

國立交通大學

電機學院 電信學程

碩士論文

在考慮衰減常數存在下，
相位反轉 Rat-Race 分合波器之設計
Lossy Phase Inverter
Rat-Race Coupler Design



研究生：張世賢

指導教授：孟慶宗 教授

中華民國九十六年一月

在考慮衰減常數存在下，
相位反轉 Rat-Race 分合波器之設計
Lossy Phase Inverter
Rat-Race Coupler Design

研 究 生：張世賢

Student : Shih Hsien Chang

指 導 教 授：孟慶宗

Advisor : Dr. Chin Chun Meng



Submitted to College of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Communication Engineering
Jan 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年一月

在考慮衰減常數存在下， 相位反轉 Rat-Race 分合波器之設計

學生：張世賢

指導教授：孟慶宗

國立交通大學 電機學院 電信學程碩士班

摘 要

本篇論文主要是介紹 phase inverter rat-race 分合波器在標準 Si 製程上的實現，將衰減的因素考量進來，運用理論推導出此分合波器的 S 參數的公式，並且依據此公式設計一個具有相同相位，相同功率輸出的分合波器，以及要達到輸入阻抗匹配所需的條件。

由於 Si substrate 沒有地的參考平面，所以我們將以 CPW，CPS 的方式來實現傳輸線，另外被動元件的實現需要比較大的面積，因此要將它做進 IC 內，需要運用一些技巧來讓面積縮小，例如 $\lambda/4$ 的長度可以以繞線方式 (spiral) 或是利用 lump 元件來達成，而 $3\lambda/4$ 的相位反轉功能也可以利用 phase inverter 來取代。利用推導出來的公式與實際實現的數據結果做進一步的分析比較並配合傳輸線的電路分析模型而得出此分合波器在積體電路中有關衰減的相關參數如 R、L、G、C 值，此寬頻的分合波器的操作頻率在 5GHZ~23GHZ。

Lossy Phase Inverter Rat-Race Coupler Design

student : Shih Hsien Chang

Advisor : Dr. Chin Chun Meng

Degree Program of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This paper realized a broadband transformer-type rat-race coupler using a standard silicon process and analyzed this coupler under the loss condition.

In this coupler, CPW, CPS are used to implement the transmission line since Si substrate doesn't have backend ground plane. Also a phase inverter is employed not only to extend the operation bandwidth but also to provide balanced outputs for overcoming the magnitude imbalance resulting from a lossy substrate. The operation frequency of this monolithic rat-race coupler with the size of 1 mm^2 is extremely wide from 5 GHz to 23 GHz.

誌 謝

完成這本碩士論文時，有種「呼，終於結束了」的喜悅與滿足。直到完成時，我才發現原來作論文不如想像中的容易。和工作比起來，研究學問需要更嚴謹的思考與辨證。

首先，我想感謝孟慶宗老師在論文上的指導與建議，讓我成長許多，也感謝郭仁財老師，張志揚老師，黃瑞彬老師，以及劉致為老師在百忙之餘能夠來參加學生的口試，並且給予寶貴的建議 使我受益良多。

也非常感謝聖哲，在完成這論文的過程當中給予熱心的協助與解惑，讓這篇論文能夠更順利地完成。

最後，我想感謝我的家人和支持我的朋友們。如果沒有你們的支持與鼓勵，也不會有今天寫致謝中的我。

張世賢 謹誌

民國九十六年



目 錄

中文提要	i
英文提要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
一. 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 論文組織	1
二. 射頻積體電路製程技術介紹	2
2.1 前言	2
2.2 以 GaAs 製程實現 90°分合波器	2
2.3 被動元件在矽製程上實現的方法	3
2.3.1 使用高電阻率的矽基體	3
2.3.2 利用質子佈植的方式提高矽基體某些區域的電阻率	5
2.3.3 CMOS MEMS	5
2.3.3.1 以 CMOS MEMS 製程技術實現電感製作	5
2.3.3.2 CMOS MEMS 電感運用於 VCO 電路上	6
2.3.4 絕緣層上覆矽(SOI)	6
2.3.5 使用 inter-connect metals 實現微帶線(Microstrip Line)	7
三. 衰減性相位反轉 rat-race 分合波器的 S 參數推導與設計	9
3.1 前言	9
3.2 具對稱結構之四埠分合波器的 S 參數矩陣通式	9
3.3 Rat-race 分合波器的發展介紹	13
3.3.1 傳統無衰減性 rat-race 分合波器	13
3.3.2 無衰減性具相位反轉之 rat-race 分合波器	19
3.4 衰減性相位反轉 rat-race 分合波器之 S 參數公式推導	23
3.4.1 衰減性傳輸線之電路分析	23
3.4.2 衰減性相位反轉之 rat-race 分合波器的 S 參數	23
3.5 特殊範例	27

3.5.1 無衰減之 S 參數公式	27
3.5.2 相同長度，傳播常數與特性阻抗的環臂(ring).....	28
3.5.2.1 環臂長為 $\lambda/4$ 時的輸入阻抗匹配條件	29
四. 實驗結果	31
4.1 實驗參數粹	31
4.2 應用於 Gilber mixer 上的可行性	32
五. 結論	34
參考文獻	35
附錄一. Hyperbolic Function.....	37
自傳	40



圖目錄

圖一. (a)2-section 集成式 90°分合波器電路圖. (b)在 GaAs 積體上的實現圖(c) 90°分合波器之實驗數據(輸出相位差).....	2
圖二. (a)集成式 90°分合波器電路圖. (b)90°分合波器實現圖. (c)90°分合波器的輸相位差(d) 90°分合波器的 S 參數.....	3
圖三. (a) 90°分合波器示意圖與各埠定義.(b)正規化電容耦合電路原型 (c)在(b)中加入電感耦合之電路原型.....	4
圖四. (a)90°分合波器在高阻抗矽基體的實現圖. (b)實驗數據-S 參數與輸出相位差.....	4
圖五. 2-pole CPW 濾波器.....	5
圖六. 2-pole CPW 濾波器實驗數據(a)加入質子佈植製程. (b)無質子佈植製程.....	5
圖七. (a)CMOS MEMS 製作解說圖. (b)CMOS 積體上的電感電路實現(c)實驗數據.....	6
圖八. VCO 電路實現圖(a)正面圖. (b)反面.....	6
圖九. CMOS MEMS 電感運用於 VCO 電路上後的實驗結果.....	6
圖十. SOI CMOS 技術的剖示圖.....	7
圖十一. 以 SOI 技術製作之 STP inductor 實現圖.....	7
圖十二. (a)STP inductor 資料. (b)量測與模型數據圖.....	7
圖十三. 在標準矽製程上實現微帶線(Microstrip Line).....	8
圖十四. (a)微帶線 layout 與剖面圖. (b)模擬結果.....	8
圖十五. 具對稱結構之四埠分合波器之示意圖.....	9
圖十六. 分合波器之偶模示意圖.....	10
圖十七. 分合波器之奇模示意圖.....	10
圖十八. 無衰減 rat-race 分合波器.....	13
圖十九. (a)port1, port4 為入射波之進入埠. (b)port2, port3 為入射波之進入埠(c)A-A 平面為開路(d)even mode 等效電路.....	14
圖二十. (a)port1, port4 為入射波之進入埠, (b)port2, port3 為入射波之進入埠(c)A-A 平面為短路(d)odd mode 等效路.....	15
圖二十一. 任意環臂長無衰減 rat-race 分合波器.....	16
圖二十二. 任意環臂長度的 Even mode 等效電路.....	16
圖二十三. 任意環臂長度的 odd mode 等效電路.....	16
圖二十四. 長環臂長為 $\theta + \pi$ 之 rat race 分合波器.....	18

圖二十五. 無衰減性具相位反轉之分合波器	19
圖二十六. 無衰減性具相位反轉之分合波器之 even mode 等效電路	20
圖二十七. 無衰減性具相位反轉之分合波器之 odd mode 等效電路	21
圖二十八. 衰減性傳輸線之電路分析模型	23
圖二十九. 衰減性相位反轉之 rat-race 分合波器	24
圖三十. 衰減性相位反轉分合波器之偶模等效電路	25
圖三十一. 衰減性相位反轉分合波器之奇模等效電路	25
圖三十二. \hat{z} 與 $\lambda\alpha$ 的關係圖	29
圖三十三. 衰減性相位反轉 rat-race 分合波器實作圖	31
圖三十四. S 參數與頻率關係圖	31
圖三十五. 相位反轉與頻率之關係圖	31
圖三十六. α 、 β 、 Z 與頻率關係圖	32



一、緒論

1.1 研究動機

隨著通訊產業蓬勃發展，使得人們對於通訊產品的需求量大增，也因此促成通訊技術的日新月異。由於個人無線通訊如 Wireless LAN, Bluetooth, 3G 具備可移動性以及方便性，所以相關的產業也是大受歡迎，各種手持式裝置搭配無線通訊的功能，促使通訊元件也朝向小型化，而為了成本與整合的考量，未來會趨向單一晶片(SOC)來實現。

在過去，由於半導體技術的限制，阻礙了單晶射頻積體電路(RFIC)的發展，間接地也阻礙了個人移動通訊的普及，時至今日，許多先進的半導體技術不斷地克服技術上的障礙，不但對單晶射頻積體電路的發展有重大的貢獻，也讓大部分屬於個人移動通訊的裝備達到輕、薄、短、小的商業要求。然而由於單晶射頻積體電路的高頻特性，往往必須選用特殊的半導體製程，才能達到設計的要求，不過在市場與價格的競爭下，將單晶射頻積體電路實現在標準 CMOS 的製程上已經是一種趨勢，一來是讓單一晶片的實現成為可能，二來則是採用較受歡迎的製程有助於價格的降低，增加市場競爭力。

然而，由於 CMOS 的製程，材料是以 Si 為基礎，具較低電阻率，加上 Si 製程沒有地平面，射頻傳輸線無法以微帶線實現，會對高頻訊號造成無法忽略的衰減和影響，使得實驗出來的結果和理想的數據間有明顯的差距，於是將衰減的變數放入設計的考慮會是目前研究的重點。

1.2 論文組織

本論文內容分為五章，第一章為導論，說明研究動機與論文結構。第二章介紹射頻被動元件的製程技術(例如砷化鎘或是其它非標準矽製程)以及其優缺點。第三章首先會先介紹 rat-race 分合波器的歷史發展，在此之前，過去對於分合波器的研究都是假設為無衰減性，而如今我們將要把衰減因素考量進來，再進一步推導出具有相位反轉(phase inverter)的 rat-race coupler 的 S 參數矩陣。並且設計一個具有相等功率和相位輸出並且達到輸入阻抗匹配 rat-race coupler。第四章利用第二章所推導出來結果來與實驗數據比對，進而粹取出晶片內部的 R, G, L, C 求得衰減常數，相位常數和 S 參數。第五章作為結論。

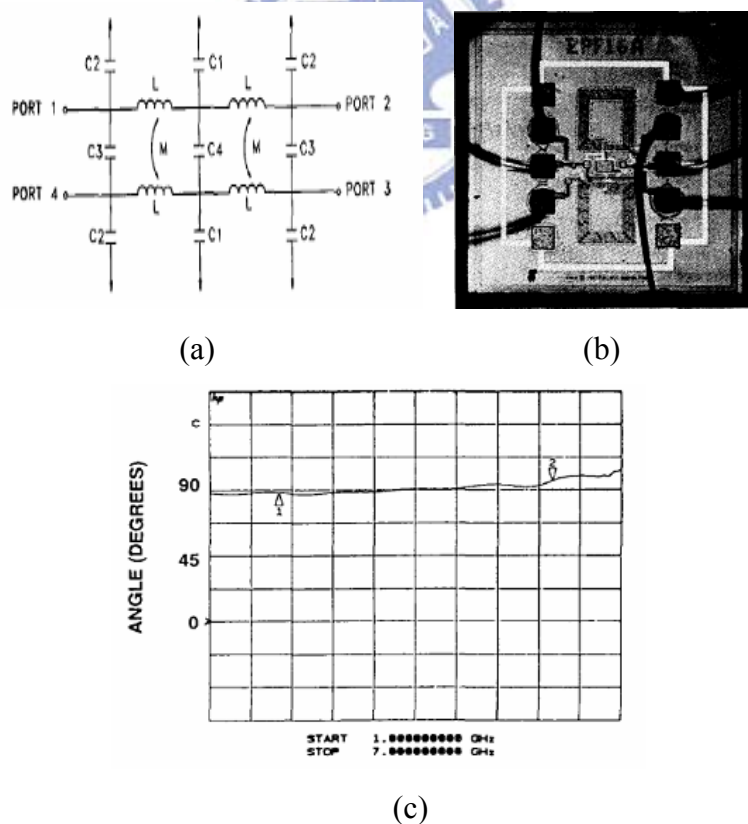
二. 射頻被動元件製程技術介紹

2.1 前言

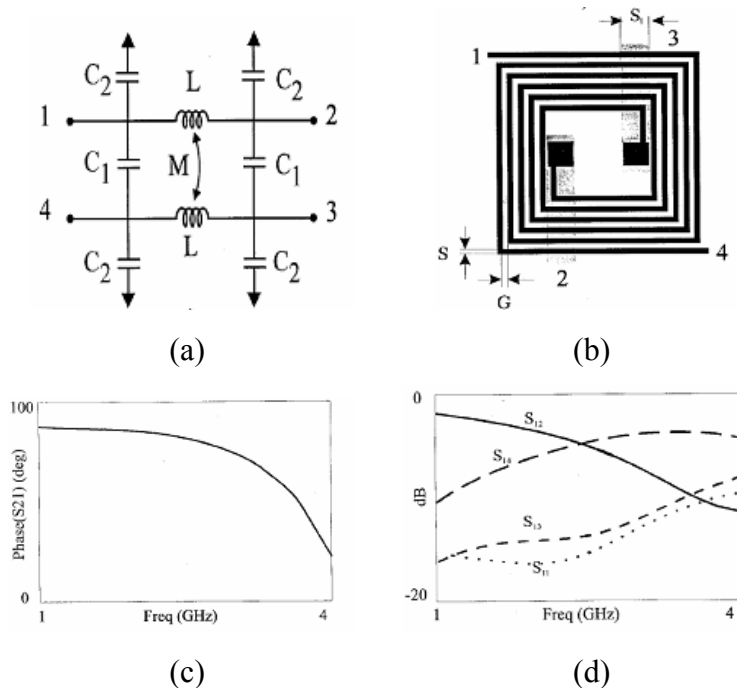
將射頻電路實現在積體電路內是產業的趨勢，由於矽製程的高頻特性不易掌握，而且基板(substrate)為耗損性(Lossy)材料，所以射頻積體電路(RF IC)的製作往往需要利用特殊的製程，例如 SiGe，GaAs，此類製程具有良好的高頻特性；但是相對於邏輯電路的標準矽製程的大量應用，這類製程的成本也相對高出許多，加上將來單晶片的整合趨勢，出現了一些將射頻積體電路實現在矽製程上的研究，本章的重點就是在介紹將射頻被動元件實現在矽基體上的方法。

