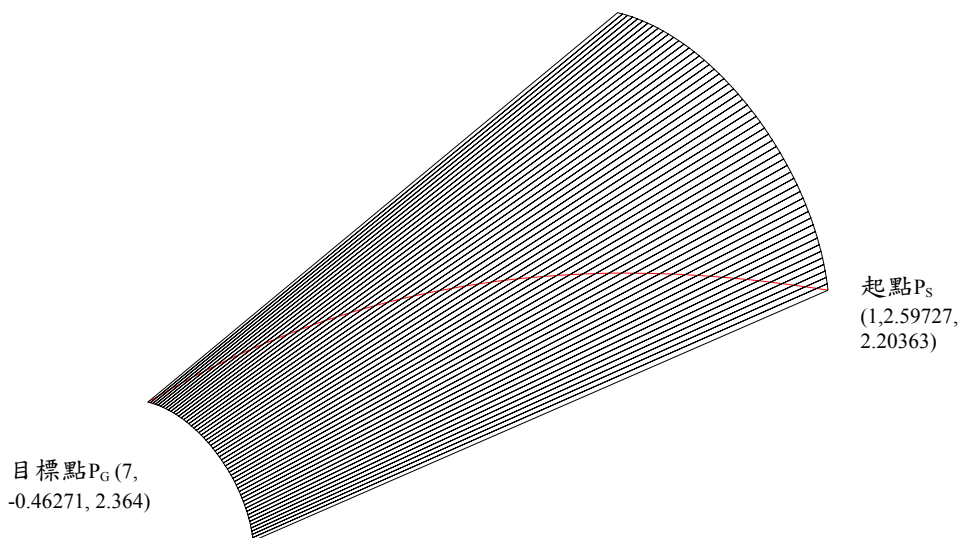


圖 4.12 在圓錐分割成 200 等份由起點至終點之最短路徑

在圖 4.12 之中將圓錐分割成 200 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 56 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.54144 cm。在圖 4.13 之中將圓錐分割成 360 等份，則由起點至終點之最短路徑它通過 100 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 6.54148 cm。

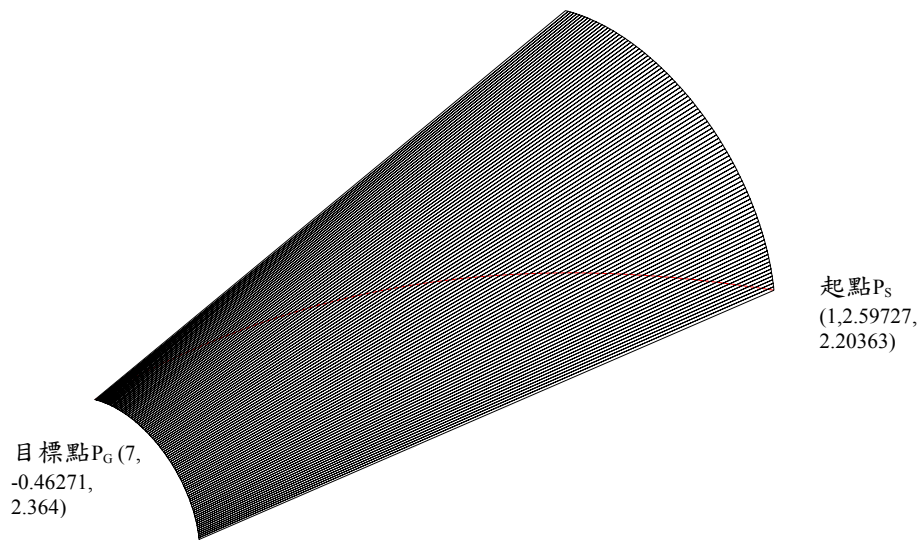


圖 4.13 在圓錐分割成 360 等份由起點至終點之最短路徑

在展開平面上計算所得最短路徑的值為 6.54391cm，因此整合計算所得的值與上述範例的結果如表 4.2 所示，在表 4.2 中上述範例經過計算所求得的结果是分割成 360 等份者最大，可看出一個趨勢：分割的數量愈多則其路徑之距離總值愈大，而且其值愈接近計算所得的價值，經過計算所求得的结果是最大，因為弧長總比弦長大的緣故。

表 4.2 在圓錐上計算結果與不同等份所求得之結果

分割數	18	24	45	75
路徑長度	6.35160	6.44636	6.50910	6.50991
分割數	100	150	200	360
路徑長度	6.52247	6.53510	6.54144	6.54148
真實圓錐長度	6.54310			

4.4.3 起點與終點均座落在圓柱表面外之路徑

先前提及起點與終點均座落在模型的表面上，本節敘述在模型外面的兩個已知點當成起點與終點，由起點出發繞過模型表面後抵達終點，如何得知其最短路線會通過模型表面上的哪些位置？將起點、終點分別座落在模型的兩側，以圓柱的形狀當成模型的輪廓，然後計算由起點至終點越過模型表面之最短距離，首先分別求出起點與終點與

