

國立交通大學

電機學院 電信學程

碩士論文

損耗性平面式 Marchand Balun 理論

Lossy Planar Marchand Balun Theory



研究生：趙宗茂

指導教授：孟慶宗 博士

中華民國九十六年一月

損耗性平面式 Marchand Balun 理論
Lossy Planar Marchand Balun Theory

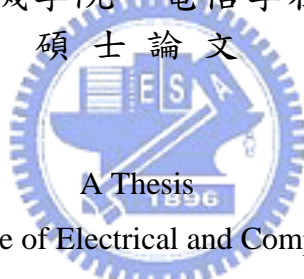
研究生：趙宗茂

Student : Tsung-Mao Chao

指導教授：孟慶宗

Advisor : Chin-Chun Meng

國立交通大學
電機學院 電信學程
碩士論文



Submitted to College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Communication Engineering

January 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年一月

損耗性平面式 Marchand Balun 理論

學生：趙宗茂

指導教授：孟慶宗 博士

國立交通大學 電機學院 電信學程碩士班

摘 要

本篇論文主要研究損耗性平面式 Marchand Balun 理論，建立起嚴格的理論分析，以便將該理論運用在目前 Si 製程，進一步整合數位電路邁向 SOC (system on chip)。

在分析過程中，剛開始用到傳輸線理論，然後耦合線理論最後利用耦合線理論推廣至損耗性平面式 Marchand Balun 理論。

論文中主要介紹兩種類型 Marchand Balun—類型一與類型四，其中類型一為目前最常用，也是用最久的類型，因為其完美匹配條件所需的耦合量約-4.8 dB，在 board 或 chip level 很容易做到。而類型四的完美匹配條件所需耦合量約-1.8 dB，這只有在 chip level 可以辦到，因為我們可以利用 IC 立體的特性，增加線圈的耦合量，此外它的操作頻寬也大於類型一。

既使類型一、類型四輸入阻抗不匹配、損耗性、傳輸線長度不等於中心頻率四分之一波長，它們皆可當成 Balun 使用。

Lossy Planar Marchand Balun Theory

student : Tsung-Mao Chao

Advisors : Dr. Chin-Chun Meng

Degree Program of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

A strict analysis of lossy planar Marchand Balun theory is presented in this paper. The theory can be used in the standard Si IC process, and integrated digital circuit to be a SOC (system on chip).

In the analysis process, the transmission and coupled theory are used then it can derive the lossy planar Marchand balun theory.

In the paper, we introduce, for the most part, two types of Marchand Baluns—Type I and Type IV. Until now, Type I is usually used because its coupling is just -4.8 dB in perfect matching condition. It is easy to implement in board level and chip level but Type IV can just implement in chip level because the coupling is -1.8 dB. We can utilize the IC 3D structure to enhance the coupling. Besides, Type IV has better band width than Type I.

Regardless of input mismatch, lossy circuits or transmission length doesn't equal quarter wavelength of operating frequency, Type I and Type IV can also be implemented as a Balun.

誌 謝

在此要感謝指導教授孟慶宗老師這幾年對我的指導，以及郭仁財教授、張志揚教授、黃瑞彬教授與劉致為教授百忙中撥空參加學生的口試並給予不少寶貴意見。此外要特別感謝實驗室同學聖哲與世賢的鼎力幫助。也感謝宗翰，珍儀，英杰，家宏，勝文等實驗室夥伴讓我的研究能夠順利完成。

此外如果沒有家人的支持，不可能順利完成學業，在此，我要感謝太太嘉玲與她家人以及我父母兄嫂在求學階段給我的支持與鼓勵。



趙宗茂 2007/1 於交通大學

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 導論	1
1.1 研究動機.....	2
1.2 論文組織.....	2
第二章 Marchand Balun簡介和傳輸線與耦合線的理论分析.....	3
2.1 前言.....	4
2.2 Marchand Balun的簡介.....	4
2.3 傳輸線S參數理論分析.....	5
2.4 耦合線S參數理論分析.....	7

第三章 Lossy Planar Marchand Balun 理論分析.....	13
3.1 Type I Marchand balun理論分析.....	15
3.2 Type II Marchand balun理論分析.....	22
3.3 Type III Marchand balun理論分析.....	29
3.4 Type IV Marchand balun理論分析.....	35
第四章 Lossy Planar Marchand balun Matlab分析結果.....	42
4.1 Type I Marchand balun Matlab分析結果.....	43
4.2 Type IV Marchand balun Matlab分析結果.....	54
第五章 結論.....	66
參考文獻.....	68
附錄一.....	70



表目錄

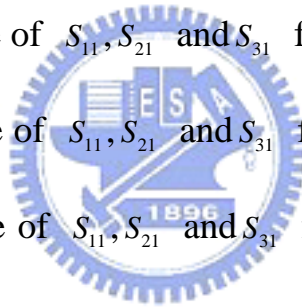
表1	Type I~IV compare table.....	41
----	------------------------------	----



圖目錄

圖 1	改良式 Marchand balun	4
圖 2	傳輸線基本架構.....	5
圖 3	Coupled line 基本架構圖.....	8
圖 4	Coupled line Even Mode and Odd Mode 架構圖.....	8
圖 5	Type I~IV Marchand balun 架構圖.....	14
圖 6	4-Port network of Type I 示意圖.....	15
圖 7	4-Port network of Type I 的 Even/Odd Mode 示意圖.....	15
圖 8	4-Port network of Type II 示意圖.....	22
圖 9	4-Port network of Type II 的 Even/Odd Mode 示意圖.....	23
圖 10	4-Port network of Type III 示意圖.....	29
圖 11	4-Port network of Type III 的 Even/Odd Mode 示意圖.....	29
圖 12	4-Port network of Type IV 示意圖.....	35
圖 13	4-Port network of Type IV 的 Even/Odd Mode 示意圖.....	35
圖 14	Type I Magnitude of S_{11} , S_{21} and S_{31} for lossless $S_{11}=0$	43

圖 15	Type I Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossless $S_{11}=0.2$	45
圖 16	Type I Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossy condition I.....	47
圖 17	Type I Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossy condition II.....	49
圖 18	Type I Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossy condition III.....	51
圖 19	Type I Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for $\gamma_e \neq \gamma_o$	53
圖 20	Type IV Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossless $S_{11}=0$	55
圖 21	Type IV Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossless $S_{11}=\frac{5}{7}$	57
圖 22	Type IV Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossy condition I.....	58
圖 23	Type IV Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossy condition II.....	60
圖 24	Type IV Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for lossy condition III.....	62
圖 25	Type IV Magnitude of S_{11}, S_{21} and S_{31} for $\gamma_e \neq \gamma_o$	64



第一章

導論



1.1 研究動機

近年來無線通訊產業快速發展，例如WiFi (Wireless LAN, 802.11 a/b/g/n)，GSM (Global System for Mobile Communication, 全球行動通訊系統)，GPRS (General Packet Radio Service, 整合封包無線電服務)，GPS (Global Position System, 全球衛星定位系統)，Blue tooth (藍芽)，3G (Third Generation, 第三代行動通訊)的出現，已成為我們生活的一部分，以及目前正在推廣的WiMax (Wireless WAN, 802.16)，和未來的4G (Fourth Generation, 第四代行動通訊)，都顯示無線通訊已經成為現代人不可或缺的基本需求，這也促成了無線通信系統的快速成長，在面對需求量大增的情形，其關鍵零組件—射頻晶片在此顯得更為重要。在市場競爭中，主晶片的成本減低，顯得相當關鍵，如何在晶片大小，耗電功率，其周邊相關被動零件的整合以及生產成本中取得一最佳平衡點，從此觀點來看，為了成本與整合的考量，未來會趨向單晶片來實現。而此單晶片射頻積體電路(RFIC)的優勢在於提供小面積、高重製性、高穩定性及在大量生產時的低價格。

1.2 論文組織

本論文內容分五個章節，第一章為導論，說明研究動機以及論文組織。第二章介紹 Marchand balun 和傳輸線與耦合線的理論分析，第三章介紹 Lossy Planar Marchand balun 的理論分析。第四章介紹 Marchand Balun Matlab 分析結果，第五章為結論。



第二章

Marchand Balun 簡介和傳輸線



與耦合線的理論分析

2.1 前言

近年來，由於無線通訊的普及，使得無線通訊系統的需求量大量成長，對於單晶微波積體電路(MMIC)與射頻積體電路(RFIC)的通訊元件需求量也持續的增加。而功率分波器(Power divider)與方向耦合器(Directional coupler)為電路中極重要的零組件。其中常見的180度的分合波器 Marchand balun可以產生不同相位與3dB功率，在single – to – differential的電路需求上是一種很好的選擇。Balun為balance to unbalance的縮寫，可轉換平衡式訊號與非平衡式訊號，它在平衡電路中是個關鍵元件，因此在無線系統中佔有相當重要成份，如Double- balanced mixer、Push-pull amplifier、Frequency doubler及Phase shifter[1]-[4]，都需要Balun。在微波積體電路(MICs)與單晶微波積體電路(MMICs)以及射頻積體電路(RFIC)已經有許多不同巴倫結構的應用[5-12]。在這些結構中，以被動式的Marchand Balun [13] 因平面式結構與寬頻的特性，最具有吸引力。

在本章中，我們將在第2.2節介紹Marchand Balun。而傳輸線與耦合線是Marchand Balun理論推導的基礎，因此我們將在第2.3節推導傳輸線S參數，第2.4節推導耦合線S參數，其中第2.4節將是第三章理論推導的基礎。

2.2 Marchand Balun的簡介

Marchand Balun最初在1944年由N.Marchand提出，它有一個非平衡輸入與兩個平衡輸出，可以被分成兩類，一是同軸線型態，一是傳輸線型態，如圖2-1所示

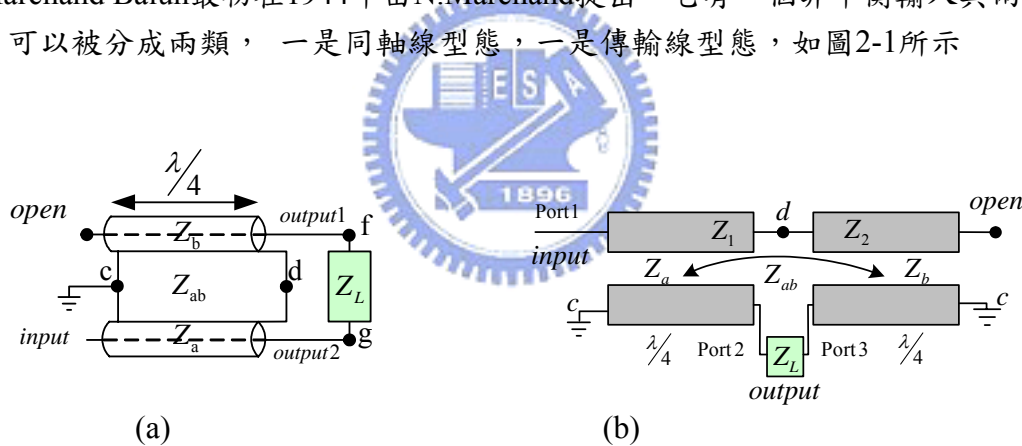


圖 1 改良式 Marchand balun (a)同軸線型態(b)傳輸線型態

從阻抗的觀點來看[10]：

$$\text{在 } d \text{ 點的輸入阻抗 } Z_{in} = \frac{jZ_L Z_{ab} \tan \theta}{Z_L + jZ_{ab} \tan \theta} - jZ_b \cot \theta$$

當在中心頻率時， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ， Z_{in} 等於 Z_L ，而不在中心頻率時，因為開路傳輸線阻抗 Z_b 相對起來很小，短路傳輸線阻抗 Z_{ab} 相對於 Z_L 很大，因此， Z_{in} 仍然近似於 Z_L ，這也就是為什麼 Marchand balun 能夠如此寬頻的原因。

傳輸線型態的 Marchand Balun 包含兩對耦合線，其中耦合線有微帶線式耦合線 (microstrip coupled lines) [5] [7][14]、藍基的耦合器 (Lange coupler) [15-17]、螺旋線圈式的耦合線與變壓器型式 (transformer type) 之耦合線 [1][18-19]，在幾 Giga 赫茲頻段，微帶線耦合器或藍基耦合器電路尺寸將會很大，將會非常佔空間，很難整合在積體電路上，而使用螺旋式或變壓器型式將能夠縮小其 layout 面積，而且容易增加互感 (mutual inductance) 及互耦 (mutual capacitance)，是比較適合整合在積體電路中。

本論文所要探討的 Marchand balun 為兩個結構完全一模一樣的耦合線所形成，而此耦合線則是兩個結構完全一模一樣的傳輸線所構成，我們將在第 2.3 節推導傳輸線的 S 參數表示式，第 2.4 節推導耦合線的 S 參數表示式，然後在第三章介紹四個類型的 Marchand Balun S 參數表示式。

2.3 傳輸線 (Transmission Line) 的 S 參數理論分析

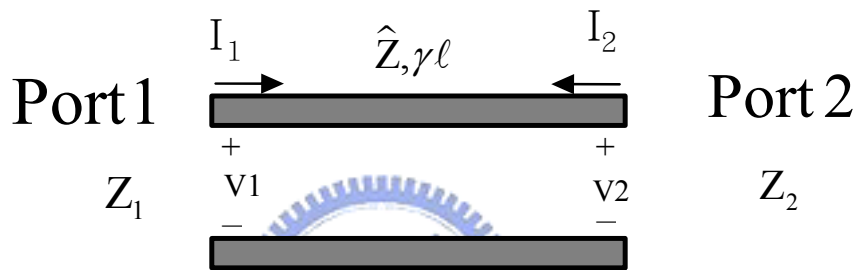


圖 2 傳輸線基本架構圖

(1) 先找出此傳輸線的 ABCD matrix

ABCD matrix 的定義如下

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \dots (2-1)$$

(V_1, I_1, V_2, I_2 分別為 port1 與 port2 的電壓與電流)

由 Transmission line 電壓電流關係式可得到

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma\ell) & \hat{Z} \sinh(\gamma\ell) \\ \hat{Y} \sinh(\gamma\ell) & \cosh(\gamma\ell) \end{bmatrix} \dots (2-2) [20]$$

其中 \hat{Z} 為此傳輸線的特性阻抗 (characteristic impedance)，為一 complex number，

$\gamma = \alpha + j\beta$ 為傳播常數， ℓ 為傳輸線長。

(2) 利用 ABCD matrix 與 S matrix 的關係找出 S 參數

從圖 2，將 V 與 I 以 a 與 b (入射，反射電壓或電流波) 表示

$$\begin{cases} a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_1}} = \sqrt{Z_1} I_1^+, b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_1}} = \sqrt{Z_1} I_1^- \\ a_2 = \frac{V_2^+}{\sqrt{Z_2}} = \sqrt{Z_2} I_2^+, b_2 = \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_2}} = \sqrt{Z_2} I_2^- \end{cases}$$

其中 $\begin{cases} V_1 = V_1^+ + V_1^-, I_1 = I_1^+ - I_1^- \\ V_2 = V_2^+ + V_2^-, I_2 = I_2^+ - I_2^- \end{cases}$

從 ABCD matrix 的定義

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} V_1^+ + V_1^- = A(V_2^+ + V_2^-) - B(I_2^+ - I_2^-) \\ I_1^+ - I_1^- = C(V_2^+ + V_2^-) - D(I_2^+ - I_2^-) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_1}} + \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_1}} = A\left(\frac{V_2^+}{\sqrt{Z_1}} + \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_1}}\right) - B\left(\frac{I_2^+}{\sqrt{Z_1}} - \frac{I_2^-}{\sqrt{Z_1}}\right) \\ \sqrt{Z_1} I_1^+ - \sqrt{Z_1} I_1^- = C(\sqrt{Z_1} V_2^+ + \sqrt{Z_1} V_2^-) - D(\sqrt{Z_1} I_2^+ - \sqrt{Z_1} I_2^-) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = A\left(\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} a_2 + \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} b_2\right) - B\left(\frac{a_2}{\sqrt{Z_1 Z_2}} - \frac{b_2}{\sqrt{Z_1 Z_2}}\right) \\ a_1 - b_1 = C\left(\sqrt{Z_1 Z_2} a_2 + \sqrt{Z_1 Z_2} b_2\right) - D\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} a_2 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} b_2\right) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} b_1 - \left(A\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} + \frac{B}{\sqrt{Z_1 Z_2}}\right) b_2 = -a_1 + \left(A\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} - \frac{B}{\sqrt{Z_1 Z_2}}\right) a_2 \\ -b_1 - \left(C\sqrt{Z_1 Z_2} + D\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) b_2 = -a_1 + \left(C\sqrt{Z_1 Z_2} - D\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

上兩式，分別消去 b_2 ， b_1 ，可得到

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{AZ_2 + B - CZ_1 Z_2 - DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1} a_1 + \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2} (AD - BC)}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1} a_2 \\ b_2 &= \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1} a_1 + \frac{-AZ_2 + B - CZ_1 Z_2 + DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1} a_2 \end{aligned}$$

因此我們得到一個新關係式，也就是 S matrix 的定義，表示如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

其中 S 參數表示如下

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AZ_2 + B - CZ_1Z_2 - DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1} & \frac{2(AD - BC)\sqrt{Z_1Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1} \\ \frac{2\sqrt{Z_1Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1} & \frac{-AZ_2 + B - CZ_1Z_2 + DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1Z_2 + DZ_1} \end{bmatrix} \dots(2-3)$$

如果我們假設 $Z_1 = Z_2 = Z_0$ ，此 S 參數變成如下：

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A + BY_0 - CZ_0 - D}{A + BY_0 + CZ_0 + D} & \frac{2(AD - BC)}{A + BY_0 + CZ_0 + D} \\ \frac{2}{A + BY_0 + CZ_0 + D} & \frac{-A + BY_0 - CZ_0 + D}{A + BY_0 + CZ_0 + D} \end{bmatrix} \dots(2-4)$$

將(2-2)中 ABCD 的值帶入(2-4)，得到 S 參數

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{\hat{Z}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}}\right)\sinh(\gamma\ell)}{2\cosh(\gamma\ell) + \left(\frac{\hat{Z}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}}\right)\sinh(\gamma\ell)} & \frac{2}{2\cosh(\gamma\ell) + \left(\frac{\hat{Z}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}}\right)\sinh(\gamma\ell)} \\ \frac{2}{2\cosh(\gamma\ell) + \left(\frac{\hat{Z}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}}\right)\sinh(\gamma\ell)} & \frac{\left(\frac{\hat{Z}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}}\right)\sinh(\gamma\ell)}{2\cosh(\gamma\ell) + \left(\frac{\hat{Z}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}}\right)\sinh(\gamma\ell)} \end{bmatrix} \dots(2-5)$$

在此如果我們假設 $\alpha = 0$ ，即 $\begin{cases} \sinh(\gamma\ell) = \sinh(j\beta\ell) = j\sin\beta\ell \\ \cosh(\gamma\ell) = \cosh(j\beta\ell) = \cos\beta\ell \end{cases}$ ，帶回(2-5)，則 S 參數變成

如下：

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j\left(\frac{Z}{Z_0} - \frac{Z_0}{Z}\right)\sin\beta\ell}{2\cos\beta\ell + j\left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}\right)\sin\beta\ell} & \frac{2}{2\cos\beta\ell + j\left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}\right)\sin\beta\ell} \\ \frac{2}{2\cos\beta\ell + j\left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}\right)\sin\beta\ell} & \frac{j\left(\frac{Z}{Z_0} - \frac{Z_0}{Z}\right)\sin\beta\ell}{2\cos\beta\ell + j\left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}\right)\sin\beta\ell} \end{bmatrix} \dots(2-6)$$

2.4 耦合線(Coupled Line)的 S 參數理論分析

我們假設耦合線為一對上下對稱傳輸線所構成，如圖 3，為了方便，我們並沒有把共同的地畫出。由此耦合線上下對稱的特性，我們將使用其 Even mode 與 Odd mode，並且假設他們有相同的傳播速度，以求出它的 S 參數。

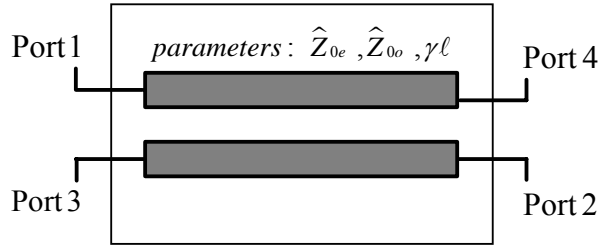


圖 3 Coupled line 基本架構圖

\hat{Z}_{0e} 為此耦合線 Even Mode 操作時，其中一個導體相對於地線的特性阻抗 (characteristic impedance)，為一 complex number。