2.2 以 GaAs 製程實現 90°分合波器

圖一與圖二為兩個在 GaAs 製程上實現 90°分合波器的研究[1],[2]，由於 GaAs 具有良好的高頻特性，所以適合用於高頻電路的製作，但是由於被動元件(電感)需要用掉大部分的面積，所以我們以繞線(spiral)的方式縮小面積來實現電感。



圖一. (a)2-section 集成式 90°分合波器電路圖. (b)在 GaAs 積體上的實現圖
(c) 90°分合波器之實驗數據(輸出相位差)



圖二. (a)集成式 90° 分合波器電路圖. (b) 90° 分合波器實現圖. (c) 90° 分合波器的輸出相位差(d) 90° 分合波器的 S 參數

圖一、圖二的實驗數據顯示在 GaAs 製程上所實現的 90° 分合波器在 ISM band 上有良好的表現(輸出相位差接近 90°)。但是由於 GaAs 是特殊半導體製程，所以成本較高，也不利於與其他系統晶片的整合，所以會希望將射頻積體電路以矽製程來製作。

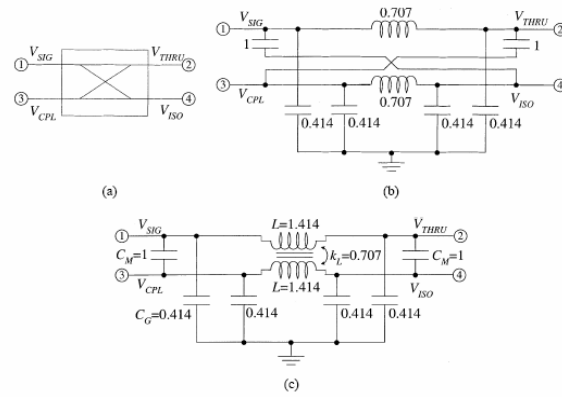
2.3 被動元件在矽製程上實現的方法

由於矽製程沒有像 GaAs 製程擁有 backside 地參考平面，無法用微帶線來實現傳輸線，所以會以 CPW，CPS 方式實現傳輸線，然而矽製程的耗損特性卻是需要去克服的困難，目前所使用來克服這樣的方法，包括：利用高阻抗的基體，質子佈植方式，CMOS MEMS 與 SOI (substrate on insulator) 目的都是在於提高矽基體的阻抗，減少耗損。以下就是一些例子：

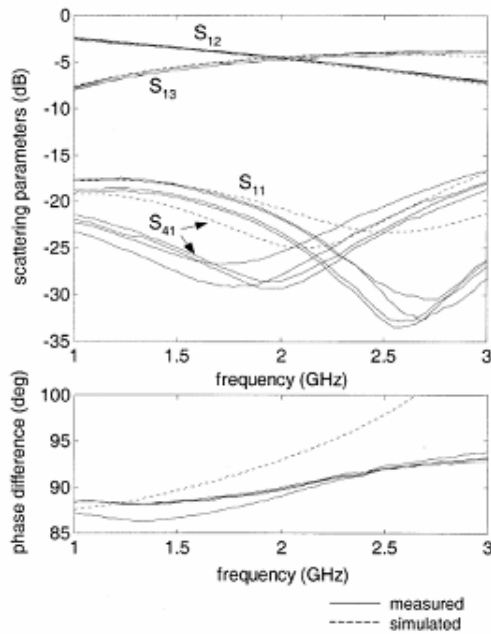
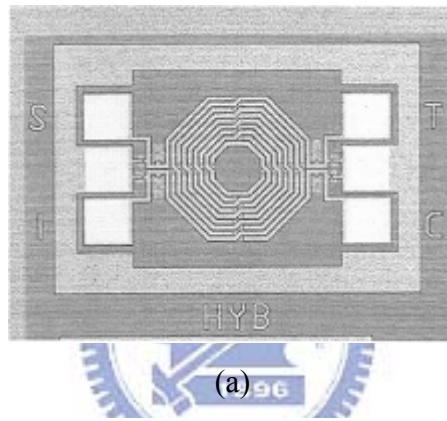
2.3.1 使用高電阻率的矽基體

使用高阻抗的矽基體(Si substrate)實現 90° 分合波器[3]，如圖三，亦能使操作頻率提高，但是由於高阻抗的矽基體其電阻率大致在(1 K Ω -cm)左右，較 GaAs 小(10 M Ω -cm)，所以表現比 GaAs 的製程差，而且可操作頻率亦相對較低，如圖四

的數據顯示。而且高電阻率的基體也易造成主動元件的 latch-up 現象。



圖三 (a) 90° 分合波器示意圖與各埠定義.(b)正規化電容耦合電路原型
(c)在(b)中加入電感耦合之電路原型



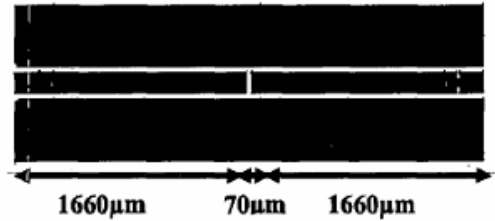
(b)

圖四.(a) 90° 分合波器在高阻抗矽基體的實現圖.

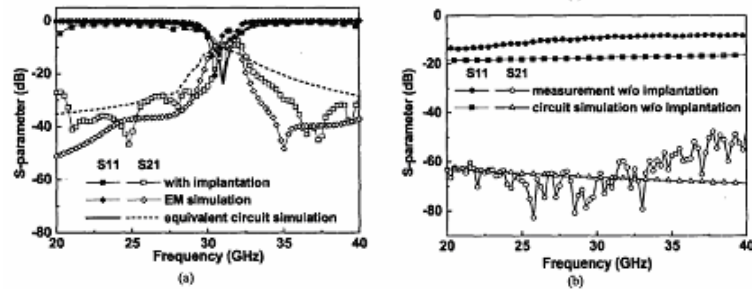
(b)實驗數據-S 參數與輸出相位差

2.3.2 利用質子佈植的方式提高矽基體某些區域的電阻率

在製造過程中，以高能量將質子佈植於矽基體上破壞矽的晶格的方式亦可提高矽基體的部份區域的電阻率(resistivity)，作為射頻電路使用[4]，如圖五，為一個以質子佈植(ion implantation)實現的 2-pole CPW 濾波器實現圖，從圖六(a)，(b)的實驗數據比較得知，使用質子佈植的製程的確可以得到一個 CPW 的 2-pole 濾波器。但是目前此類的製程僅止於實驗階段，在工業上的應用上並不可行。



圖五. 2-pole CPW 濾波器

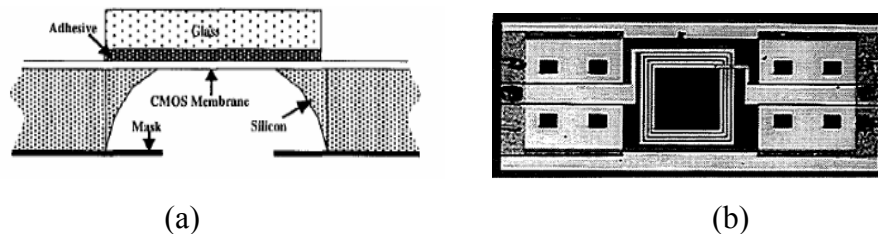


圖六. 2-pole CPW 濾波器實驗數據(a)加入質子佈植製程. (b)無質子佈植製程

2.3.3 CMOS MEM

2.3.3.1 以 CMOS MEMS 製程技術實現電感製作

利用後段製程技術，在電路完成後，將被動元件下方的矽基體挖空，來提高此區域的電阻率，減少耗損，此為 MEMS 技術，圖七為使用 CMOS MEMS 後製程來實現的電感[5]，從數據上可以看出電感有好的 Q 值。



		L_i (nH)	R_i (Ω)	C_i (fF)	C_o (fF)	Q_{max}	f_{max} (GHz)	f_{res} (GHz)	Notes
Ind 1	Model	1.2	5.0	12.3	10.3	10.2	16.2	30.5	M2,Z=13
	Meas	1.45	5.1	13.0	8	11.6	15.4	29.5	
Ind 2	Model	4.1	9.4	12.3	17.8	11.8	8.0	14.7	M2,Z=13
	Meas	4.3	9.8	11.4	15	12.5	8.3	15.4	
Ind 3	Model	8.5	16.1	16.4	28.2	9.3	4.6	8.1	M2,Z=17
	Meas	8.9	14.9	16.5	25	10.5	4.6	8.2	
Ind 4	Model	8.6	33.5	16.4	28.2	4.6	4.6	8.0	M1,Z=17
	Meas	8.9	31.7	15.6	23	5.4	4.9	8.8	

(c)

圖七. (a)CMOS MEMS 製作解說圖. (b)CMOS 積體上的電感電路實現

(c)實驗數據

2.3.3.2 CMOS MEMS 電感運用於 VCO 電路上

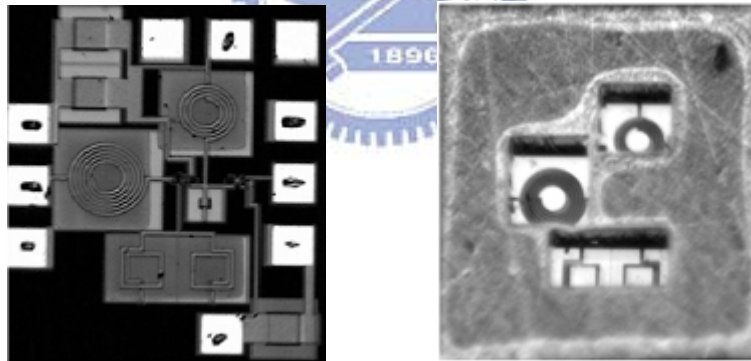
圖八將以 CMOS MEMS 後製程製作的電感運用於 VCO 的電路上面[6]。

(a) 為正面圖，而(b)為反面圖，在(b)中有三處基體被挖空處為電感所在置。

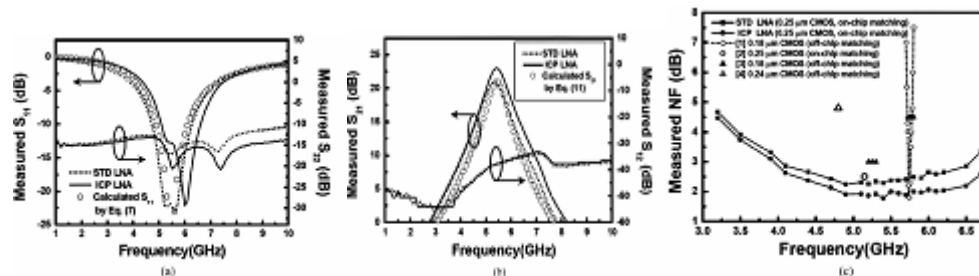
CMOS MEMS 的方式可以運用於矽製程上，但是需要多一道 MEMS 的製程，成本

也較

標準矽製程來的高。



圖八. VCO 電路實現圖(a)正面圖. (b)反面

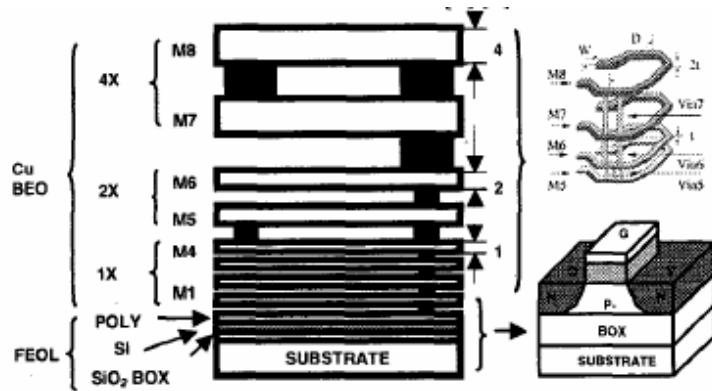


圖九. CMOS MEMS 電感運用於 VCO 電路上後的實驗結果

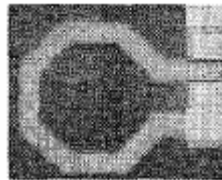
2.3.4 絕緣層上覆矽(SOI)