圓柱的切角度，將第一個切點至第二個切點間之圓柱表面分割成若干的等份之可展開成平面之多面體，以前面章節所敘述的圓柱與圓錐為例，將原來的起點座標位置(1,2.59727,2.20363)移至新的座標位置(1,5,-1)，而原來的終點座標位置(7,-0.46271,2.364)移至新的座標位置(7,-3,-1)，新的起點與終點均座落在同一個平面上($z=-1$)，因為由起點至終點的路徑方向是已知，而路徑的纏繞方式也是已知(只能往圓柱的表面上方繞)，再利用平面展開法求出通過所有可展開成平面之多面體上的邊界轉折點，連接起點、邊界轉折點與終點即可求出有效率之最短路徑。

如圖 4.14 與圖 4.15 等欲尋找由起點避開圓柱模型至終點之最短路徑，首先分別求出圓柱與通過起點與終點的切角度，其中入角度為 θ_1 而出角度為 θ_2 ，由圓柱中心之水平線連接至圓柱上第一個轉折邊界所經過的角度即入角度 θ_1 ，而由圓柱中心之水平線連接至圓柱上最後的轉折邊界之角度即出角度 θ_2 ，轉折邊界的數量隨著圓柱的分割數量增加而增多，圓柱的分割數量決定之後，轉折邊界的數量即為已知，再利用平面展開法來計算所有被最短路徑通過的邊界轉折點，結合起點、邊界轉折點與終點的總合即由起點至終點之最短路徑。