\hat{Z}_{0o} 為此耦合線 Odd Mode 操作時，其中一個導體相對於地線的特性阻抗 (characteristic impedance)，為一 complex number。

假設 Even Mode 與 Odd Mode 的傳播常數 $\gamma = \alpha + j\beta$ 相等， l 為傳輸線長。

我們假設所有 port 的輸入阻抗皆為 Z_0 ，首先以 Even/Odd Mode 找出其個別的 S 參數，再利用兩個 Mode 的和差找出此 4 port 耦合線的 S 參數。

分析如下：

(1) Even mode

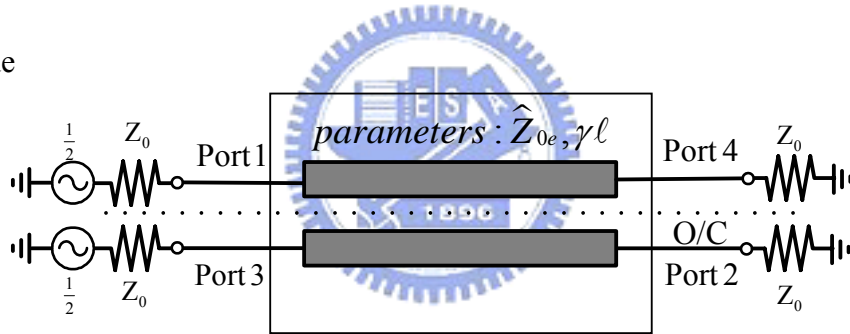


圖 4(a) Coupled line Even Mode 架構圖

如圖 4(a)所示，對稱處為虛線所畫的地方，相當於開路。

可簡化電長度為 γl 、特性阻抗為 Z_{0e} 的一段傳輸線。

其 ABCD 參數為

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & \hat{Z}_{0e} \sinh(\gamma l) \\ \hat{Y}_{0e} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \dots(2-7)$$

對照(2-5)，其 S 參數表示式如下

$$\begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} & \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} \\ \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} & \frac{(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} \end{bmatrix} \dots(2-8)$$

(2) Odd mode

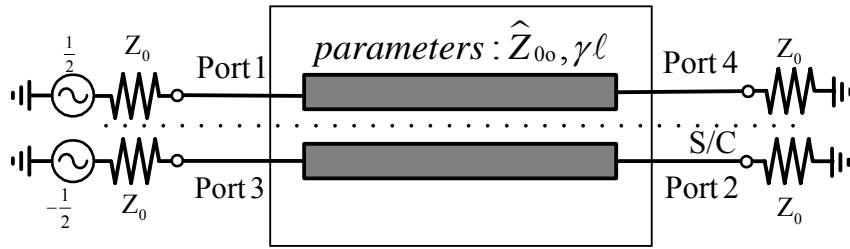


圖 4(b) Coupled line Odd Mode 架構圖

對稱處為虛線所畫的地方，相當於短路。

此簡化為長為 ℓ 、特性阻抗為 \hat{Z}_{0o} 的一段傳輸線。

其 ABCD 參數為

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_o = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma\ell) & \hat{Z}_{0o} \sinh(\gamma\ell) \\ \hat{Y}_{0o} \sinh(\gamma\ell) & \cosh(\gamma\ell) \end{bmatrix} \dots (2-9)$$

對照(2-5)，其 S 參數表示式如下

$$\begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} & \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} \\ \frac{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)}{2} & \frac{(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} \end{bmatrix} \dots (2-10)$$

(3) Even mode：如圖 4(a)，假設 Port1，Port3 各輸入 $\frac{1}{2}$ 單位的電壓或電流波。

將在 Port1、Port3 得到 $\frac{1}{2} S_{11}^e$ ，Port4、Port2 得到 $\frac{1}{2} S_{21}^e$ 的輸出。

Odd mode：如圖 4(b) 假設 Port1 輸入 $\frac{1}{2}$ 單位，Port3 輸入 $-\frac{1}{2}$ 單位的電壓或電流波。

將分別在 Port1、Port3 得到 $\frac{1}{2} S_{11}^e$ 、 $-\frac{1}{2} S_{11}^e$ ，Port4、Port2 得到 $\frac{1}{2} S_{21}^e$ 、

$-\frac{1}{2} S_{21}^e$ 。

同理將 Port1、Port3 與 Port4、Port2 角色互換， S_{11}^e 換為 S_{22}^e 、 S_{21}^e 換為 S_{12}^e 。

再由 Even mode 與 Odd mode 和差，可得知此耦合線的 S 參數如下

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) \end{bmatrix} \dots(2-11)$$

$$\text{我們令 } [S] = \begin{bmatrix} R & I & C & T \\ I & R & T & C \\ C & T & R & I \\ T & C & I & R \end{bmatrix} \dots(2-12)$$

其中

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} + \frac{(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} \right) \dots(2-13a)$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} - \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} \right) \dots(2-13b)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} + \frac{(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} \right) \dots(2-13c)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}) \sinh(r\ell)} + \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + (\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}) \sinh(r\ell)} \right) \dots(2-13d)$$

以入射波與反射波的表示法重寫如下

$$\begin{cases} b_1 = Ra_1 + Ia_2 + Ca_3 + Ta_4 \dots(2-14a) \\ b_2 = Ia_1 + Ra_2 + Ta_3 + Ca_4 \dots(2-14b) \\ b_3 = Ca_1 + Ta_2 + Ra_3 + Ia_4 \dots(2-14c) \\ b_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \dots(2-14d) \end{cases}$$

R 表示反射(Reflection)，I 表示隔離(Isolation)，C 表示耦合 (Coupling)，T 表示透射(Through)。

我們分成三種情況來討論：

2.4.1 在輸入阻抗匹配的情況下：

也就是 $R=0$ ，帶回(2-13a)

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)} + \frac{\left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)} \right) = 0$$

對任何的 $r\ell$ 都成立，我們可以得到 $\hat{Z}_{0e}\hat{Z}_{0o}=Z_0^2$ 。將此關係帶回(2-13b)，可以得到 $I=0$ ，

因此 R 、 I 、 C 、 T 的值可以簡化成

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ I = 0 \\ C = \frac{\left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)} \\ T = \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)} \end{array} \right\} \dots(2-15)$$

2.4.2 在輸入阻抗匹配與非損耗性(lossless)的情況下：

$\alpha = 0$ 帶入(2-15)，

則 R 、 I 、 C 、 T 的值變成

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ I = 0 \\ C = \frac{j\left(\frac{Z_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_{0o}}{Z_0}\right) \sin(\beta\ell)}{2 \cos(\beta\ell) + j\left(\frac{Z_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_{0o}}{Z_0}\right) \sin(\beta\ell)} \\ T = \frac{2}{2 \cos(\beta\ell) + j\left(\frac{Z_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_{0o}}{Z_0}\right) \sin(\beta\ell)} \end{array} \right\}$$

我們定義 $c = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ I = 0 \\ C = \frac{jc \sin(\beta\ell)}{\sqrt{1-c^2} \cos(\beta\ell) + j \sin(\beta\ell)} \\ T = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2} \cos(\beta\ell) + j \sin(\beta\ell)} \end{array} \right\} \dots(2-16)$$

我們可以得到

$$|C|^2 + |T|^2 = 1,$$

此式明顯說明著 Lossless

2.4.3 在輸入阻抗匹配與非損耗性(lossless)的情況下，我們再假設 $l = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率的

波長)：

則 R、I、C、T 的值簡化成

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ I = 0 \\ C = c \\ T = -j\sqrt{1-c^2} \end{array} \right\} \dots(2-17)$$

得到 $T = -j\sqrt{1-C^2}$ 。



第三章

Lossy Planar Marchand Balun

理論分析



平面式 Marchand Balun 是由兩個結構完全一樣的耦合線所形成(如同 2.4 章節所討論的耦合線)，目前我們最常用的都是如圖 5(a) Type I 所示，這種型態是一個開路端(open)，兩個短路端(short)，從這個可以延申出另外三種類似的 Marchand balun。如圖 5(b)、(c)、(d)所示。

[21]我們將把這些 Marchand balun 視為一個 4-Port 網路，利用其對稱性以 Even mode 與 Odd Mode 求出此 4-Port 網路的 S 參數，然後再藉由 Port4 為開路或是短路的邊界條件，將可化減此 4-Port 網路 S 參數為一 3-Port 網路 S 參數。

底下我們將依序介紹這四種型態 Marchand Balun。

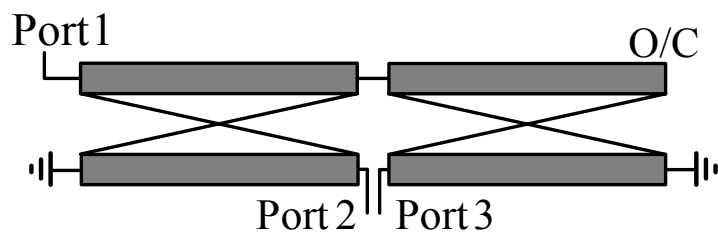


圖 5(a) Type I Marchand balun



圖 5(b) Type II Marchand balun

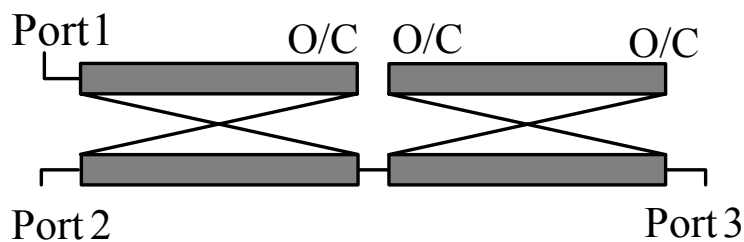


圖 5(c) Type III Marchand balun

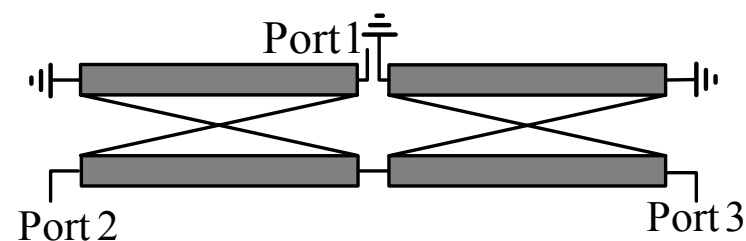


圖 5(d) Type IV Marchand balun

3.1 Type I Marchand Balun

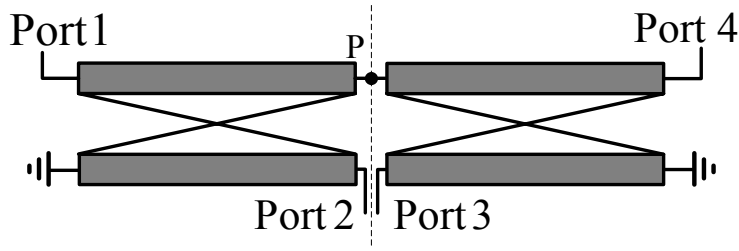


圖 6 4-Port network of Type I

首先我們假設圖 5(a)中的 O/C 為 Port4，如圖 6 所示，將 3-Port 網路變成一個 Port1、Port2 與 Port4、Port3 對稱的 4-Port 網路，虛線為其對稱線。因此可以利用 Even/Odd mode 找出此 4-Port 網路的 S 參數。

在這裡，我們將以第二章中的圖 3 為基礎，分析此 4-Port 網路的 Even Mode 與 Odd mode。

(1) Even mode

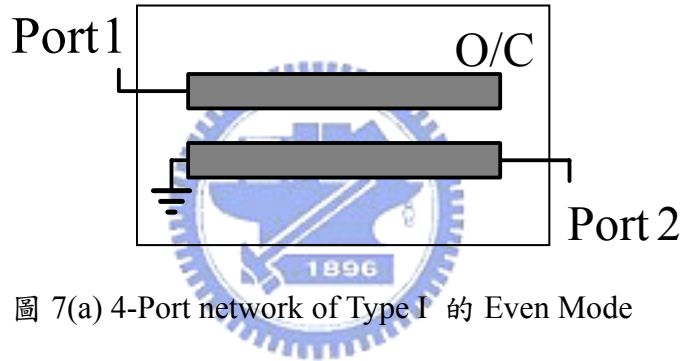


圖 7(a) 4-Port network of Type I 的 Even Mode

圖 6 中的 P 點將會變成 O/C，此種情形就是將圖 3 中的 Port3 短路，Port4 開路。以波的觀點來看，開路會造成同相位全反射即 $\Gamma = 1$ ，短路會造成反相位全反射即 $\Gamma = -1$ 。

所以將此兩 Port 的邊界條件 $\frac{b_3}{a_3} = -1$ ， $\frac{b_4}{a_4} = 1$ 帶入(2-14c)，(2-14d)中得到

$$\begin{cases} -a_3 = Ca_1 + Ta_2 + Ra_3 + Ia_4 \\ a_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R+1)a_3 - Ia_4 = Ca_1 + Ta_2 \\ -Ia_3 - (R-1)a_4 = Ta_1 + Ca_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{IT - RC + C}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT + T}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \\ a_4 = \frac{IC - RT - T}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IT - RC - C}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \end{cases}$$

再將所求得的 a_3, a_4 帶入(2-14a)，(2-14b)，最後得到

$$b_1 = Ra_1 + Ia_2 + C\left(\frac{IT - RC + C}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT + T}{R^2 - I^2 - 1} a_2\right)$$

$$\begin{aligned}
& + T \left(\frac{IC - RT - T}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IT - RC - C}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \right) \\
= & a_1 \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} \right) + a_2 \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 = & I a_1 + R a_2 + T \left(\frac{IT - RC + C}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT + T}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \right) \\
& + C \left(\frac{IC - RT - T}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IT - RC - C}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \right) \\
= & a_1 \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \right) + a_2 \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} \right)
\end{aligned}$$

以矩陣方式表達，重寫如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} & I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \\ I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} & R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} \end{bmatrix}$$

注意:此 S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同。

(2) Odd mode

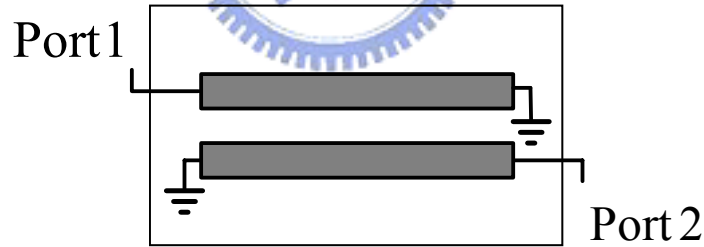


圖 7(b) 4-Port network of Type I 的 Odd Mode

圖 6 中的 P 點將會變成 S/C，此種情形就是將圖 3 中的 Port3，Port4 短路，所以將邊界條件 $\frac{b_3}{a_3} = -1$ ， $\frac{b_4}{a_4} = -1$ 帶回(2-14c)，(2-14d)中得到

$$\begin{cases} -a_3 = C a_1 + T a_2 + R a_3 + I a_4 \\ -a_4 = T a_1 + C a_2 + I a_3 + R a_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R+1)a_3 - I a_4 = C a_1 + T a_2 \\ -I a_3 - (R+1)a_4 = T a_1 + C a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_2 \\ a_4 = \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_2 \end{cases}$$

再將所求得的 a_3, a_4 帶入(2-14a), (2-14b), 最後得到

$$\begin{aligned} b_1 &= Ra_1 + Ia_2 + C\left(\frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_2\right) \\ &\quad + T\left(\frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_2\right) \\ &= a_1\left(R + \frac{2ICT - (R+1)(C^2 + T^2)}{(R+1)^2 - I^2}\right) + a_2\left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= Ba_1 + Aa_2 + D\left(\frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_2\right) \\ &\quad + C\left(\frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_2\right) \\ &= a_1\left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2}\right) + a_2\left(R + \frac{2ICT - (R+1)(C^2 + T^2)}{(R+1)^2 - I^2}\right) \end{aligned}$$

以矩陣方式表達, 重寫如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} & I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \\ I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} & R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \end{bmatrix}$$

注意: 此 S 參數中的 R、I、C、T 與(2-13)的 R、I、C、T 相同。

(3) 經由 Even Mode & Odd Mode 和差運算可得 Type I Marchand Balun S 參數為

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) \end{bmatrix} \dots(3-1)$$

注意: (3-1)與(2-11)兩個式子不同, 這是因為 Port 的定義順序不同。

這裡，我們以簡單的 $a \sim f$ 表示所有 S 參數，以方便討論

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{44} &= \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) = a \\ &= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{14} = S_{41} &= \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = b \\ &= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12} = S_{43} &= \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) = S_{34} = S_{21} = c \\ &= \frac{1}{2}\left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} + \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{13} = S_{42} &= \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) = S_{24} = S_{31} = d \\ &= \frac{1}{2}\left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} - \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-2d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{22} = S_{33} &= \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) = e \\ &= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-2e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{23} = S_{32} &= \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) = f \\ &= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-2f) \end{aligned}$$

因此 S 參數可以重新表示為

$$[S] = \begin{bmatrix} a & c & d & b \\ c & e & f & d \\ d & f & e & c \\ b & d & c & a \end{bmatrix}$$

重寫入射波與反射波的關係如下

$$\begin{cases} b_1 = aa_1 + ca_2 + da_3 + ba_4 \cdots (3-3a) \\ b_2 = ca_1 + ea_2 + fa_3 + da_4 \cdots (3-3b) \\ b_3 = da_1 + fa_2 + ea_3 + ca_4 \cdots (3-3c) \\ b_4 = ba_1 + da_2 + ca_3 + aa_4 \cdots (3-3d) \end{cases}$$

我們將 Port4 為 O/C 的邊界條件，也就是 $\frac{b_4}{a_4} = 1$ 帶入(3-3d)中，得到

$$a_4 = \frac{b}{1-a}a_1 + \frac{d}{1-a}a_2 + \frac{c}{1-a}a_3, \text{ 再將此式子帶回(3-3a)、(3-3b)、(3-3c)}$$

最後可以化減為 3-Port 網路，也就是 TypeI Marchand Balun S 參數。

$$\begin{cases} b_1 = (a + \frac{b^2}{1-a})a_1 + (c + \frac{bd}{1-a})a_2 + (d + \frac{bc}{1-a})a_3 \cdots(3-4a) \\ b_2 = (c + \frac{bd}{1-a})a_1 + (e + \frac{d^2}{1-a})a_2 + (f + \frac{cd}{1-a})a_3 \cdots(3-4b) \\ b_3 = (d + \frac{bc}{1-a})a_1 + (f + \frac{cd}{1-a})a_2 + (e + \frac{c^2}{1-a})a_3 \cdots(3-4c) \end{cases}$$

此 3-Port S 參數以矩陣方式表達，重寫如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \frac{b^2}{1-a} & c + \frac{bd}{1-a} & d + \frac{bc}{1-a} \\ c + \frac{bd}{1-a} & e + \frac{d^2}{1-a} & f + \frac{cd}{1-a} \\ d + \frac{bc}{1-a} & f + \frac{cd}{1-a} & e + \frac{c^2}{1-a} \end{bmatrix} \cdots(3-5)$$

我們想要的 Balun 條件為 $S_{21} = -S_{31}$ ，也就是

$$c + \frac{bd}{1-a} = -(d + \frac{bc}{1-a})$$

$$\Rightarrow (c+d)(1 + \frac{b}{1-a}) = 0$$

$$\Rightarrow (i)c+d=0 \quad \text{or} \quad (ii) \quad 1 + \frac{b}{1-a} = 0$$

在 (ii) 情形中

$$1 + \frac{b}{1-a} = 0$$

$$\Rightarrow a-b=1$$

$$\text{帶入 } S_{11} = a + \frac{b^2}{1-a} = a + b \frac{b}{1-a} = a-b=1$$

$$\Rightarrow S_{21} = S_{31} = 0$$

此情形並非 balun。

因此我們只要討論 (i) 的情形，也就是推導出 $c + d = 0$ 即是我們想要的 Balun，將(3-2c)與(3-2d)帶入，得到

$$\begin{aligned} c + d &= \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) + \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = S_{12}^e = I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \\ &= \frac{I(R^2 + C^2 + T^2 - I^2 - 1) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \end{aligned} \quad (3-6)$$

