第四章 數學簡報系統構圖之需要

在本章中將要介紹以研究者所設計的功能來建構數學圖形的實例以及作圖的方式，主要重點功能有 1.定位能力（包括 中心點點定位、線定位）2.複製能力 3.以條件式選取來處理大量物件。而圖形製作則分五個部分來介紹，一是「以圖爲證」（Proofs Without Words），二是現有中學數學教材，三是平面圖形鑲嵌（Tessellations），四是碎形圖案（Fractal），五是其他特殊圖形。

4-1 以圖爲證（Proofs Without Words）

由美國數學學會（Mathematical Association of America, MAA）出版的 ”以圖爲証（Proofs Without Words）” 一書[18]，以及第二冊[19]，有一些較爲複雜的圖形，這些圖形是說明或證明數學公式。這些公式證明的圖形有一些特性，主要有：大量重複相同的物件，結構複雜，樣式具有規律性等等。除此之外，研究者選擇此一部分作試驗的主題原因有兩點。首先是，以圖爲證的圖說方式是教材設計的典範，以圖形就可以說明或證明一個數學公式。再來則是，作圖方面有準確定位的需求，但是操作者卻希望可以模糊操作，定位部分讓系統來負責即可，如此才可以減少製作成本。在此處研究者將列出一些圖形與公式，並介紹如何使用研究者開發的系統，在畫圖時使用一些特殊功能，可以在最短時間內畫出最精確的圖形。

因爲繪圖物件的形成過程基本概念接近，所以並未將已做出的圖形全部加以說明，只選出四個主要圖形，其它的放在附錄之中。

4-1-1 立方和公式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$

此公式左半邊是整數立方總和，在圖 4.1.1 中可以看出以空白部分的格子數來表示。公式的右半邊是 1/4 個正方形面積，邊長爲n^2+n。由內往外分別由 5 圈正方形組合而成，每一圈的正方形每一邊個數與大小皆相同，但不同圈的正方形數量與大小則有差異。同中有異，異中有同，而且許多圖形物件重複，只是大小不同。

而圖 4.1.2 則是從一個正方形矩陣開始，依序將圖 4.1.1 形成的過程依序呈現，在此只用到畫出矩形方陣的功能以及畫出格線功能即可。圖形形成過程是，先畫出正方形然後畫出 6 × 6 的正方形方陣，如圖 a；保留最外圈的正方形，將中間的部分再做出 5 × 5 的正方形方陣，如圖 b 到 c；再保留最外圈的正方形，將中間的部分再做出 4 × 4 的正方形方陣，如圖 d 到 e，依此順序繼續下去直到 2 × 2 的正方形方陣爲止，如圖 f 到 i。最後選每一圈的正方形其中一邊，將其轉爲正方形格線，即可表現出立方和的部分，如圖 j、圖 k。

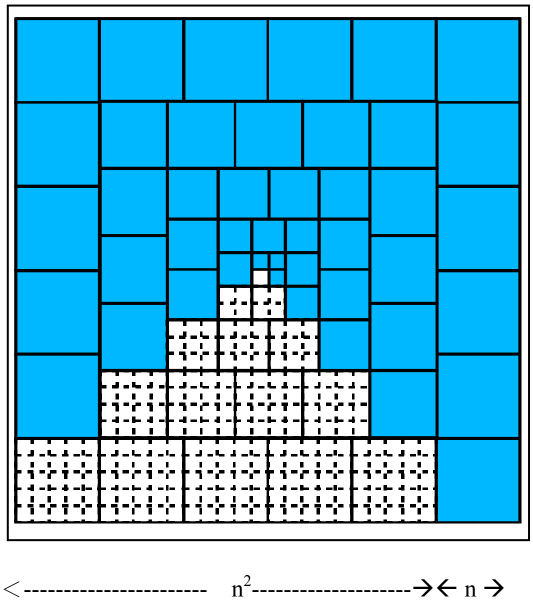


圖 4.1.1 立方和公式完成圖

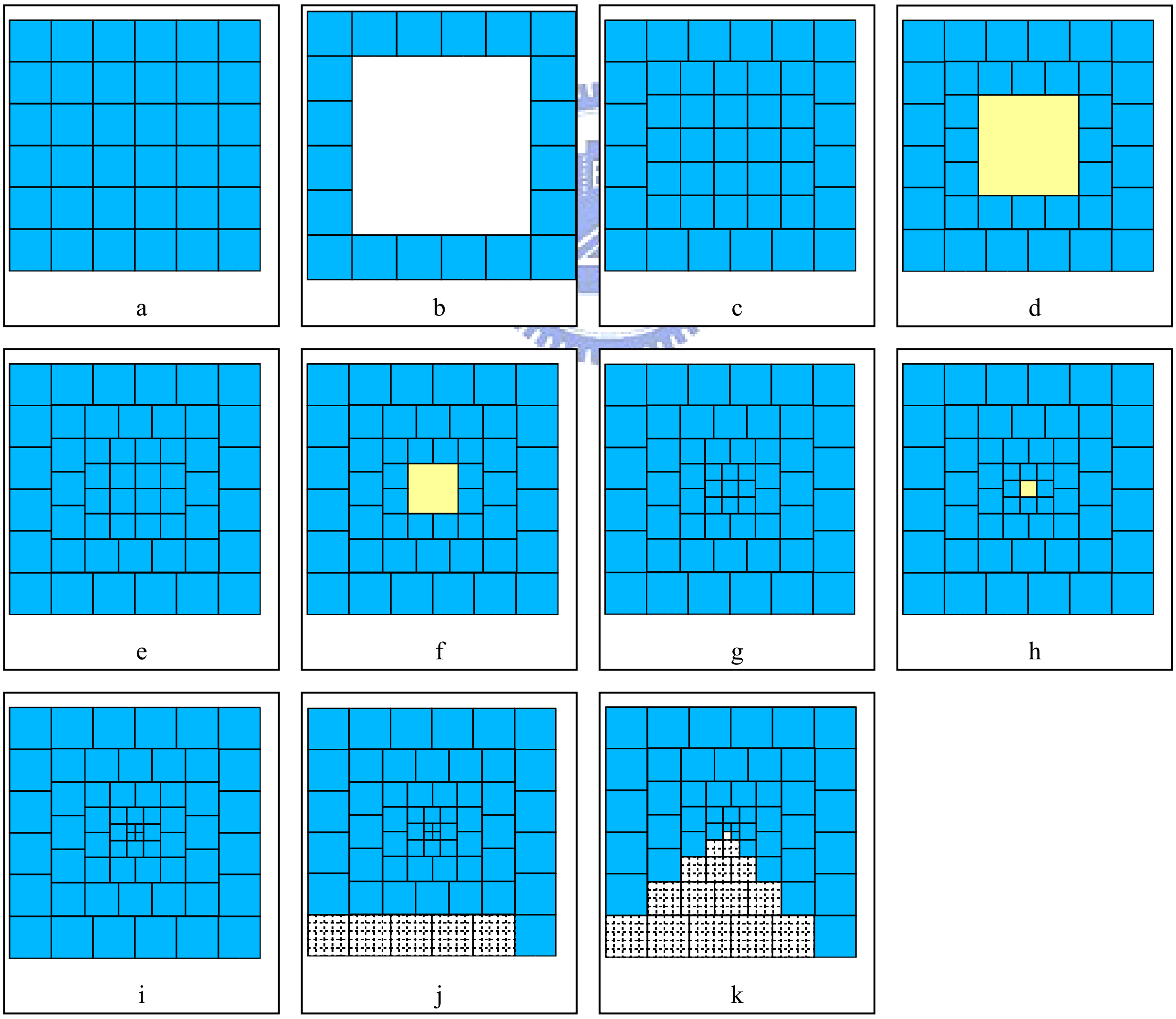
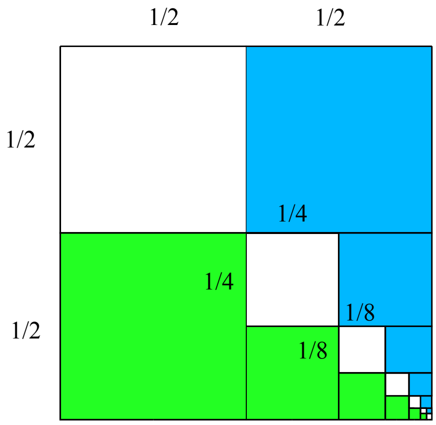


圖 4.1.2 立方和公式形成過程

4-1-2　幾何級數（Geometric Series）以 1/4 爲首項以及公比的無窮級數爲範例。

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+...=\frac{1}{3}$$

在圖 4.1.3 當中，可以看出邊長爲 1 的正方形由顏色來區分，它被切割成三個部分，中間對角線是白色正方形系列，邊長由 1/2，1/4，1/8…一直下去，而面積則由 1/4，1/16，1/64，…一直接下去，另外兩個深色與淺色的正方形系列也有相同的情形出現，於是 1 × 1 正方形便被切成三個部分。而圖形形成過程則在圖 4.1.4 當中分幾個子圖分別從 a 到 f 作呈現，詳細過程說明如下：圖 a 是做出正方形；圖 b 是將正方形以畫出 2×2 矩陣加以分割成四個等分正方形；圖 c 則是把左上與右下正方形的顏色取走，形成繼續複製的樣式（pattern）；圖 d 則是將圖 c 的樣式利用框定位複製到圖 c 中右下角的正方形之中所得的結果；圖 e 則是將圖 c 的樣式利用框定位複製到圖 d 中右下角的正方形之中所得的結果；最後，圖 f 則是將圖 c 的樣式利用框定位複製到圖 e 中右下角的正方形之中所得的結果。