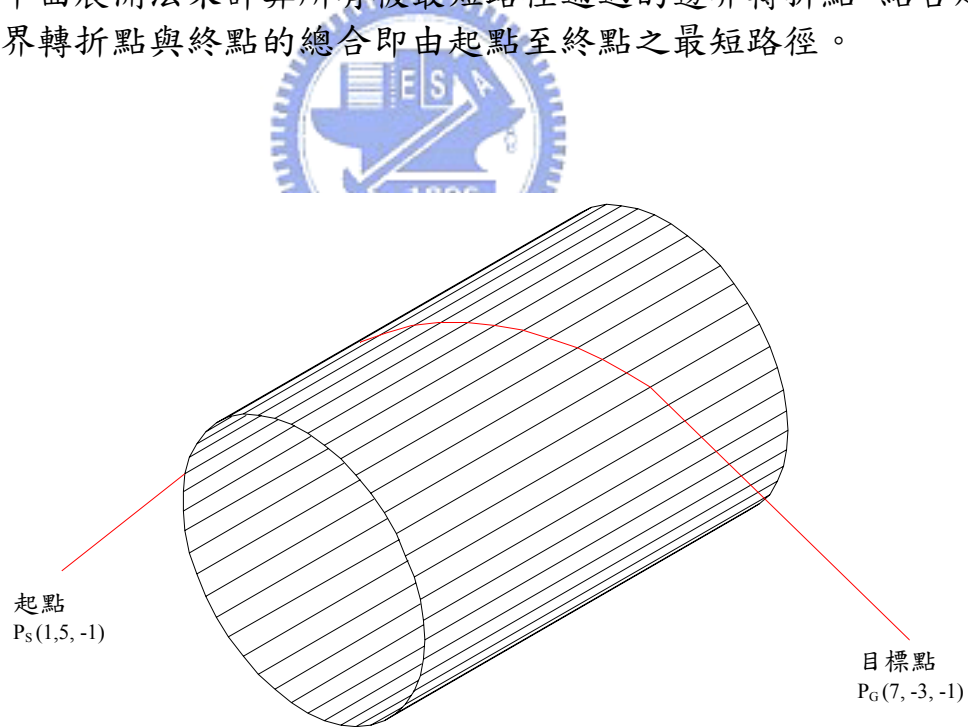


圖 4.14 由起點 P_S 通過圓柱多面體至終點 P_G 之最短路徑

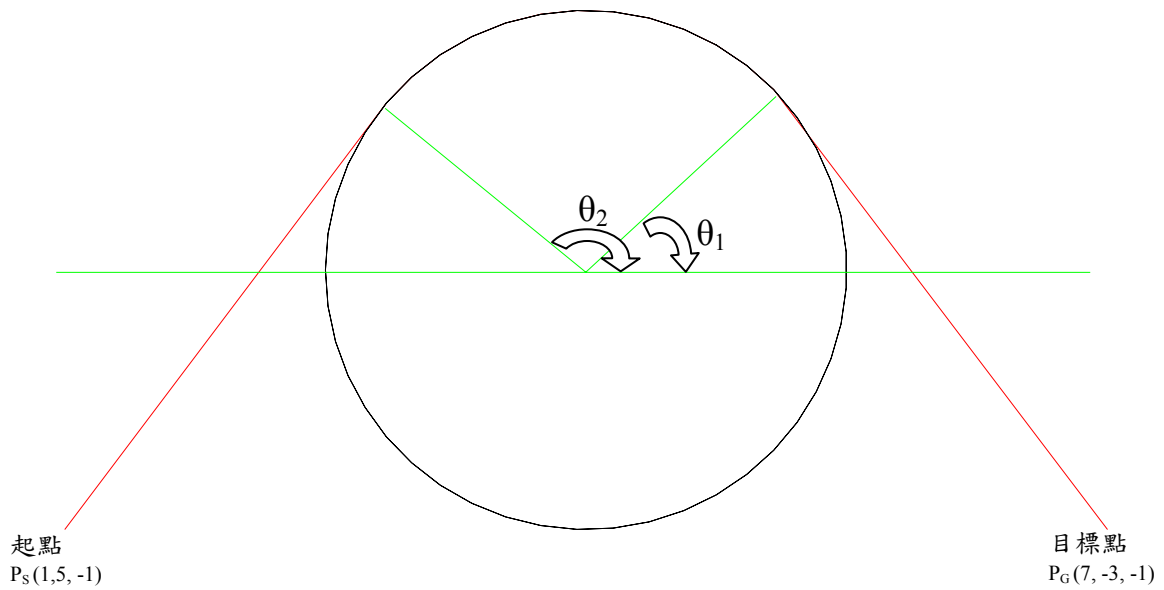


圖 4.15 由起點 P_S 通過圓柱多面體至終點 P_G 路徑之端視圖

由上述可知起點與終點在圓柱以外與在圓柱表面上之差異，只是多了二個計算步驟：其一是求出圓柱與通過起點與終點的切平面，其二是計算該兩切平面與圓柱的角度入角度 θ_1 與出角度 θ_2 ，連接該兩切平面與在兩角度間之圓柱分割表面，其餘計算過程與起點與終點均座落在圓柱多面體上的計算過程完全相同。

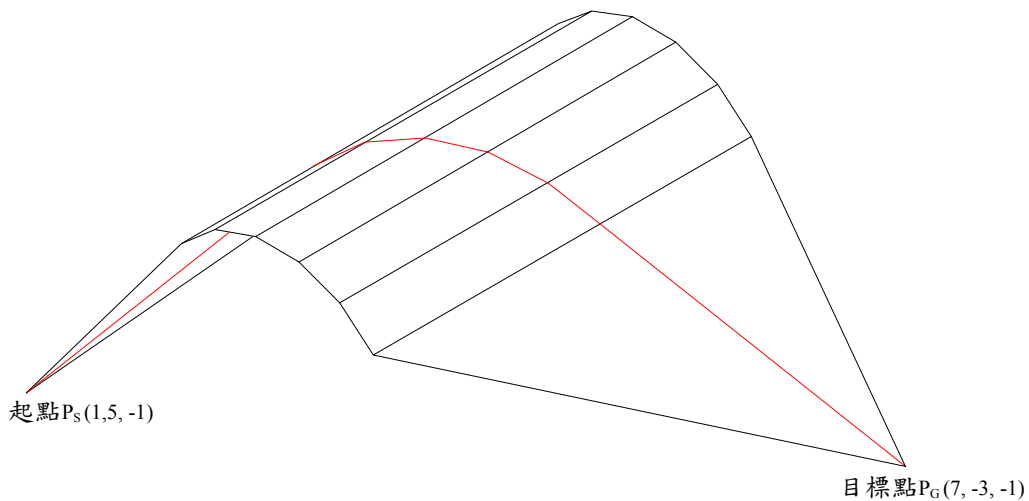


圖 4.16 加入切平面分割成 18 等份由 P_S 至 P_G 之最短路徑

將圓柱分割成各種不同數量來觀察其路徑的變化，首先如圖 4.16 所示將圓柱分割成 18 個等份，由起點 P_S 至終點 P_G 之最短路徑通過 6

個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 13.14275cm。

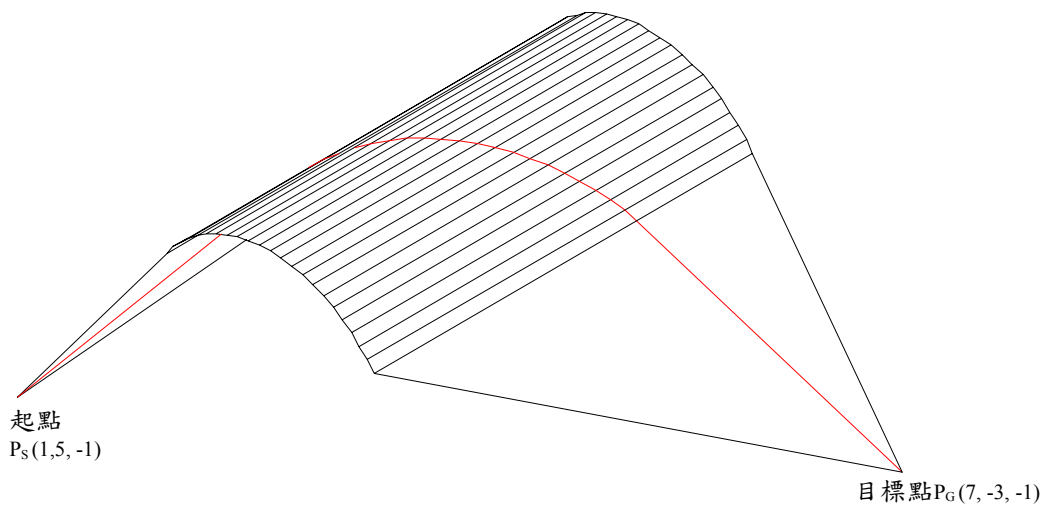


圖 4.17 加入切平面分割成 75 等份由 P_S 至 P_G 之最短路徑

在圖 4.17 之中將圓柱分割成 75 個等份，由起點 P_S 至終點 P_G 之最短路徑通過 23 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 13.17923cm。