圖十為 SOI CMOS 的技術解說圖，它是在製造過程中，會在電晶體週圍做出氧化矽絕緣溝道，讓電晶體與週圍的結構完全隔離，這個介電隔離層會減少晶片整體的雜散分佈電容，同時改善剩餘電容的線性特性。因此矽晶絕緣體技術可以降低晶片內部雜訊所造成的失真，減少頻率更高時的電流損耗，同時增加電晶體的響應速度。

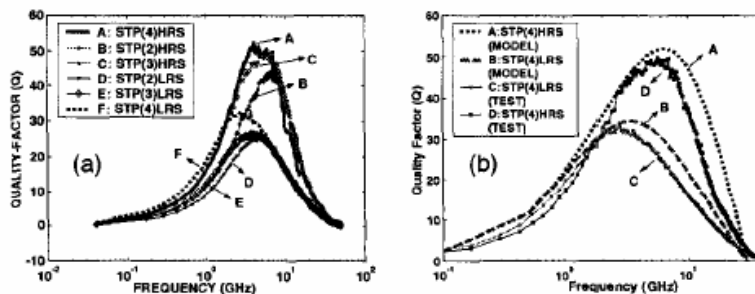
圖十一與圖十二為以 SOI 製程製作的 STP(Single-tune, multiple metal levels in Parallel)電感的實現圖與量測數據[7]。但是 SOI 的技術來自於 IBM，並不是每個晶圓廠都有提供，而且價格也較昂貴；在電子產品商業化，價格便宜的要求上，SOI 製程無疑會對降低成本的要求產生障礙以及整合上的困難。



圖十. SOI CMOS 技術的剖示圖



圖十一. 以 SOI 技術製作之 STP inductor 實現圖

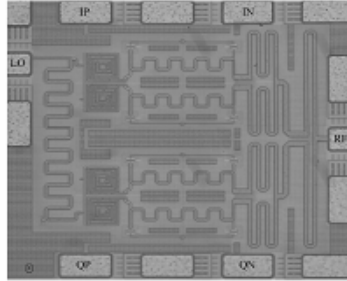


圖十二. (a)STP inductor 資料. (b)量測與模型數據圖

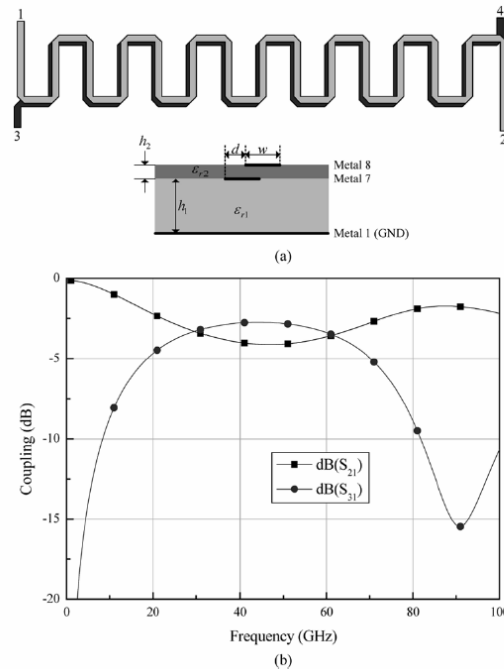
2.3.5 使用 inter-connect metals 實現微帶線(Microstrip Line)

前面所提，是一些在矽製程上實現射頻積體電路的技術，因為矽基體沒有

backside 的地參考平面，所以如果要在以微帶線方式實現傳輸線時，可以利用相鄰金屬層，以其中一層來當地平面，就可以做出微帶線，如圖十三[8]，但是因為低介電常數的關係會使微帶線的需要的面積較大，而且寬度過細會造成衰減過大，此技術並不可行於標準矽製程上。



圖十三. 在標準矽製程上實現微帶線(Microstrip Line)



圖十四. (a) 微帶線 layout 與剖面圖. (b) 模擬結果

三、衰減性相位反轉 rat-race 分合波器的 S 參數推導與設計

3.1 前言

近年來，由於無線通訊的普及，使得無線通訊系統的需求大量成長，對於單晶微波積體電路(MMIC)與射頻積體電路(RFIC)的通訊元件需求量也持續的增加。而技術的發展也讓被動元件可以實現在射頻積體電路內。

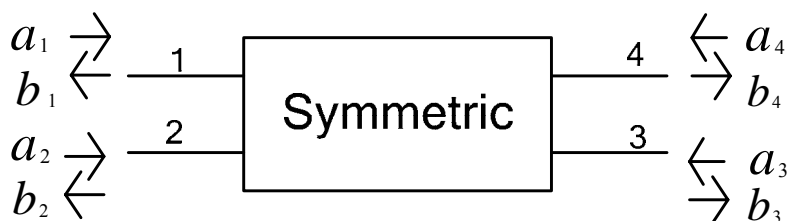
功率分波器(Power divider)與方向耦合器(Directional coupler)為電路中極重要的零組件。其中常見的 180 度的分合波器 rat-race coupler 或是 Marchand balun 可以產生相同相位與相同功率，在 single-to-differential 的電路需求上是一種良好的選擇。

在本章節中我們將以 rat-race coupler 來做討論，並且實現在積體電路上。另外若希望被動電路做在 IC 上，所佔據的面積將會非常大，所以利用 phase inverter 來微小化分合波器的面積，然而在 silicon 製程上，由於衰減已是不可忽略，所以加入衰減常數的運算亦是此章節的重點。

3.2 具對稱結構之四埠分合波器的 S 參數矩陣通式

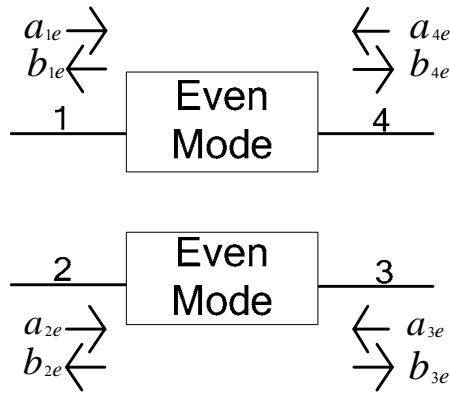
本章節將先求出具有對稱結構的四埠分合波器的 S 參數矩陣與其在 Even/Odd mode 底下 S 參數矩陣之間的關係式。

圖十五為一個具有對稱結構之四埠被動分合波器， a_1, a_2, a_3, a_4 為 port 1, port 2, port 3, port 4 的輸入電壓， b_1, b_2, b_3, b_4 為 port 1, port 2, port 3, port 4 的輸出電壓。而根據 S 參數的定義，S 為在輸出埠的輸出波電壓與輸入埠的入射波電壓的比，亦即 $S_{ji} = \frac{b_j}{a_i}$

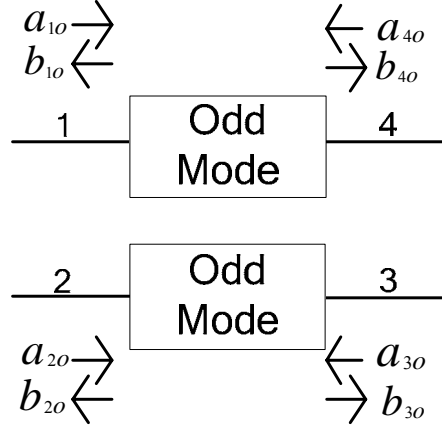


圖十五. 具對稱結構之四埠分合波器之示意圖

首先將此結構分成 even mode 以及 odd mode，如圖十六和圖十七，



圖十六. 分合波器之偶模示意圖



圖十七. 分合波器之奇模示意圖

在 even mode 時，我們同時在 a_{1e} 與 a_{2e} 或 a_{3e} 與 a_{4e} 各輸入 1V 電壓，

$b_{1e}, b_{2e}, b_{3e}, b_{4e}$ 為在各埠的輸出電壓，則有下列兩種結果：

(e-1)

$$a_{1e} = a_{2e} = 1, a_{3e} = a_{4e} = 0;$$

$$S_{11e} = \frac{b_{1e}}{a_{1e}} = b_{1e}, S_{22e} = \frac{b_{2e}}{a_{2e}} = b_{2e};$$

$$b_{1e} = b_{2e}, S_{11e} = S_{22e}$$

$$S_{41e} = \frac{b_{4e}}{a_{1e}} = b_{4e}, S_{32e} = \frac{b_{3e}}{a_{2e}} = b_{3e};$$

$$b_{4e} = b_{3e}, S_{41e} = S_{32e}$$

(e-2)

$$a_{1e} = a_{2e} = 0, a_{3e} = a_{4e} = 1;$$

$$S_{44e} = \frac{b_{4e}}{a_{4e}} = b_{4e}, S_{33e} = \frac{b_{3e}}{a_{3e}} = b_{3e};$$

$$b_{3e} = b_{4e}, S_{33e} = S_{44e}$$

$$S_{14e} = \frac{b_{1e}}{a_{4e}} = b_{1e}, S_{23e} = \frac{b_{2e}}{a_{3e}} = b_{2e};$$

$$b_{1e} = b_{2e}, S_{14e} = S_{23e}$$

在 odd mode 時，我們同時在 a_{1o} 與 a_{2o} ，或 a_{3o} 與 a_{4o} 分別輸入 1V 與 -1V 電壓，

$b_{1e}, b_{2e}, b_{3e}, b_{4e}$ 為在各埠的輸出電壓，則可得到在 odd mode 底下相關的 S 參數，有

以下兩種結果：

(o-1)

$$a_{1o} = 1, a_{2o} = -1, a_{3o} = a_{4o} = 0;$$

$$S_{11o} = \frac{b_{1o}}{a_{1o}} = b_{1o}, S_{22o} = \frac{b_{2o}}{a_{2o}} = -b_{2o};$$

$$b_{1o} = -b_{2o}, S_{11o} = -S_{22o}$$

$$S_{41o} = \frac{b_{4o}}{a_{1o}} = b_{4o}, S_{32o} = \frac{b_{3o}}{a_{2o}} = -b_{3o};$$

$$b_{4o} = -b_{3o}, S_{41o} = -S_{32o}$$

(o-2)

$$a_{1o} = a_{2o} = 0, a_{4o} = 1, a_{3o} = -1;$$

$$S_{44o} = \frac{b_{4o}}{a_{4o}} = b_{4o}, S_{33o} = \frac{b_{3o}}{a_{3o}} = -b_{3o};$$

$$b_{4o} = -b_{3o}, S_{33o} = -S_{44o}$$

$$S_{14o} = \frac{b_{1o}}{a_{4o}} = b_{1o}, S_{23o} = \frac{b_{2o}}{a_{3o}} = -b_{2o};$$

$$b_{1o} = -b_{2o}, S_{14o} = -S_{23o}$$

接著利用重疊原理. 將 even mode 的(e-1), (e-2)和 odd mode 的(o-1), (o-2)的結果相加減, 目的是讓四個埠中, 只有一個埠有入射波, 而其他埠沒有入射波, 只有輸出, 因此可以得到以下四種情況:

當第一埠為輸入埠

(e-1) + (o-1)

$$a_1 = 2; a_2 = a_3 = a_4 = 0;$$

$$b_1 = b_{1e} + b_{1o} = S_{11e} + S_{11o};$$

$$b_2 = b_{2e} - b_{2o} = S_{22e} + S_{22o} = S_{11e} - S_{11o};$$

$$b_3 = b_{3e} - b_{3o} = S_{32e} + S_{32o} = S_{41e} - S_{41o};$$

$$b_4 = b_{4e} + b_{4o} = S_{41e} + S_{41o};$$

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2},$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2}$$

$$S_{31} = \frac{b_3}{a_1} = \frac{S_{41e} - S_{41o}}{2}$$

$$S_{41} = \frac{b_4}{a_1} = \frac{S_{41e} + S_{41o}}{2}$$



當第二埠為輸入埠

(e-1) - (o-1)

$$a_2 = 2; a_1 = a_3 = a_4 = 0;$$

$$b_1 = b_{1e} - b_{1o} = S_{11e} - S_{11o};$$

$$b_2 = b_{2e} + b_{2o} = S_{22e} - S_{22o} = S_{11e} + S_{11o};$$

$$b_3 = b_{3e} + b_{3o} = S_{32e} - S_{32o} = S_{41e} + S_{41o};$$

$$b_4 = b_{4e} - b_{4o} = S_{41e} - S_{41o}$$

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2} = \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2}$$