首項以及公比皆爲 1/4 的級數

圖 4.1.3 等比級數求和公式範例

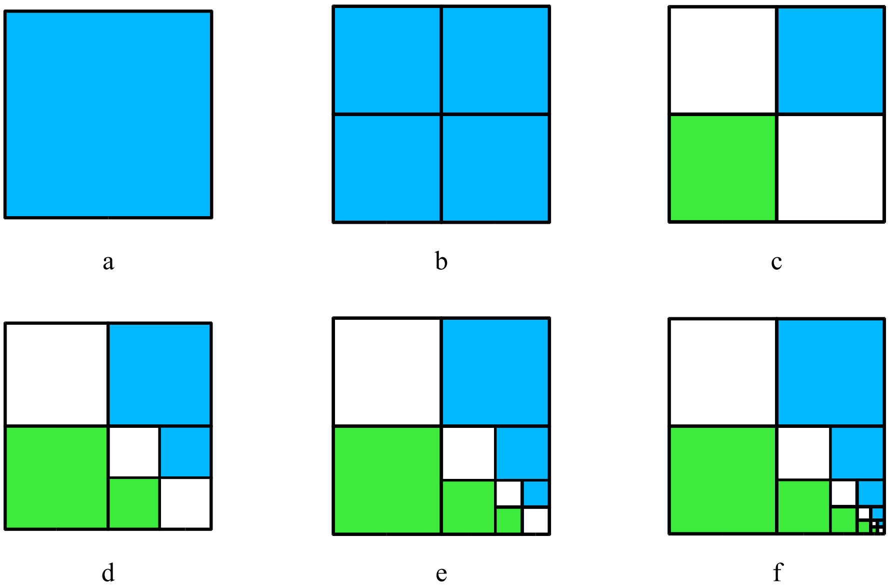


圖 4.1.4 等比級數求和公式圖形形成過程

4-1-3　正三角形、正方形與正六邊形組合成正十二邊形

如圖 4.1.6，先畫出小的正六邊形，再將各邊往外貼上一個與正六邊形邊長等長的正方形，然後在正六邊形各頂點貼上正三角形，如此就形成如圖 4.1.5 所示的正十二邊形。如果是要得到圖形從圖 4.1.6 的子圖 a 到子圖 c 的結果，一般的繪製方式是將正六邊形畫出，再畫出六個正方形，六個正三角形，然後再將正方形與正三角形透過旋轉、平移的方式移動到定位與正六邊形貼齊，才能形成正十二邊形。同時還要將正方形與正三角形的邊長調整成與正六邊形的邊長相同，如此才能正確的拼出正十二邊形。但是如果用研究者所做的系統來繪製圖形只需要簡單幾個步驟即可完成，操作者完全不需考慮邊長或旋轉角度，可以達到模糊操作準確定位的機制。圖 4.1.7 是兩個樣式與基底線段，一個是正方形另一個正三角形，分別加上基底線段，先利用線定位指令在圖 a 的六個邊貼上正方形，再利用線定位指令在六個正方形右手邊上貼上正三角形，如此就形成正十二邊形。

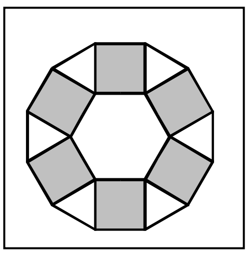


圖 4.1.5　正十二邊形

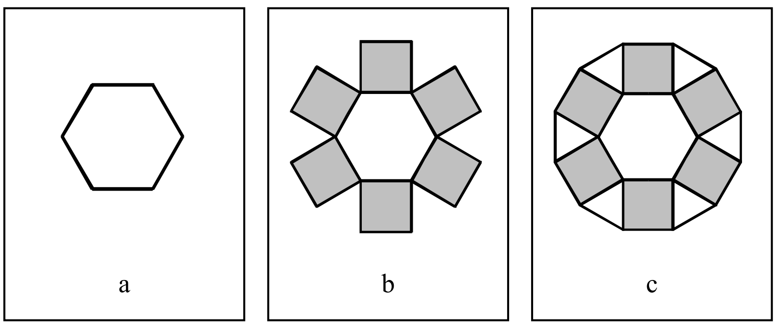


圖 4.1.6　正十二邊形形成過程

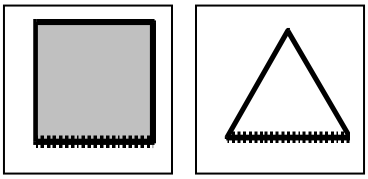


圖 4.1.7 複製用樣式

4-1-4 畢氏樹

畢氏定理的證明有兩百種以上，其中一種是將直角三角形三邊做成正方形，兩股邊長所做的正方形面積和會等於斜邊長所做的正方形面積。圖 4.1.8 所出現的畢氏樹意義是，用等邊直角三角形所做成的畢氏樹，最大的正方形只有一個，其餘小正方形，每一種相同大小的正方形面積和都會與最大的正方形面積相同。也可以用非等邊直角三角形來作，如此一來樹木兩邊就不會對稱，如圖 4.1.9 所示。

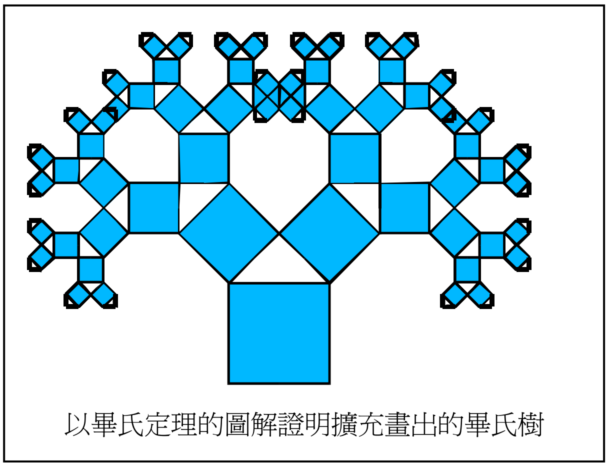


圖 4.1.8 等腰直角三角形的五階層畢氏樹

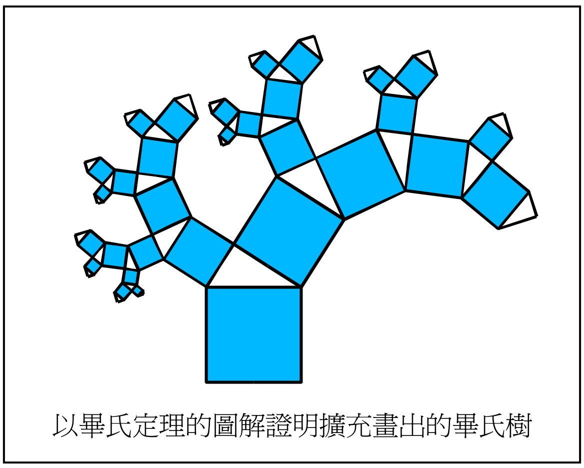


圖 4.1.9 非等腰直角三角形的五階層的畢氏樹

在圖 4.1.10 介紹畢氏樹形成過程，第一步作出正方形與等腰直角三角形，如圖 a；第二步在圖 a 的三角形兩股利用線定位功能（LinePosition）作出與圖 a 相同的形狀，接下來的圖 c 到圖 e 依此類推下去，樹木便依序長出更細的枝幹與樹葉。

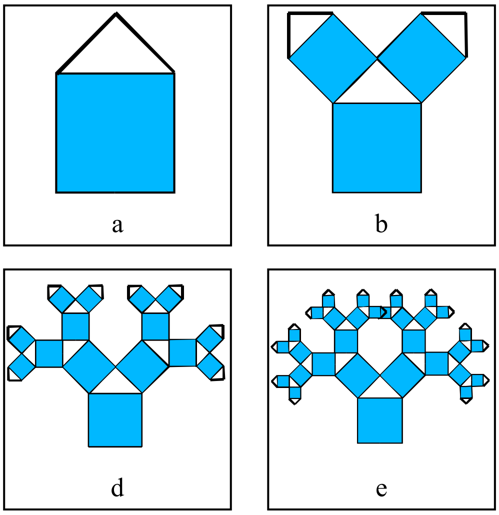


圖 4.1.10 等腰直角三角形的五階層畢氏樹形成過程

4-2 現有中學數學教材

目前九年一貫課程國中數學的教科書開放民間編製，雖然有許多出版社出版，但都要通過能力指標檢驗，所以各版本都會將能力指標納入因此選用何種版本差異並不大。研究者所服務的學校中，有一個年級採用南一版數學[20][21]，所以以此版本當架構，將該教材中可以利用本系統來完成的圖形，在此作個簡單介紹，製作方式也一併介紹。

4-2-1 圓形

在圖 4.2.1 介紹圓心、半徑、直徑等與圓有關的名詞。當中第一個圖先畫出線段當半徑，然後選用以**半徑畫圓**的功能（RadiusCircle）畫出圓形，第二個圖形則是先畫出直徑在依此直徑用以**直徑畫圓**（DiameterCircle）功能畫出圓形，第三的與第四個圖形則是先畫出圓形，利用顯示物件中心點（ShowCenter）功能來找出圓心，然後再分別畫出一條弦與兩條半徑。