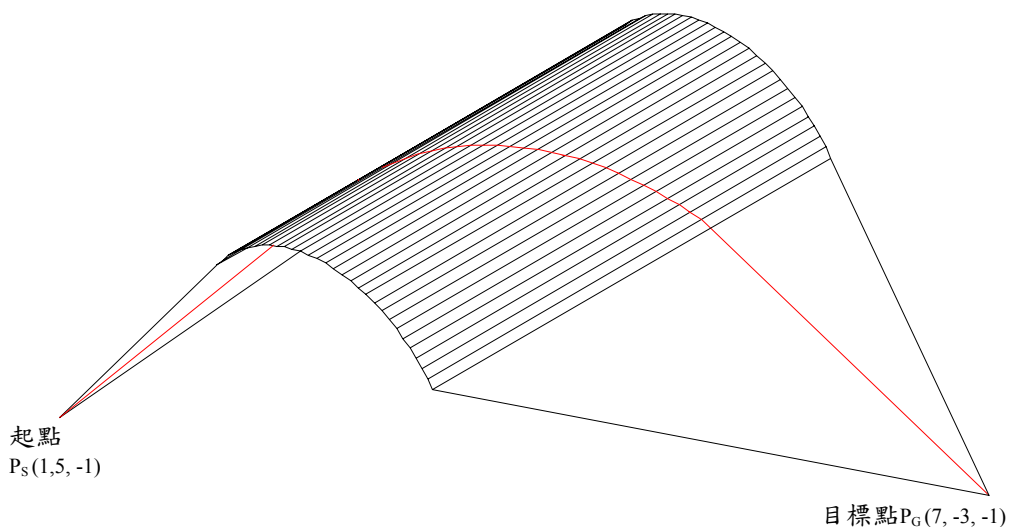


圖 4.18 加入切平面分割成 100 等份由 P_S 至 P_G 之最短路徑

在圖 4.18 之中將圓柱分割成 100 個等份，由起點 P_S 至終點 P_G 之最短路徑通過 31 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終

點則可得其最短路徑之距離為 13.18614cm。

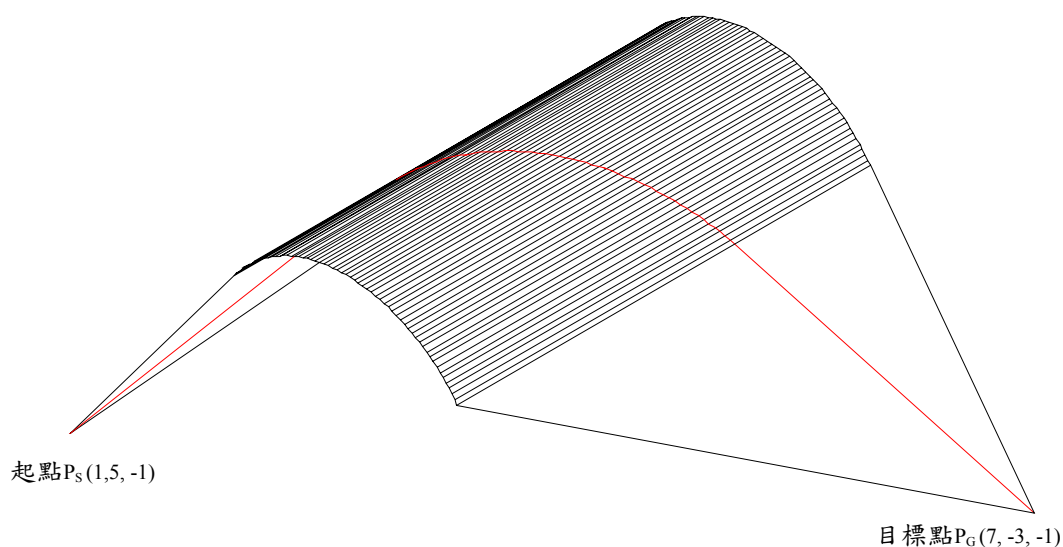


圖 4.19 加入切平面分割成 200 等份由P_S至P_G之最短路徑

在圖 4.19 之中將圓柱分割成 200 個等份，由起點P_S至終點P_G之最短路徑通過 61 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 13.19025cm。同理在圖 4.20 之中將圓柱分割成 360 個等份，由起點P_S至終點P_G之最短路徑通過 100 個邊界轉折點，連接起點、所有邊界轉折點、與終點則可得其最短路徑之距離為 13.19163cm。