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2}$$

$$S_{32} = \frac{b_3}{a_2} = \frac{S_{41e} + S_{41o}}{2}$$

$$S_{42} = \frac{b_4}{a_2} = \frac{S_{41e} - S_{41o}}{2}$$

當第三埠為輸入埠

(e-2) - (o-2)

$$a_3 = 2; a_1 = a_2 = a_4 = 0;$$

$$b_1 = b_{1e} - b_{1o} = S_{14e} - S_{14o};$$

$$b_2 = b_{2e} + b_{2o} = S_{23e} - S_{23o} = S_{14e} + S_{14o};$$

$$b_3 = b_{3e} + b_{3o} = S_{33e} - S_{33o} = S_{44e} + S_{44o};$$

$$b_4 = b_{4e} - b_{4o} = S_{44e} - S_{44o}$$

$$S_{13} = \frac{b_1}{a_3} = \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2}$$

$$S_{23} = \frac{b_2}{a_3} = \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2}$$

$$S_{33} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{S_{44e} + S_{44o}}{2},$$

$$S_{43} = \frac{b_4}{a_3} = \frac{S_{44e} - S_{44o}}{2};$$

當第四埠為輸入埠

(e-2) + (o-2)

$$a_4 = 2; a_1 = a_2 = a_3 = 0;$$

$$b_1 = b_{1e} + b_{1o} = S_{14e} + S_{14o};$$

$$b_2 = b_{2e} - b_{2o} = S_{23e} + S_{23o} = S_{14e} - S_{14o};$$

$$b_3 = b_{3e} - b_{3o} = S_{33e} + S_{33o} = S_{44e} - S_{44o};$$

$$b_4 = b_{4e} + b_{4o} = S_{44e} + S_{44o}$$

$$S_{14} = \frac{b_1}{a_4} = \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2},$$

$$S_{24} = \frac{b_2}{a_4} = \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2},$$

$$S_{34} = \frac{b_3}{a_4} = \frac{S_{44e} - S_{44o}}{2},$$

$$S_{44} = \frac{b_4}{a_4} = \frac{S_{44e} + S_{44o}}{2};$$



最後我們可以得到對於任何對稱結構的四埠被動分合波器的[S]參數矩陣與其在 even mode 和 odd mode 下的 S 參數矩陣之間的關係式：

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2} & \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2} & \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2} & \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2} \\ \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2} & \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2} & \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2} & \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2} \\ \frac{S_{41e} - S_{41o}}{2} & \frac{S_{41e} + S_{41o}}{2} & \frac{S_{44e} + S_{44o}}{2} & \frac{S_{44e} - S_{44o}}{2} \\ \frac{S_{41e} + S_{41o}}{2} & \frac{S_{41e} - S_{41o}}{2} & \frac{S_{44e} - S_{44o}}{2} & \frac{S_{44e} + S_{44o}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

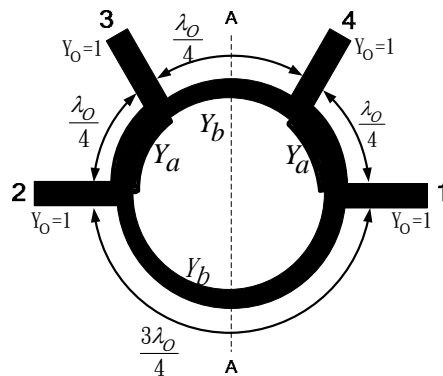
3.3 Rat-race 分合波器發展介紹

一般的 rat-race coupler 在沒有考量衰減的情況下，有幾點特性：(1)當相鄰環臂 (ring arm) 終端接到負載時，輸入阻抗與環臂的特性阻抗匹配，(2)兩輸出臂是互相隔絕的，(3)決定輸入埠，輸出訊號可以相差 0° 或 180° ，(4)變化環臂阻抗可以有效決定輸出功率的比值。

傳統的 rat race coupler 由於所需要的面積較大，在設計 RFIC 時，需要一些縮小面積的技巧，相位反轉 (phase inverter) 亦是其中常用到的技巧之一，又由於在 silicon 製程下，傳輸線的衰減無法忽略，因此我們加入衰減常數，也就是說傳播常數 γ 為複數，不再為之前一般運算上假設為理想傳輸線的純虛數，來推導 S 參數。

3.3.1 傳統無衰減性 rat-race 分合波器

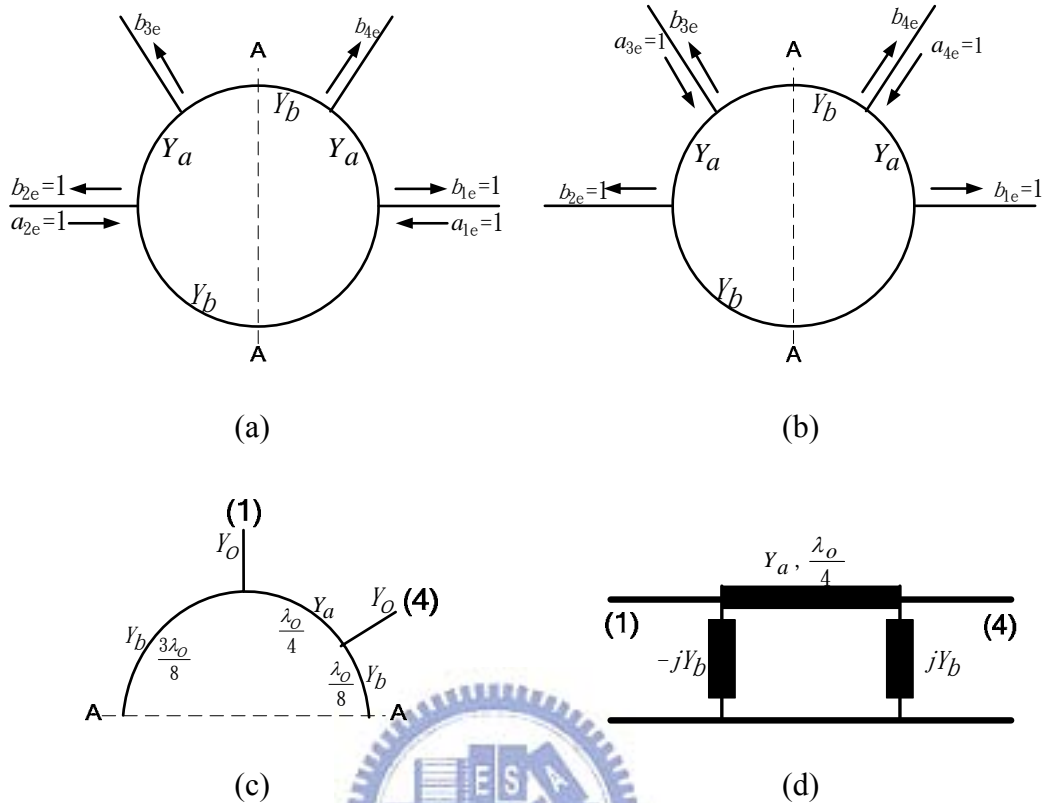
圖十八為無衰減的 rat-race 分合波器， Y_0 為終端阻抗，而 Y_a, Y_b 為兩環臂的特性電抗 (characteristic admittance) [9]。



圖十八. $\frac{1}{4}$ 波長無衰減 rat-race 分合波器

將此結構依對稱分成 even mode 與 odd mode 來運算

Even mode:



圖十九. (a)port1, port2 為入射波之輸入埠, (b)port3, port4 為入射波之輸入埠
(c)A-A 平面為開路(d)even mode 等效電路

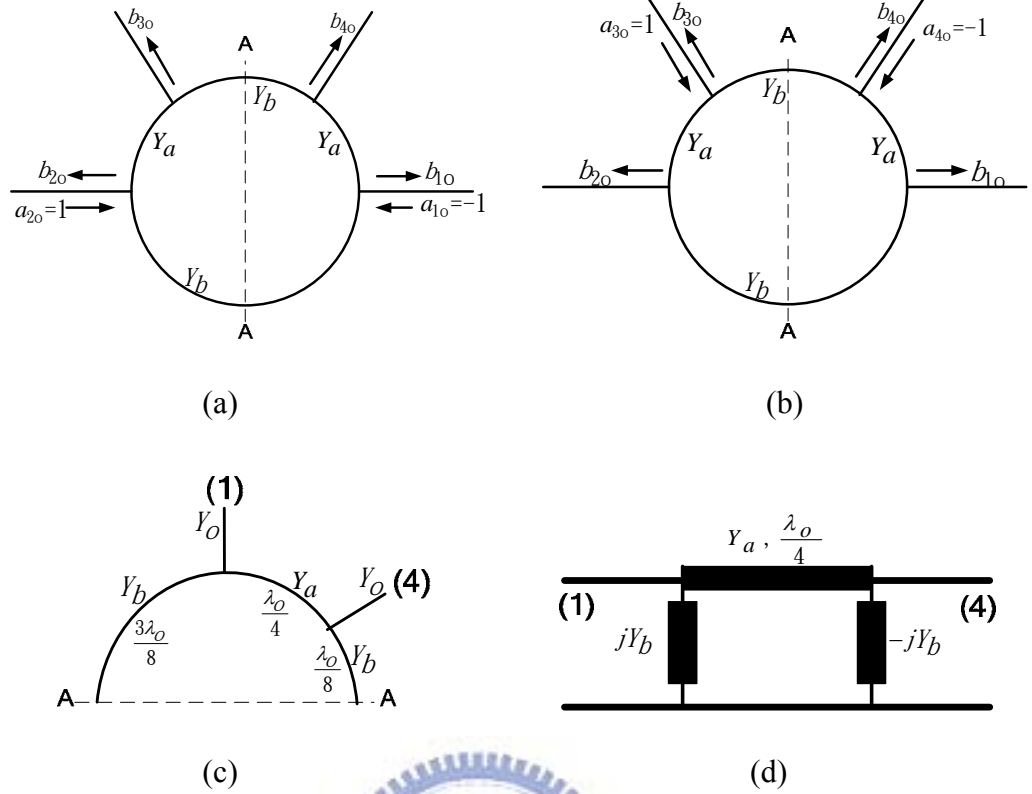
由圖十九之(d)我們可以得到 even mode 下的 ABCD 矩陣,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \frac{-Y_b}{Y_a} & j\frac{1}{Y_a} \\ j(Y_a + \frac{Y_b^2}{Y_a}) & \frac{Y_b}{Y_a} \end{bmatrix} \quad [Y]_e = j \begin{bmatrix} -Y_b & Y_a \\ Y_a & Y_b \end{bmatrix}$$

並且將其轉換成 even mode 的 S 參數矩陣

$$[S]_e = \begin{bmatrix} \frac{1 - Y_b^2 - Y_a^2 + j2Y_b}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} & \frac{-j2Y_a}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} \\ \frac{-j2Y_a}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} & \frac{1 - Y_b^2 - Y_a^2 - j2Y_b}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Odd mode:



圖二十. (a)port1, port2 為入射波之進入埠, (b)port3, port4 為入射波之進入埠
(c)A-A 平面為短路(d)odd mode 等效電路

由圖二十之(d), 我們可以得到 odd mode 下的 ABCD 矩陣

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_o = \begin{bmatrix} \frac{Y_b}{Y_a} & j\frac{1}{Y_a} \\ j(Y_a + \frac{Y_b^2}{Y_a}) & \frac{-Y_b}{Y_a} \end{bmatrix} \quad [Y]_o = j \begin{bmatrix} Y_b & Y_a \\ Y_a & -Y_b \end{bmatrix}$$

$$[S]_o = \begin{bmatrix} \frac{1 - Y_b^2 - Y_a^2 - j2Y_b}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} & \frac{-j2Y_a}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} \\ \frac{-j2Y_a}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} & \frac{1 - Y_b^2 - Y_a^2 + j2Y_b}{1 + Y_b^2 + Y_a^2} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

從(3.1)式, 當第一埠為輸入埠時, 則

$$S_{11} = \frac{1 - Y_b^2 - Y_a^2}{1 + Y_b^2 + Y_a^2}; S_{21} = \frac{j2Y_b}{1 + Y_b^2 + Y_a^2}; S_{31} = 0; S_{41} = \frac{-j2Y_a}{1 + Y_b^2 + Y_a^2}$$

第三埠為隔離埠, $S_{31} = 0$ 。

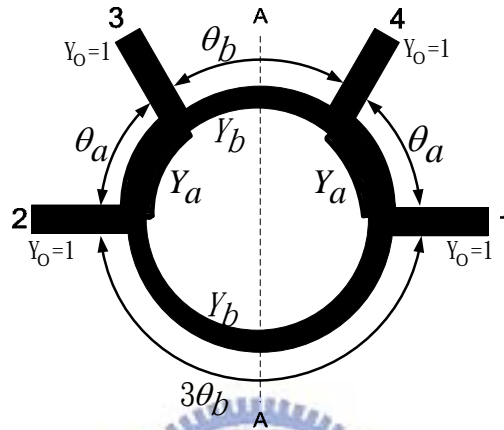
若當第四埠為輸入埠時,

$$S_{14} = \frac{-j2Y_a}{1+Y_b^2+Y_a^2}; S_{24} = 0; S_{34} = \frac{-j2Y_b}{1+Y_b^2+Y_a^2}; S_{44} = \frac{1-Y_b^2-Y_a^2}{1+Y_b^2+Y_a^2}$$

第二埠為隔離埠，如果 $Y_a^2 + Y_b^2 = 1$ ，可以得到完美輸入阻抗匹配。

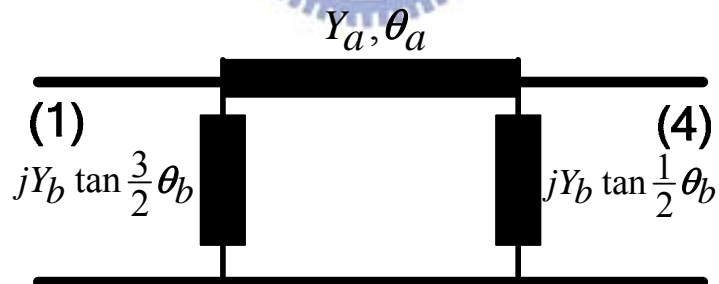
以上結果為我們將環臂長設定在 $\lambda/4$ 時，所得到的答案，接下來，我們將環臂長為 $\lambda/4$ 的條件擴展為任意長度，而各環臂角長度如圖二十一為， $\theta_{1-4} = \theta_{2-3} = \theta_a$ ，