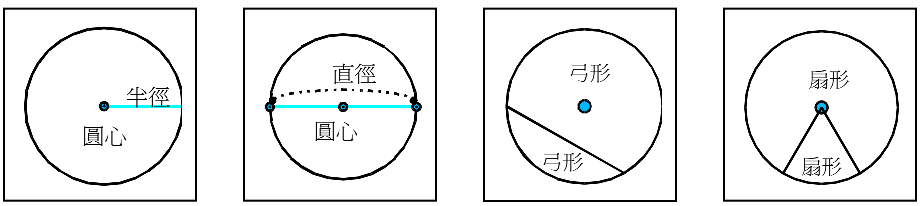
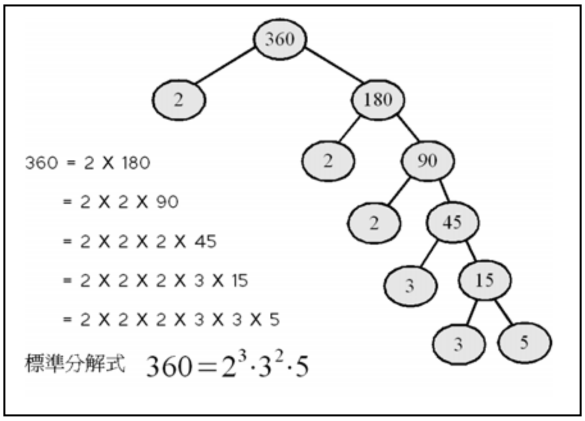


圖 4.2.1 介紹圓的基本名詞

4-2-2　質因數分解與標準分解式

在圖 4.2.2 以 360 作質因數分解當例子，一共用到五層的二元樹。二元樹左邊則是顯示 360 從最小的質數開始分解下去的數學算式步驟，因此樹木往右邊生長，左邊的點只有樹葉沒有樹枝。



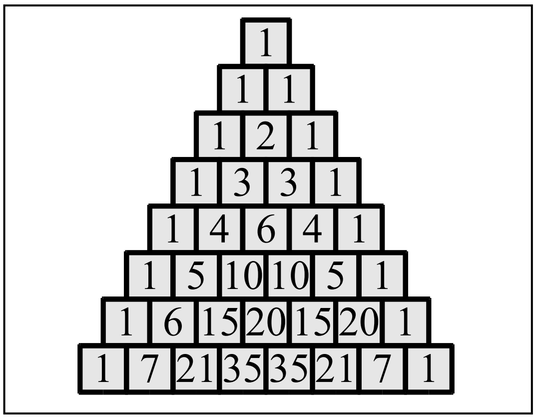


圖 4.2.2 以部分二元樹作質因數分解的圖解　　圖 4.2.3 賈憲三角

4-2-3　賈憲三角（Pascal Triangle）

在圖 4.2.3 可看出從最頂層的 1 開始往下每一層增加一格，每列兩旁數字都爲 1，中間的數是上方兩格數字總和，在此作出七層的賈憲三角。

在圖 4.2.4 則是顯示此八層賈憲三角形成的過程，首先畫出一個正方形，然後用畫出正方形方陣的功能（Mysquare）畫出 8 × 8 的正方形矩陣，如圖 a 所示，將左半邊去掉一個三角形，如圖 b。將每一列群組起來，全部選起來置中對齊，就形成三角形的形狀，如圖 c，解群組後在將數字輸入各個正方形中，賈憲三角便完成了，如圖 d。

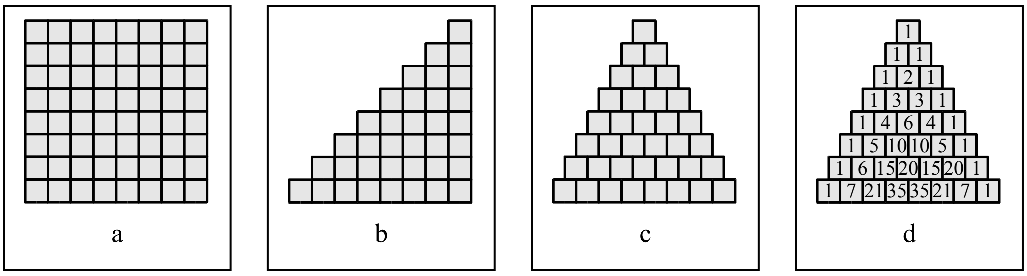


圖 4.2.4 賈憲三角形成過程

4-2-4 等差數列的總和

如圖 4.2.5 所示，在此以 1+2+3+4+5+6+7+8 = 8 ·（1+8）/ 2 當作等差數列求和的實例。而作出這個圖形只需幾個簡單步驟即可，在圖 4.2.6 會顯示出產生的順序。作法如下，首先畫出一個正方形，然後用畫出正方形方陣的功能（Mysquare）畫出 8 × 8 的正方形矩陣，如圖 a，將左半邊去掉一群如三角形狀的小正方形，如圖 b。將每一列群組起來，全部選起來置中對齊，就形成三角形的形狀，如圖 c，然後將正方形以框定位複製功能變更為圓形，如圖 d。將全部圓形群組起來，複製一份並旋轉 180 度，改變顏色與前一個三角形貼齊，如圖 e。

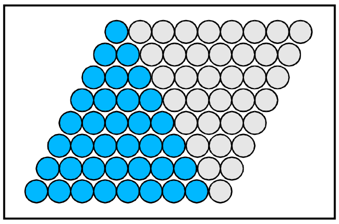


圖 4.2.5 等差數列求和公式

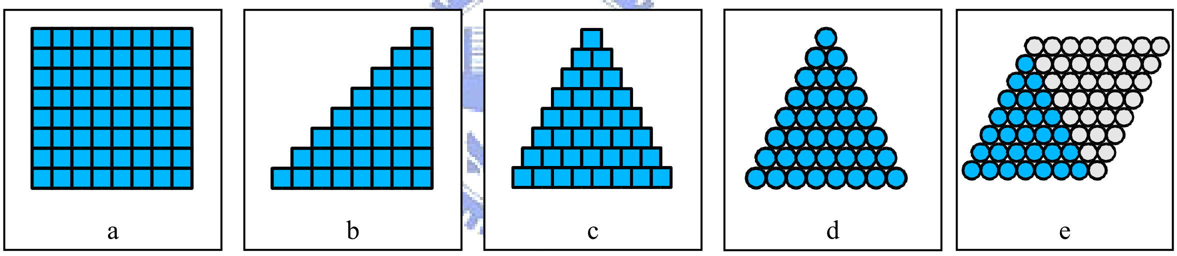
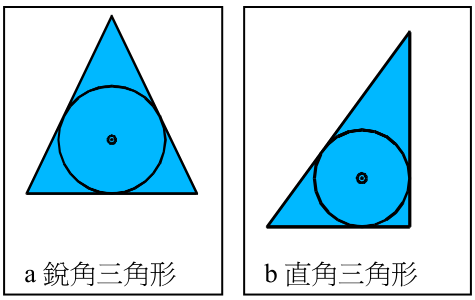


圖 4.2.6 等差級數求和公式形成過程

4-2-5 內心以及內接圓

如圖 4.2.7 由 a 到 c 分別是畫出銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形的內心以及內切圓。使用的功能是給定一個三角形，然後畫出三角形內心與內切圓（InscribedCircle）



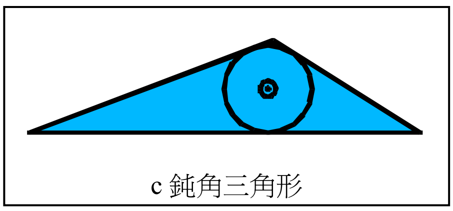


圖 4.2.7 各種三角形的內心與內接圓

4-2-6　外心以及外接圓

如圖 4.2.8 所示，由圖 a 到圖 c 分別是畫出銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形的外心以及外切圓。使用的功能是給定一個三角形，畫出三角形外心與外接圓（CircumCircle）。

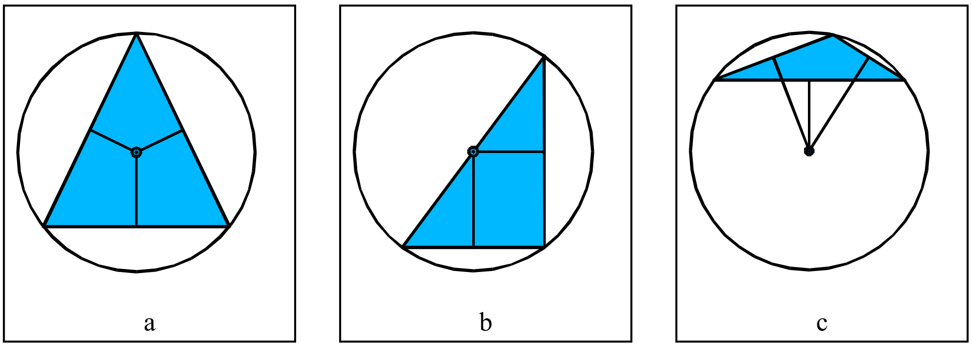


圖 4.2.8 各種三角形的外心與外接圓

4-2-7　重心及中線

如圖 4.2.9 所示，由圖 a 到圖 d 分別是畫出銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形及正三角形的重心以及各邊上的中線。使用的功能是給定一個三角形，畫出三角形重心與三邊中線（Centroid）。