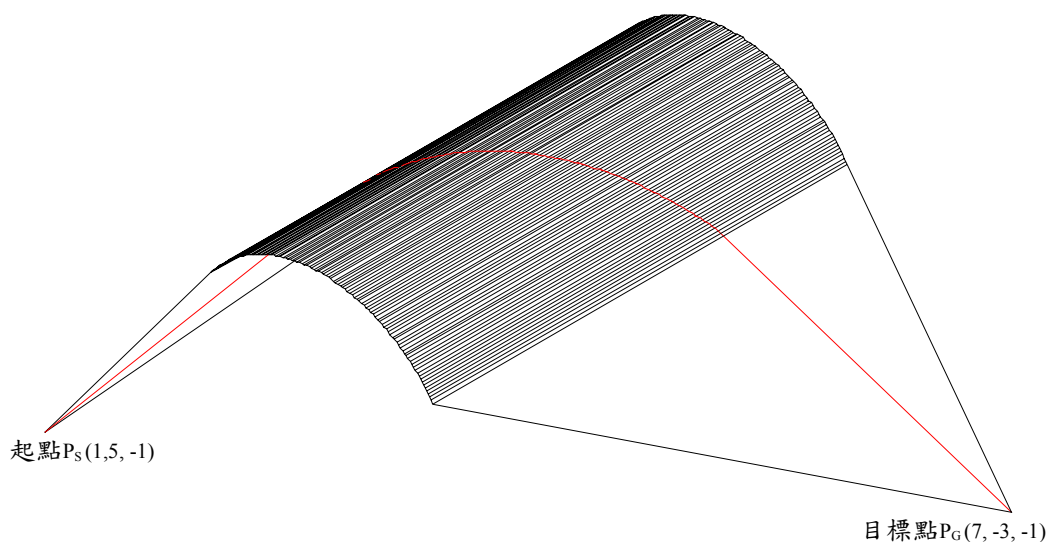


圖 4.20 加入切平面分割成 360 等份由P_S至P_G之最短路徑

在上述範例中連接圓柱上所有轉折點與起點及終點所得之最短路徑在展開平面計算其值為 13.19356cm，因此整合計算所得的值與上述範例的結果如表 4.3 所示，在表 4.3 中上述範例經過計算所求得的結果是分割成 360 等份者最大，可看出一個趨勢：分割的數量愈多則其路徑之距離總值愈大，而且其值愈接近計算所得的值值，經過計算所求得的結果是最大，因為弧長總比弦長大的緣故。

表 4.3 起點與終點不在圓柱表面上之最短距離

分割數	18	24	45	75
路徑長度	13.14275	13.14713	13.16099	13.17923
分割數	100	150	200	360
路徑長度	13.18614	13.18820	13.19025	13.19163
在真實圓柱表面上之長度	13.19356			

4.4.4 起點與終點均座落在圓錐表面外之路徑

假設圓錐上錐底的圓心是 $C_1(1.0,1.0,1.0)$ ，其半徑是 $R_1=2\text{cm}$ ，而錐頂的圓心是 $C_2(7.0,1.0,1.0)$ ，其半徑是 $R_2=1\text{cm}$ ，起點之位置 $P_S(1.0,5.0,-1.0)$ 較靠近第一個圓錐頂、終點之位置 $P_G(7.0,-3.0,-1.0)$ 較靠近圓錐底，同樣的，起點與終點之位置都不在圓錐的表面上如圖 4.21 所示，在圓錐的表面上以不同的分割數來觀察其最短路徑的變化，圖 4.22 將圓錐分割成 18 等份，在圓錐表面上有五個邊界轉折點被最短路徑所通過，連接起點、所有的邊界轉折點與終點，即可獲得最短路徑之距離為 12.30745cm。