$\theta_{3-4} = \theta_b$ ， $\theta_{1-2} = 3\theta_b$ ，此時終端阻抗依然為 1

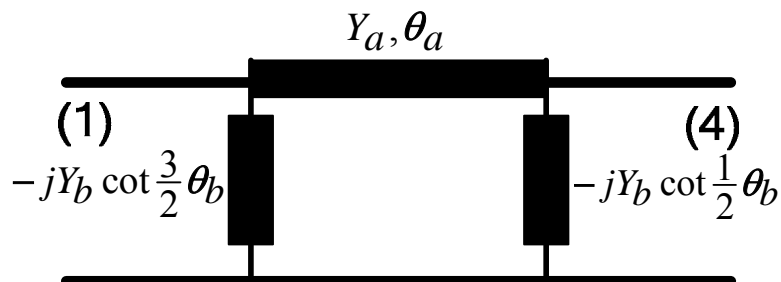


圖二十一、任意環臂長無衰減 rat-race 分合波器

將此結構依對稱分成 even mode 與 odd mode. 如圖二十二與圖二十三，被分割的兩臂，長度分別為 $\theta_b/2$ 與 $3\theta_b/2$ ，



圖二十二. 任意環臂長度的 Even mode 等效電路



圖二十三. 任意環臂長度的 odd mode 等效電路

將 even mode 與 odd mode 的 ABCD 矩陣轉換成[Y]，得到結果如下：

$$Y_{11e} = j(Y_b \tan \frac{3}{2}\theta_b - Y_a \cot \theta_a)$$

$$Y_{44e} = j(Y_b \tan \frac{1}{2}\theta_b - Y_a \cot \theta_a)$$

$$Y_{14e} = Y_{41e} = jY_a \csc \theta_a$$

$$Y_{11o} = -j(Y_b \cot \frac{3}{2}\theta_b + Y_a \cot \theta_a)$$

$$Y_{44o} = -j(Y_b \cot \frac{1}{2}\theta_b + Y_a \cot \theta_a)$$

$$Y_{14o} = Y_{41o} = jY_a \csc \theta_a$$

再將再將[Y]轉換成[S]，可以得到 S 參數矩陣

$$S_{11e} = \frac{1 - Y_a^2 + Y_b^2 \tan \frac{3}{2}\theta_b \tan \frac{1}{2}\theta_b - Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) + jY_b (\tan \frac{1}{2}\theta_b - \tan \frac{3}{2}\theta_b)}{1 + Y_a^2 - Y_b^2 \tan \frac{3}{2}\theta_b \tan \frac{1}{2}\theta_b + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) + j[Y_b (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) - 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.4)$$

$$S_{14e} = S_{41e} = \frac{-j2Y_a \csc \theta_a}{1 + Y_a^2 - Y_b^2 \tan \frac{3}{2}\theta_b \tan \frac{1}{2}\theta_b + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) + j[Y_b (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) - 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.5)$$

$$S_{44e} = \frac{1 - Y_a^2 + Y_b^2 \tan \frac{3}{2}\theta_b \tan \frac{1}{2}\theta_b - Y_a Y_b \cot 2\theta_a (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) + jY_b (\tan \frac{3}{2}\theta_b - \tan \frac{1}{2}\theta_b)}{1 + Y_a^2 - Y_b^2 \tan \frac{3}{2}\theta_b \tan \frac{1}{2}\theta_b + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) + j[Y_b (\tan \frac{3}{2}\theta_b + \tan \frac{1}{2}\theta_b) - 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.6)$$

$$S_{11o} = \frac{1 - Y_a^2 + Y_b^2 \cot \frac{3}{2}\theta_b \cot \frac{1}{2}\theta_b + Y_a Y_b \cot \theta_a (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) - jY_b (\cot \frac{1}{2}\theta_b - \cot \frac{3}{2}\theta_b)}{1 + Y_a^2 - Y_b^2 \cot \frac{3}{2}\theta_b \cot \frac{1}{2}\theta_b - Y_a Y_b \cot \theta_a (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) - j[Y_b (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) + 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.7)$$

$$S_{14o} = S_{41o} = \frac{-j2Y_a \csc \theta_a}{1 + Y_a^2 - Y_b^2 \cot \frac{3}{2}\theta_b \cot \frac{1}{2}\theta_b - Y_a Y_b \cot \theta_a (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) - j[Y_b (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) + 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.8)$$

$$S_{44o} = \frac{1 - Y_a^2 + Y_b^2 \cot \frac{3}{2}\theta_b \cot \frac{1}{2}\theta_b + Y_a Y_b \cot \theta_a (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) - jY_b (\cot \frac{3}{2}\theta_b - \cot \frac{1}{2}\theta_b)}{1 + Y_a^2 - Y_b^2 \cot \frac{3}{2}\theta_b \cot \frac{1}{2}\theta_b - Y_a Y_b \cot \theta_a (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) - j[Y_b (\cot \frac{3}{2}\theta_b + \cot \frac{1}{2}\theta_b) + 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.9)$$

從(3.1)式當第一埠為輸入埠時

$$S_{11} = \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2};$$

$$S_{21} = \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2};$$

$$S_{31} = \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2};$$

$$S_{41} = \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2}$$

當第三埠為輸入埠時

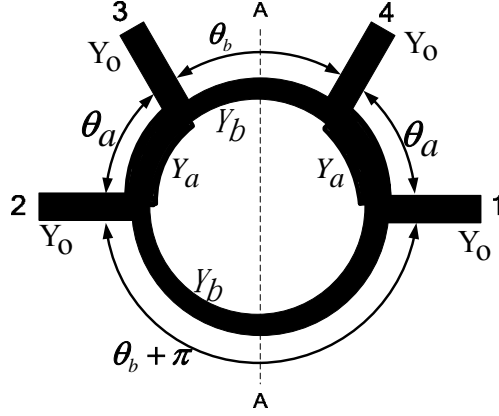
$$S_{13} = \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2};$$

$$S_{23} = \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2};$$

$$S_{33} = \frac{S_{44e} + S_{44o}}{2};$$

$$S_{43} = \frac{S_{44e} - S_{44o}}{2}$$

如果我們將 rat-race 分合波器的長邊 $3\theta_b$ 改為 $\theta_b + \pi$ ，終端阻抗為 Z_0 時，如圖二十四



圖二十四、長環臂長為 $\theta_b + \pi$ 之 rat race 分合波器

接著將其代入(3.4)~(3.9)，可以得到：

$$S_{11e} = \frac{1 - Y_a^2 - Y_b^2 - Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b + \cot \frac{1}{2} \theta_b)}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]}$$

$$S_{14e} = S_{41e} = \frac{-j 2 Y_a \csc \theta_a}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]}$$

$$S_{44e} = \frac{1 - Y_a^2 - Y_b^2 - Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - j Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b + \cot \frac{1}{2} \theta_b)}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]}$$

$$S_{11o} = \frac{1 - Y_a^2 - Y_b^2 - Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - j Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b + \cot \frac{1}{2} \theta_b)}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]}$$

$$S_{14o} = S_{41o} = \frac{-j 2 Y_a \csc \theta_a}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]}$$

$$S_{44o} = \frac{1 - Y_a^2 - Y_b^2 - Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b + \cot \frac{1}{2} \theta_b)}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]}$$

而 S 參數之關係式如下：

$$S_{11} = \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2}; \quad S_{13} = \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2};$$

$$S_{21} = \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2}; \quad S_{23} = \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2};$$

$$S_{31} = \frac{S_{14e} - S_{14o}}{2}; \quad S_{33} = \frac{S_{44e} + S_{44o}}{2};$$

$$S_{41} = \frac{S_{14e} + S_{14o}}{2}; \quad S_{43} = \frac{S_{44e} - S_{44o}}{2}$$

所以

$$S_{11} = \frac{1 - Y_b^2 - Y_a^2 - Y_a Y_b \cot \theta_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b)}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j [Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2 Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.10)$$

$$= \frac{j \sin \theta_a (Z_a Y_0 - Y_a Z_0 - Z_0 Z_a Y_b^2) - j Z_0 Y_b \cos \theta_a [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})]}{2 \cos \theta_a + j Y_b (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)}$$

$$S_{31} = 0$$

$$S_{41} = \frac{-j2Y_a \csc \theta_a}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j[Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2Y_a \cot \theta_a]} \quad (3.11)$$

$$= \frac{2}{2 \cos \theta_a + jY_b (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)}$$

$$S_{21} = \frac{jY_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b + \cot \frac{1}{2} \theta_b)}{1 + Y_a^2 + Y_b^2 + Y_a Y_b \cot \theta_a (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) + j[Y_b (\tan \frac{1}{2} \theta_b - \cot \frac{1}{2} \theta_b) - 2Y_a \cot \theta_a]}$$

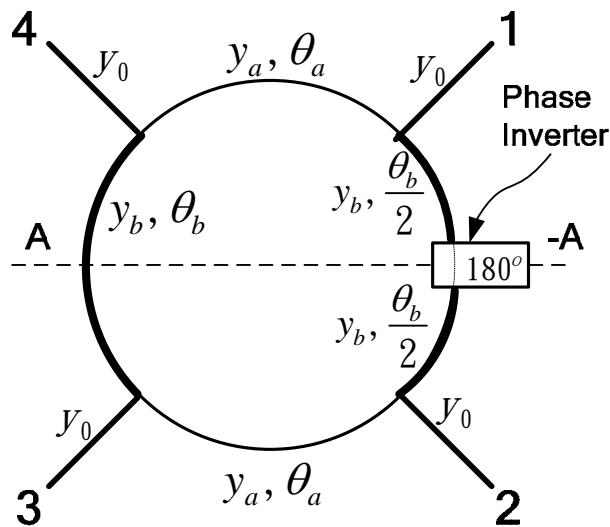
$$= \frac{-Z_a Y_b \sin \theta_a [\tan(\frac{\theta_b}{2}) + \cot(\frac{\theta_b}{2})]}{2 \cos \theta_a + jY_b (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)} \quad (3.12)$$

$$= -S_{34}$$

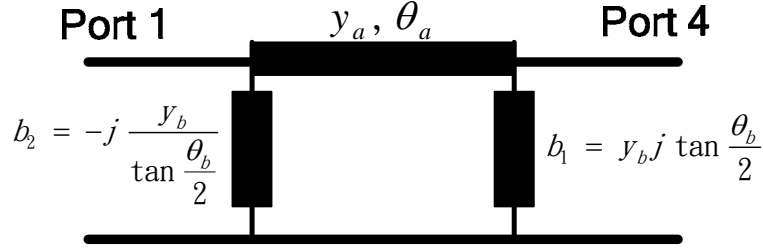
由以上結果可以得知，當此分合波器環臂長邊長度改為 $\theta_b + \pi$ 時，無論頻率與 θ 為何，當第一埠為輸入埠時，第二埠為隔離埠，此時長度不需要限制在四分之一波長，這樣的結果暗示著如果將 rat race 分合波器的長邊縮成和對邊短邊一樣長，然後再加上一個 180° 的相位反轉，則不僅可以縮小 rat-race 分合波器的大小，並且也讓頻寬更寬。

3.3.2 無衰減性具相位反轉之 rat-race 分合波器

由於傳統式的 180° rat-race 分合波器需要 $3\lambda/4$ 的長度，並且操作頻寬較窄，所以將 180° 相位反轉的功能以 phase inverter 方式實現[10]，如圖二十五，為一無衰減之相位反轉 rat-race 分合波器。其中終端阻抗為 y_0 ，兩環臂特性阻抗各為 y_1, y_2 ，角長度各為 θ_1, θ_2 。如同前節方式，將其依對稱結構分為 even mode 以及 odd mode，圖二十六，圖二十七為其等效電路



圖二十五. 無衰減性具相位反轉之分合波器



圖二十六. 無衰減性具相位反轉之分合波器之 even mode 等效電路

圖二十六為 even mode 的等效電路，我們先求出此 even mode 的 ABCD 矩陣

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \cos \theta_a + j \frac{b_1}{Y_a} \sin \theta_a & j \frac{1}{Y_a} \sin \theta_a \\ b_2 \cos \theta_a + j Y_a \sin \theta_a + b_1 b_2 j \frac{1}{Y_a} \sin \theta_a + b_1 \cos \theta_a & j \frac{b_2}{Y_a} \sin \theta_a \cos \theta_a \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$S_{11e} = \frac{A + \frac{B}{Z_0} - CZ_0 - D}{A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}$$

$$= \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_1 - b_2) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 - Y_a^2 - b_1 b_2)}{2 \cos \theta_a Z_0 \cos \theta_a (b_2 + b_1) + j Z_a \sin \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 + Y_a^2 + b_1 b_2)}$$

$$S_{14e} = S_{41e} = \frac{2}{A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}$$

$$= \frac{2}{2 \cos \theta_a Z_0 \cos \theta_a (b_2 + b_1) + j Z_a \sin \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 + Y_a^2 + b_1 b_2)}$$

$$S_{44e} = \frac{-A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}{A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}$$

$$= \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 - b_1) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 - Y_a^2 - b_1 b_2)}{2 \cos \theta_a Z_0 \cos \theta_a (b_2 + b_1) + j Z_a \sin \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 + Y_a^2 + b_1 b_2)}$$