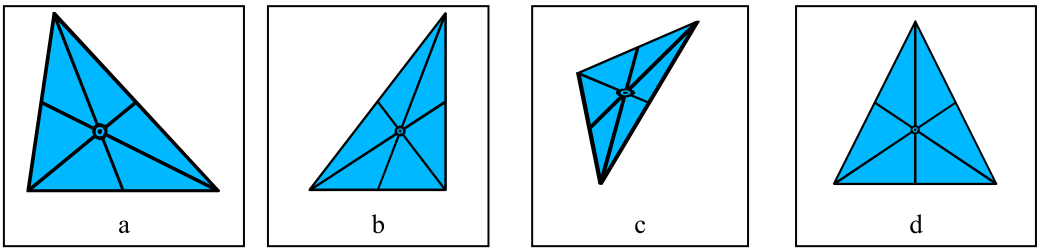


圖 4.2.9 各種三角形的重心與各邊上的中線

4-2-8　正六邊形分割成六個正三角形

如圖 4.2.10 所示，將正六邊形分割成六個正三角形來說明六個正三角形可以組合成一個正六邊形，可以利用正三角形去計算正六邊形的面積、周長與角度。使用的功能是分解正多邊形（Polygon），也就是選擇 Polygon 功能在對話框選取分解正多邊形，輸入六邊形即可。

4-2-9　計算多邊形角度總和

如圖 4.2.11 所示，一個五角星形，要計算∠A　+∠B　+∠C　+∠D　+∠E 的度數總和，利用畫出多邊形功能（Polygon）選擇畫出星形多邊形指令，出現的對話框中，輸入 5 個邊，間隔 2 點，就可以畫出設定的圖形。

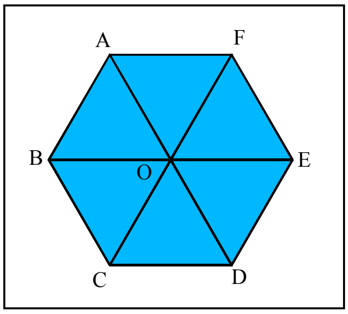


圖 4.2.10 正六邊形分割成三個正三角形

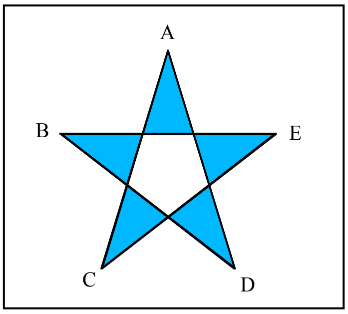


圖 4.2.11 五角星形

4-2-10　計算特別形狀角度和 I

利用三角形外角定理計算　∠A　+∠B　+∠C　+∠D　+∠E＝?

圖 4.2.12 所示，畫圖過程是將 A、B、C、D、等五點依序畫出然後用連接線段功能（ConnectorPloygon）就可將 A 到 E 連接成一個多邊形。

4-2-11　計算特別形狀角度和 II

如圖 4.2.13 所示，求∠A　+∠B　+∠C　+∠D　+∠E +　∠F 等於多少度？

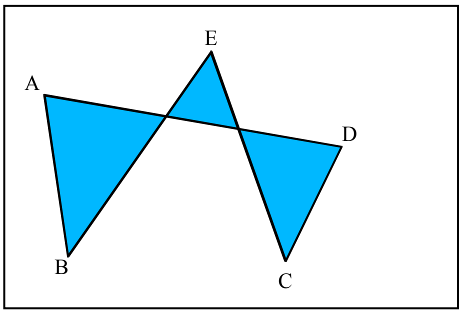


圖 4.2.12 利用連接多邊形功能畫圖

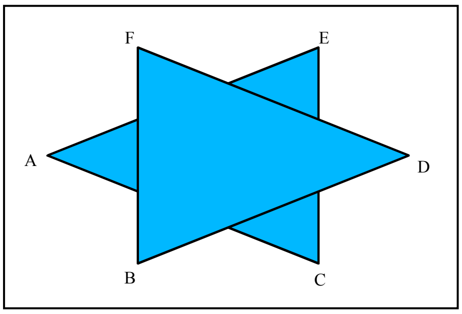


圖 4.2.13 利用畫多邊形功能畫出兩個三角形重疊

4-2-12　長方形各邊中點連線的構圖

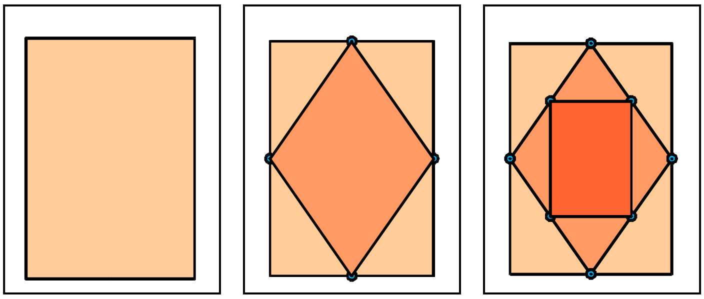


圖 4.2.14 利用顯示線段等分點、連接長方形與顯示多邊形各邊功能會畫出四邊行各邊中點連線

4-3　平面圖形鑲嵌（Tessellations）

在此我們介紹三種在第二章介紹過的鑲嵌圖形的繪製過程，主要是應用線定位複製、畫出多邊形以及顯示多邊形各邊線段為主，各個圖形形成過程會加以分解說明。

1. regular tessellation

由單一種正多邊形對稱地拼成平面，這種正多邊形有正三角形、正方形以及正六邊形，此處介紹正六邊形的鑲嵌，其餘圖形放在附錄四。如圖 4.3.1 所示，是由正六邊形所鑲嵌而成的正規鑲嵌圖。繪製過程則在圖 4.3.2 依順序呈現。

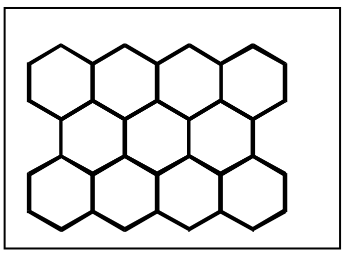


圖 4.3.1 正六邊形鑲嵌而成的 regular tessellation

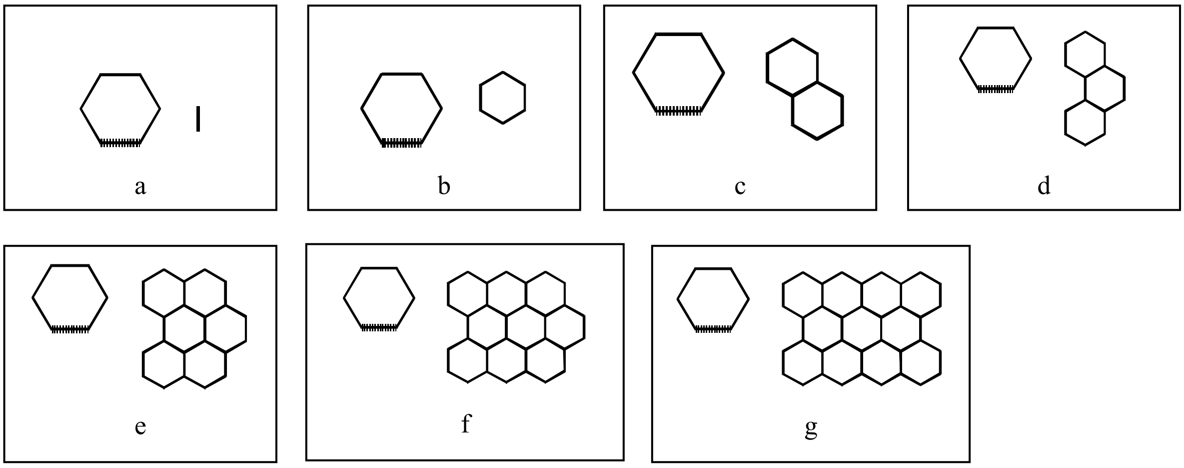


圖 4.3.2 正六邊形鑲嵌的形成過程

2. semiregular tessellation

將幾種正多邊形依照一定的規律作拼圖即可填滿一個平面沒有空隙，此次呈現有 8 個符合規律的圖形，可以看出來，凸正多邊形有 n 邊就有 n 個多邊形與其相貼齊，每一個凸正多邊形的頂點所接觸的正多邊形個數與逆時針順序皆相同。如此就稱爲 semiregular tessellation。組合圖形使用到的功能以線段反向、線定位複製、畫出多邊形以及顯示多邊形各邊線段等四個功能爲主。底下介紹正六邊形與正三角形的鑲嵌，其餘符合此規律的圖形放在附錄四。