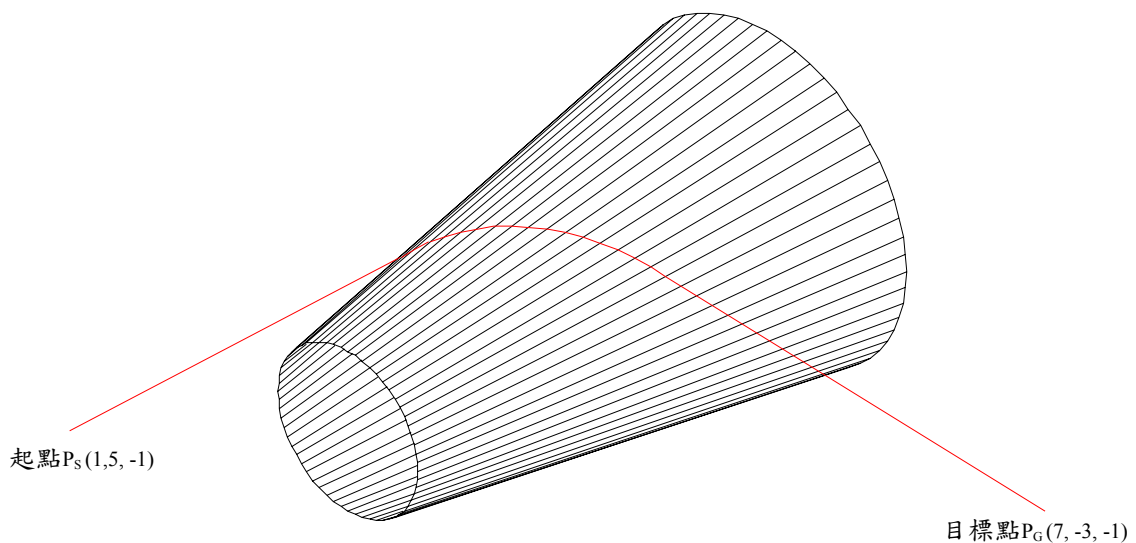


圖 4.21 由起點 P_S 通過圓錐多面體至終點 P_G 之最短路徑

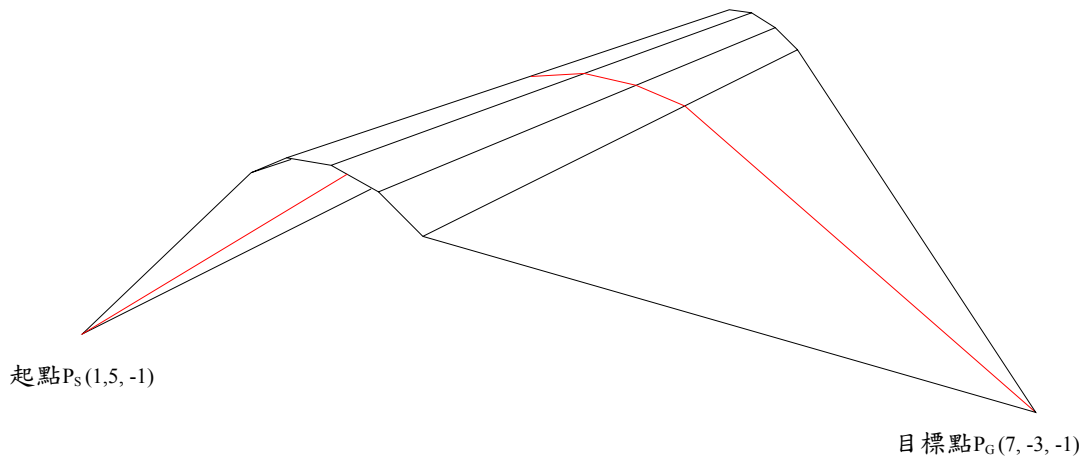


圖 4.22 計算分割成 18 等份圓錐由 P_S 至 P_G 之最短路徑

在圖 4.23 之中將圓錐分割成 75 等份，在圓錐表面上有 20 個邊界轉折點被最短路徑所通過，連接起點、所有的邊界轉折點與終點，即可獲得最短路徑之距離為 12.36472cm。圖 4.24 將圓錐分割成 100 等份，在圓錐表面上有 27 個邊界轉折點被最短路徑所通過，連接起點、所有的邊界轉折點與終點，即可獲得最短路徑之距離為 12.36891cm。

