

第二章 文獻探討

本章旨在探討本研究之相關文獻，以做為本研究之理論基礎，並藉以建立本研究之研究架構。由於本研究的主要目的之一是探討資訊融入國中平面幾何基礎課程教學實施之後，對學生數學學習所產生的影響，所以研究者將先探討電腦輔助教學的意涵及研究；另外對於幾何概念發展過程有相當研究的，則首推 van Hiele 的幾何理論，因此研究者將探討 van Hiele 的幾何思考層次理論與五階段學習理論；最後則探討本研究所採用資訊科技融入數學教學設計的相關理論。

第一節 電腦輔助教學的內涵與理論基礎

一、電腦輔助教學的涵義及發展

電腦自西元1940年首度問世以來，即掀起科技文明的風暴，被譽為「人類有史以來最偉大的發明」。大規模的電腦教學應用始於1960年代美國伊利諾大學的柏拉圖(Plato)系統，但因為大型電腦的種種限制，推展極為困難。直到西元1970年「微電腦」發明後，猶如注入了一針強心劑，打破了當時大型電腦種種不便的困境，也為電腦輔助教學拓展了新的視野(王立行，1992)。

「電腦輔助教學」是翻譯自Computer Assisted Instruction，簡稱CAI。Hicks和Hyde (1973)認為「CAI是一種直接運用電腦交談模式來呈現教材並控制個別化學習環境的教學過程」。Sipple和Sipple (1980)則將CAI 定義成：「CAI 是一種將學生安置在已編寫好的電腦互動模式課程中的教育觀念，電腦按照學習者先前的學習反應，選擇下一個適當的主題或單元，並允許學習者按照自己的學習能力調整進度。」國內學者饒達欽(1990)給CAI下了如此定義：「藉由電腦程式的規劃使得學習內容有序顯示，學習者並可隨機控制學習進度及內容的過程，即稱之CAI。」林永吉(1990)則指出：「電腦輔助教學是以電腦作為教學媒體，以協助教師教學，輔助學生學習教材，達到個別化、補救教學或精熟學習的編序教學活動。」

綜合上面的說法，CAI是指運用電腦之交談式或互動式的功能來引介教材，以協助教師提供個別化之教學環境，使學生有機會能按照自己的能力和進度進行學習，同時亦可記錄個別學生的學習進度，幫助教師了解學生學習狀況，進而改進教學。

CAI 隨著電腦科技的發展及程式語言使用之不同，而有不同之發展階段：

(一)傳統電腦輔助教學(Traditional CAI)：

受到行為主義學習理論的影響，強調反覆練習及回饋機制。將教材編序性的呈現，讓使用者反覆練習，並對學習者的反應給予適當回饋。

(二)智慧型電腦輔助教學(Intelligent CAI)：

結合電腦科學、心理學、教育與訓練，在CAI 設計上涉及人性因素及自動化作用，包含專家系統、自然語言的了解及機器人的因素，其目的乃應用人工智慧的相關技術來發展高度個別化的教學軟體，讓CAI 具了解教學內容、教學對象、何時教及如何教的智慧。

(三)多媒體電腦輔助教學(Multimedia CAI)：

利用電腦將文字、圖片、動畫、聲音、影像等各種不同媒體整合成爲教材內容，來進行教學的工作，強調與教學系統間促成更佳的溝通。

(四)網路化電腦輔助教學(Network CAI)：

將CAI 課程設計架設於網路上，利用網路多點連結方式及即時互動設計之特性，建構出一個共同學習的社群，以彌補上述各階段中CAI設計互動性不足之缺點，此亦爲目前之研究趨勢。

二、電腦輔助教學的模式與理論基礎

電腦輔助教學軟體爲達到有效學習的目的，衍生出許多不同的表達方式或教學策略，一般而言可分爲下列五種表達型態(洪榮昭，1992; 溫嘉榮，1990)，每一種都有其特色。在編寫CAI 的軟體時，可依實際需要，採單一或多種混合，讓CAI軟體內容與呈現方式有助於學生學習。