正三角形與正六邊形的組合，如圖 4.3.3 所示。而圖形產生過程則在圖 4.3.4 當中分幾個子圖依序呈現。

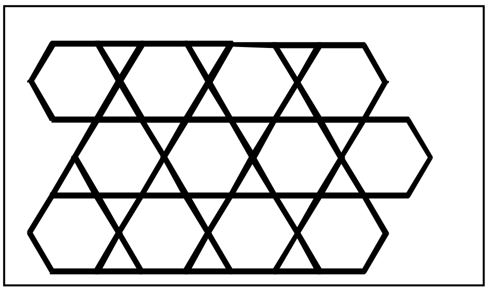


圖 4.3.3 正三角形與正六邊形所組合的鑲嵌

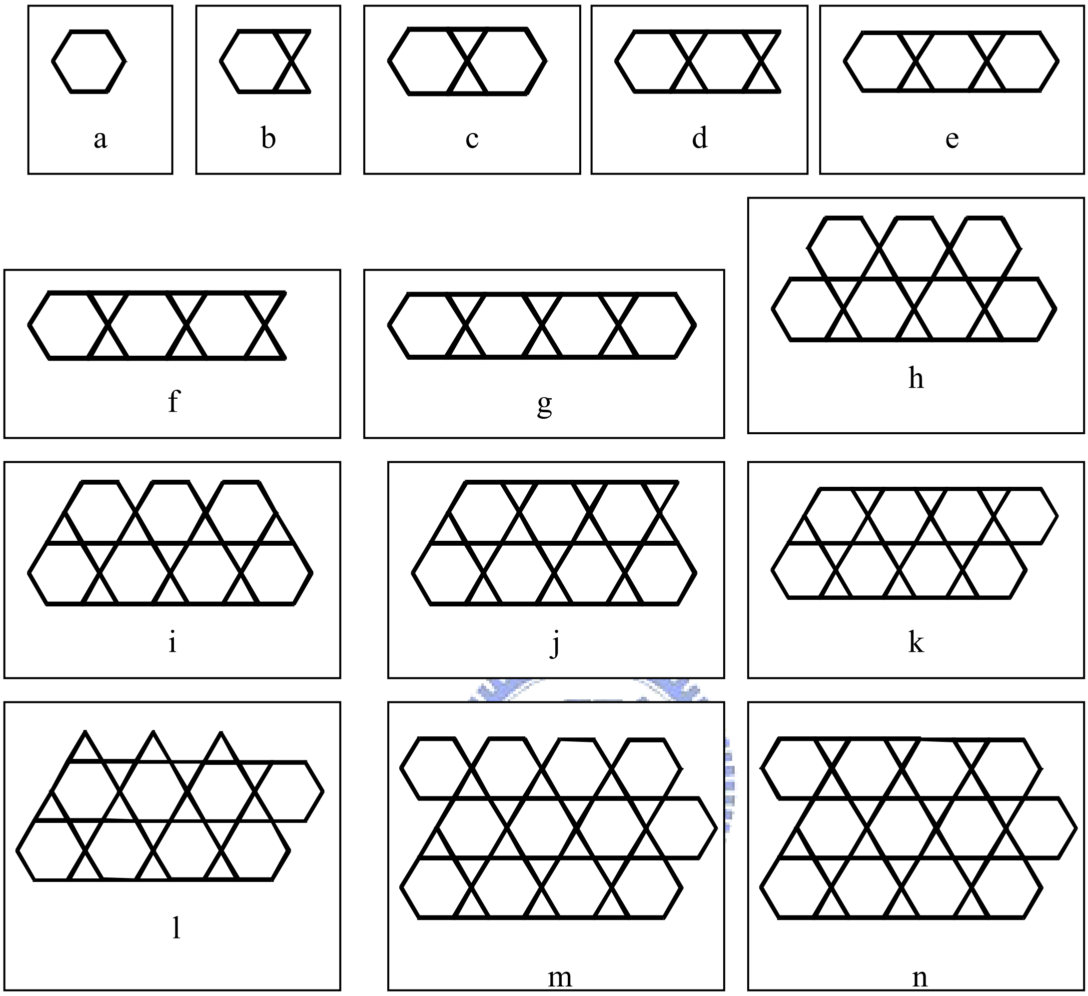


圖 4.3.4 正三角形與正六邊形所組合的鑲嵌過程

3. demiregular or polymorph

由 3 種 regular tessellation 與 8 種 semiregular tesselation 拼成的組合圖形稱爲 demiregular tessellation，在此呈現其中一個符合規律的圖形，可以看出來，凸正多邊形有 n 邊就有 n 個多邊形與其相貼齊。組合圖形使用到的功能以線段反向、線定位複製、畫出多邊形以及顯示多邊形各邊線段等四個功能爲主。底下介紹正三角形、正方形與正六邊形的鑲嵌並呈現圖形拼貼鑲嵌的過程。其餘 6 個符合此規律的圖形放在附錄四。

正三角形、正方形與正六邊形的鑲嵌如圖 4.3.5 所示。而圖形產生過程則在圖 4.3.6 當中分幾個子圖依序呈現。

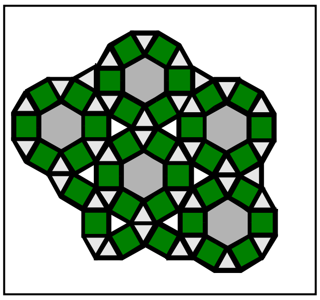


圖 4.3.5 正三角形、正方形
與正六邊形的鑲嵌

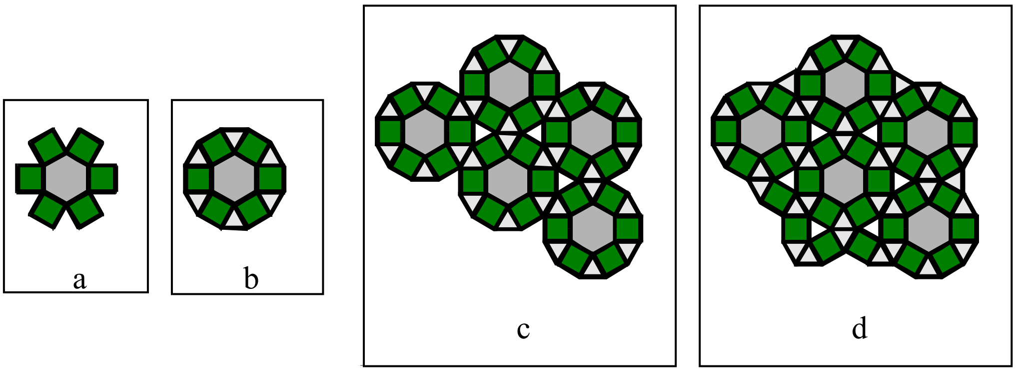


圖 4.3.6 三角形、正方形與正六邊形的鑲嵌形成過程

4-4 碎形（Fractal）

碎形的圖形相當多，此處選幾個較具代表性的圖來當作範例。

4-4-1 Koch 曲線

在圖 4.4.1 中可以看到經過四次疊代之後的 Koch curve，原來只是一個線段，經過切割取代之後，可以看出，將某個部分放大就會跟出現整體一樣的形狀，這就是碎形的特性，而我們使用的功能以「線定位複製」、顯示線段等分點為主就可以經過幾個步驟就作出此一效果。圖形形成過程在圖 4.4.2 當中的 a 到 f 來呈現。