再將(2-13)中的 R、I、C、T 帶入(3-6)式中的分子，得到

$c + d$ 的分子

$$\begin{aligned} &= I(R^2 + C^2 + T^2 - I^2 - 1) - 2RCT \\ &= -\left(\frac{\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)}\right)^2 \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)} \\ &\quad + \left(\frac{\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} - \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)}\right)^2 \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)} \\ &+ 4\left(\frac{1}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)}\right) \\ &- 4\left(\frac{1}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)}\right) \left(\frac{1}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)}\right)^2 \\ &- \left(\frac{1}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0e}}\right) \sinh(r\ell)}\right) + \left(\frac{1}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} + \frac{Z_0}{\hat{Z}_{0o}}\right) \sinh(r\ell)}\right) \end{aligned}$$

我們將上式通分化簡後，恰好等於零。即不管 $r\ell, \hat{Z}_{0e}, \hat{Z}_{0o}, Z_0$ 為何值， $S_{21} = -S_{31}$ 恆成立。

下面我們將在特殊情況下討論。

(A) 利用 2.4.1 節的條件，假設 $R=0$ 。從 $R=0$ 可以推出 $I=0$ ，這使得(3-6)成立。將他們帶回 3-2，得到

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = -C^2 \\ b = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = T^2 \\ c = \frac{1}{2} \left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} + \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = -TC \\ d = \frac{1}{2} \left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} - \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = TC \\ e = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = -T^2 \\ f = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = C^2 \end{array} \right.$$

這裡

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} \right) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} \right) \sinh(r\ell)} \\ T = \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0} \right) \sinh(r\ell)} \end{array} \right.$$

將 a ~ f 的值帶回(3-5)，得到

$$[S] = \begin{bmatrix} -C^2 + \frac{T^4}{1+C^2} & -TC + \frac{T^3C}{1+C^2} & TC - \frac{T^3C}{1+C^2} \\ -TC + \frac{T^3C}{1+C^2} & -T^2 + \frac{T^2C^2}{1+C^2} & C^2 - \frac{T^2C^2}{1+C^2} \\ TC - \frac{T^3C}{1+C^2} & C^2 - \frac{T^2C^2}{1+C^2} & -T^2 + \frac{T^2C^2}{1+C^2} \end{bmatrix} \dots(3-7)$$

由上面矩陣可以看出即使在有損耗的情況下 S_{21} ， S_{31} 仍然是保持反相的。我們可以以直覺並具有啟發式的方式推導出 3-7，請參照附錄一。

(B)除(A)條件外，再假設沒有損耗(Lossless)且 $\ell = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率的波長)，即 2.4.2

節與 2.4.3 節的條件。

將 $T = -j\sqrt{1-C^2}$ 帶入(3-7)，S 參數變成

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1-3C^2}{1+C^2} & j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{1+C^2} & -j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{1+C^2} \\ j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{1+C^2} & \frac{1-C^2}{1+C^2} & \frac{2C^2}{1+C^2} \\ -j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{1+C^2} & \frac{2C^2}{1+C^2} & \frac{1-C^2}{1+C^2} \end{bmatrix} \dots(3-8)[4]$$

$$\text{這裡} \begin{cases} C = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} \\ T = \frac{-j2Z_0}{Z_{0e} + Z_{0o}} \end{cases}$$

當 $C = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 時， S_{11} 將會達到完美匹配

$$\text{此時 } S_{21} = -S_{31} = j\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{利用此二式} \begin{cases} \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ Z_0^2 = Z_{0e}Z_{0o} \end{cases}$$

$$\text{可以得到} \begin{cases} Z_{0e} - Z_{0o} = \sqrt{2}Z_0 \\ Z_{0e} + Z_{0o} = \sqrt{6}Z_0 \end{cases}$$

因此可以得到 Z_{0e} 與 Z_{0o} 的值如下

$$\begin{cases} Z_{0e} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} Z_0 = 1.932Z_0 \\ Z_{0o} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} Z_0 = 0.518Z_0 \end{cases}$$



3.2 Type II Marchand Balun

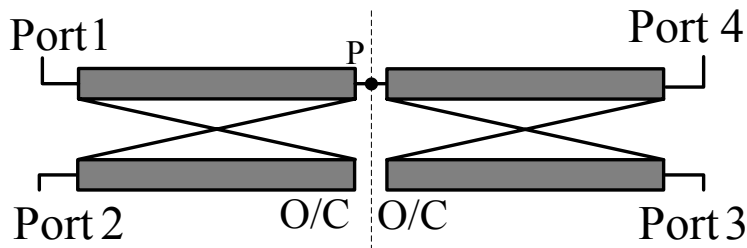


圖 8 4-Port network of Type II

方法同 Type I Marchand Balun，如圖 5 (b)所示，我們假設右上方 O/C 為 Port4，因

此變成一個 Port1、Port2 與 Port4、Port3 對稱的 4-Port 網路，如圖 3.4 所示，虛線為其對稱線。我們再一次利用 Even/Odd mode 分析此 4-Port 網路。在這裡，我們一樣以圖 3 為基礎，找出此 4-Port 網路的 Even Mode S 參數與 Odd mode S 參數。

(1) Even mode

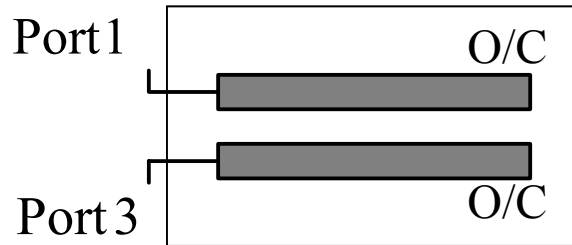


圖 9(a) 4-Port network of Type II 的 Even Mode

圖 3.4 中的 P 點將會變成 O/C，此種情形就是將圖 3 中的 Port2、Port4 開路，如圖 9(a)所示，將此兩 Port 的邊界條件 $\frac{b_2}{a_2} = 1$ ， $\frac{b_4}{a_4} = 1$ 帶入(2-14b)，(2-14d)中得到

$$\begin{cases} a_2 = Ia_1 + Ra_2 + Ta_3 + Ca_4 \\ a_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R-1)a_2 - Ca_4 = Ia_1 + Ta_3 \\ -Ca_2 - (R-1)a_4 = Ta_1 + Ia_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{CT - RI + I}{(R-1)^2 - C^2} a_1 + \frac{IC - RT + T}{(R-1)^2 - C^2} a_3 \\ a_4 = \frac{IC - RT + T}{(R-1)^2 - C^2} a_1 + \frac{CT - RI + I}{(R-1)^2 - C^2} a_3 \end{cases}$$

再將所求得的 a_2, a_4 帶入(2-14a)，(2-14c)，最後得到

$$\begin{aligned} b_1 &= Ra_1 + I\left(\frac{CT - RI + I}{(R-1)^2 - C^2} a_1 + \frac{IC - RT + T}{(R-1)^2 - C^2} a_3\right) \\ &\quad + Ca_3 + T\left(\frac{IC - RT + T}{(R-1)^2 - C^2} a_1 + \frac{CT - RI + I}{(R-1)^2 - C^2} a_3\right) \\ &= a_1\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2}\right) + a_3\left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2}\right) \\ b_3 &= Ca_1 + T\left(\frac{CT - RI + I}{(R-1)^2 - C^2} a_1 + \frac{IC - RT + T}{(R-1)^2 - C^2} a_3\right) + Ra_3 \\ &\quad + I\left(\frac{IC - RT + T}{(R-1)^2 - C^2} a_1 + \frac{CT - RI + I}{(R-1)^2 - C^2} a_3\right) \\ &= a_1\left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2}\right) + a_3\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2}\right) \end{aligned}$$

重寫 a 與 b 的關係如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} & C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} \\ C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} & R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} \end{bmatrix}$$

注意:此 S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同。

(2)Odd mode

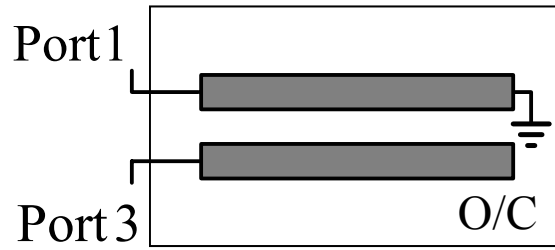


圖 9(b) 4-Port network of Type II 的 Odd Mode

圖 8 中的 P 點將會變成 S/C，此種情形就是將圖 3 中的 Port2 開路、Port4 短路，所以將此兩 Port 的邊界條件 $\frac{b_2}{a_2} = 1$ ， $\frac{b_4}{a_4} = -1$ 帶入(2-14b)、(2-14d)中得到

$$\begin{cases} a_2 = Ia_1 + Ra_2 + Ta_3 + Ca_4 \\ -a_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R-1)a_2 - Ca_4 = Ia_1 + Ta_3 \\ -Ca_2 - (R+1)a_4 = Ta_1 + Ia_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{CT - RI - I}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT - T}{R^2 - C^2 - 1} a_3 \\ a_4 = \frac{IC - RT + T}{R^2 - C^2 - 1} a_1 - \frac{CT - RI + I}{R^2 - C^2 - 1} a_3 \end{cases}$$

再將所求得的 a_2, a_4 帶入(2-14a)，(2-14c)，最後得到

$$\begin{aligned} b_1 &= Ra_1 + I\left(\frac{CT - RI - I}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT - T}{R^2 - C^2 - 1} a_3\right) \\ &\quad + Ca_3 + T\left(\frac{IC - RT + T}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{CT - RI + I}{R^2 - C^2 - 1} a_3\right) \\ &= a_1\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right) + a_3\left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= Ca_1 + T\left(\frac{CT - RI - I}{R^2 - C^2 - 1}a_1 + \frac{IC - RT - T}{R^2 - C^2 - 1}a_3\right) \\
&\quad + Ra_3 + I\left(\frac{IC - RT + T}{R^2 - C^2 - 1}a_1 + \frac{CT - RI + I}{R^2 - C^2 - 1}a_3\right) \\
&= a_1\left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1}\right) + a_3\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right)
\end{aligned}$$

重寫 a 與 b 的關係如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1} & C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1} \\ C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1} & R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1} \end{bmatrix}$$

注意:此 S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同

(3)由 Even Mode & Odd Mode 和差運算可得 S 參數為

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) \end{bmatrix} \dots(3-9)$$

注意:(3-1)與(3-9)兩個式子相同，這是因為 Port 的定義順序相同。

這裡

$$\begin{aligned}
S_{11} &= S_{44} = \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) = a \\
&= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} + \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right)\right] \quad (3-10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{14} &= S_{41} = \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = b \\
&= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} - \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right)\right] \quad (3-10b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12} = S_{43} &= \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) = S_{34} = S_{21} = c \\
&= \frac{1}{2}\left[C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} + C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1}\right] \quad (3-10c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{13} = S_{42} &= \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) = S_{24} = S_{31} = d \\
&= \frac{1}{2}\left[C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} - \left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1}\right)\right] \quad (3-10d)
\end{aligned}$$

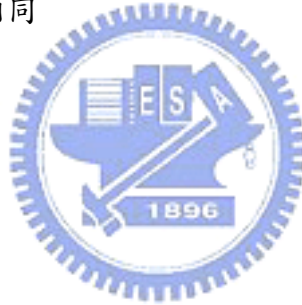
$$\begin{aligned}
S_{22} = S_{33} &= \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) = e \\
&= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} + \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right)\right] \quad (3-10e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{23} = S_{32} &= \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) = f \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2}\right) - \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right)\right] \quad (3-10f)
\end{aligned}$$

注意:3-2 與 3-10 中的 a~f 不相同

我們將 S 參數重新表示為

$$[S] = \begin{bmatrix} a & c & d & b \\ c & e & f & d \\ d & f & e & c \\ b & d & c & a \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} b_1 = aa_1 + ca_2 + da_3 + ba_4 \cdots (3-11a) \\ b_2 = ca_1 + ea_2 + fa_3 + da_4 \cdots (3-11b) \\ b_3 = da_1 + fa_2 + ea_3 + ca_4 \cdots (3-11c) \\ b_4 = ba_1 + da_2 + ca_3 + aa_4 \cdots (3-11d) \end{cases}$$

將原本 Port4 開路的邊界條件，也就是 $\frac{b_4}{a_4} = 1$ 帶入(3-11d)中，得到

$$a_4 = \frac{b}{1-a}a_1 + \frac{d}{1-a}a_2 + \frac{c}{1-a}a_3, \text{ 再將此式子帶入(3-11a), (3-11b), (3-11c)}$$

最後可以化減為 3-Port 網路

$$\begin{cases} b_1 = \left(a + \frac{b^2}{1-a}\right)a_1 + \left(c + \frac{bd}{1-a}\right)a_2 + \left(d + \frac{bc}{1-a}\right)a_3 \cdots (3-12a) \\ b_2 = \left(c + \frac{bd}{1-a}\right)a_1 + \left(e + \frac{d^2}{1-a}\right)a_2 + \left(f + \frac{cd}{1-a}\right)a_3 \cdots (3-12b) \\ b_3 = \left(d + \frac{bc}{1-a}\right)a_1 + \left(f + \frac{cd}{1-a}\right)a_2 + \left(e + \frac{c^2}{1-a}\right)a_3 \cdots (3-12c) \end{cases}$$

此 3-Port S 參數可以用矩陣方式重新表示如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} a + \frac{b^2}{1-a} & c + \frac{bd}{1-a} & d + \frac{bc}{1-a} \\ c + \frac{bd}{1-a} & e + \frac{d^2}{1-a} & f + \frac{cd}{1-a} \\ d + \frac{bc}{1-a} & f + \frac{cd}{1-a} & e + \frac{c^2}{1-a} \end{bmatrix} \dots (3-13)$$

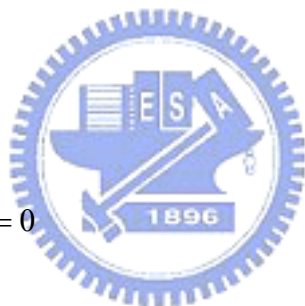
注意：(3-13)與(3-5)中的表示式完全相同，但是元素中的 a~f 的值不相同。

我們想要的 Balun 條件為 $S_{21} = -S_{31}$ ，也就是

$$c + \frac{bd}{1-a} = -(d + \frac{bc}{1-a})$$

$$\Rightarrow (c+d)(1 + \frac{b}{1-a}) = 0$$

$$\Rightarrow (i)c + d = 0 \quad \text{or} \quad (ii) \quad 1 + \frac{b}{1-a} = 0$$



在 (ii) 情形中

$$1 + \frac{b}{1-a} = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$

$$\text{帶入 } S_{11} = a + \frac{b^2}{1-a} = a + b \frac{b}{1-a} = a - b = 1$$

$$\Rightarrow S_{21} = S_{31} = 0$$

此情形並非 balun。

因此我們只要討論 (i) 的情形，也就是推導出 $c + d = 0$ 即是我們想要的 Balun，將(3-10c) 的值與(3-10d)的值帶入，得到

$$c + d$$

$$= \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) + \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = S_{12}^e$$

$$= C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2}$$

$$= C[(R-1)^2 - C^2 + I^2 + T^2] - 2RI(T-1) \quad (3-14)$$

將(2-13)中的 R、I、C、T 帶入(3-14)，會發現結果為 $\hat{Z}_{0e}, \hat{Z}_{0o}, Z_0, r\ell$ 所組成的一個複雜多項式， $S_{21} = -S_{31}$ 不恆成立。因此我們將在特殊情況下討論。

(A)我們假設 $R=0$ 、 $I=0$ ，也就是 3.2.1 的情況，帶回 3-10，得到

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{T^2 C^2}{1-C^4} & b = \frac{T^2}{1-C^4} & c = C + \frac{T^2 C^3}{1-C^4} \\ d = \frac{T^2 C}{1-C^4} & e = \frac{T^2}{1-C^4} & f = \frac{T^2 C^2}{1-C^4} \end{cases}$$

這裡 $\left\{ \begin{aligned} C &= \frac{\left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)} \\ T &= \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)} \end{aligned} \right.$

將 a ~ f 的值帶回(3-13)，得到

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{T^2 C^2 + T^4}{1-T^2 C^2 - C^4} & \frac{T^4 C - C^5 + C}{1-T^2 C^2 - C^4} & \frac{2T^2 C}{1-T^2 C^2 - C^4} \\ \frac{T^4 C - C^5 + C}{1-T^2 C^2 - C^4} & \frac{T^2}{1-T^2 C^2 - C^4} & \frac{2T^2 C^2}{1-T^2 C^2 - C^4} \\ \frac{2T^2 C}{1-T^2 C^2 - C^4} & \frac{2T^2 C^2}{1-T^2 C^2 - C^4} & \frac{2T^2 C^4 + T^2 - T^4 C^2 - C^6 + C^2}{1-T^2 C^2 - C^4} \end{bmatrix} \dots (3-15)$$

由 3-32 知 $S_{21} \neq -S_{31}$ 。除非在某些條件下才會使得 $S_{21} = -S_{31}$

(B) 除(A)條件外，再假設在沒有損耗(Lossless)且 $\ell = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率的波長)情況下。

將 $T = -j\sqrt{1-C^2}$ 帶入(3-15)，S 參數變成

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1-3C^2+2C^4}{1+C^2-2C^4} & \frac{2(C-C^3)}{1+C^2-2C^4} & \frac{-2(C-C^3)}{1+C^2-2C^4} \\ \frac{2(C-C^3)}{1+C^2-2C^4} & \frac{-1+C^2}{1+C^2-2C^4} & \frac{-2(C^2-C^4)}{1+C^2-2C^4} \\ \frac{-2(C-C^3)}{1+C^2-2C^4} & \frac{-2(C^2-C^4)}{1+C^2-2C^4} & \frac{-1+C^2}{1+C^2-2C^4} \end{bmatrix} \dots (3-16)$$

其中 $C = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}$

在此條件下 $S_{21} = -S_{31}$

同時在 $C = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 時， S_{11} 會達到完美的匹配。

因此可以得到 Z_{0e} 與 Z_{0o} 的值如下

$$\begin{cases} Z_{0e} = (\sqrt{2}+1)Z_0 = 2.414Z_0 \\ Z_{0o} = (\sqrt{2}-1)Z_0 = 0.414Z_0 \end{cases}$$

3.3 Type III Marchand Balun

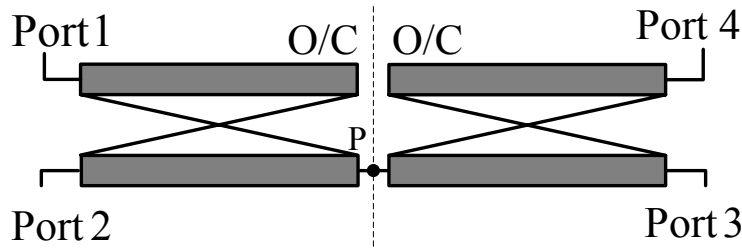


圖 10 4-Port network of Type III

方法同 Type I Marchand Balun，如圖 5(c)所示，我們假設右上方 O/C 為 Port4，因此變成一個 Port1、Port2 與 Port4、Port3 對稱的 4-Port 網路，如圖 10 所示，虛線為其對稱線。因此可以用 Even/Odd mode 分析此 4-Port 網路。在這裡，我們一樣以圖 3 為基礎，分析此 4-Port 網路的 Even Mode S 參數與 Odd mode S 參數。

(1) Even mode

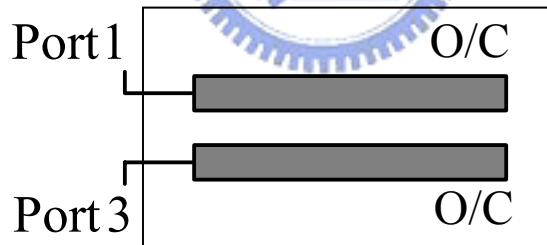


圖 11(a) 4-Port network of Type III 的 Even Mode

圖 10 中的 P 點將會變成 O/C，等同於將圖 3 中的 Port2 與 Port4 開路，如圖 11(a) 所示，此種情形和圖 3.5(a)完全一樣，我們重寫如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} & C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} \\ C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} & R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 + T^2}{(R-1)^2 - C^2} \end{bmatrix}$$