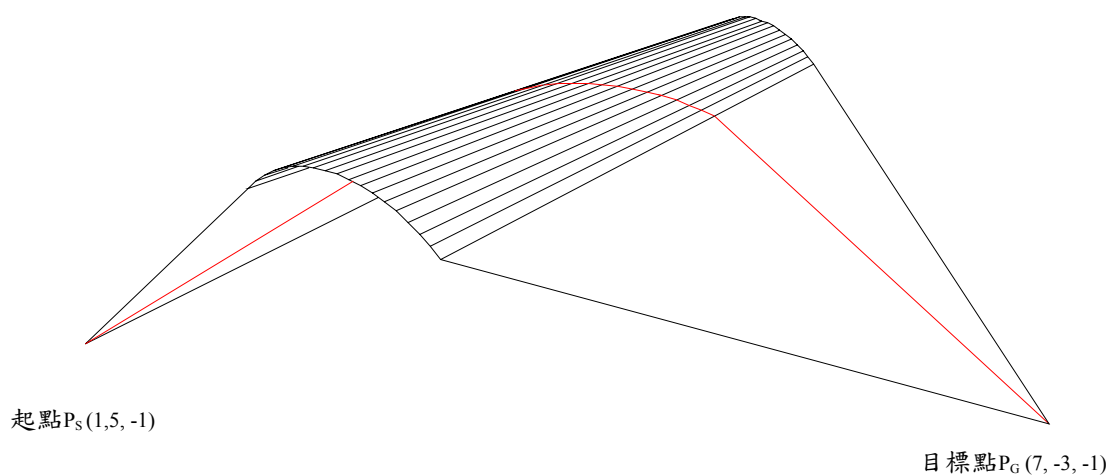


圖 4.23 計算分割成 75 等份圓錐由 P_S 至 P_G 之最短路徑

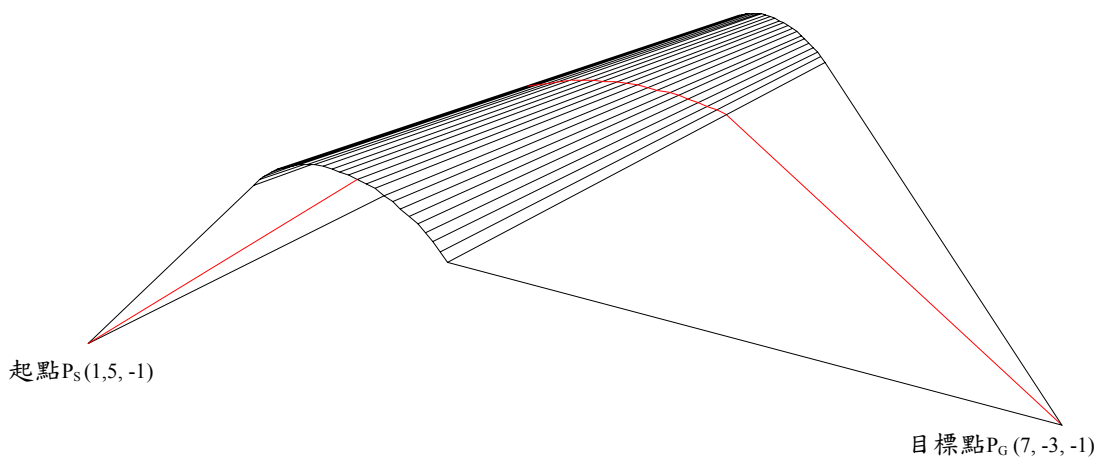


圖 4.24 計算分割成 100 等份圓錐由 P_S 至 P_G 之最短路徑

在圖 4.24 之中將圓錐分割成 200 等份，在圓錐表面上有 56 個邊界轉折點被最短路徑所通過，連接起點、所有的邊界轉折點與終點，即可獲得最短路徑之距離為 12.37153cm。同樣的，圖 4.25 將圓錐分割成 300 等份，在圓錐表面上有 93 個邊界轉折點被最短路徑所通過，連接起點、所有的邊界轉折點與終點，即可獲得最短路徑之距離為 12.37309cm。

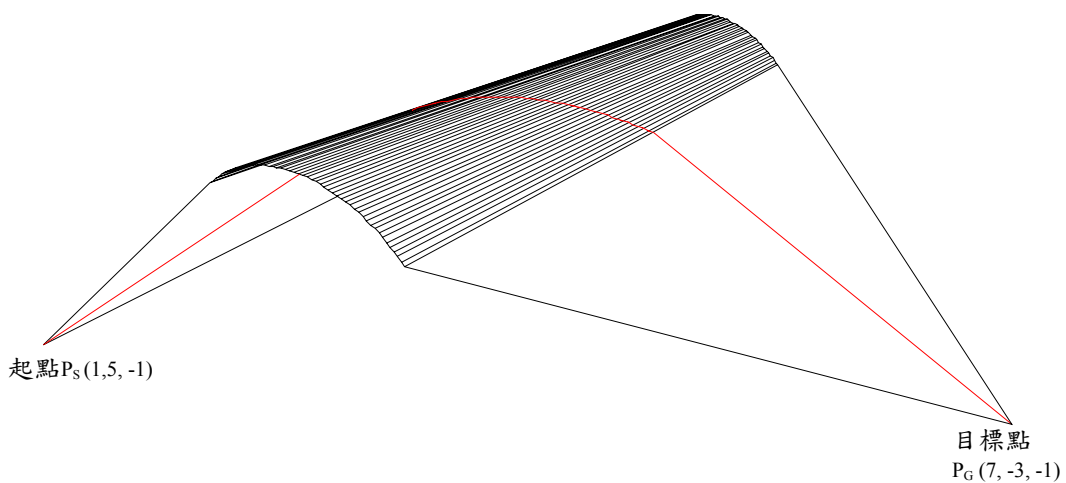


圖 4.25 計算分割成 200 等份圓錐由 P_S 至 P_G 之最短路徑

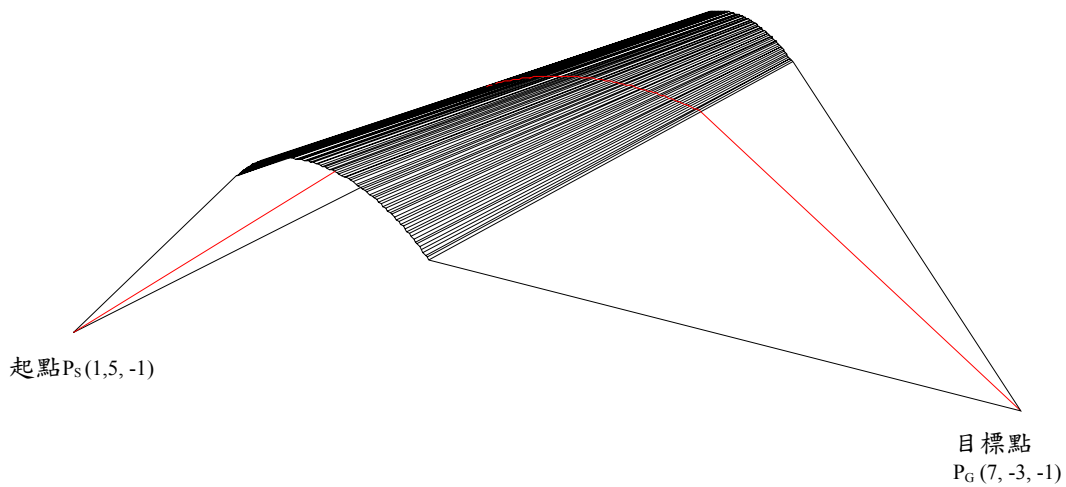


圖 4.26 計算分割成 360 等份圓錐由 P_S 至 P_G 之最短路徑

在上述範例中連接圓錐上所有轉折點與起點及終點所得之最短路徑在展開平面計算其值為 12.37502cm，因此整合計算所得的值與上述範例的結果如表 4.4 所示，在表 4.4 中上述範例經過計算所求得的结果是分割成 360 等份者最大，可看出一個趨勢：分割的數量愈多則其路徑之距離總值愈大，而且其值愈接近計算所得的值，經過計算所求得的结果是最大，因為弧長總比弦長大的緣故。