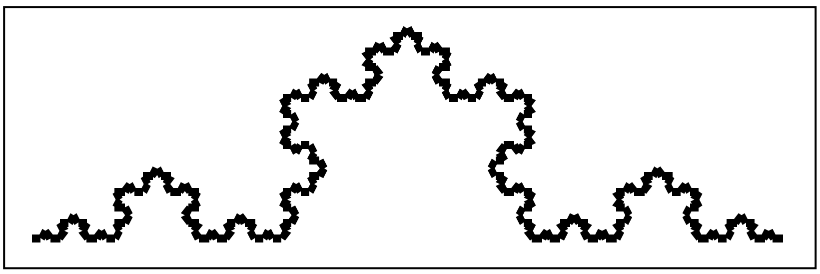


圖 4.4.1 經過四次疊代之後的 Koch curve

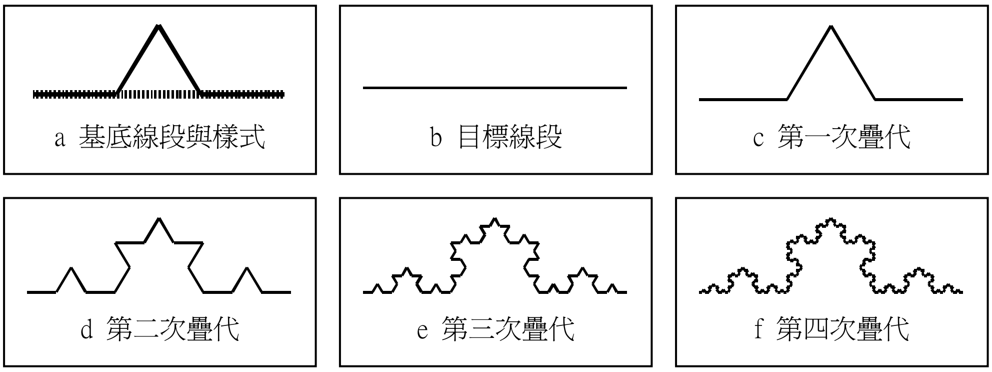


圖 4.4.2 Koch 曲線產生過程

如果將疊代的四個步驟所產生的圖形放在一起，就會有如圖 4.4.3 所示的效果。另外也可以延伸成為以三角形三邊來疊代圖形如圖 4.4.4 的雪花效果出現。

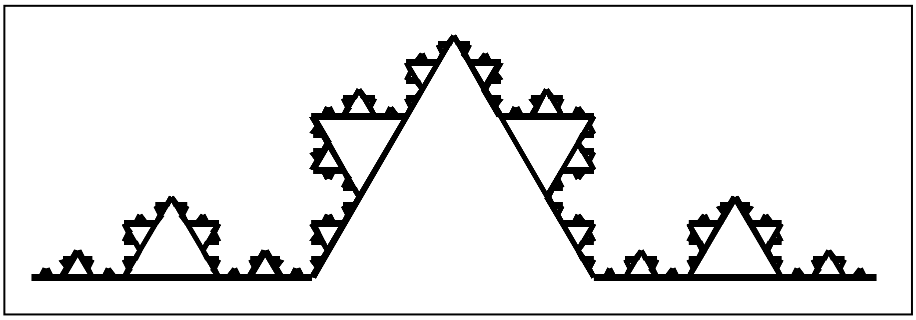


圖 4.4.3 重疊的 Koch 曲線

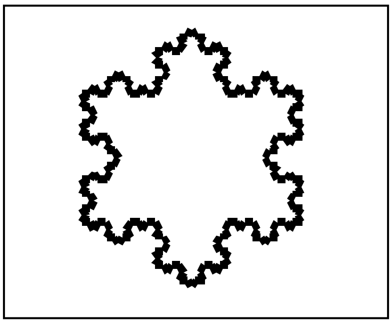


圖 4.4.4 雪花

4-4-2 反 Koch 曲線

如果將樣式的方向轉變，由向外凸起改為向下凹，所繪製的圖形又有不同的變化，而且凹進去的部分並不是全部線段的三分之一，以圖 4.4.5 來呈現。

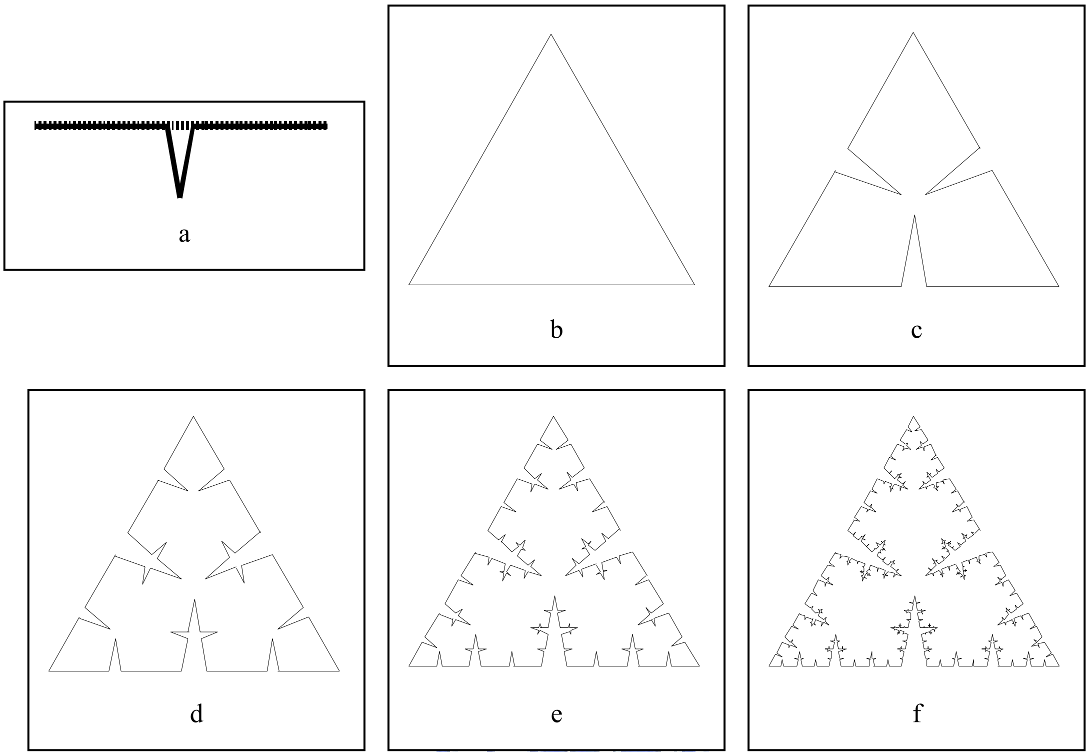


圖 4.4.5 反 Koch 曲線形成過程

4-4-3　反雪花曲線

將樣式方向轉爲向內凹，以製作雪花的方式來疊代，最後得到的是反雪花曲線，如圖 4.4.6 所示，該圖是經過三次疊代之後的結果。圖案形成的順序在圖 4.4.7 呈現。

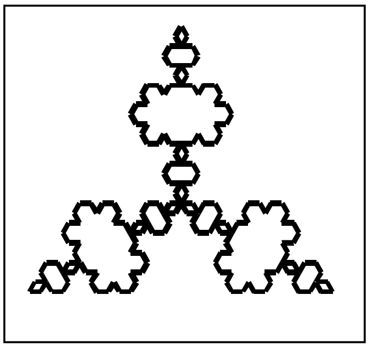


圖 4.4.6 反雪花曲線

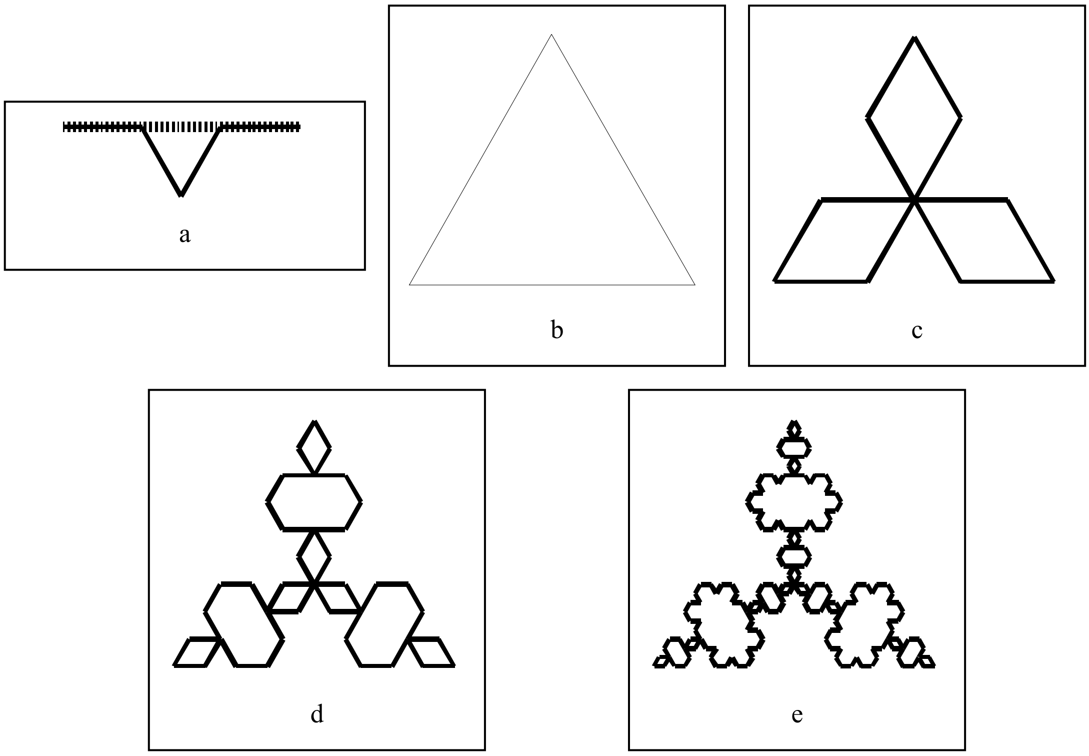


圖 4.4.7 反雪花曲線形成過程

4-4-4　史賓斯基三角形（Sierpinski Triangle）

在圖 4.4.8 當中可以看出最大的正三角形內部有個倒正三角形，將原三角形分成四個正三角形，然後每一個正三角形又在重複在中間作出一個倒正三角形形成與原來圖形相似的形狀，在此一共作了五個層次。