注意:此 S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同。

(2)Odd mode

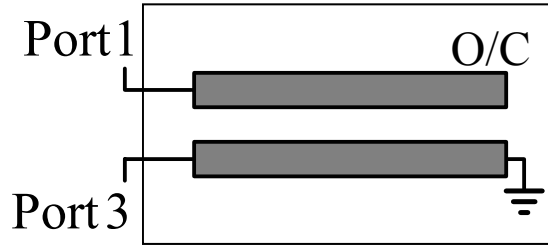


圖 11(b) 4-Port network of Type III 的 Odd Mode

圖 3.6 中的 P 點將會變成 O/C，等同於將圖 3 中的 Port2 短路與 Port4 開路，如圖 3.7(b)所示因此將此兩 Port 的邊界條件 $\frac{b_2}{a_2} = -1$ ， $\frac{b_4}{a_4} = 1$ 帶入(2-14b)，(2-14d)中，得到

$$\begin{cases} -a_2 = Ia_1 + Ra_2 + Ta_3 + Ca_4 \\ a_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R+1)a_2 - Ca_4 = Ia_1 + Ta_3 \\ -Ca_2 - (R-1)a_4 = Ta_1 + Ia_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{CT - RI + I}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT + T}{R^2 - C^2 - 1} a_3 \\ a_4 = \frac{IC - RT - T}{R^2 - C^2 - 1} a_1 - \frac{CT - RI - I}{R^2 - C^2 - 1} a_3 \end{cases}$$



再將所求得的 a_2, a_4 帶入(2-14a)，(2-14c)，最後得到

$$\begin{aligned} b_1 &= Ra_1 + I\left(\frac{CT - RI + I}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT + T}{R^2 - C^2 - 1} a_3\right) \\ &\quad + Ca_3 + T\left(\frac{IC - RT - T}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{CT - RI - I}{R^2 - C^2 - 1} a_3\right) \\ &= a_1\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right) + a_3\left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1}\right) \\ b_3 &= Ca_1 + T\left(\frac{CT - RI + I}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT + T}{R^2 - C^2 - 1} a_3\right) \\ &\quad + Ra_3 + I\left(\frac{IC - RT - T}{R^2 - C^2 - 1} a_1 + \frac{CT - RI - I}{R^2 - C^2 - 1} a_3\right) \\ &= a_1\left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1}\right) + a_3\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1} & C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1} \\ C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1} & R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1} \end{bmatrix}$$

注意: S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同

(3) 由 Even Mode & Odd Mode 和差運算可得 S 參數為

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) \end{bmatrix} \dots (3-17)$$

注意:(3-1)與(3-9)與(3-17)式子相同，這是因為 Port 的定義順序相同。

這裡

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{44} = \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) = a \\ &= \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 - T^2}{(R-1)^2 - C^2} + \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-18a)$$

$$\begin{aligned} S_{14} &= S_{41} = \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = b \\ &= \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 - T^2}{(R-1)^2 - C^2} - \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) + I^2 - T^2}{R^2 - C^2 - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-18b)$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{43} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) = S_{34} = S_{21} = c \\ &= \frac{1}{2} \left[C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} + C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (3-18c)$$

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{42} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) = S_{24} = S_{31} = d \\ &= \frac{1}{2} \left[C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2} - \left(C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RIT}{R^2 - C^2 - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-18d)$$

$$\begin{aligned} S_{22} &= S_{33} = \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) = e \\ &= \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 - T^2}{(R-1)^2 - C^2} + \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-18e)$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) = f$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 - T^2}{(R-1)^2 - C^2} \right) - \left(R + \frac{2ICT - R(I^2 + T^2) - I^2 + T^2}{R^2 - C^2 - 1} \right) \right] \quad (3-18f)$$

注意:3-2 與 3-10 與 3-18 中的 a ~ f 不相同

因此 S 參數可以重新表示為

$$[S] = \begin{bmatrix} a & c & d & b \\ c & e & f & d \\ d & f & e & c \\ b & d & c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 = aa_1 + ca_2 + da_3 + ba_4 \cdots (3-19a) \\ b_2 = ca_1 + ea_2 + fa_3 + da_4 \cdots (3-19b) \\ b_3 = da_1 + fa_2 + ea_3 + ca_4 \cdots (3-19c) \\ b_4 = ba_1 + da_2 + ca_3 + aa_4 \cdots (3-19d) \end{cases}$$

在此原本 Port4 開路的邊界條件，也就是 $\frac{b_4}{a_4} = 1$ 帶入(3-19d)中，得到

$$a_4 = \frac{b}{1-a} a_1 + \frac{d}{1-a} a_2 + \frac{c}{1-a} a_3, \text{ 再將此式子帶入(3-19a), (3-19b), (3-19c)}$$

最後可以化減為 3-Port 網路

$$\begin{cases} b_1 = \left(a + \frac{b^2}{1-a} \right) a_1 + \left(c + \frac{bd}{1-a} \right) a_2 + \left(d + \frac{bc}{1-a} \right) a_3 \cdots (3-20a) \\ b_2 = \left(c + \frac{bd}{1-a} \right) a_1 + \left(e + \frac{d^2}{1-a} \right) a_2 + \left(f + \frac{cd}{1-a} \right) a_3 \cdots (3-20b) \\ b_3 = \left(d + \frac{bc}{1-a} \right) a_1 + \left(f + \frac{cd}{1-a} \right) a_2 + \left(e + \frac{c^2}{1-a} \right) a_3 \cdots (3-20c) \end{cases}$$

此 3-Port S 參數可以表示如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以得到 } [S] = \begin{bmatrix} a + \frac{b^2}{1-a} & c + \frac{bd}{1-a} & d + \frac{bc}{1-a} \\ c + \frac{bd}{1-a} & e + \frac{d^2}{1-a} & f + \frac{cd}{1-a} \\ d + \frac{bc}{1-a} & f + \frac{cd}{1-a} & e + \frac{c^2}{1-a} \end{bmatrix} \cdots (3-21)$$

注意:3-21 與 3-13 與 3-5 式中的表示式完全相同，但是元素中的 a ~ f 的值不相同。

我們想要的 Balun 條件為 $S_{21} = -S_{31}$ ，也就是

$$c + \frac{bd}{1-a} = -(d + \frac{bc}{1-a})$$

$$\Rightarrow (c+d)(1 + \frac{b}{1-a}) = 0$$

$$\Rightarrow (i)c + d = 0 \quad \text{or} \quad (ii) \quad 1 + \frac{b}{1-a} = 0$$

在 (ii) 情形中

$$1 + \frac{b}{1-a} = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$

$$\text{帶入 } S_{11} = a + \frac{b^2}{1-a} = a + b \frac{b}{1-a} = a - b = 1$$

$$\Rightarrow S_{21} = S_{31} = 0$$

此情形並非 balun。

因此我們只要討論 (i) 的情形，也就是推導出 $c + d = 0$ 即是我們想要的 Balun，將 (3-18c) 的值與 (3-18d) 的值帶入，得到

$$c + d$$

$$= \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) + \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = S_{12}^e$$

$$= C + \frac{C(I^2 + T^2) - 2RI(T-1)}{(R-1)^2 - C^2}$$

$$= C[(R-1)^2 - C^2 + I^2 + T^2] - 2RI(T-1)$$

$$(3-22)$$

因此將 (2-13) 中的 R 、 I 、 C 、 T 帶入 (3-22)，會發現結果為 $\hat{Z}_{0e}, \hat{Z}_{0o}, Z_0, r, l$ 所組成的一個複雜多項式，而且無法簡化， $S_{21} = -S_{31}$ 不恆成立，因此我們將在特殊情況下討論。

(A) 我們假設 $R=0$ 、 $I=0$ ，帶回 3-18，得到

$$\begin{cases} a = \frac{T^2}{1-C^4} & b = \frac{T^2 C^2}{1-C^4} & c = C + \frac{T^2 C^3}{1-C^4} \\ d = \frac{T^2 C}{1-C^4} & e = \frac{T^2 C^2}{1-C^4} & f = \frac{T^2}{1-C^4} \end{cases}$$

這裡

$$\begin{cases} C = \frac{\left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} - \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)} \\ T = \frac{2}{2 \cosh(r\ell) + \left(\frac{\hat{Z}_{0e}}{Z_0} + \frac{\hat{Z}_{0o}}{Z_0}\right) \sinh(r\ell)} \end{cases}$$

將 a ~ f 的值帶回(3-13)，得到

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{T^2 - T^4}{1 - T^2 - C^4} & C + \frac{T^2 C^3}{1 - T^2 - C^4} & \frac{T^2 C - T^4 C + T^2 C^3}{1 - T^2 - C^4} \\ C + \frac{T^2 C^3}{1 - T^2 - C^4} & \frac{T^2 C^2}{1 - T^2 - C^4} & \frac{T^2 - T^4 - T^2 C^2}{1 - T^2 - C^4} \\ \frac{T^2 C - T^4 C + T^2 C^3}{1 - T^2 - C^4} & \frac{T^2 - T^4 - T^2 C^2}{1 - T^2 - C^4} & \frac{2T^2 C^2 + T^2 - T^4 C^2 + C^2 - C^6}{1 - T^2 - C^4} \end{bmatrix} \dots (3-23)$$

由 3-23 知 $S_{21} \neq -S_{31}$ ，除非在某個條件下才會使得 $S_{21} = -S_{31}$

(B)除(A)條件外，再假設在沒有損耗(Lossless)且 $\ell = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率的波長)情況下。

將 $T = -j\sqrt{1-C^2}$ 帶入(3-23)，S 參數變成

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1-3C^2+2C^4}{2-C^2-2C^4} & \frac{2C-C^3}{2-C^2-2C^4} & \frac{-(2C-C^3)}{2-C^2-2C^4} \\ \frac{2C-C^3}{2-C^2-2C^4} & \frac{C^4-C^2}{2-C^2-2C^4} & \frac{2C^2-2}{2-C^2-2C^4} \\ \frac{-(2C-C^3)}{2-C^2-2C^4} & \frac{2C^2-2}{2-C^2-2C^4} & \frac{-C^2+2C^4+2C^6-C^8}{2-C^2-2C^4} \end{bmatrix} \dots (3-24)$$

其中 $C = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}$

在此條件下 $S_{21} = -S_{31}$

同時在 $C = \sqrt{2}$ 時， S_{11} 會達到完美的匹配。

但是此情況不可能存在，因為 $|C|^2 \leq 1$

3.4 Type IV Marchand Balun

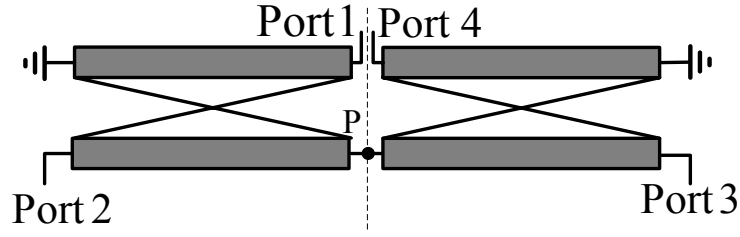


圖 12 4-Port network of Type IV

我們假設 S/C 為 Port4，因此可以變成一個 Port1、Port2 與 Port4、Port3 對稱的 4-Port 網路，如圖 12，虛線為其對稱線。因此可以用 Even/Odd mode 分析此 4-Port 網路

(1) Even mode

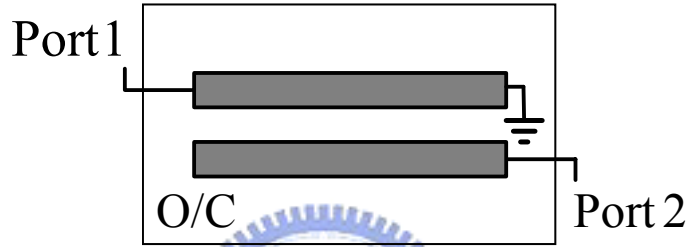


圖 13(a) 4-Port network of Type IV 的 Even Mode

圖 12 中的 P 點將會變成 O/C，此種情形就是將圖 3 中的 Port3 開路、Port4 短路。

所以將此兩 Port 的邊界條件 $\frac{b_3}{a_3} = 1$ 、 $\frac{b_4}{a_4} = -1$ 帶入(2-14c)、(2-14d)中得到

$$\begin{cases} a_3 = Ca_1 + Ta_2 + Ra_3 + Ia_4 \\ -a_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R-1)a_3 - Ia_4 = Ca_1 + Ta_2 \\ -Ia_3 - (R+1)a_4 = Ta_1 + Ca_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{IT - RC - C}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT - T}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \\ a_4 = \frac{IC - RT + T}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IT - RC + C}{R^2 - I^2 - 1} a_2 \end{cases}$$

再將所求得的 a_3, a_4 帶入(2-14a)、(2-14b)，最後得到

$$\begin{aligned} b_1 &= Ra_1 + Ia_2 + C\left(\frac{IT - RC - C}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT - T}{R^2 - I^2 - 1} a_2\right) + T\left(\frac{IC - RT + T}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IT - RC + C}{R^2 - I^2 - 1} a_2\right) \\ &= a_1\left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1}\right) + a_2\left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1}\right) \\ b_2 &= Ia_1 + Ra_2 + T\left(\frac{IT - RC - C}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IC - RT - T}{R^2 - I^2 - 1} a_2\right) + C\left(\frac{IC - RT + T}{R^2 - I^2 - 1} a_1 + \frac{IT - RC + C}{R^2 - I^2 - 1} a_2\right) \\ &= a_1\left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1}\right) + a_2\left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e \\ S_{21}^e & S_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} & I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \\ I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} & R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} \end{bmatrix}$$

注意:此 S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同

(2)Odd mode

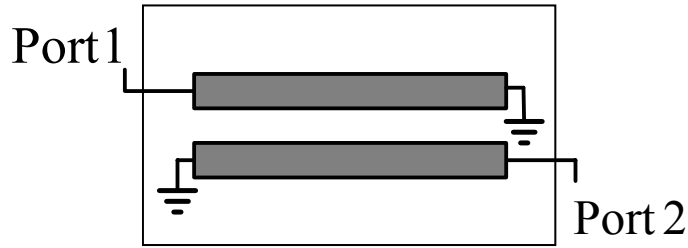


圖 13(b) 4-Port network of Type IV 的 Odd Mode

圖 3.8 中的 P 點將會變成 O/C，此種情形就是將圖 3 中的 Port3、Port4 短路。所以將 $\frac{b_3}{a_3} = -1$ 、 $\frac{b_4}{a_4} = -1$ 帶入(2-14c)、(2-14d)中得到

$$\begin{cases} -a_3 = Ca_1 + Ta_2 + Ra_3 + Ia_4 \\ -a_4 = Ta_1 + Ca_2 + Ia_3 + Ra_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(R+1)a_3 - Ia_4 = Ca_1 + Ta_2 \\ -Ia_3 - (R+1)a_4 = Ta_1 + Ca_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_2 \\ a_4 = \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_2 \end{cases}$$

再將所求得的 a_3, a_4 帶入(2-14a)，(2-14b)，最後得到

$$\begin{aligned} b_1 &= Ra_1 + Ia_2 + C\left(\frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_2\right) \\ &\quad + T\left(\frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2} a_1 + \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2} a_2\right) \\ &= a_1\left(R + \frac{2ICT - (R+1)(C^2 + T^2)}{(R+1)^2 - I^2}\right) + a_2\left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= Ba_1 + Aa_2 + D\left(\frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2}a_1 + \frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2}a_2\right) \\
&\quad + C\left(\frac{IC - RT - T}{(R+1)^2 - I^2}a_1 + \frac{IT - RC - C}{(R+1)^2 - I^2}a_2\right) \\
&= a_1\left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2}\right) + a_2\left(R + \frac{2ICT - (R+1)(C^2 + T^2)}{(R+1)^2 - I^2}\right)
\end{aligned}$$

重寫 a、b 關係如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} S_{11}^o & S_{12}^o \\ S_{21}^o & S_{22}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} & I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \\ I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} & R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \end{bmatrix}$$

注意:此 S 參數中的 R、I、C、T 與 2-13 的 R、I、C、T 相同

(3)再一次由 Even Mode & Odd Mode 和差運算可得 S 參數為

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) & \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) \\ \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) & \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) \end{bmatrix} \dots (2-25)$$

注意: 此式同(3-1)，因為 Port 的定義順序相同

這裡

$$\begin{aligned}
S_{11} &= S_{44} = \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) = a \\
&= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-26a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{14} &= S_{41} = \frac{1}{2}(S_{11}^e - S_{11}^o) = b \\
&= \frac{1}{2}\left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2}\right)\right] \quad (3-26b)
\end{aligned}$$

$$S_{12} = S_{43} = \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e + S_{21}^o) = S_{34} = S_{21} = c$$

$$= \frac{1}{2} \left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} + \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] \quad (3-26c)$$

$$S_{13} = S_{42} = \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = \frac{1}{2}(S_{21}^e - S_{21}^o) = S_{24} = S_{31} = d$$

$$= \frac{1}{2} \left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} - \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] \quad (3-26d)$$

$$S_{22} = S_{33} = \frac{1}{2}(S_{22}^e + S_{22}^o) = e$$

$$= \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] \quad (3-26e)$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2}(S_{22}^e - S_{22}^o) = f$$

$$= \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] \quad (3-26f)$$

注意:(3-2), (3-10), (3-18), (3-26)中的 a~f 不相同

因此 S 參數可以重新表示為



$$[S] = \begin{bmatrix} a & c & d & b \\ c & e & f & d \\ d & f & e & c \\ b & d & c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 = aa_1 + ca_2 + da_3 + ba_4 \cdots (3-27a) \\ b_2 = ca_1 + ea_2 + fa_3 + da_4 \cdots (3-27b) \\ b_3 = da_1 + fa_2 + ea_3 + ca_4 \cdots (3-27c) \\ b_4 = ba_1 + da_2 + ca_3 + aa_4 \cdots (3-27d) \end{cases}$$

令 Port4 為短路邊界條件，得到 $\frac{b_4}{a_4} = -1$ ，帶入(3-27d)中，得到

$$a_4 = \frac{-b}{1+a} a_1 + \frac{-d}{1+a} a_2 + \frac{-c}{1+a} a_3$$

，再將此式子帶入(3-27a)，(3-27b)，(3-27c)

最後得到

$$\begin{cases} b_1 = (a - \frac{b^2}{1+a})a_1 + (c - \frac{bd}{1+a})a_2 + (d - \frac{bc}{1+a})a_3 \cdots (3-28a) \\ b_2 = (c - \frac{bd}{1+a})a_1 + (e - \frac{d^2}{1+a})a_2 + (f - \frac{cd}{1+a})a_3 \cdots (3-28b) \\ b_3 = (d - \frac{bc}{1+a})a_1 + (f - \frac{cd}{1+a})a_2 + (e - \frac{c^2}{1+a})a_3 \cdots (3-28c) \end{cases}$$

此 3-Port S 參數可以表示如下

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

S matrix 如下

$$[S] = \begin{bmatrix} a - \frac{b^2}{1+a} & c - \frac{bd}{1+a} & d - \frac{bc}{1+a} \\ c - \frac{bd}{1+a} & e - \frac{d^2}{1+a} & f - \frac{cd}{1+a} \\ d - \frac{bc}{1+a} & f - \frac{cd}{1+a} & e - \frac{c^2}{1+a} \end{bmatrix} \cdots (3-29)$$

我們想要的 Balun 條件為 $S_{21} = -S_{31}$ ，也就是

$$c - \frac{bd}{1+a} = -(d - \frac{bc}{1+a})$$

$$\Rightarrow (c+d)(1 - \frac{b}{1+a}) = 0$$

$$\Rightarrow (i)c+d=0 \quad \text{or} \quad (ii) \quad 1 - \frac{b}{1+a} = 0$$

在 (ii) 情形中

$$1 - \frac{b}{1+a} = 0$$

$$\Rightarrow a - b = -1$$

$$\Rightarrow S_{11} = a - \frac{b^2}{1+a} = a - b \frac{b}{1+a} = a - b = -1$$

$$\Rightarrow S_{21} = S_{31} = 0$$

此情形並非 balun。

因此我們只要討論 (i) 的情形，也就是推導出 $c+d=0$ 即是我們想要的 Balun，將(3-26c)與(3-26d)帶入，得到

$c + d$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(S_{12}^e + S_{12}^o) + \frac{1}{2}(S_{12}^e - S_{12}^o) = S_{12}^e = I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \\
 &= \frac{I(R^2 + C^2 + T^2 - I^2 - 1) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} \quad (3-30)
 \end{aligned}$$

(3-30)與(3-6)完全一樣，將(2-13)中的 R 、 I 、 C 、 T 帶入(3-30)，因此也將得到 $c + d = 0$ ， $S_{21} = -S_{31}$ 恆成立，此為一 Balun