表 4.4 起點與終點不在圓錐表面上之最短距離

分割數	18	24	45	75
路徑長度	12.30745	12.32955	12.34384	12.36472
分割數	100	150	200	360
路徑長度	12.36891	12.37022	12.37153	12.37309
真實圓錐長度	12.37502			

不同的分割數將產生不同的結果，在上述的各種範例中其邊界轉折點之位置也不是固定，但可歸納成一個趨勢，當分割數增加時則邊界轉折點的分佈則向兩端擴散，相反的，當分割數減少時則邊界轉折點的分佈則向中間集中，這是一個很有趣的問題，因為在圓柱或圓錐上不同的平面分割數，其邊界轉折點之位置分佈就會不同，但其路徑的誤差值隨分割數的增加而減少，最後呈現出收斂的現象，在真正之最短路徑上每個邊界之入角度皆等於其出角度，但由起點與任意兩個邊界轉折點所建構成的平面，與由終點與任意兩個邊界轉折點所建構成的平面並非是共平面。

4.5 討論

本程式提出一個有效率的方法，呼叫一個檔案其包含多面體的頂點、起點與終點等資料，並透過 CAD 系統自動地計算並繪製多面體上由起點至終點之最短路徑，布魯霍斯法則結合解非線性軟體與 CAD 系統來建立一個自動搜尋最短路徑的模組，該模組能找出被最短路徑所通過之所有邊界轉折點。根據上述之結論當輸入不同的頂點、起點或終點時即可產生不同的結果，因此在計算過程需建立一個包含開始平面、目標平面與所有被最短路徑通過的發展平面，但如起點與終點座落在對稱之位置中心處將產生超過一個以上之最短路徑，然而如起點與終點非均座落於對稱平面之中心處時其最短路徑可能只有一個，從說明的範例結果可確認每個邊界之入角度與出角度皆相等與程式所獲得之最短路徑的精確度。

為了確認計算結果的正確度，以圖 4.3 來做驗證，以上述的方法所求得之解 P_1 的座標為(8.0,2.5,-3.0)， P_2 的座標為(0.0, 6.5, -3.0)，最短距離的總合 $d = d_1 + d_2 + d_3 = 11.18034$ 。現在選取在 P_1 點及 P_2 點的左右相鄰微量 0.005 單位的位置來做比較，則 P_{1-1} 的座標為(8.0,2.495,-3.0)， P_{1-2} 的座標為(8.0,2.505,-3.0)， P_{2-1} 的座標為(0.0, 6.495, -3.0)， P_{2-2} 的座標為(0.0, 6.505, -3.0)，而起點 P_S 的座標為(8.0,2.0,-2.0)，終點 P_G 的座標為(0.0,7.0,-2.0)，將各種可能之路徑計算並填入表 4.5 內，由表 4.5 即可驗證其正確性。

表 4.5 在最短路徑之微量相鄰的路徑比較

微量相鄰之路徑	距離總合	與最短路徑之誤差值
最短路徑	11.18034	0
$P_S P_{1-1} + P_{1-1} P_2 + P_2 P_G$	11.18035	0.00001
$P_S P_{1-1} + P_{1-1} P_{2-1} + P_{2-1} P_G$	11.18036	0.00002
$P_S P_{1-1} + P_{1-1} P_{2-2} + P_{2-2} P_G$	11.18036	0.00002
$P_S P_1 + P_1 P_{2-1} + P_{2-1} P_G$	11.18035	0.00001
$P_S P_1 + P_1 P_{2-2} + P_{2-2} P_G$	11.18035	0.00001
$P_S P_{1-2} + P_{1-2} P_2 + P_2 P_G$	11.18035	0.00001
$P_S P_{1-2} + P_{1-2} P_2 + P_2 P_G$	11.18036	0.00002
$P_S P_{1-2} + P_{1-2} P_2 + P_2 P_G$	11.18036	0.00002

以圖 4.3 的結果為例來討論一個很有趣的問題，起點 P_S 轉折點 P_1 及 P_2 與終點 P_G 是否全部皆座落於相同的平面上？已知三點可決定一個平面，因此本文將上述四個點分成四個組合來建構平面，並觀查這

四個平面是否共面。假定所有的邊界轉折點均在共平面上，只要獲得部份之邊界轉折點，則可建構該切平面，要計算其他的轉折點則非常容易，但經計算該四組之平面方程式後發現如表 4.6 所示，被最短不徑所通過的各邊界轉折點並不一定會全部在共平面上。

表 4.6 由不同點所組成之平面方程式來檢測是否共面

四種平面方程式	平面方程式	是否共面
$\mathbf{N}=\mathbf{P}_S\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_S\mathbf{P}_2$	$4x+8y+4z-40=0$	基準面
$\mathbf{N}=\mathbf{P}_S\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_S\mathbf{P}_G$	$5x+8y+4z-48=0$	非共面
$\mathbf{N}=\mathbf{P}_S\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_S\mathbf{P}_G$	$5x+8y-4z-64=0$	非共面
$\mathbf{N}=\mathbf{P}_G\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_G\mathbf{P}_2$	$4x+8y-4z-64=0$	非共面