圖形形成的過程在圖 4.4.9 呈現，主要使用的功能有兩個，一是畫出正多邊形，另一個是框定位複製功能。形成的順序是由圖 a 到圖 e 的順序出現。

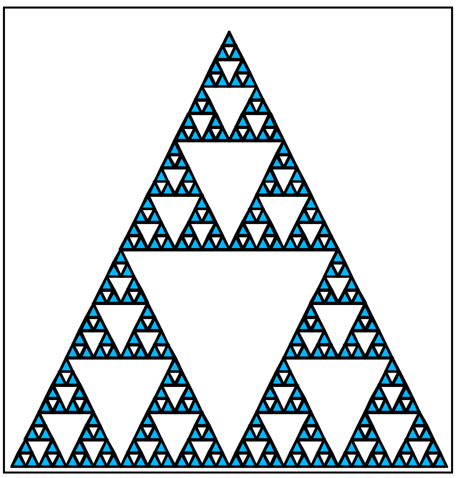


圖 4.4.8 史賓斯基三角形

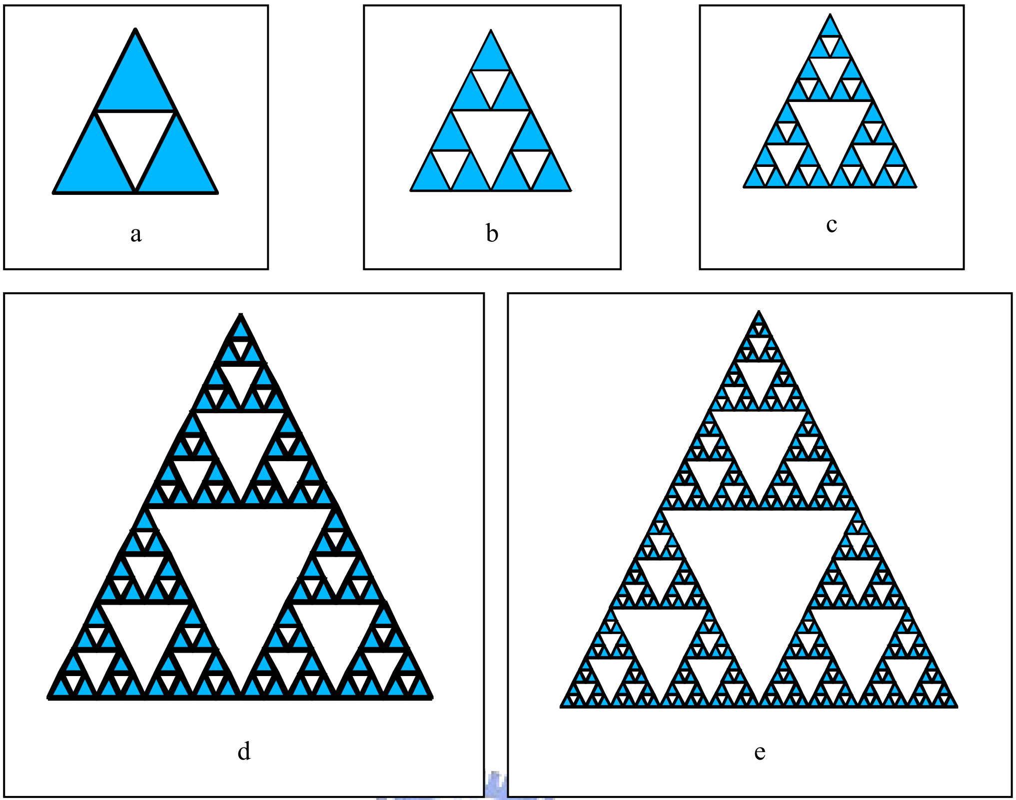


圖 4.4.9 史賓斯基三角形形成過程

4-4-5 英文字母 H 的疊代

以 H 爲樣式去作疊代，疊代許多次之後就會呈現出碎形的型態，將局部放大會有跟全部一樣的形狀出現，產生的順序則如圖 4.4.10 所示。

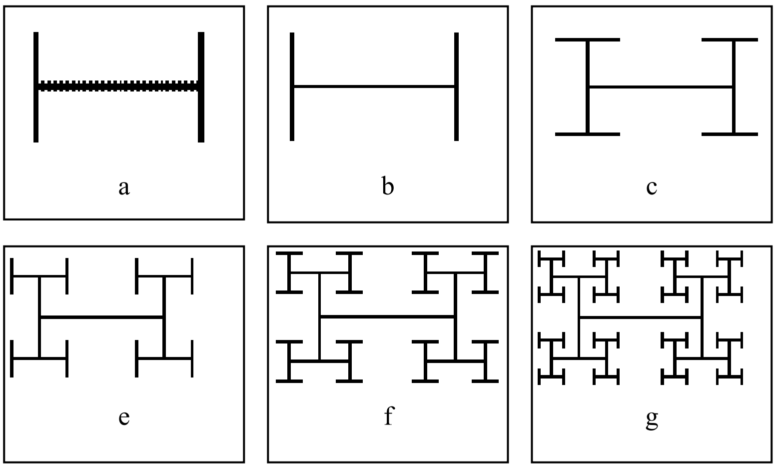


圖 4.4.10 英文字母 H 的疊代

4-5　其他特殊圖形

有一些圖形也很有特色但是要用軟體繪圖工具畫出較不容易，但是透過研究者所建立的系統則可以很快又準確的作出這類圖形。在圖 4.5.5 到圖 4.5.8 的圖形是在數學遊樂園之老謀深算[22]一書中出現的較為特別的圖形。

4-5-1　樹木生長之一

如圖 4.5.1 所示，每枝樹幹生長時都長出兩根枝幹，則枝幹的總數會是公比為 2，首項為 1 的等比級數和。

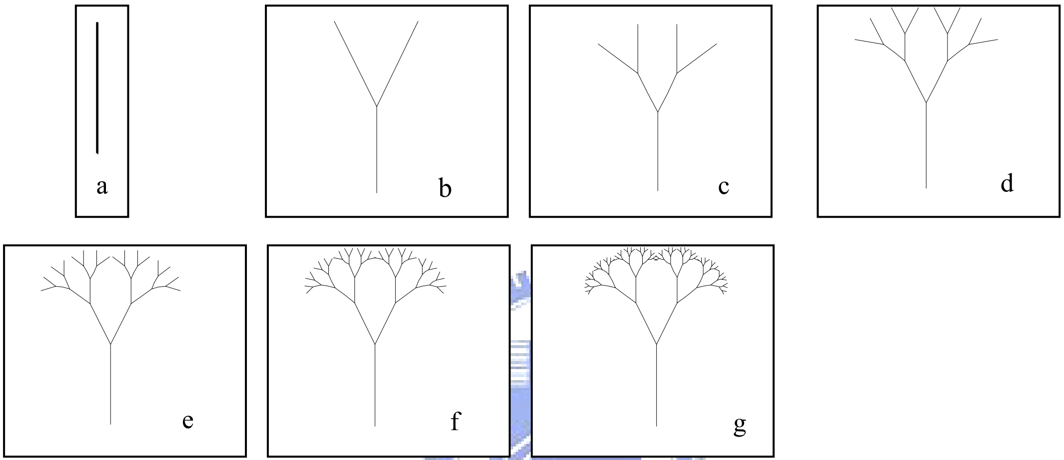


圖 4.5.1 數木生長之一

4-5-2　樹木生長之二

如圖 4.5.2 所示，每枝樹幹生長時都長出三根枝幹，則枝幹的總數會是公比為 3，首項為 1 的等比級數總和。

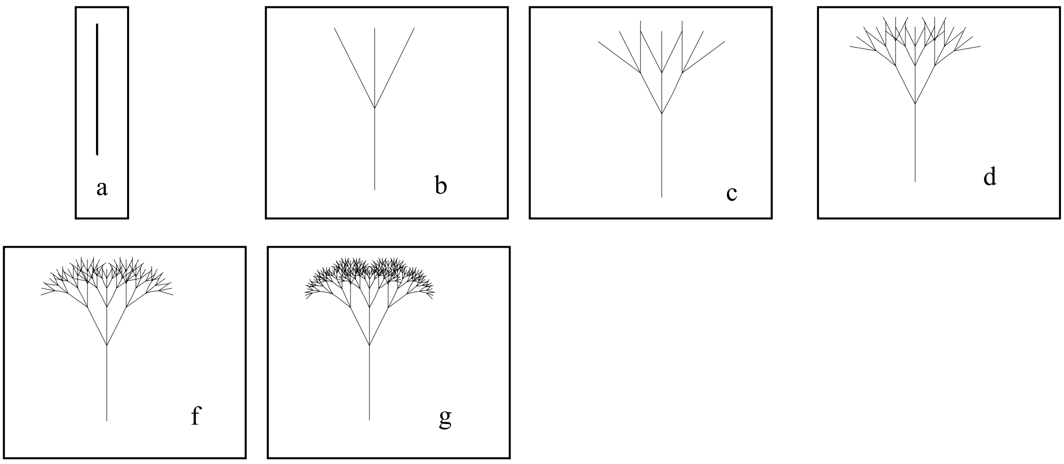


圖 4.5.2 數木生長之二

4-5-3　R-partite Complete Graph

如圖 4.5.3 所示，圖 a 與圖 b 當中所示分別代表正十邊形每一個頂點對角連線所連結成的圖形與正十五邊形每一個頂點對角連線所連結成的圖形。圖 a 有偶數個（10 個）頂點，每雙對角頂點的連線共有八條會交於中心點，圖 b 當中有奇數個（15 個）頂點，每雙對角頂點的連線會在內部形成一個小圓圈。