我們將在特殊情況下討論。

(A) 我們利用 2.4.1 節的條件，假設 $R=0$ 、 $I=0$ ，這使得(3-30)成立。將 $R=0$ 、 $I=0$ 帶入(3-26)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = -T^2 \\ b = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 + T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = C^2 \\ c = \frac{1}{2} \left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} + \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = -TC \\ d = \frac{1}{2} \left[I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2RCT}{R^2 - I^2 - 1} - \left(I + \frac{I(C^2 + T^2) - 2(R+1)CT}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = TC \\ e = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} + \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = -C^2 \\ f = \frac{1}{2} \left[R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) + C^2 - T^2}{R^2 - I^2 - 1} - \left(R + \frac{2ICT - R(C^2 + T^2) - C^2 - T^2}{(R+1)^2 - I^2} \right) \right] = T^2 \end{cases}$$

帶回(3-29)，得到

$$[S] = \begin{bmatrix} -T^2 - \frac{C^4}{1-T^2} & -TC - \frac{TC^3}{1-T^2} & TC + \frac{TC^3}{1-T^2} \\ -TC - \frac{TC^3}{1-T^2} & -C^2 - \frac{T^2C^2}{1-T^2} & T^2 + \frac{T^2C^2}{1-T^2} \\ TC + \frac{TC^3}{1-T^2} & T^2 + \frac{T^2C^2}{1-T^2} & -C^2 - \frac{T^2C^2}{1-T^2} \end{bmatrix} \dots (3-31)$$

由上面矩陣可以看出即使在有損耗的情況下 S_{21} 與 S_{31} 仍然是保持反相的。

(B) 除(A)條件外，再假設沒有損耗(Lossless)且 $\ell = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率的波長)。將

$T = -j\sqrt{1-C^2}$ 帶入(3-31)， S 參數變成

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{2-3C^2}{2-C^2} & j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{2-C^2} & -j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{2-C^2} \\ j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{2-C^2} & \frac{-C^2}{2-C^2} & \frac{2C^2-2}{2-C^2} \\ -j\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{2-C^2} & \frac{2C^2-2}{2-C^2} & \frac{-C^2}{2-C^2} \end{bmatrix} \dots (3-32)$$

當 $C = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 時， S_{11} 將會達到完美匹配，此時 $S_{21} = -S_{31} = j\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\text{利用此兩式 } \begin{cases} \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ Z_0^2 = Z_{0e}Z_{0o} \end{cases} \text{，可以得到 } \begin{cases} Z_{0e} - Z_{0o} = \sqrt{8}Z_0 \\ Z_{0e} + Z_{0o} = \sqrt{12}Z_0 \end{cases}$$

因此可以得到 Z_{0e} 與 Z_{0o} 的值如下

$$\begin{cases} Z_{0e} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})Z_0 = 3.146Z_0 \\ Z_{0o} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})Z_0 = 0.318Z_0 \end{cases}$$

從以上的分析，Type I、Type IV 既使在損耗情況與 R(Reflection) 不為零的情況，其 Port2，Port3 依然維持著功率大小一樣且相位差 180° 的現象。而 Type II 只有在 R(反射係數) 為與非損耗且 $l = \frac{\lambda}{4}$ (@中心頻率) 時才會維持著功率大小一樣且相位差 180° 。Type III 則完全不適用。表 1 為四種 type 的比較。我們將在第四章，利用 Matlab 軟體帶入合理的 R、L、G、C 模擬 Type I、Type IV 結果。

Type Condition	I	II	III	IV
General condition	$S_{21} = -S_{31}$	$S_{21} \neq -S_{31}$	$S_{21} \neq -S_{31}$	$S_{21} = -S_{31}$
input impedance match (R=0)	$S_{21} = -S_{31}$	$S_{21} \neq -S_{31}$	$S_{21} \neq -S_{31}$	$S_{21} = -S_{31}$
Lossless $\alpha = 0$ & $R = 0$	$S_{21} = -S_{31}$	$S_{21} \neq -S_{31}$	$S_{21} \neq -S_{31}$	$S_{21} = -S_{31}$
$R = 0$ & $\alpha = 0$ & $l = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率波長)	$S_{21} = -S_{31}$	$S_{21} = -S_{31}$	$S_{21} = -S_{31}$	$S_{21} = -S_{31}$
$R = 0$ & $\alpha = 0$ & $l = \frac{\lambda}{4}$ (λ 為中心頻率波長) 且 $S_{11} = 0$	$C = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $= -4.8dB$	$C = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $= -3dB$	$C = \sqrt{2}$ Impossible	$C = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $= -1.8dB$

表 1 Type I~IV compare table

第四章

Marchand Balun Matlab 分析結果



由上一章的分析結果可知，只有 Type I 與 Type IV 比較適合用在 Balun 的電路中，因此本章將針對此兩種 Marchand Balun 進行模擬。我們將各假設五種條件並用 Matlab 畫出 S_{21} 與 S_{31} 的關係，以驗證理論推導是否成立。

下列為一組實際所量測的 RLCG 值

$$R=161 \times 10^2 \text{ Ohm/m}$$

$$L=7.47 \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$G=0.03 \times 10^2 \text{ S/m}$$

$$C=1.28 \times 10^{-10} \text{ F/m}$$

由此 RLGC 值，利用下面兩個式子，可以求出傳播係數與特性阻抗

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}。$$

這裡，我們將以中心頻率 15GHz 為討論基礎(此時的 $l = \frac{\lambda}{4} = 1704 \times 10^{-6} \text{ m}$)。

此外也假設 Z_{0e}, Z_{0o} 的值，畫出 100MHz 到 30GHz 的 S_{21} 與 S_{31} 的 Magnitude 與 Phase 的關係，以及 S_{11} 的 Magnitude。

4.1 Type I

4.1.1 我們將先假設最完美的情況，也就是 R (Reflection) 為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、非損耗性(即 RLGC 中的 $R=G=0$)，同時假設 $S_{11}=0$ ，我們可以得到

$$Z_{0e} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} Z_0 = 1.932 Z_0, \quad Z_{0o} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} Z_0 = 0.518 Z_0$$

將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖 14(a)(b)(c)，14(d) 為 S_{11} 的 magnitude.

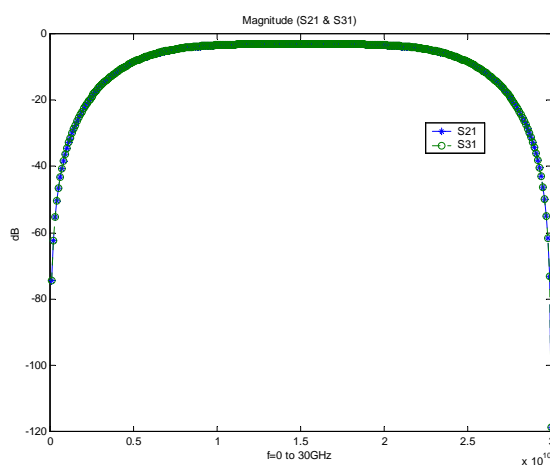


圖 14(a) Magnitude of S_{21} and S_{31}

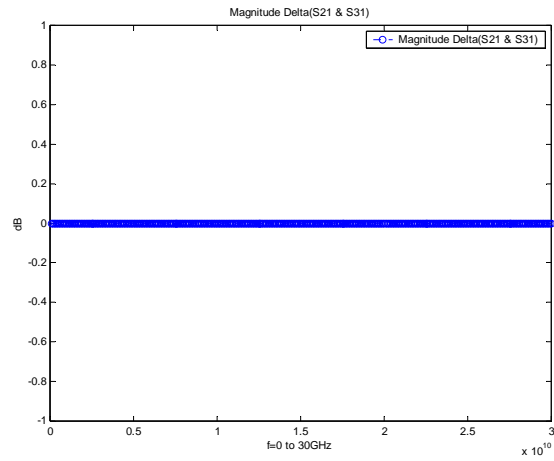


圖 14(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$

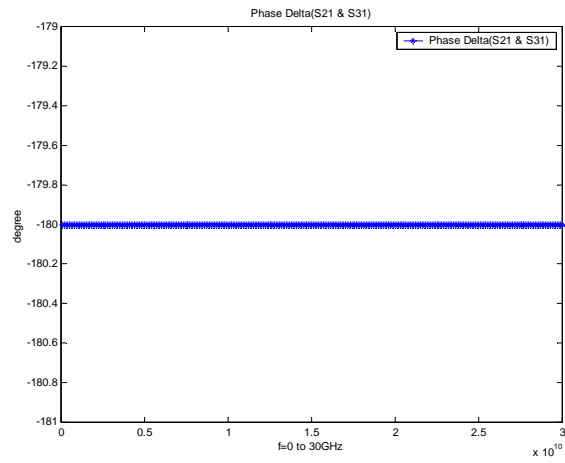


圖 14(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$

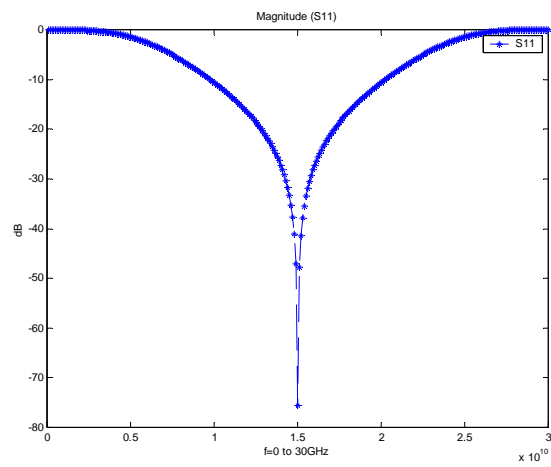


圖 14(d) Magnitude of S_{11}

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -3.0103dB，但是相位差 180° 。我們得到

$|S_{21}| = |S_{31}| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ @15GHz，從圖 14(b)與 14(c)知，此條件下的 Marchand balun 在任何頻率

點， S_{21} 恆等於 $-S_{31}$

3dB 頻寬: 6.3GHz~23.7GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{23.7}{6.3} = 3.762 \text{ (3dB 頻寬最高頻率與最低頻率的比值)}$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{23.7-6.3}{15} = 1.16 \text{ (3dB 頻寬與中心頻率的比值)}$$

從圖 14(d)很明顯 $S_{11} = 0$ @15GHz

4.1.2 假設耦合係數 $C = \frac{1}{2}$ ($S_{11} = 0.2$)，其餘條件同(1)

得到 $Z_{0e} = \sqrt{3}Z_0$ ， $Z_{0o} = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_0$ 將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖 15(a)(b)(c)，15(d)

為 S_{11} 的 magnitude。

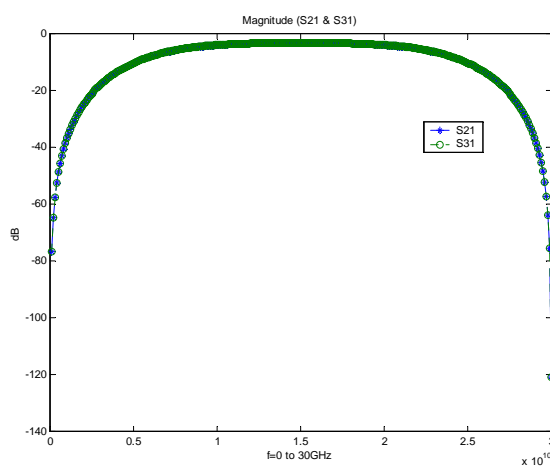


圖 15(a) Magnitude of S_{21} and S_{31}

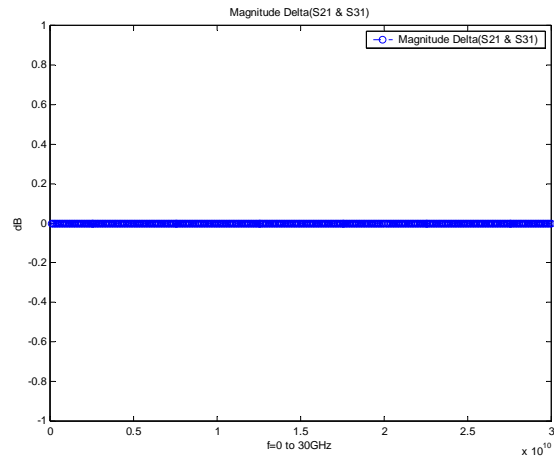


圖 15(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$

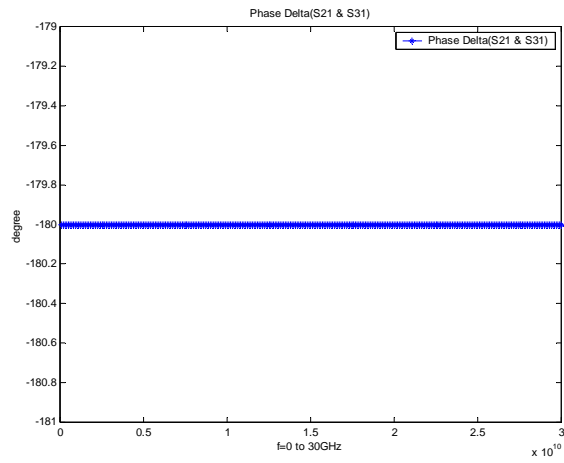


圖 15(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$

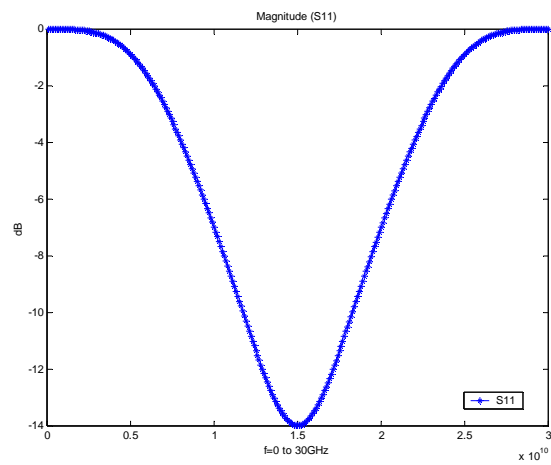


圖 15(d) Magnitude of S_{11}

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -3.1876dB，但是相位差為 180°

此時的 S_{21} 與 S_{31} 不再等於 -3.0103dB，這是因為 S_{11} 不等於零所造成。從圖 15(b)與 15(c) 知，既使 S_{11} 不為零的條件下 S_{21} 恆等於 $-S_{31}$ ，只會影響它們的 Magnitude。

3dB 頻寬: 7.2GHz~22.8GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{22.8}{7.2} = 3.167 \text{ (3dB 頻寬最高頻率與最低頻率的比值)}$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{22.8 - 7.2}{15} = 1.04$$

4.1.3 Lossy condition I，假設 R (Reflection) 為零 (即 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性 ($R, G \neq 0$)，並假

設 $Z_{0e} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} Z_0 = 1.932Z_0$ ， $Z_{0o} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} Z_0 = 0.518Z_0$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31}

的關係如圖 16(a)(b)(c)，16(d) 為 S_{11} 的 magnitude。

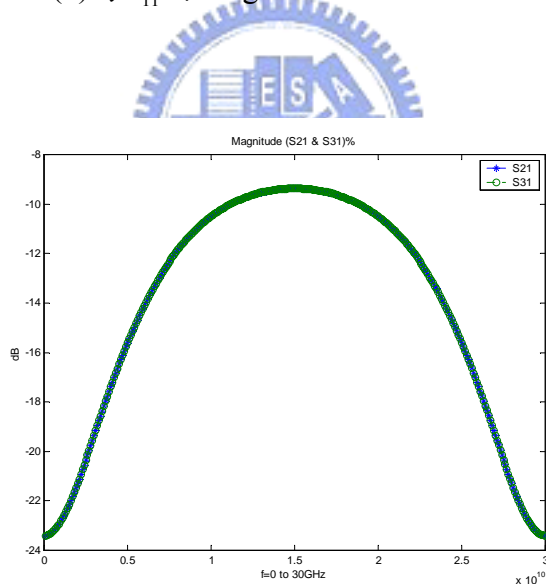


圖 16(a) Magnitude of S_{21} and S_{31} at Lossy condition I

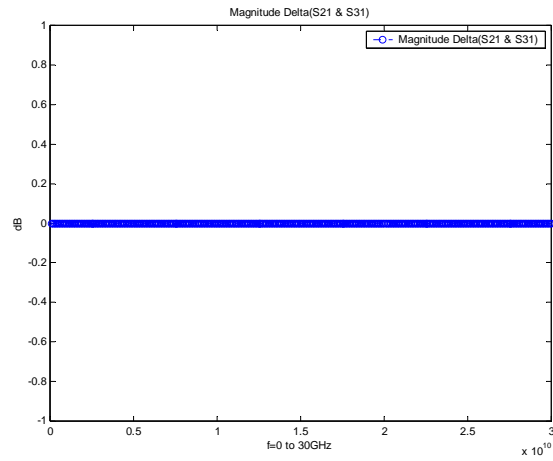


圖 16(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition I

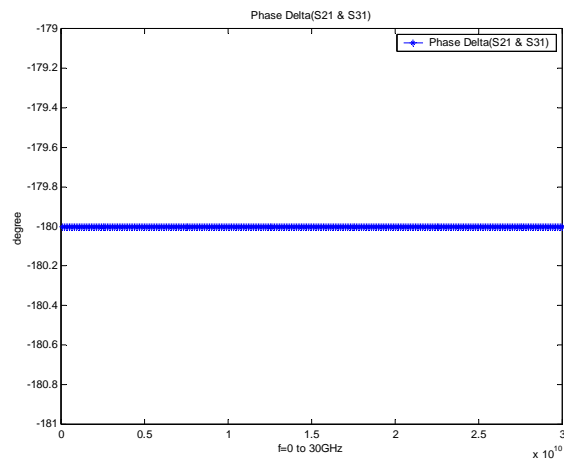


圖 16(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition I

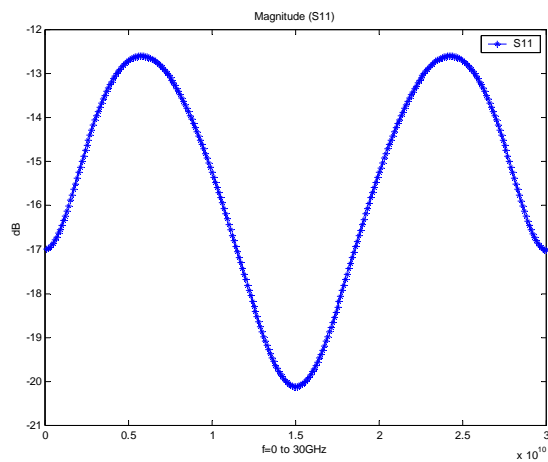


圖 16(d) Magnitude of S_{11} at Lossy condition I

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -9.3732dB，相位差為 180°

從圖 16(b)與 16(c)知， S_{21} 恆等於 $-S_{31}$

3dB 頻寬: 7.5GHz~22.5GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{22.5}{7.5} = 3$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{22.5 - 7.5}{15} = 1$$

4.1.4 Lossy condition II，假設 R (Reflection) 為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性($R, G \neq 0$)，

並假設 $\begin{cases} Z_{0e} = \sqrt{3}Z_0 \\ Z_{0o} = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_0 \end{cases}$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖 17(a)(b)(c)，17(d)為 S_{11}