然後將(3.13)式換成 even mode 的 S 參數矩陣

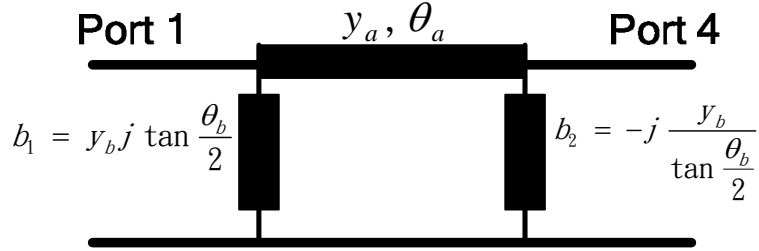
$$[S]_e = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{14} \\ S_{41} & S_{44} \end{bmatrix}$$

$$S_{11e} = \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_1 - b_2) + j Z_0 Y_a \sin \theta_a (-1 - b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + j Z_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$S_{14e} = S_{41e} = \frac{2}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + j Z_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$S_{44e} = \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 - b_1) + j Z_0 Y_a \sin \theta_a (-1 - b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + j Z_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

圖二十七為 odd mode 等效電路，重複前面步驟，可以得到 odd mode 的 ABCD 矩陣，與 S 參數矩陣



圖二十七. 無衰減性具相位反轉之分合波器之 odd mode 等效電路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_o = \begin{bmatrix} \cos \theta_a + j \frac{b_2}{Y_a} \sin \theta_a & j Y_a \sin \theta_a \\ b_1 \cos \theta_a + j Y_a \sin \theta_a + b_1 b_2 j \frac{1}{Y_a} \sin \theta_a + b_2 \cos \theta_a & b_1 j \frac{1}{Y_a} \sin \theta_a + \cos \theta_a \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$S_{11o} = \frac{A + \frac{B}{Z_0} - CZ_0 - D}{A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}$$

$$= \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 - b_1) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 - Y_a^2 - b_1 b_2)}{(2 \cos \theta_a + Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 + b_1) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 + Y_a^2 + b_1 b_2))}$$

$$S_{14o} = S_{41o} = \frac{2}{A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}$$

$$= \frac{2}{2 \cos \theta_a + Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 + b_1) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 + Y_a^2 + b_1 b_2)}$$

$$S_{44o} = \frac{-A + \frac{B}{Z_0} - CZ_0 + D}{A + \frac{B}{Z_0} + CZ_0 + D}$$

$$= \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 - b_1) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 - Y_a^2 - b_1 b_2)}{2 \cos \theta_a + Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + j Z_a \sin \theta_a (b_2 + b_1) + j Z_a Z_0 \sin \theta_a (Y_0^2 + Y_a^2 + b_1 b_2)}$$

$$[S]_o = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{14} \\ S_{41} & S_{44} \end{bmatrix}_o$$

$$S_{11o} = \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + jZ_a \sin \theta_a (b_2 - b_1) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (-1 - b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$S_{14o} = S_{41o} = \frac{2}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$S_{44o} = \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + jZ_a \sin \theta_a (b_1 - b_2) + jZ_a Z_0 \sin \theta_a (-1 - b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

然後由(3.1)式可以得到此四埠相位反轉 rat-race 分合波器之 S 參數

$$S_{11} = \frac{1}{2}(S_{11e} + S_{11o}) = \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + jZ_a Y_a \sin \theta_a (1 + b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$S_{44} = \frac{1}{2}(S_{44e} + S_{44o}) = \frac{-Z_0 \cos \theta_a (b_1 + b_2) + jZ_a Y_a \sin \theta_a (1 + b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_2 b_1 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$S_{11} = S_{44} = \frac{j \sin \theta_a (Z_a Y_0 - Y_a Z_0 - Z_0 Z_a Y_b^2) - jZ_0 Y_b \cos \theta_a [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})]}{2 \cos \theta_1 + jY_b (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)}$$

$$S_{41} = S_{14} = \frac{1}{2}(S_{14e} + S_{14o})$$

$$= \frac{2}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_b Y_a \sin \theta_a (1 + b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$= \frac{2}{2 \cos \theta_a + jY_b (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)}$$

$$S_{31} = \frac{1}{2}(S_{41e} - S_{41o}) = 0$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{1}{2}(S_{11e} - S_{11o})$$

$$= \frac{jZ_a \sin \theta_a (b_1 - b_2)}{2 \cos \theta_a + (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a)(b_1 + b_2) + jZ_0 Y_a \sin \theta_a (1 + b_1 b_2 Z_a^2 + Y_0^2 Z_a^2)}$$

$$= \frac{-Z_a Y_b \sin \theta_a [\tan(\frac{\theta_a}{2}) + \cot(\frac{\theta_a}{2})]}{2 \cos \theta_a + jY_b (Z_0 \cos \theta_a + jZ_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)}$$

$$= -S_{34}$$

由以上結果可以知道，port 3 為一隔離埠(isolation port)，而 phase inverter 亦可達成 180°相位移轉功能。如果 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ，則發現得出的結果與(3.10)，(3.11)，(3.12)相同，所以我們可以利用 180°相位反轉來取代傳統 ra-race 分合波器的 180°長度。

3.4 衰減性相位反轉 rat-race 分合波器之 S 參數公式推導

過去 rat-race 分合波器的發展皆是以理想傳輸線為運算基礎，也就是無衰減的傳輸線，當我們使用相位反轉的方式來實現 rat race 分合波器時，我們可以發現，此種方式可以得到較寬的操作頻寬，而且面積也相對較小，但是如果衰減存在時，是否依然還是可以得到一樣的結論呢？接下來我們將衰減常數納入考慮，再來分析其結果。

3.4.1 衰減性傳輸線之電路分析

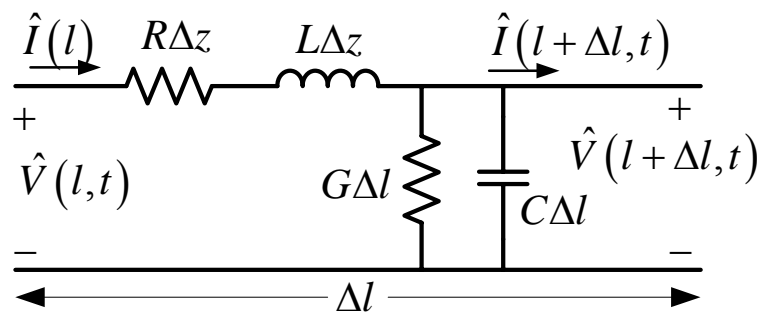
首先，我們針對一段具有衰減的傳輸線作分析，如圖二十八，R 為單位長度電阻(resistor)，L 為單位長度電感(inductor)，G 為單位長度電導(conductor)，C 為單位長度電容(capacitor)， $\hat{V}(l,t), \hat{I}(l)$ 為入射時的電壓電流， $\hat{V}(l+\Delta l,t), \hat{I}(l+\Delta l)$ 為入射波走過一段 Δl 距離時的電壓，電流。由 KVL 與 KCL 的運算，可以得到此傳輸線的特性阻抗(characteristic impedance) Z 與傳播常數(propagation constant) γ ，其中[12]

$$Z = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} \quad (3.15)$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (3.16)$$

並且得出此衰減性傳輸線的 ABCD 矩陣

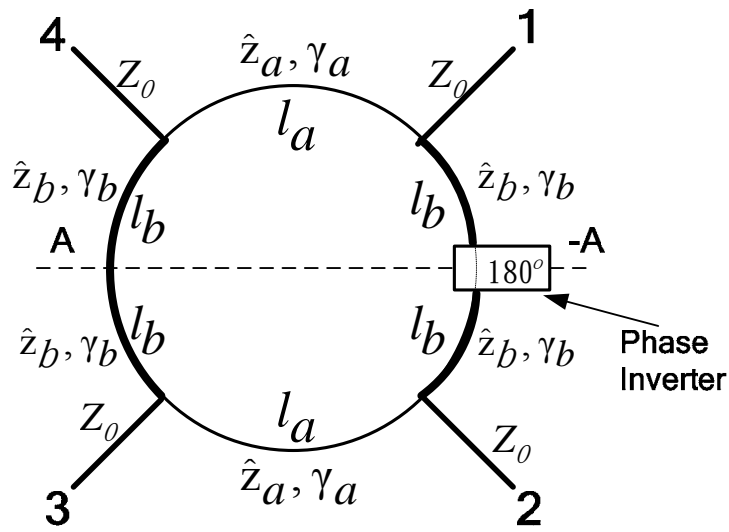
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z \sinh(\gamma l) \\ Y \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$



圖二十八. 衰減性傳輸線之電路分析模型

此時的 ABCD 矩陣因為帶有衰減常數，所以其元素，不再為單純的三角函數，而是 Hyperbolic 函數，有關於以下計算的相關公式，請參考附錄一。

3.4.2 衰減性相位反轉之 rat-race 分合波器的 S 參數



圖二十九. 衰減性相位反轉之 rat-race 分合波器

圖二十九為一個衰減性的相位反轉(phase inverter) rat-race 分合波器. 其中，兩臂長各為 $l_a, 2l_b$ ，傳播常數為 γ_a, γ_b

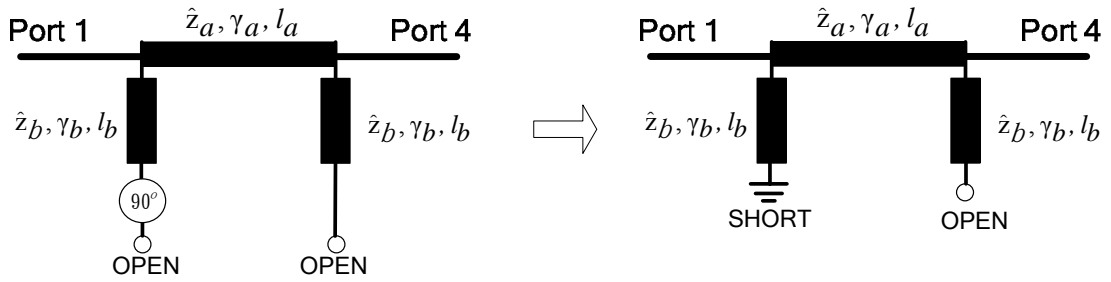
$$\gamma_a = \alpha_a + j\beta_a; \theta_a = \beta l_a$$

$$\gamma_b = \alpha_b + j\beta_b; \theta_b = 2\beta l_b$$

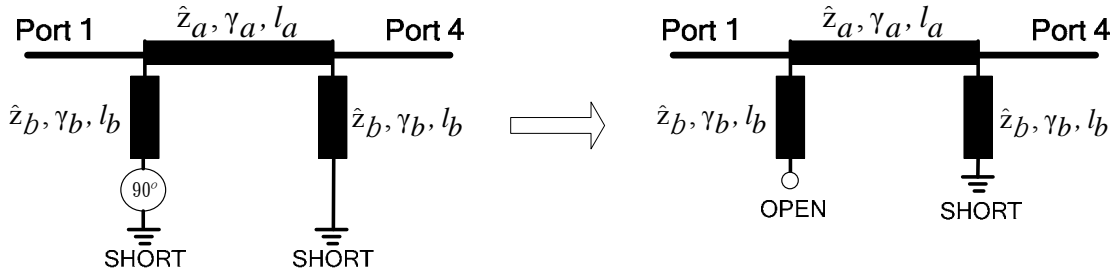
α_a, α_b 各為兩臂的衰減常數(attenuation constant)， β 為相位常數(phase constant)。為計算方便起見，我們將兩臂的特性阻抗 Z_a, Z_b 對 coupler 的終端阻抗 Z_0 作 normalize。亦即：

$$\hat{z}_a = \frac{Z_a}{Z_0}, \hat{z}_b = \frac{Z_b}{Z_0}$$

然後將 rat-race coupler 依對稱結構分成 even mode 及 odd mode，因為在 B 臂有一個 180° 的 phase inverter，在對稱結構下的 even mode，odd mode，就化為 90° 的 phase inverter。圖三十為 phase inverter rat-race coupler 的 even mode 的等效電路，當開路(open)的一端，也就是阻抗無限大時，走了 90° 的距離後，就會變成短路(short)，反之，在圖三十一的 odd mode 等效電路中，短路的一端走了 90° 的距離後，就會變成開路。由(3.17)與 ABCD 矩陣運算原理，我們可以得到 even mode 和 odd mode 的 ABCD 矩陣。



圖三十. 衰減性相位反轉分合波器之偶模等效電路



圖三十一. 衰減性相位反轉分合波器之奇模等效電路

Even mode 的 ABCD 矩陣為

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_e \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_b} \coth(\gamma_b l_b) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_a l_a) & z_a \sinh(\gamma_a l_a) \\ \frac{1}{z_a} \sinh(\gamma_a l_a) & \cosh(\gamma_a l_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_b} \tanh(\gamma_b l_b) & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_a l_a) + \frac{z_a}{z_b} \tanh(\gamma_b l_b) \sinh(\gamma_a l_a) & z_a \sinh(\gamma_a l_a) \\ \frac{1}{z_b} \cosh(\gamma_a l_a) [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)] + \sinh(\gamma_a l_a) [\frac{1}{z_b} + \frac{z_a}{z_b}] & \cosh(\gamma_a l_a) + \frac{z_a}{z_b} \coth(\gamma_b l_b) \sinh(\gamma_a l_a) \end{bmatrix} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Odd mode 的 ABCD 矩陣

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_o \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_b} \tanh(\gamma_b l_b) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_a l_a) & z_a \sinh(\gamma_a l_a) \\ \frac{1}{z_a} \sinh(\gamma_a l_a) & \cosh(\gamma_a l_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_b} \coth(\gamma_b l_b) & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_a l_a) + \frac{z_a}{z_b} \coth(\gamma_b l_b) \sinh(\gamma_a l_a) & z_a \sinh(\gamma_a l_a) \\ \frac{1}{z_b} \cosh(\gamma_a l_a) [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)] + \sinh(\gamma_a l_a) [\frac{1}{z_b} + \frac{z_a}{z_b}] & \cosh(\gamma_a l_a) + \frac{z_a}{z_b} \tanh(\gamma_b l_b) \sinh(\gamma_a l_a) \end{bmatrix} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