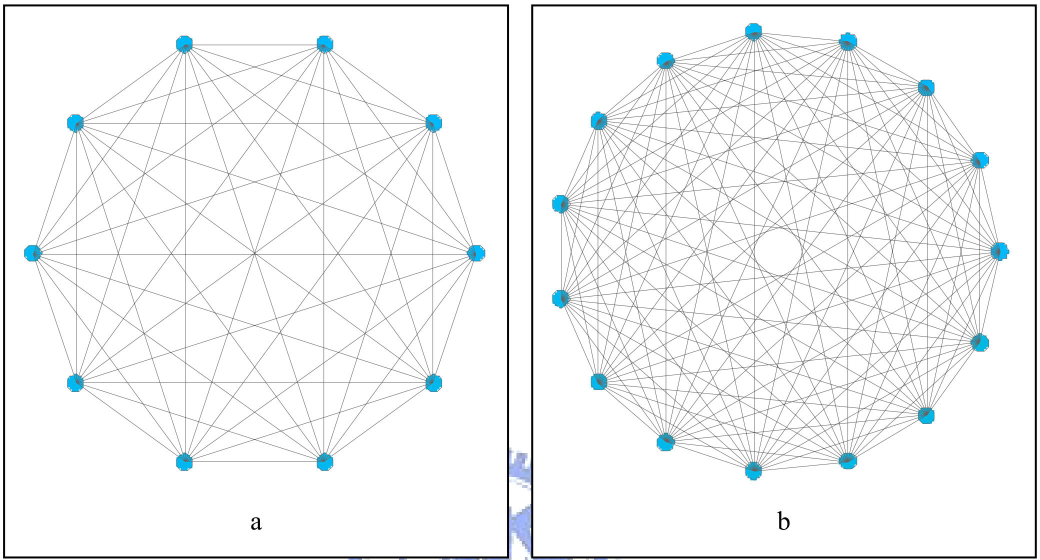


圖 4.5.3 R-partite Complete Graph

4-5-4　線定位圖案設計

如圖 4.6.4 所示，圖 a 與圖 b 當中所示分別代表 30 個等圓圍繞中心點所成的圖形 35 個等圓圍繞中心點所成的圖形。

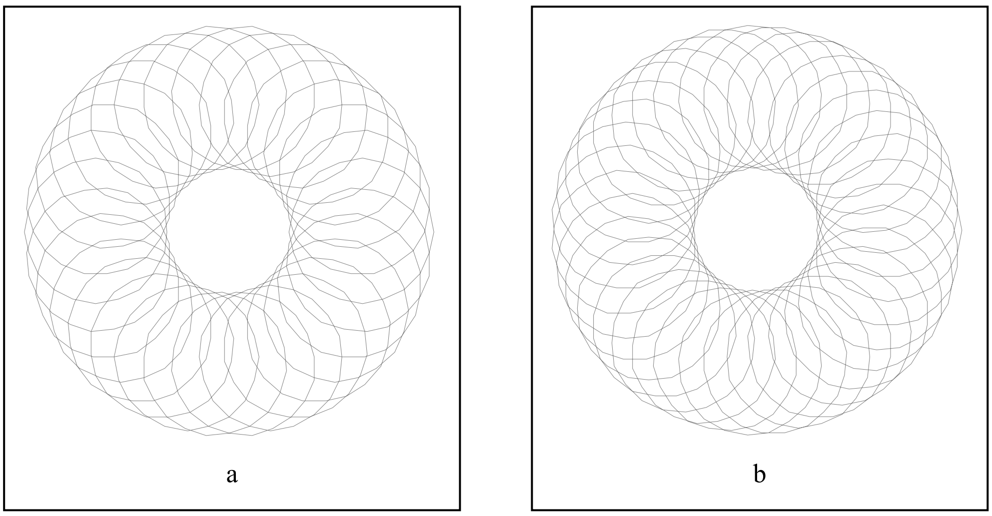


圖 4.5.4 線定位圖案設計

4-5-5 包絡線形成圓形

如圖 4.5.5 所示，圖 a 與圖 b 當中所示分別代表有 36 個頂點與 24 個頂點的 starpolygon 可以形成包絡線，內部幾乎可以形成一個圓。

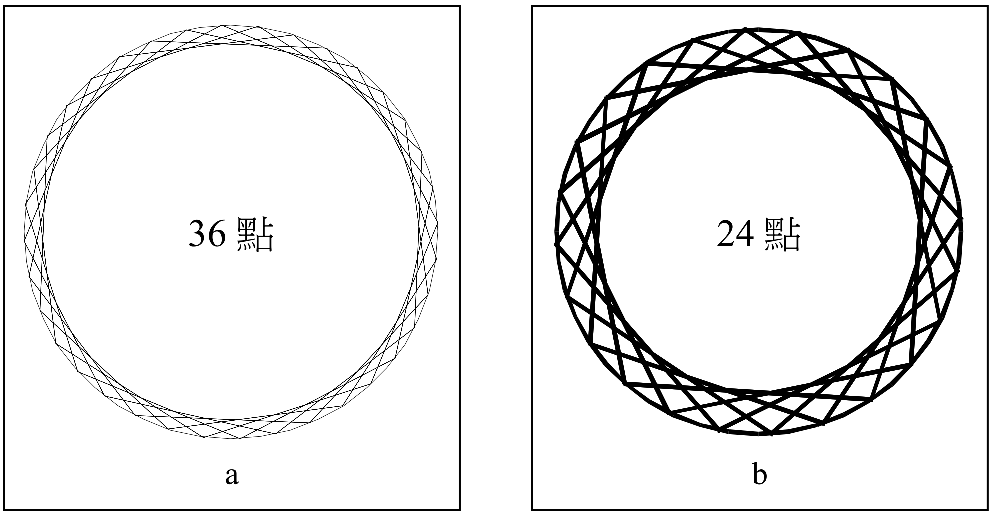


圖 4.5.5 包絡線形成圓形

4-5-6 包絡線形成心臟線

如圖 4.5.6 所示，在圓上畫出 36 個等分點，然後連接點 1 與點 2、點 2 與點 4、點 3 與點 6、…n 與 2n，2n 超過 36 的部分則減去 36，如此就可以形成心臟線的包絡。

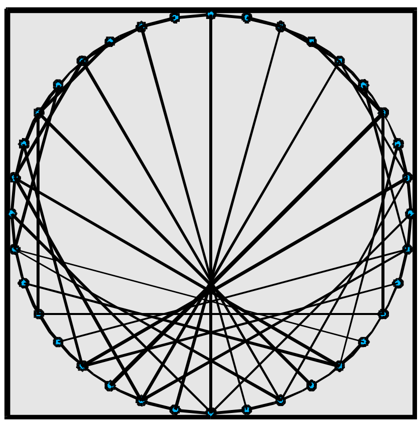


圖 4.5.6 包絡線形成心臟線

4-5-7　階梯詭論之一

圖 4.5.7 所示在說明 $\sqrt{2}$ ≒2 的詭論，首先在圖 a 假設等腰直角三角形兩腰長為 1，則斜邊長為 $\sqrt{2}$ ；在圖 b 則是 4 段階梯總長為 2，在圖 c 則是 8 段階梯總長為 2，到圖 d 則是 16 段階梯總長為 2，到圖 e 則是 32 段階梯總長為 2，到圖 f 則是 64 段階梯總長為 2，依照這種規律下去，到最後階梯幾乎與斜邊一般長。

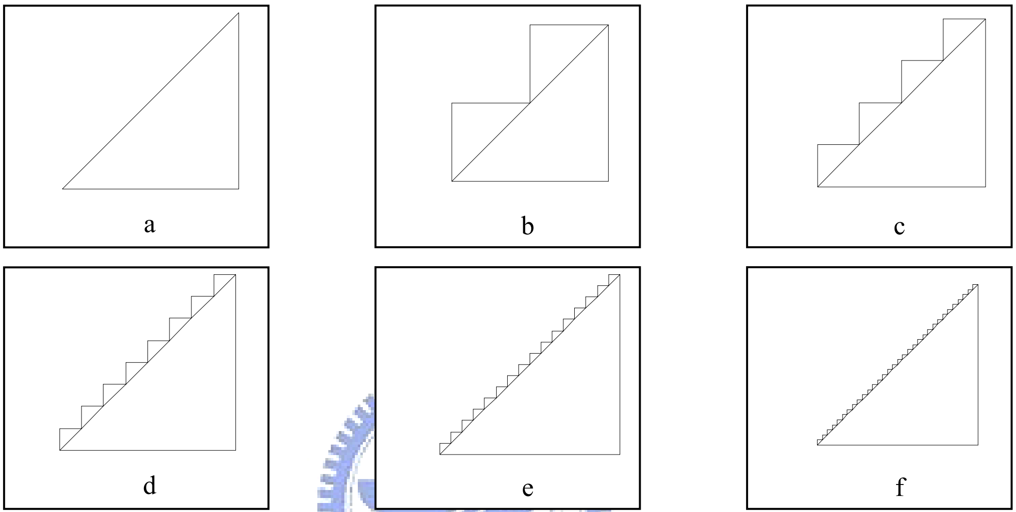


圖 4.5.7 階梯詭論之一

4-5-8　階梯詭論之二

圖 4.5.8 所示在說明 0.5π≒1 的詭論，首先在圖 a 假設線段長為 1，將線段 4 等分，以每一個線段做出半圓；在圖 b，將線段 8 等分，以每一個線段做出半圓；在圖 b，將線段 16 等分，以每一個線段做出半圓；在圖 d，將線段 32 等分，以每個線段做出半圓；在圖 e，將線段 64 等分，依照這種規律下去，到最後所有半圓的總長幾乎與線段一般長。

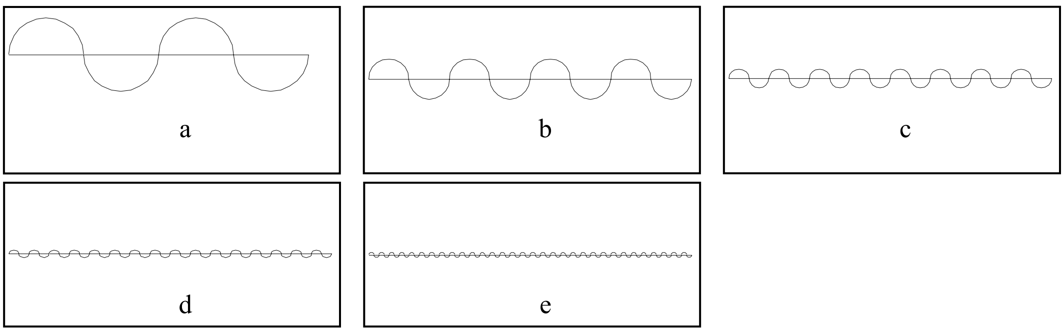


圖 4.5.8 階梯詭論之二