的 magnitude。

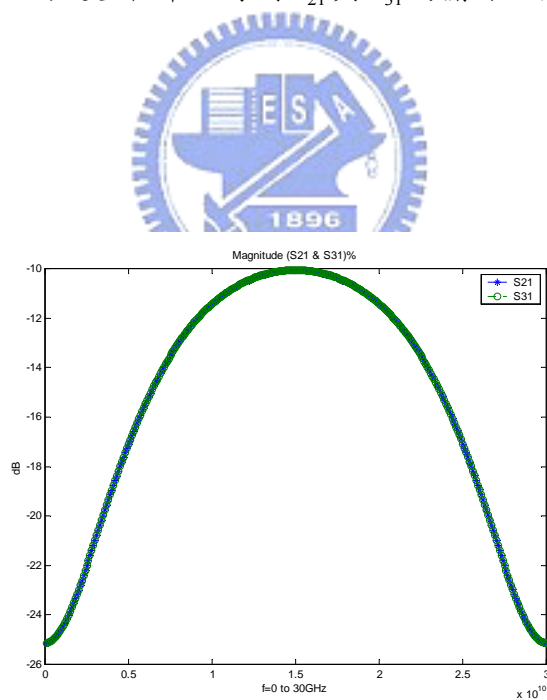


圖 17(a) Magnitude of S_{21} and S_{31} at Lossy condition II

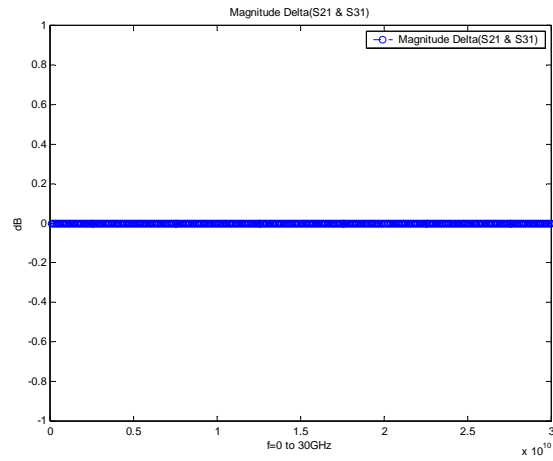


圖 17(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition II

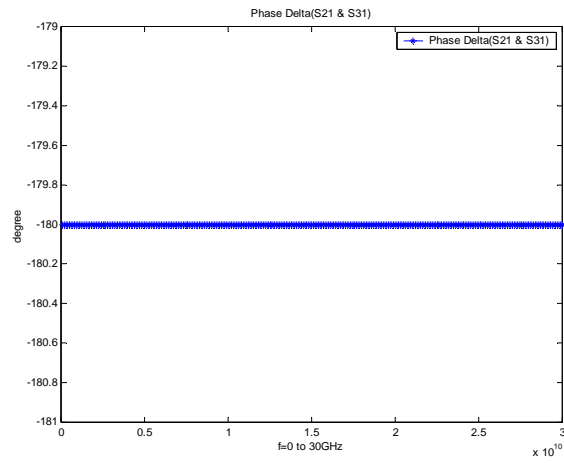


圖 17(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition II

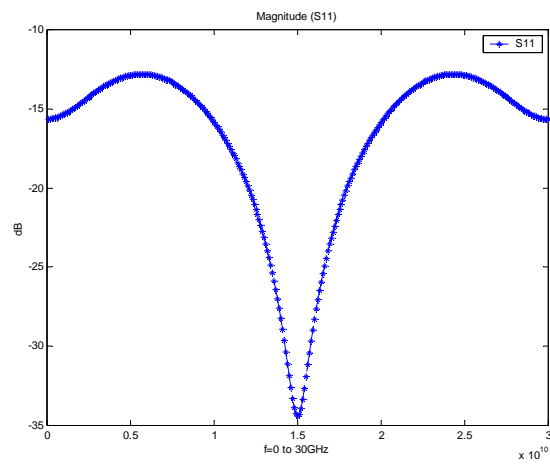


圖 17(d) Magnitude of S_{11} at Lossy condition II

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -10.0669dB，但是相位差為 180° 。從圖 17(b)與 17(c)知， S_{21} 恆等於 $-S_{31}$

既使傳輸線為損耗，依然可以維持 S_{21} 恆等於 $-S_{31}$ 。

3dB 頻寬: 4.5GHz~25.5GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{25.5}{4.5} = 5.67$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{25.5 - 4.5}{15} = 1.4$$

4.1.5 Lossy condition III，假設 R (Reflection) 為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性(R、G $\neq 0$)

，並假設 $\begin{cases} Z_{0e} = Z_0 \times (1.7858 - j0.4897) \\ Z_{0o} = Z_0 / (1.7858 - j0.4897) \end{cases}$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖

18(a)(b)(c)，18(d)為 S_{11} 的 magnitude。

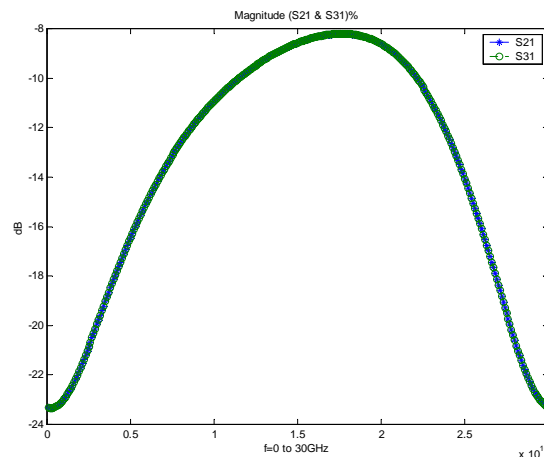


圖 18(a) Magnitude of S_{21} and S_{31} at Lossy condition III

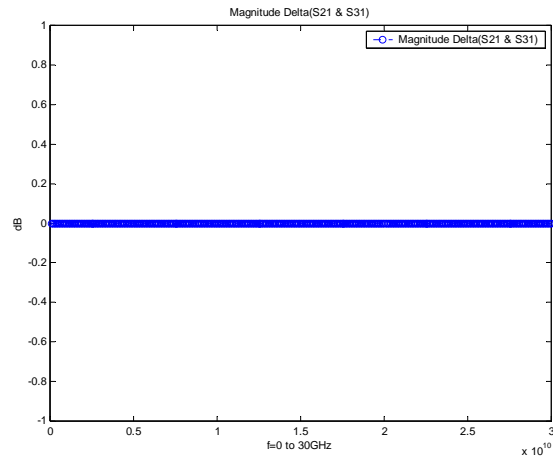


圖 18(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition III

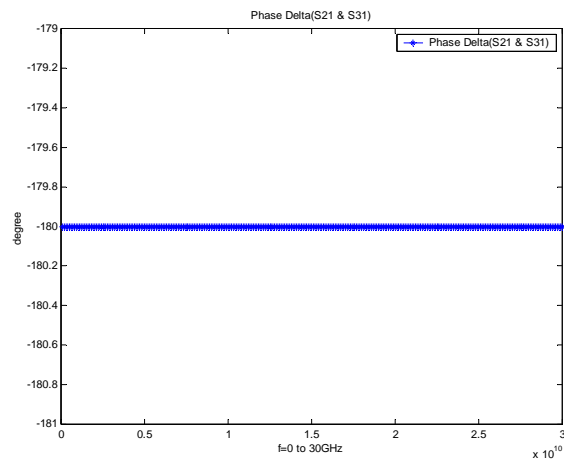


圖 18(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition III

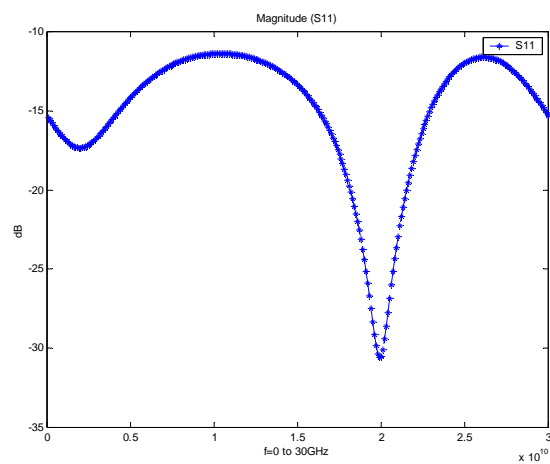


圖 18(d) Magnitude of S_{11} at Lossy condition III

S_{21} 與 S_{31} 的 Magnitude 為 $-8.5759@15\text{GHz}$ ， $-8.1999\text{ dB}@17.6\text{GHz}$ ，而相位差皆為 180° 。
 既使傳輸線為損耗且 R (Reflection) 不為零，依然可以維持 S_{21} 恆等於 $-S_{31}$ 。

3dB 頻寬: $8.0\text{GHz}\sim 22\text{GHz}$

$$\frac{f_{\text{H3dB}}}{f_{\text{L3dBc}}} = \frac{23.2}{9.7} = 2.3918$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{23.2 - 9.7}{15} = 0.9$$

4.1.6 假設 R (Reflection) 為零 (即 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性 ($R, G \neq 0$)，並假設

$$Z_{0e} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} Z_0 = 1.932 Z_0, \quad Z_{0o} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} Z_0 = 0.518 Z_0。$$

為了探討 Even mode 與 Odd Mode 不相等 ($\gamma_e \neq \gamma_o$) 時， S_{21} 與 S_{31} 的關係改變多少，我們將分別假設 $\gamma_e = 1.1\gamma_o$ 與 $\gamma_e = 0.9\gamma_o$ 的情況。

其結果分別為圖 19(a) 與 19(b)

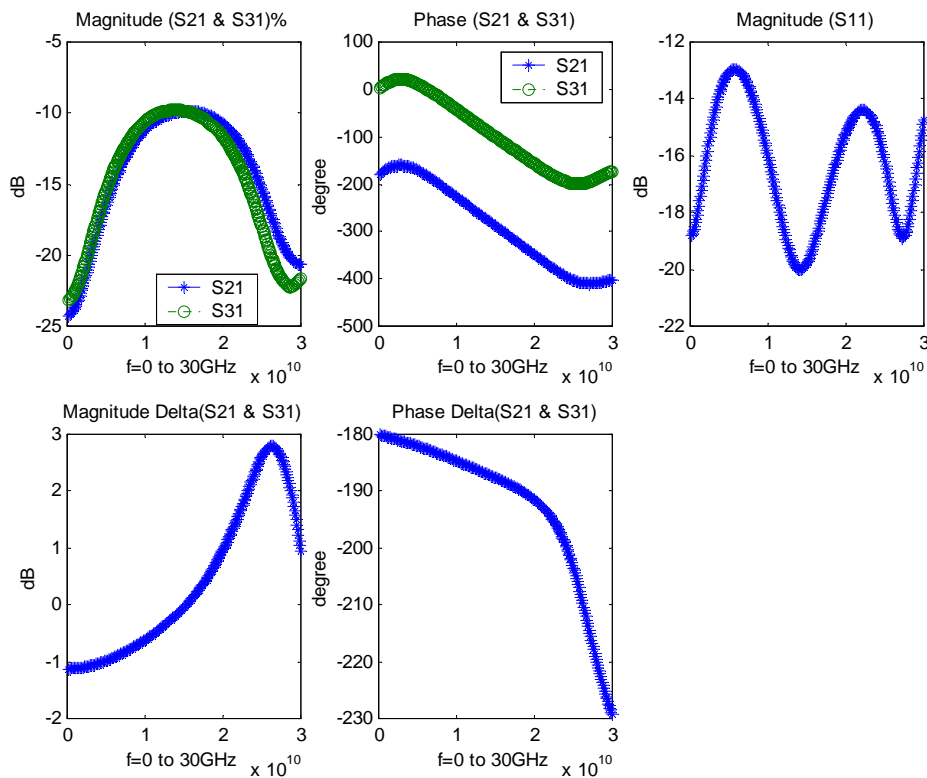
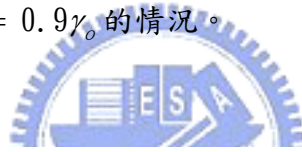


圖 19(a) Magnitude and Phase of S_{21} and S_{31} 、Magnitude of S_{11}

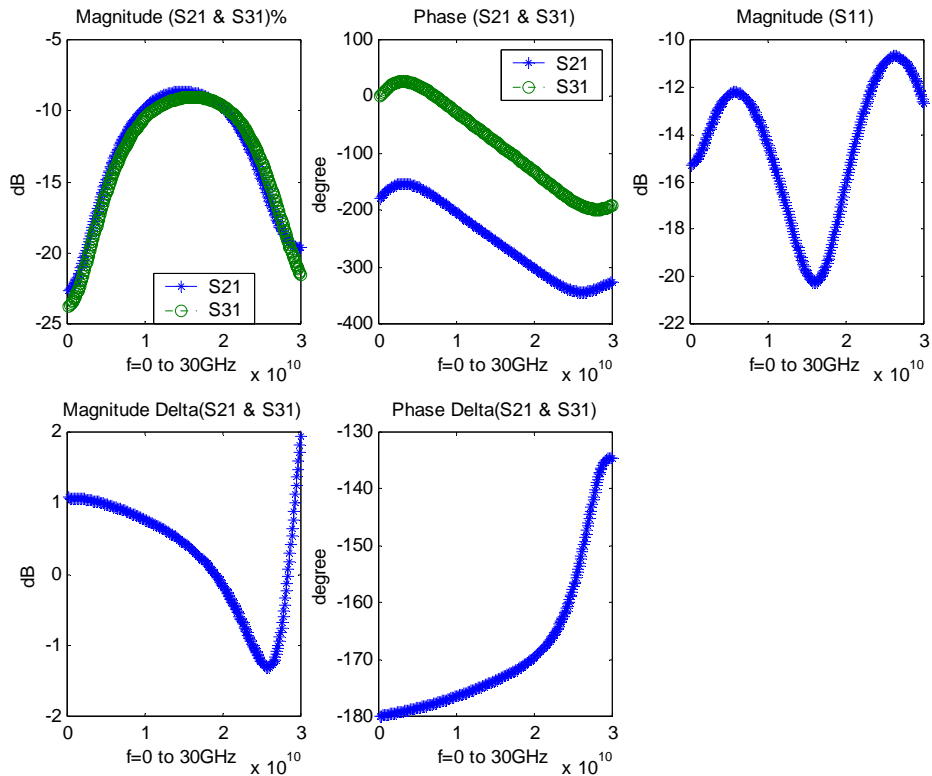


圖 19(b) Magnitude and Phase of S_{21} and S_{31} 、Magnitude of S_{11}

由 19(a)與(b)很明顯可知 S_{31} 不再等於 $-S_{21}$ 。

4.2 Type IV

4.2.1 我們將先假設最完美的情況，也就是輸入阻抗匹配(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)，非損耗

性(即 RLGC 中的 $R=G=0$)，同時假設 $S_{11}=0$ (耦合係數 $C=\sqrt{\frac{2}{3}}$)，我們可以得到

$Z_{0e} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})Z_0$ ， $Z_{0o} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})Z_0$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖

20(a)(b)(c)，20(d)為 S_{11} 的 magnitude。

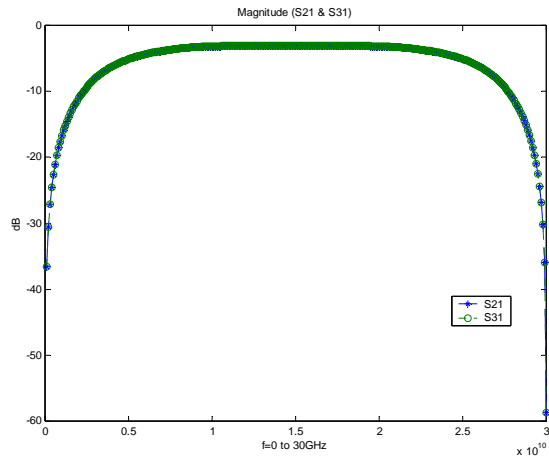


圖 20(a) Magnitude of S_{21} and S_{31}

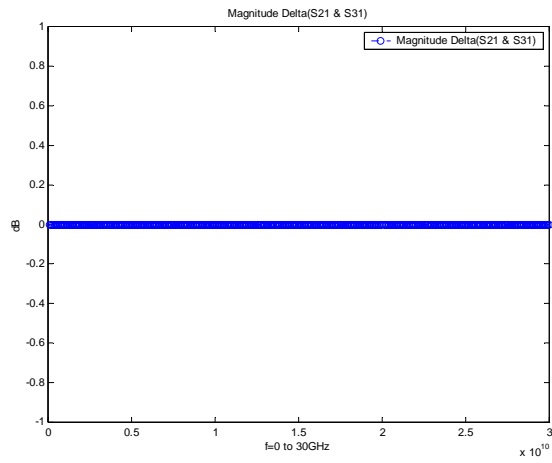


圖 20(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$

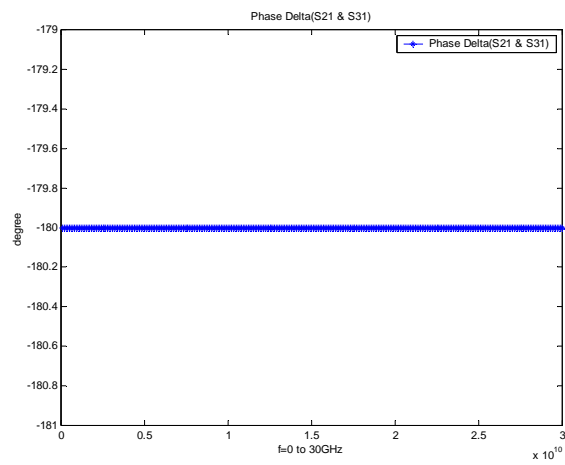


圖 20(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$

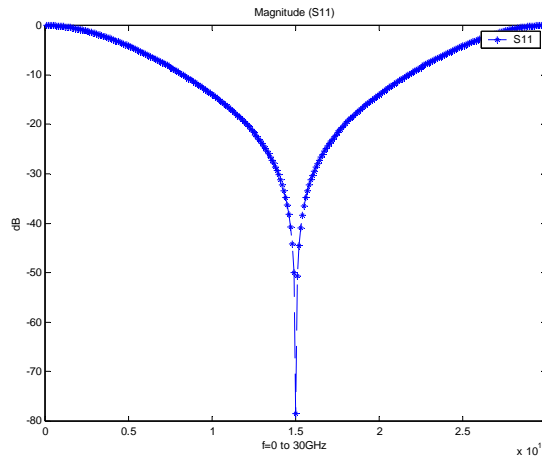


圖 20(d) Magnitude of S_{11}

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -3.0103dB，但是相位相差 180° 。我們得到

$|S_{21}| = |S_{31}| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ @15GHz，從圖 20(b)與 20(c)知，此條件下的 Marchand balun 在任何頻率

點 S_{21} 恆等於 $-S_{31}$

3dB 頻寬: 4.2GHz~25.8GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{25.8}{4.2} = 6.14$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{25.8 - 4.2}{15} = 1.44$$



4.2.2 假設耦合係數 $C = \frac{1}{2}$ ($S_{11} = \frac{5}{7}$)，其餘條件同(1)

得到 $Z_{0e} = \sqrt{3}Z_0$ ， $Z_{0o} = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_0$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖 21(a)(b)(c)，21(d)

為 S_{11} 的 magnitude。

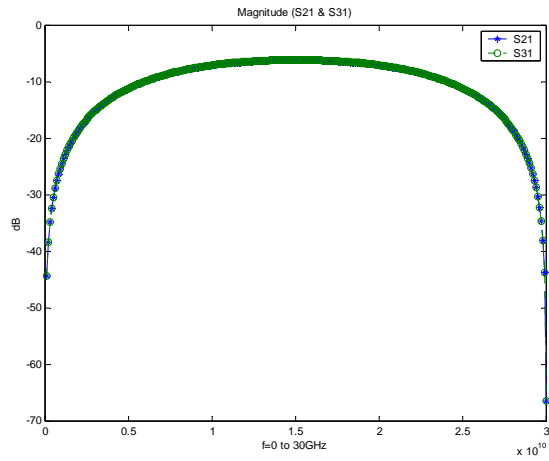


圖 21(a) Magnitude of S_{21} and S_{31}

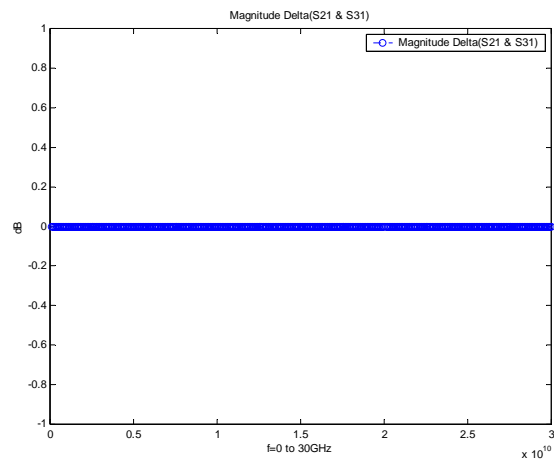


圖 21(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$

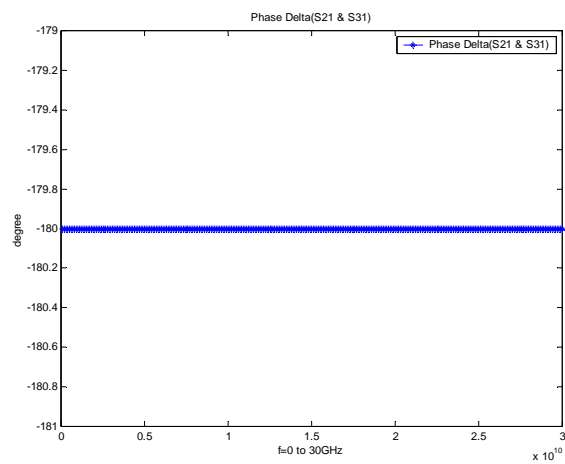


圖 21(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$

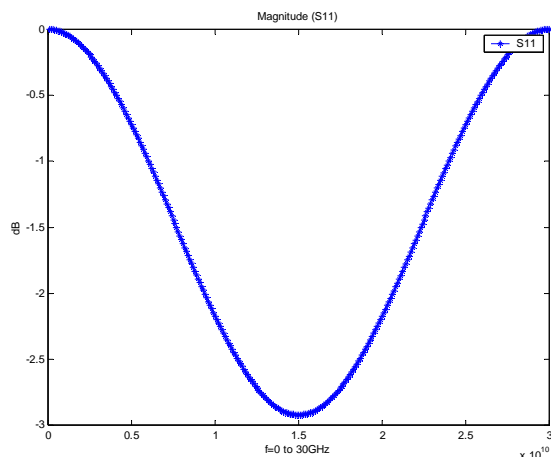


圖 21(d) Magnitude of S_{11}

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -6.1101dB，且相位差為 180° 。從圖 21(b)與 21(c) 知，既使 S_{11} 不為零的條件下， S_{21} 恆等於 $-S_{31}$ ，這只會影響它們的 Magnitude。