令

$$a = \cosh(\gamma_a l_a) + \frac{\hat{z}_a}{\hat{z}_b} \tanh(\gamma_b l_b) \sinh(\gamma_a l_a)$$

$$b = \hat{z}_a \sinh(\gamma_a l_a)$$

$$c = \frac{1}{\hat{z}_b} \cosh(\gamma_a l_a) [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)] + \sinh(\gamma_a l_a) \left[\frac{1}{\hat{z}_a} + \frac{\hat{z}_a}{\hat{z}_b^2} \right]$$

$$d = \cosh(\gamma_a l_a) + \frac{\hat{z}_a}{\hat{z}_b} \coth(\gamma_b l_b) \sinh(\gamma_a l_a)$$

將 a, b, c, d 代入(3.18), (3.19)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_o = \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

我們可以很清楚地發現 even mode 和 odd mode 的 ABCD 矩陣元素除了 A, D 位置相反外, 其實 A, B, C, D 的值是一樣的. 原因是因為我們可以看到在 even mode 時, 由左邊的 port 看進去和在 odd mode 時, 由右邊看進去的情形是一樣的, 所以我們會得到上述的結果。

根據(3.20), (3.21)的結果, 將 even mode 和 odd mode 的 ABCD 矩陣轉成 even mode, odd mode 的 S 參數矩陣, 並且以 a, b, c, d 來表示,

$$\begin{bmatrix} S_{11e} & S_{14e} \\ S_{41e} & S_{44e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+b-c-d}{a+b+c+d} & \frac{2}{a+b+c+d} \\ \frac{2}{a+b+c+d} & \frac{-a+b-c+d}{a+b+c+d} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11o} & S_{14o} \\ S_{41o} & S_{44o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d+b-c-a}{a+b+c+d} & \frac{2}{a+b+c+d} \\ \frac{2}{a+b+c+d} & \frac{-d+b-c+a}{a+b+c+d} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

將(3.22)與(3.23)代入(3.1)

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{S_{11e}+S_{11o}}{2} & \frac{S_{11e}-S_{11o}}{2} & \frac{S_{14e}-S_{14o}}{2} & \frac{S_{14e}+S_{14o}}{2} \\ \frac{S_{11e}-S_{11o}}{2} & \frac{S_{11e}+S_{11o}}{2} & \frac{S_{14e}+S_{14o}}{2} & \frac{S_{14e}-S_{14o}}{2} \\ \frac{S_{41e}-S_{41o}}{2} & \frac{S_{41e}+S_{41o}}{2} & \frac{S_{44e}+S_{44o}}{2} & \frac{S_{44e}-S_{44o}}{2} \\ \frac{S_{41e}+S_{41o}}{2} & \frac{S_{41e}-S_{41o}}{2} & \frac{S_{44e}-S_{44o}}{2} & \frac{S_{44e}+S_{44o}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+b+c+d} \begin{bmatrix} b-c & a-d & 0 & 2 \\ a-d & b-c & 2 & 0 \\ 0 & 2 & b-c & d-a \\ 2 & 0 & d-a & b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{11} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{11} & -S_{21} \\ S_{41} & S_{31} & -S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

其中

$$S_{11} = \frac{\sinh(\gamma_a l_a) \left(\hat{z}_a - 1/\hat{z}_a - \hat{z}_a/\hat{z}_b^2 \right) - 1/\hat{z}_b \cosh(\gamma_a l_a) [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)]}{2 \cosh(\gamma_a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma_a l_a) + \cosh(\gamma_a l_a)] [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)] + \sinh(\gamma_a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]} \quad (3.24)$$

$$S_{21} = \frac{\hat{z}_a/\hat{z}_b \sinh(\gamma_a l_a) [\tanh(\gamma_b l_b) - \coth(\gamma_b l_b)]}{2 \cosh(\gamma_a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma_a l_a) + \cosh(\gamma_a l_a)] [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)] + \sinh(\gamma_a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]} \quad (3.25)$$

$$S_{31} = 0$$

$$S_{41} = \frac{2}{2 \cosh(\gamma_a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma_a l_a) + \cosh(\gamma_a l_a)] [\tanh(\gamma_b l_b) + \coth(\gamma_b l_b)] + \sinh(\gamma_a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]} \quad (3.26)$$

$$Loss = -10 \times \log \left(|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 + |S_{41}|^2 \right)$$

由以上結果，我們可以明顯觀察到，無論是在有衰減或是無衰減的條件下，port 3 都是一個理想的 isolation port ($S_{31} = 0$)。而 $S_{43} = -S_{21}$ 亦可證明 180° phase inverter 可以達到相位反轉，縮小 coupler 面積的目的。而且與頻率無關

3.5 特殊案例

3.5.1 無衰減之 S 參數公式

當傳輸線無衰減時，亦即 $\alpha_a = \alpha_b = 0$ ，代入(3.24)，(3.25)，(3.26)可得到

$$S_{11} = \frac{j \sin \theta_a (Z_a Y_0 - Y_a Z_0 - Z_0 Z_a Y_b^2) - j Z_0 Y_b \cos \theta_a [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})]}{2 \cos \theta_a + j Y_b (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)} \quad (3.27)$$

$$S_{21} = \frac{-Z_a Y_b \sin \theta_a [\tan(\frac{\theta_b}{2}) + \cot(\frac{\theta_b}{2})]}{2 \cos \theta_a + j Y_b (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)} \quad (3.28)$$

$$S_{41} = \frac{2}{2 \cos \theta_a + j Y_b (Z_0 \cos \theta_a + j Z_a \sin \theta_a) [\tan(\frac{\theta_b}{2}) - \cot(\frac{\theta_b}{2})] + j \sin \theta_a (Y_0 Z_a + Z_0 Y_a + Z_0 Z_a Y_b^2)} \quad (3.29)$$

其中

$$\theta_a = \beta l_a = 2\pi l_a / \lambda;$$

$$\theta_b = 2\beta l_b = 4\pi l_b / \lambda$$

(3.27)，(3.28)，(3.29)的結果與 3.2.2 節無衰減性具相位反轉之 rat-race 分合波器的結果是一樣的。這表示所導出的公式可以將無衰減性的特例包含在內。

3.5.2 相同長度，傳播常數與特性阻抗的環臂(ring)

當分合波器的環臂為等長，並且具有相同的傳播常數與特性阻抗時，亦即

$$l_a = 2l_b = l, \gamma_a = \gamma_b = \gamma = \alpha + j\beta, \hat{z}_a = \hat{z}_b = \hat{z}, \text{ 將此條件代入(3.24), (3.25),}$$

(3.26)，結果如下：

$$S_{41}$$

$$= \frac{2}{2 \cosh(\gamma a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma a l_a) + \cosh(\gamma a l_a)] [\tanh(\gamma b l_b) + \coth(\gamma b l_b)] + \sinh(\gamma a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]}$$

$$= \frac{2}{2 \cosh(\gamma l) + 1/\hat{z} [\hat{z} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)] [\tanh(\gamma l/2) + \coth(\gamma l/2)] + \sinh(\gamma l) [\hat{z} + 2/\hat{z}]}$$

$$S_{21}$$

$$= \frac{\hat{z}_a/\hat{z}_b \sinh(\gamma a l_a) [\tanh(\gamma b l_b) - \coth(\gamma b l_b)]}{2 \cosh(\gamma a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma a l_a) + \cosh(\gamma a l_a)] [\tanh(\gamma b l_b) + \coth(\gamma b l_b)] + \sinh(\gamma a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]}$$

$$= \frac{\sinh(\gamma l) [\tanh(\gamma l/2) - \coth(\gamma l/2)]}{2 \cosh(\gamma l) + 1/\hat{z} [\hat{z} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)] [\tanh(\gamma l/2) + \coth(\gamma l/2)] + \sinh(\gamma l) [\hat{z} + 2/\hat{z}]}$$

$$= \frac{-\hat{z}_a/\hat{z}_b \sinh(\gamma a l_a) [\coth(\gamma b l_b) - \tanh(\gamma b l_b)]}{2 \cosh(\gamma a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma a l_a) + \cosh(\gamma a l_a)] [\tanh(\gamma b l_b) + \coth(\gamma b l_b)] + \sinh(\gamma a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]}$$

$$= \frac{-\sinh(\gamma l) \left[\frac{\cosh(\gamma l/2)}{\sinh(\gamma l/2)} - \frac{\sinh(\gamma l/2)}{\cosh(\gamma l/2)} \right]}{2 \cosh(\gamma l) + 1/\hat{z} [\hat{z} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)] [\tanh(\gamma l/2) + \coth(\gamma l/2)] + \sinh(\gamma l) [\hat{z} + 2/\hat{z}]}$$

$$= \frac{-\sinh(\gamma l) \left[\frac{\cosh^2(\gamma l/2) - \sinh^2(\gamma l/2)}{\sinh(\gamma l/2) \cosh(\gamma l/2)} \right]}{2 \cosh(\gamma l) + 1/\hat{z} [\hat{z} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)] [\tanh(\gamma l/2) + \coth(\gamma l/2)] + \sinh(\gamma l) [\hat{z} + 2/\hat{z}]}$$

$$= \frac{-\sinh(\gamma l) [2 \csc h(\gamma l)]}{2 \cosh(\gamma l) + 1/\hat{z} [\hat{z} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)] [\tanh(\gamma l/2) + \coth(\gamma l/2)] + \sinh(\gamma l) [\hat{z} + 2/\hat{z}]}$$

$$= \frac{-2}{2 \cosh(\gamma l) + 1/\hat{z} [\hat{z} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)] [\tanh(\gamma l/2) + \coth(\gamma l/2)] + \sinh(\gamma l) [\hat{z} + 2/\hat{z}]}$$

$$= -S_{41}$$

所以當分合波器的環臂為等長，並且具有相同的傳播常數與特性阻抗時，若 port1 為 input port 時 port 4，port 2 可以得到功率，相位相反的輸出。若 port4 為 input port，則 port1, port3 可以得到功率，相位相同的輸出。

3.5.2.1 環臂長為 $\lambda/4$ 時的輸入阻抗匹配條件

在環臂為等長，並且具有相同的傳播常數與特性阻抗時，可以得到等功率與等相位的輸出，此時如果環臂長為 $1/4$ 波長時，也就是

$$l = \frac{1}{4}\lambda; \gamma l = (\alpha + j\beta)l = (\alpha + j\beta)\frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}\lambda\alpha + j\frac{\pi}{2}, \text{ 代入(3.24):}$$

S_{11}

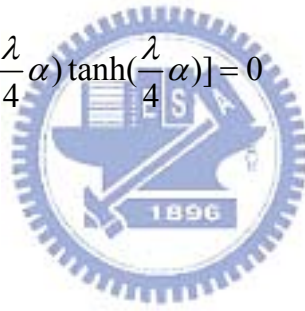
$$\begin{aligned} & \frac{\sinh(\gamma a l_a) \left(\hat{z}_a - 1/\hat{z}_a - \hat{z}_a/\hat{z}_b^2 \right) - 1/\hat{z}_b \cosh(\gamma a l_a) [\tanh(\gamma b l_b) + \coth(\gamma b l_b)]}{2 \cosh(\gamma a l_a) + 1/\hat{z}_b [\hat{z}_a \sinh(\gamma a l_a) + \cosh(\gamma a l_a)] [\tanh(\gamma b l_b) + \coth(\gamma b l_b)] + \sinh(\gamma a l_a) [\hat{z}_a + 1/\hat{z}_a + \hat{z}_a/\hat{z}_b^2]} \\ &= \frac{j \cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) (\hat{z} - 2/\hat{z}) - j[(2/\hat{z}) \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)]}{2 j \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) + 1/\hat{z} [\hat{z} j \cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) + j \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)] [2 \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)] + j \cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) [\hat{z} + 2/\hat{z}]} \\ &= \frac{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) (\hat{z} - 2/\hat{z}) - [(2/\hat{z}) \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)]}{2 \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) + 1/\hat{z} [\hat{z} \cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) + \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)] [2 \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)] + \cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) [\hat{z} + 2/\hat{z}]} \end{aligned}$$

當 port 1 為輸入阻抗匹配時， $S_{11} = 0$

$$\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) (\hat{z} - 2/\hat{z}) - [2/\hat{z} \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)] = 0$$

$$\hat{z}^2 \cosh^2\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) = 2 \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\alpha\right)$$

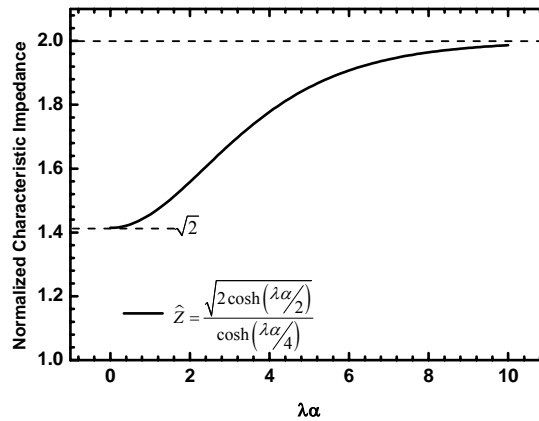
$$\hat{z} = \frac{\sqrt{2 \cosh(\lambda\alpha/2)}}{\cosh(\lambda\alpha/4)}$$