3dB 頻寬: 6.8GHz~23.2GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{23.2}{6.8} = 3.41 \quad , \quad \frac{\Delta f}{f_c} = \frac{23.2 - 6.8}{15} = 1.09$$

4.2.3 Lossy condition I, 假設 R (Reflection) 為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性(R、G $\neq 0$)，

並假設 $\begin{cases} Z_{0e} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})Z_0 \\ Z_{0o} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})Z_0 \end{cases}$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖 22(a)(b)(c)，22(d)為

S_{11} 的 magnitude。

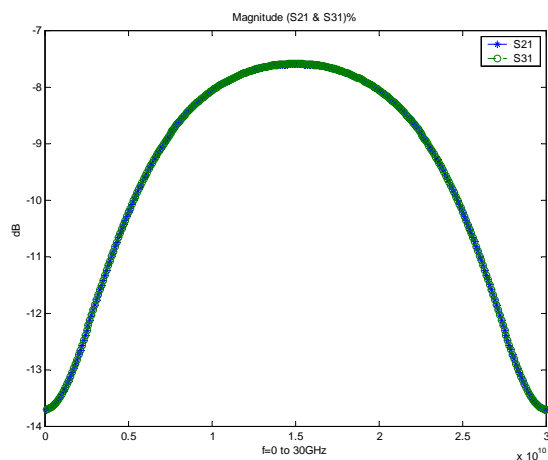


圖 22(a) Magnitude of S_{21} and S_{31} at Lossy condition I

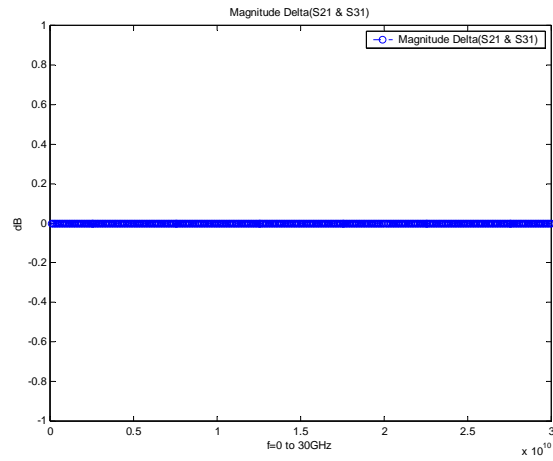


圖 22(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition I

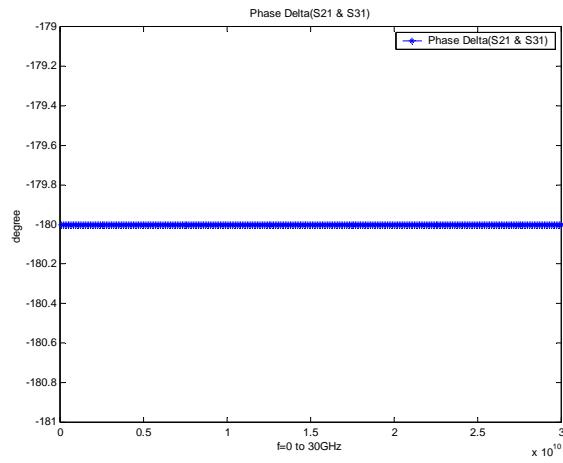


圖 22(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition I

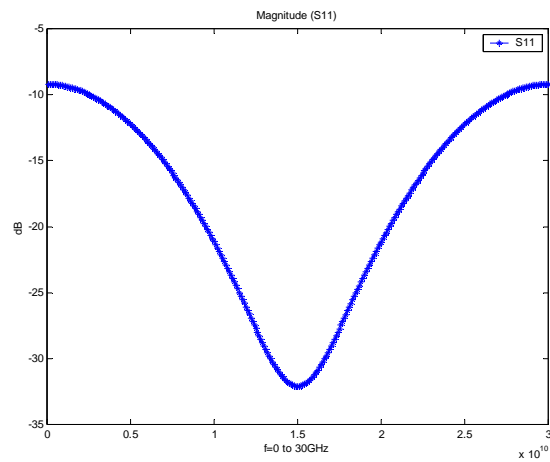


圖 22(d) Magnitude of S_{11} at Lossy condition I

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -7.5861dB，相位差為 180° 。從圖 22(b)與 22(c) 知， S_{21} 恆等於 $-S_{31}$

3dB 頻寬: 3.5GHz~26.5GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dB}} = \frac{25.5}{4.5} = 5.67$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{25.5 - 4.5}{15} = 1.4$$

4.2.4 Lossy condition II，假設 R (Reflection) 為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性(R、G $\neq 0$)，

並假設 $\begin{cases} Z_{0e} = \sqrt{3}Z_0 \\ Z_{0o} = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_0 \end{cases}$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖 23(a)(b)(c)，23(d)為 S_{11}

的 magnitude。

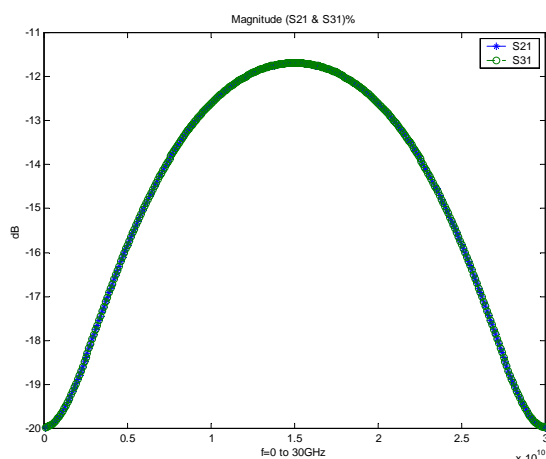


圖 23(a) Magnitude of S_{21} and S_{31} at Lossy condition II

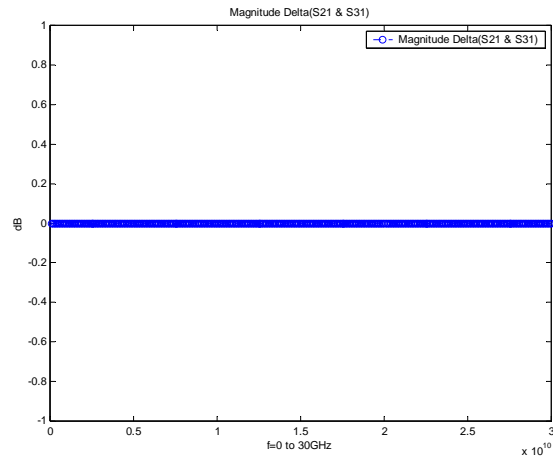


圖 23(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition II

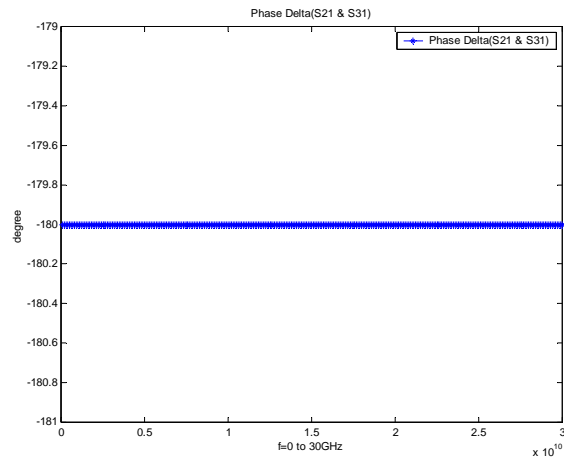


圖 23 (c) Phase of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition II

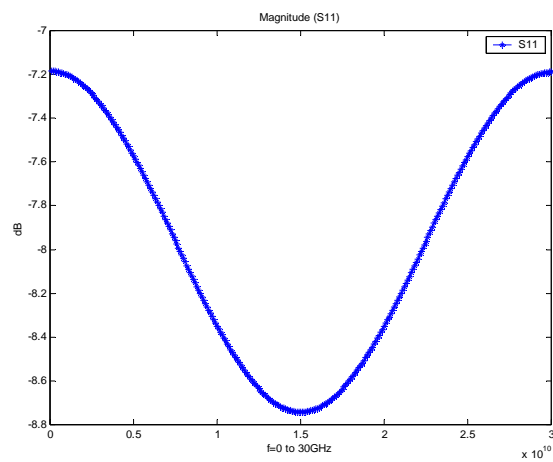


圖 23 (d) Magnitude of S_{11} at Lossy condition II

S_{21} 與 S_{31} 在 15GHz 時的 Magnitude 皆為 -7.5861dB，但是相位差為 180°

。由此可知，既使傳輸線為損耗，依然可以維持 S_{21} 恆等於 $-S_{31}$

3dB 頻寬: 4.5GHz~25.5GHz

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{25.5-4.5}{15} = 1.4$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{25.5-4.5}{15} = 1.4$$

4.2.5 Lossy condition III，假設 R (Reflection) 為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性(R、G $\neq 0$)

，並假設 $\begin{cases} Z_{0e} = Z_0 \times (2.8333 - j1.1424) \\ Z_{0o} = Z_0 / (2.8333 - j1.1424) \end{cases}$ ，將這些值帶回得到 S_{21} 與 S_{31} 的關係如圖

24(a)(b)(c)，24(d)為 S_{11} 的 magnitude。

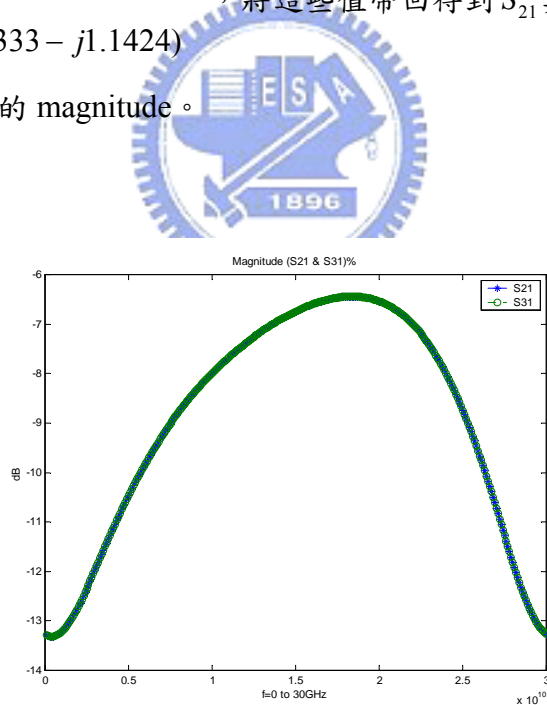


圖 24(a) Magnitude of S_{21} and S_{31} at Lossy condition III

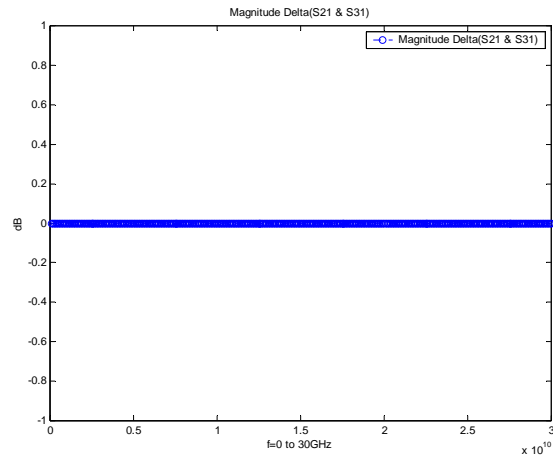


圖 24(b) Magnitude of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition III

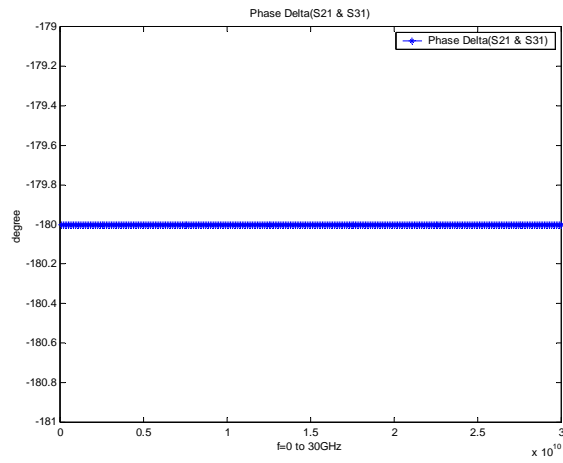


圖 24(c) Phase of $S_{21} - S_{31}$ at Lossy condition III

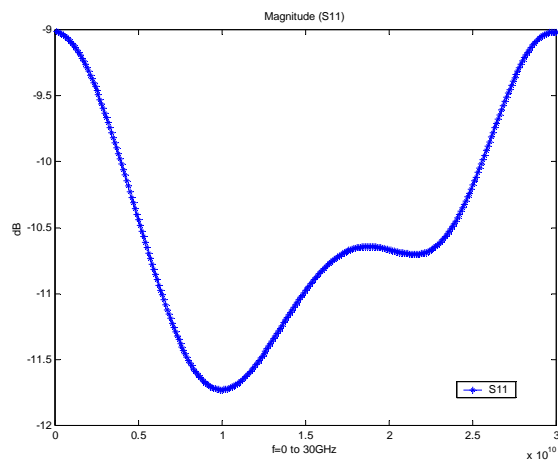


圖 24(d) Magnitude of S_{11} at Lossy condition III

在此條件下， S_{21} 與 S_{31} 峰值將往右移至 18.4GHz

S_{21} 與 S_{31} 的 Magnitude 為 -6.7430dB@ 15GHz，-6.4405dB@ 18.4GHz，而相位差皆為 180° 。即使傳輸線為損耗且 R (Reflection)不為零，依然可以維持 S_{21} 恆等於 $-S_{31}$ 。

3dB 頻寬: 4.3GHz~25.7GHz

$$\frac{f_{H3dB}}{f_{L3dBc}} = \frac{25.7}{4.3} = 5.9767$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{25.7 - 6.7}{15} = 1.27$$

4.2.6 假設 R (Reflection)為零(可以得到 $\frac{Z_{0e}}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_{0o}}$)、損耗性(R、G \neq 0)，並假設

$$\begin{cases} Z_{0e} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})Z_0 \\ Z_{0o} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})Z_0 \end{cases}, \text{為了探討 Even mode 與 Odd Mode 不相等} (\gamma_e \neq \gamma_o) \text{時, } S_{21} \text{ 與 } S_{31} \text{ 的}$$

關係改變多少，我們將分別假設 $\gamma_e = 1.1\gamma_o$ 與 $\gamma_e = 0.9\gamma_o$ 的情況，其結果分別為圖 25(a) 與 25(b)。

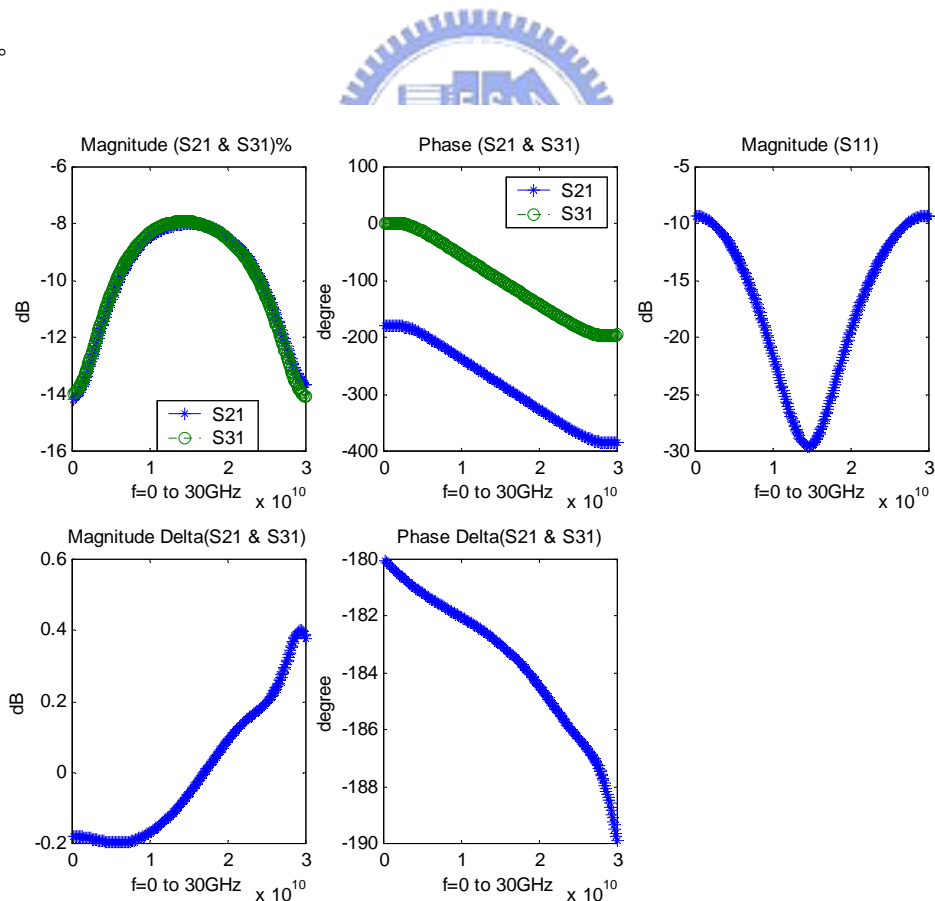


圖 25(a) Magnitude and Phase of S_{21} and S_{31} 、Magnitude of S_{11}

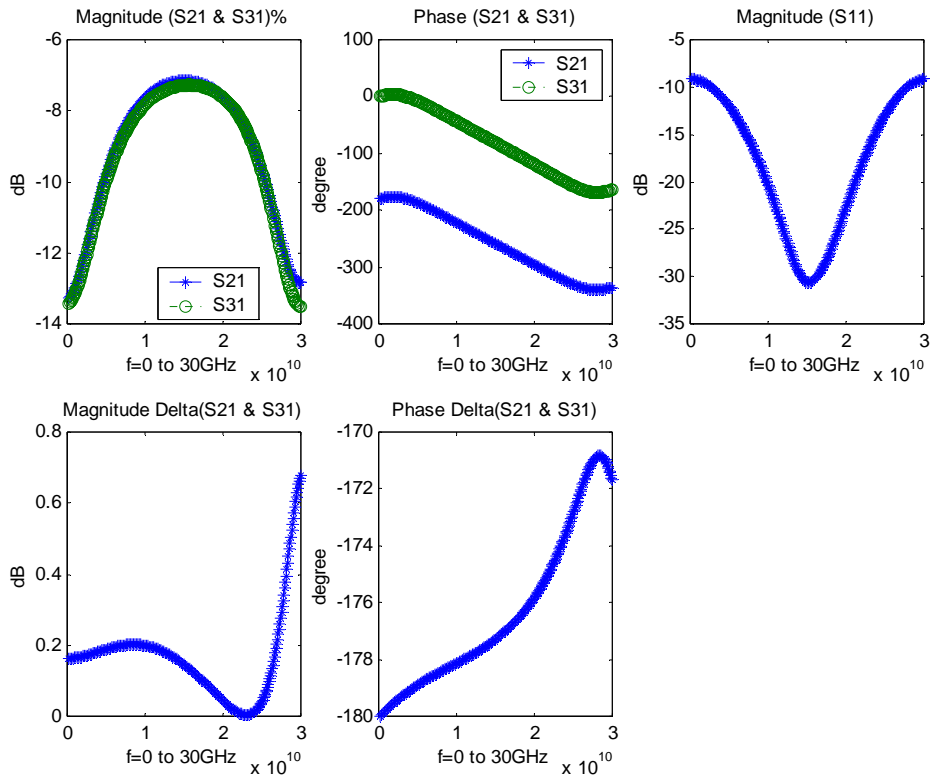


圖 25(b) Magnitude and Phase of S_{21} and S_{31} 、Magnitude of S_{11}

由 25(a)與(b)很明顯可知 S_{31} 不再等於 $-S_{21}$ 。

比較 4.6 與 4.12 可以發現，在相同的 $\gamma_e = 1.1\gamma_o$ 與 $\gamma_e = 0.9\gamma_o$ ，Type IV 受影響較小。

第五章

結論



本論文介紹了四種型態的平面式 Marchand balun 理論推導，從推導結果發現 Type I 與 Type IV，在耦合線輸入阻抗不匹配($R \neq 0$)或者是傳輸路徑為損耗性($\alpha \neq 0$)，會影響 S_{21} 與 S_{31} 的振幅大小，但是卻可以維持著很好 $S_{21} + S_{31}$ 為零的特性。在這樣的結果下，可以將之應用在有關 balun 電路中。

我們以上的分析都是假設在兩組耦合線特性必須完全一模一樣的前提下，而這種特性在積體電路 (IC) 中，很容易可以實現。此外，因為晶片體積的考量，在設計過程中通常會以變壓器型式來實現，除了體積較小，也很容易增加其互感 (mutual inductance) 及互耦 (mutual capacitance)，所以這種型式的 balun 非常適合整合進積體電路。

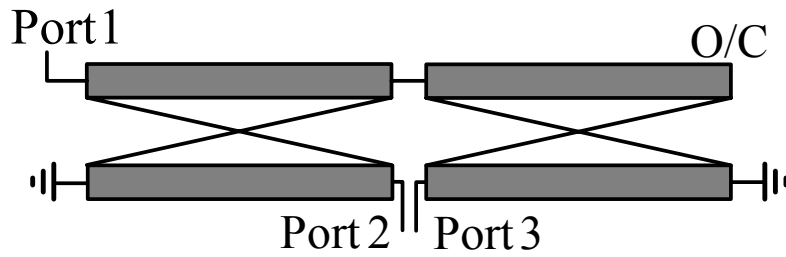


參考文獻

-
- [1] T.-H. Chen, K. W. Chang, S. B. Bui, H. Wang, G. S. Dow, L. C. T. Liu, T. S. Lin, and W. S. Titus, "Broadband monolithic passive baluns and monolithic double-balanced mixer," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 39, no. 12, pp. 1980–1986, Dec. 1991.
- [2] P. C. Hsu, C. Nguyen, and M. Kintis, "Uniplanar broad-band push-pull FET amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 12, pp. 2150–2152, Dec. 1997.
- [3] S. A. Maas and Y. Ryu, "A broadband, planar, monolithic resistive frequency doubler," in *IEEE Int. Microwave Symp. Dig.*, 1994, pp. 443–446.
- [4] K. S. Ang and I. D. Robertson, "Analysis and design of impedance-transforming planar Marchand baluns," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, no. 2, pp. 402–406, Feb. 2001.
- [5] M. Shimosawa, K. Itoh, Y. Sasaki, H. Kawano, Y. Isota, and O. Ishida, "A Parallel Connected Marchand Balun Using Spiral Shaped Equal Length Coupled Lines," in *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 4, June 1999, pp. 1737–1740.
- [6] D. Raicu, "Design of planar, single-layer microwave baluns," in *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, 1998, pp. 801–804.
- [7] A. M. Pavio and A. Kikel, "A monolithic or hybrid broadband compensated balun," in *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, May 1990, vol. 1, pp. 483–486.
- [8] K. Nishikawa, I. Toyoda, and T. Tokumitsu, "Compact and Broadband three-dimensional MMIC balun," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 47, no. 1, pp. 96–98, Jan. 1999.
- [9] R. H. Jansen, J. Jotzo, and M. Engels, "Improved compaction of multilayer MMIC/MCM baluns using lumped element compensation," in *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, 1997, pp. 401–404.
- [10] Y. J. Yoon, Y. Lu, R. C. Frye, M. Y. Lau, P. R. Smith, L. Ahlquist, and D. P. Kossives, "Design and characterization of multilayer spiral transmission line baluns," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 9, pp. 1841–1847, Sept. 1999.
- [11] Y. J. Yoon, Y. Lu, R. C. Frye, and P. R. Smith, "Modeling of monolithic

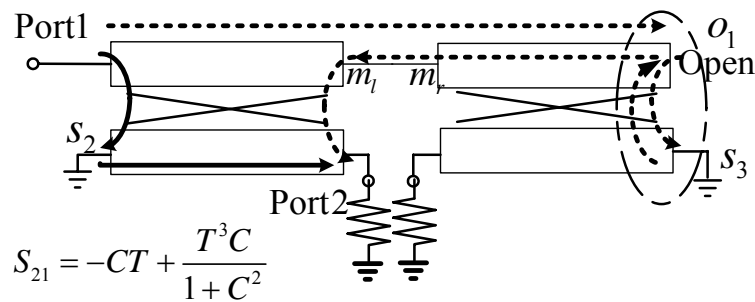
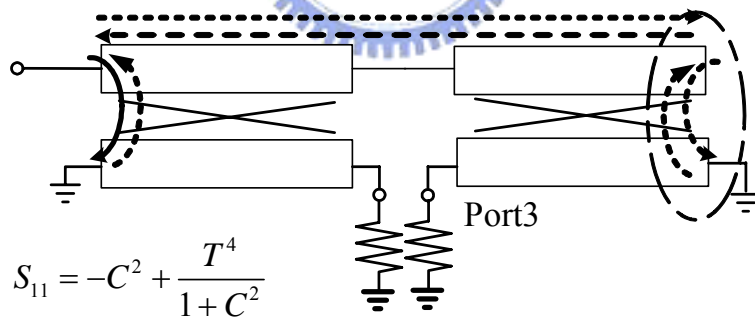
- RF spiral transmission line balun,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, no. 2, pp. 393–395, Feb. 2001.
- [12] H. K. Chiou, H. H. Lin, and C. Y. Chang, “Lumped-element compensated high/low-pass balun design for MMIC double-balanced mixer,” *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 7, no. 8, pp. 248–250, Aug. 1997.
- [13] N. Marchand, “Transmission line conversion transformers,” *Electronics*, vol. 17, no. 12, pp. 142–145, Dec. 1944.
- [14] James Schellenberg and Hien Do-Ky, "Low-Loss, Planar Monolithic Baluns for ma-Band Applications," 1999 IEEE MTT-S Digest.
- [15] C. Nguyen and D. Smith, “Novel miniaturised wideband baluns for MIC and MMIC applications,” *Electron. Lett.*, vol. 29, no. 12, pp.1060–1061, Jun. 1993.
- [16] M. C. Tsai, “A new compact wideband balun,” in *IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, Jun. 1993, vol. 1, pp. 141–143.
- [17] K. S. Ang, S. B. Economides, S. Nam, and I. D. Robertson, “A compact MMIC balun using spiral transformers,” in *Asia-Pacific Microw. Conf.*, Singapore, Nov. 1999, pp. 655–658.
- [18] Y. J. Yoon, Y. Lu, R. C. Frye, and P. R. Smith, “A silicon monolithic spiral transmission line balun with symmetrical design,” *IEEE Electron Device Lett.*, vol. 20, no. 4, pp. 182–184, Apr. 1999.
- [19] T. Gokdemir, S. B. Economides, A. Khalid, A. A. Rezazadeh, and I. D. Robertson, “Design and performance of GaAs MMIC CPW baluns using overlaid and spiral couplers,” in *IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, Denver, CO, Jun. 1997, pp. 401–404.
- [20] David M. Pozar, *Microwave engineering*, 2nd ed., John Wiley & Sons, U.S.A. 1998.
- [21] Kian Sen Ang, Member, IEEE, Yoke Choy Leong, and Chee How Lee, “Analysis and Design of Miniaturized Lumped-Distributed Impedance-Transforming Baluns,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 3, MARCH 2003.
- [22] Sheng-Che Tseng, Chinchun Meng et. al. “Monolithic Broadband Gilbert Micromixer With an Integrated Marchand Balun Using Standard Silicon IC Process,” *IEEE TRANSACTIONS ON MTT*, DECEMBER 2006.

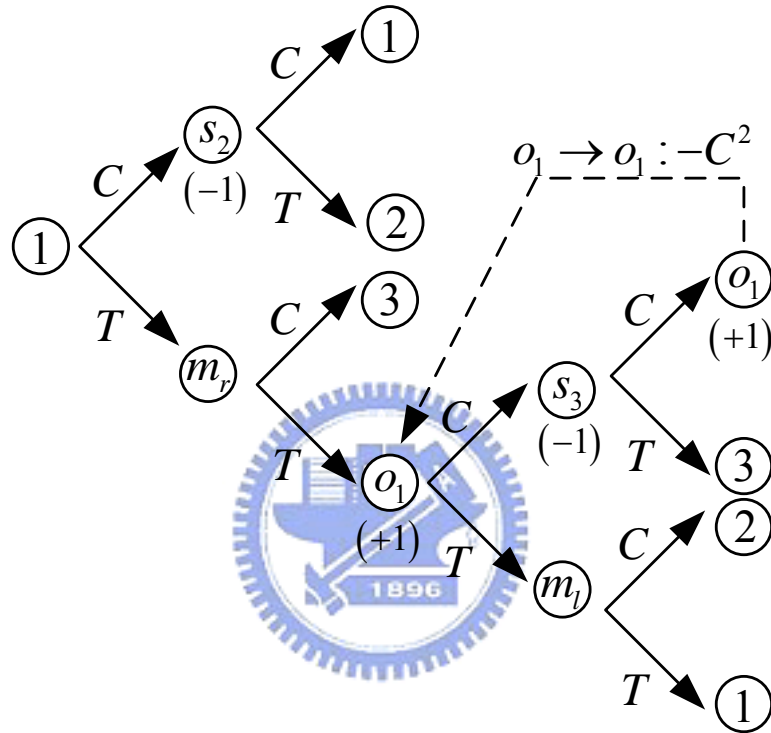
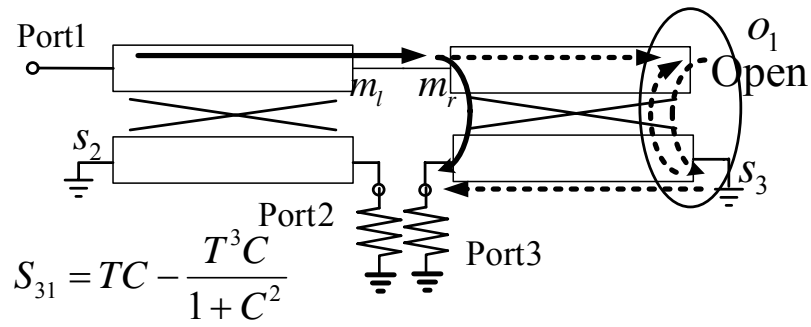
S parameters of Type I 啟發式推導方式[22]



$$[S] = \begin{bmatrix} -C^2 + \frac{T^4}{1+C^2} & -TC + \frac{T^3C}{1+C^2} & TC - \frac{T^3C}{1+C^2} \\ -TC + \frac{T^3C}{1+C^2} & -T^2 + \frac{T^2C^2}{1+C^2} & C^2 - \frac{T^2C^2}{1+C^2} \\ TC - \frac{T^3C}{1+C^2} & C^2 - \frac{T^2C^2}{1+C^2} & -T^2 + \frac{T^2C^2}{1+C^2} \end{bmatrix}$$

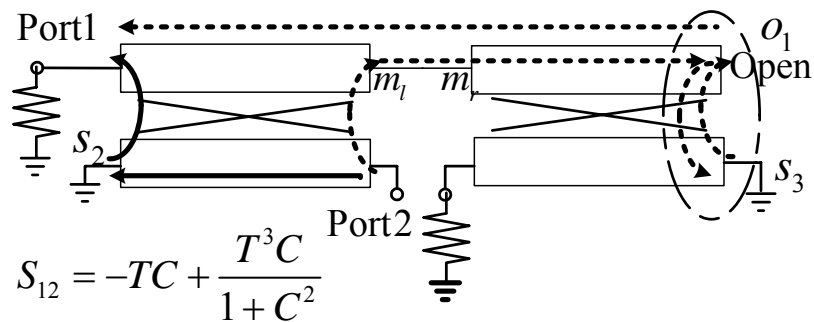
(1) Input : Port1

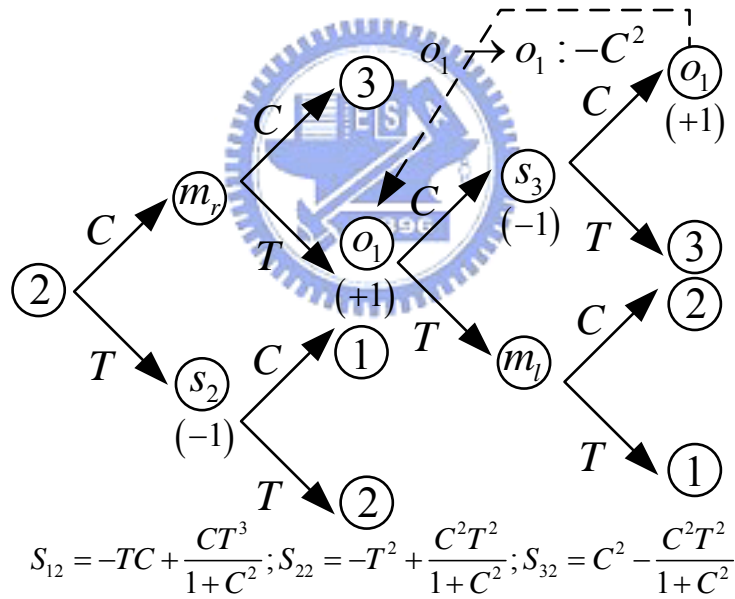
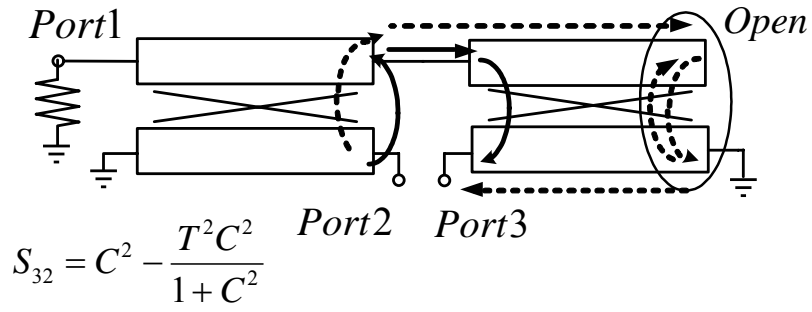
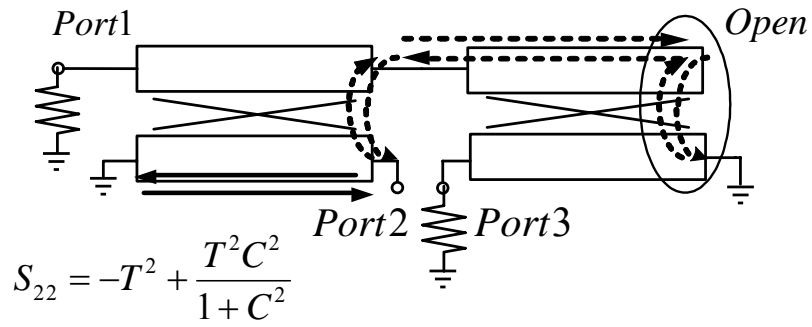




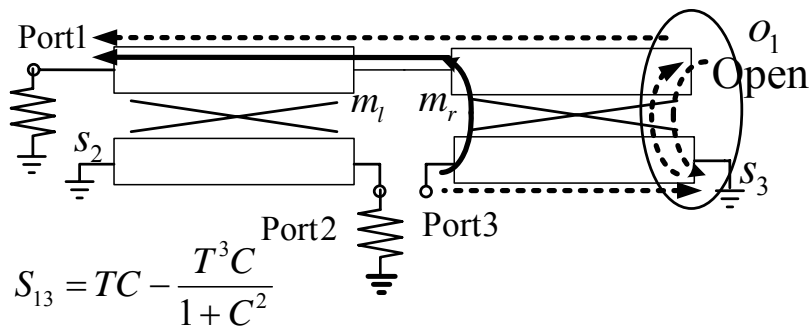
$$S_{11} = -C^2 + \frac{T^4}{1+C^2}; S_{21} = -CT + \frac{CT^3}{1+C^2}; S_{31} = CT - \frac{CT^3}{1+C^2}$$

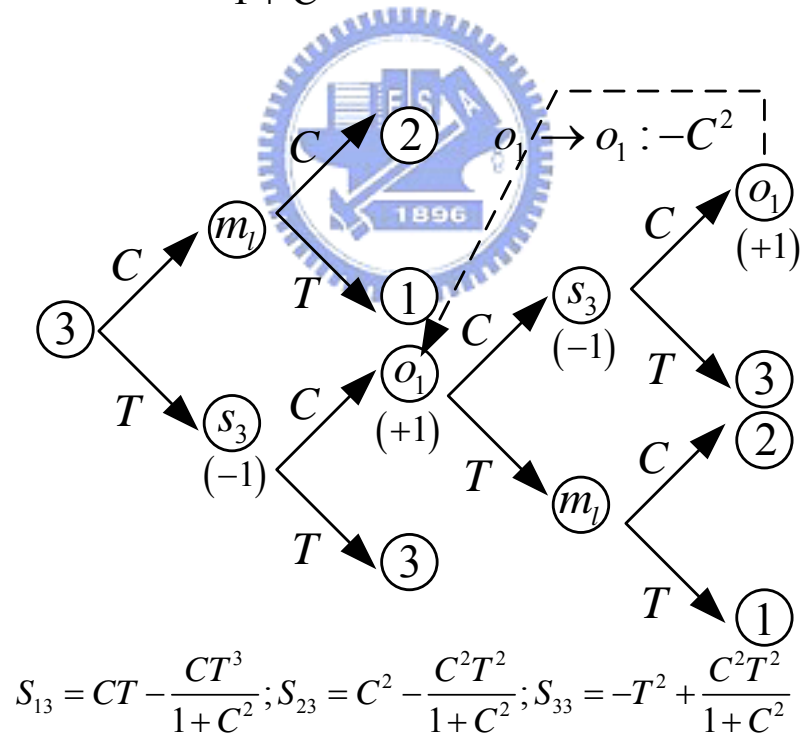
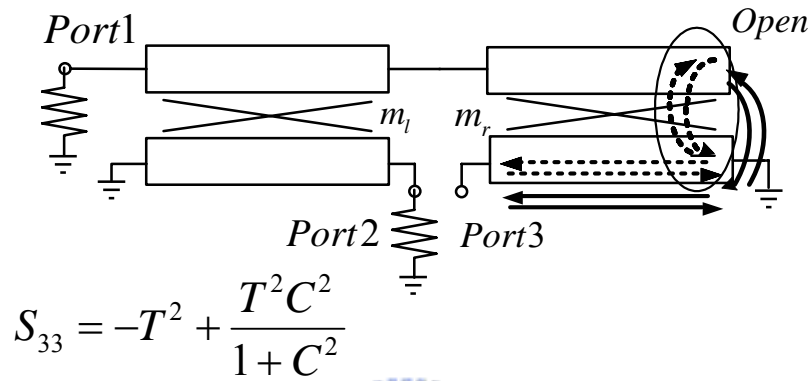
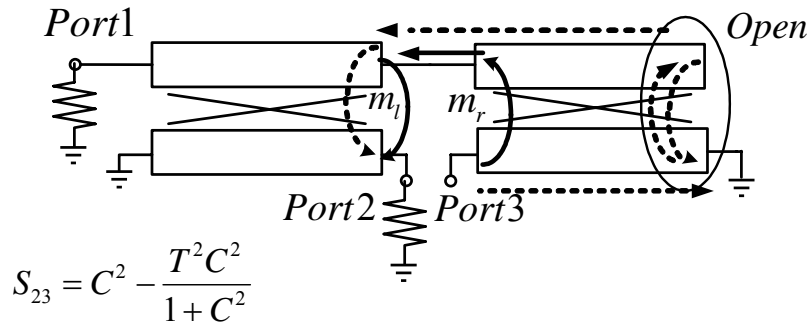
(2) Input : Port2





(3) Input : Port3





以此直觀又具有啟發性的推導，可以推導出 Type I 的 9 個 S 參數。