(3.27)

\hat{z} is real number since $\lambda\alpha$ is real number

根據(3.27)的結果，畫出正規化(normalize)後的特性阻抗 \hat{z} 與 $\lambda\alpha$ 之間的關係圖如圖三十二。



圖三十二. \hat{z} 與 $\lambda\alpha$ 的關係圖

由圖三十二可知，當 $\alpha=0$ 時，亦即無衰減，則 $\hat{z}=\sqrt{2}$ ，而當 α 趨近於無窮大時， $\hat{z}=2$ ，所以當 port 1 在輸入阻抗匹配的情況下，由式子(3.15)：

$$Z = \sqrt{\frac{(R+j\omega L)}{(G+j\omega C)}} = \hat{z}Z_o, Z_o = \sqrt{\frac{(R+j\omega L)}{(G+j\omega C)}} / \hat{z}$$

因為 Z_o, \hat{z} 為實數

所以 $\sqrt{\frac{(R+j\omega L)}{(G+j\omega C)}}$ 要為實數。

則有下列三種情況可以滿足

<1> $L=C=0$, pure resistive line

<2> $R=G=0$, lossless

<3> $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$, distortionless line

當傳輸線為純阻抗線時，

$$\hat{z} = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

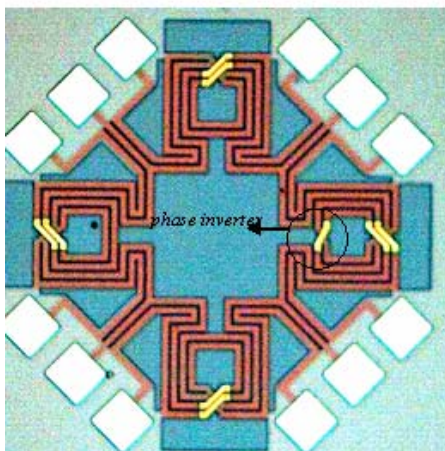
當傳輸線無衰減或是無失真時[3]，

$$\hat{z} = \sqrt{\frac{L}{C}} / Z_o$$

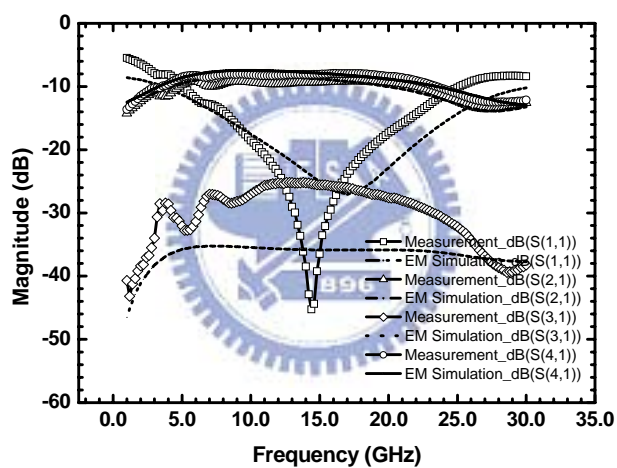


四、實驗結果

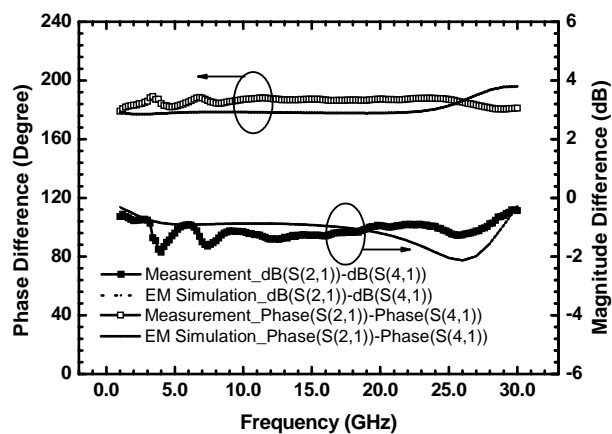
4.1 實驗參數粹取



圖三十三. 衰減性相位反轉 rat-race 分合波器實作圖



圖三十四. S 參數與頻率關係圖



圖三十五. 相位反轉與頻率之關係圖

圖三十三為實做的晶片，圖三十四、圖三十五為量測結果。經由實驗參數的粹取，我們得到

$$R = 161 \Omega / cm$$

$$L = 7.47 nH / cm$$

$$G = 0.03 S / cm$$

$$C = 1.28 pF / cm$$

$$R/L = 2.15e^{10};$$

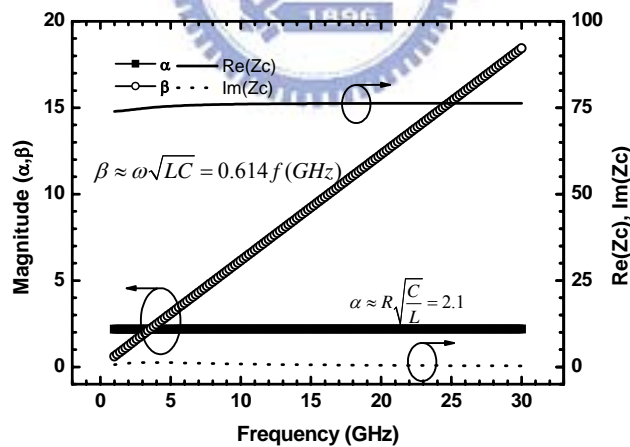
$$G/C = 2.34e^{10}$$

中心頻率在 15.66 GHz

由於 $\frac{R}{L} \approx \frac{G}{C}$ ，可以視為近似於 distortionless line.

由所粹取出的 R, L, G, C 值，可以求出衰減常數與相位常數，以及複數特性阻抗。

如圖三十六，衰減常數 α 為一定值，約為 2.1，相位常數對頻率(f)為線性，斜率約為 0.614。而由於傳輸線接近非失真線的條件，所以 S_{11} 有良好的 matching. 傳輸線特性阻抗為 76.235 Ω ，特性阻抗的虛部接近 0。



圖三十六. α , β , Z 與頻率關係圖

4.2 應用於 Gilbert mixer 之可行性

由圖三十四與圖三十五，兩輸出埠的 S 參數的 dB 值為 10，表示有衰減的在，而 differential 的輸出也有等功率以及 180° 的相位差，不同於 switch diode 需要大電流的驅動，Gilbert mixer 只需要較低的 LO 功率就能工作，所以將含相位反轉的 rat-race 分合波器應用於 Gilbert mixer 上且實作標準 Si 製程時，由於依舊可以得

到等功率與 180° 相位差的差分訊號，其在 Si substrate 上的衰減，依然在 Gilbert Mixer 的容忍範圍內。



五、結論

我們從 rat-race 分合波器的發展歷史，一開始是做在電路板上，將傳輸線視為無衰減性，接下來，利用相位反轉的技巧達到縮小化與寬頻的目的。由於要將相位反轉 rat-race 分合波器與他射頻電路整合進標準 Si 製程內，因此我們必須將衰減因素考慮進來，並且以繞線方式來達到 1/4 波長的要求，由公式的推導和實驗可以證明，因為衰減的路徑一致，port 4 依然是個 isolation port，與頻率無關，依然可以達到寬頻的需求，並且可得到同相位，同功率的輸出。另外，將傳輸線設計在接近無失真(distortionless)的條件，可以得到的良好的輸入阻抗匹配。由於 Gilbert mixer 只需要較低的 LO power，所以雖然 rat-race 製作於標準 Si 製程有衰減上的考量，亦能應用於 Gilbert mixer 電路。



參 考 文 獻

- [1] Fazal Ali and Allen Podell, "A Wide-Band GaAs Monolithic Spiral Quadrature Hybrid and its Circuit Application", *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 26, no. 10, pp. 1394-1398, Oct. 1991.
- [2] G.F. Avitable, A. Cidronali C.Salvador and M. Speciale, "A compact MMIC 90° Coupler for ISM Application", *IEEE MTT-S Denver CO* June 1997.
- [3] Robert C. Frye, Sharad Kapur, and Robert C. Melville, "A 2 GHz Quadrature Hybrid Implemented in CMOS Technology", *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 38, no. 3, pp550-555, Mar. 2003.
- [4] D.S. Yu, C.F. Cheng, K.T. Chan, A. Chin, S.P. McAlister, C. Zhu, M.F. Li, and D.L. Kwong, "Narrow-band band-pass filters on silicon substrates at 30 GHz," in *IEEE MTT-S Int'l Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1467-1470, June, 2004.
- [5] M.Ozgur, M.E. Zaghloul, and M. Gaitan, "High Q Backside Micromachined CMOS Inductors," *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 2, pp. 577-580, 1999.
- [6] Tao Wang, Hsiao-Chin Chen, Hung-Wei Chiu, Yo-Sheng Lin, Guo Wei Huang and Shey-Shi Li, "Micromachined CMOS LNA and VCO By CMOS-Compatible ICP Deep Trench Technology", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 54, no. 2, pp 580-588, Feb. 2006.
- [7] Jonghae Kim, Jean-Olivier Plouchart and Noah Zamdmer, "Design and Manufacturability Aspect of SOI CMOS RFICs", *IEEE Custom Integrated Circuit Conference*, 2004
- [8] H. Y. Chang, P.S. Wu, T.W. Huang, H. Wang, C.L. Chang, J.G. Chern, "Design and Analysis of CMOS Broad-Band Compact High-Linearity Modulators for Gigabit Microwave/Millimeter-Wave Applications", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 54, no. 1, pp. 20-30, Jan. 2006
- [9] Chunk Y. Pon., "Hybrid-Ring Directional Coupler for Arbitrary Power Divisions", *IRE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 9, pp. 529-535, Nov. 1961.
- [10] Tetsuo Hirota, Akira Minakawa, and Masahiro Muraguchi, "Reduced-Size Branch-Line and Rat-Race Hybrid for Uniplanar MMIC's", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 38, no.3, pp270-275, Mar. 1990.
- [11] Ke Wu, "Size-Reduction and Band-Broadening Design Technique of Uniplanar Hybrid Ring Coupler Using Phase Inverter for M(H)MIC's", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 7, no.2, pp198-206, Feb. 1999.
- [12] David Pozar, "Microwave Engineering", 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 1998
- [13] Samuel J.Parisi, "180° LUMPED ELEMENT HYBRID", *IEEE MTT-S Digest*, pp. 1243-1246, 1989.

-
- [14] Chien-Hsun Ho, Lu Fan, and Kai Chang, “New Uniplanar Coplanar Waveguide Hybrid-Ring Couplers and Magic-T’s”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 42, no. 12, pp 2440~2448, Dec. 1994.
- [15] Brad Ryan Heimer, Lu Fa, and Kai Chang, “Uniplanar Hybrid Coupler Using Asymmetrical Coplanar Striplines”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. 45, no.12, pp2234-2440, Dec. 1997.
- [16] 吳智凱, “結合 Cherry Hooper 放大機制與被動電路的射頻混頻器設計與實作”, 交通大學碩士論文, 2005.
- [17] 張家宏, “被動分合波器與主動混頻器之整合及覆晶封裝之毫米波驅動放大器設計與實作”, 交通大學碩士論文, 2006



附錄一

Real Trigonometric and Hyperbolic Functions

x, y are real numbers

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x + i \sin x$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

$$= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} \dots$$

$$= e^{ix}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$



$$\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x \equiv 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x \equiv x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Complex Trigonometric and Hyperbolic Functions

z, z_1, z_2 is complex numbers

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos z \equiv 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin z \equiv z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cos z + i \sin z$$

$$= (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots)$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} \dots$$

$$= 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} \dots$$

$$= e^{iz}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cosh(z) \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z) \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z \equiv 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh z \equiv z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$



λ, α are real numbers

$$\sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha + j\frac{\pi}{2}\right) = j \cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)$$

$$\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha + j\frac{\pi}{2}\right) = j \sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)$$

$$\tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha + j\frac{\pi}{2}\right) = \coth\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)$$

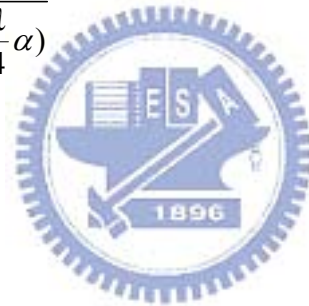
$$\coth\left(\frac{\lambda}{4}\alpha + j\frac{\pi}{2}\right) = \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)$$

$$\coth\left(\frac{\lambda}{8}\gamma\right) = \coth\left(\frac{1}{2} \times \frac{\lambda}{4}\gamma\right) = \frac{\sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\tanh\left(\frac{\lambda}{8}\gamma\right) = \tanh\left(\frac{1}{2} \times \frac{\lambda}{4}\gamma\right) = \frac{\sinh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\tanh\left(\frac{\lambda}{8}\gamma\right) + \coth\left(\frac{\lambda}{8}\gamma\right) = 2 \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)$$

$$\coth\left(\frac{\lambda}{8}\gamma\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{8}\gamma\right) = \frac{-2j}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\alpha\right)}$$



自 傳

筆者過去服務於喬鼎科技，阡成視訊以及創傑科技，專長為電路設計與系統驗證，及電磁相容測試，主要涉獵範圍包含磁碟陣(DISK ARRAY)，Cable modem，VOIP，Bluetooth，WLAN 等相關系統與晶片設計與驗證。

目前服務於凌陽科技，負責 DVB-T 相關晶片之系統開發應用與客戶推廣與服務。