(一)練習式(drill & practice) CAI：

練習式模式的設計通常使用於學生已接受過某單元課程，欲藉多次練習以熟悉該觀念或技能。亦即在電腦呈現一個問題後，由學生提供答案，答對給予獎勵(正增強)，答錯則給予懲罰(負增強)，過程持續循環，直到精熟爲止。就結構本身言，練習法CAI 比較符合較低層次學習的需要，如符號及生字記憶的學習，就是要透過反覆的刺激及練習，來加強學習效果的保留。練習式CAI 與教導式CAI 的不同，在於前者著重於舊知識的增強，後者則重視新知識的傳授。

CAI 崛起的六0年代正是「行爲學習理論」的教育思潮時期。其主要精髓，是「刺激」(stimulus) 與反應(response)的聯結關係模式(S — R association model)。行爲理論強調學習要成功，必須由教學者提供足夠的刺激，並激發學習者提供某種回饋，以達學習之效。此種學習理論以Pavlov、Skinner及Bloom 等人之論點最具代表性。因此，行爲理論適合應用於練習式電腦輔助教學之設計，以使學習者能透過反覆練習而熟練某一知識或技能。

(二)教導式(tutorials) CAI:

此模式的作法爲系統地將教學內容設計爲可讀性的教材，並置入電腦程式中，讓學生從中學習以達成教學目標。學生可依其學習能力、程度的不同，選讀內容，透過電腦的界面，對學生解釋不同知識的內涵，交替呈現概念解說及評量活動，以增加學習的成效。此外，爲避免其抗拒學習的心態，在教材的編寫呈現上儘量能在學生學習過程中提供線索及立即回饋機制，以引導或協助學習者解決問題以持續學習活動之進行。

認知理論支持者不同意行爲主義的主張，他們認爲個體若對所欲學習事物不領悟或理解其意義、關係，即使練習多次也學不會。因此認知論者強調心智(the mind)主控地位及探索人類的思考過程(Norman, 1981)。此種認知理論以Piaget、Bruner及Gagne等人之論點最具代表性。認知理論對CAI最大的貢獻即爲教導式電腦輔助教學之設計。

(三)模擬式(simulation) CAI：

模擬式CAI模式是由電腦呈現一個模擬真實社會的假想情境，由學生操弄該情境中的某些變因，並觀察操弄的結果，以修正自己的行為，從而學習解決問題的能力。其優點是將抽象化的知識轉化成具體經驗的學習方式，使學生更能獲致有效學習。不同於教導式CAI 強調「敘述性知識」及著重觀念的獲得，模擬式CAI 的功能是用來教導「操作性知識」。

同屬於認知學派，但與 Gagne 等人採完全不同教育理念的是皮亞傑(Piaget)與巴伯(Papert)。皮亞傑視人類—尤其是兒童—為「知識的建構者(builders of their own intellectual structures)，他認為「學習不需要被教」(learning without being taught) (Groen, 1978)。這個論點和康美紐斯(Comenius)的一句名言：「老師教得愈多，學生學得愈少」(Skinner, 1968:144)倒是互相呼應。巴伯說得更露骨：「教室是一個人造及無效的學習場所。……今日的學校在未來根本沒有存在的價值(Papert, 1980:8-9)。

與前述「學校無用論」有異曲同工之妙的是班都拉(Bandura, 1977)的「社會學習理論」(Social Learning Theory)。他認為人類的學習大都經由觀察及模仿他人的行為而來。教師應提供模擬真實社會情境的學習場所，讓學生觀察問題的本質及解決的方法，並練習將所學知識應用在模擬的假想情境，從嘗試錯誤中不斷修正自己的行為，從而學習解決問題的策略及能力。

這種「非結構化」(unstructured)的社會學習，正是「模擬式」(simulation) CAI 的理論基礎。電腦呈現一個模擬真實社會的假想情境，學生操弄(manipulate)這個情境中的某些變因，並觀察操弄的結果，據以修正自己的行為，從而學習解決問題的能力。這種化抽象知識為具體經驗的學習方式，正能彌補傳統教學體制中「學以致用」的不足(Thorson, 1979)。

(四)遊戲式(games) CAI：

兒童的天性是活潑好奇的，而遊戲式的電腦輔助教學正好符合兒童的天性，遊戲式 CAI 模式可在遊戲中啟發兒童的學習動機，達到寓教於樂的教學效果。許多教育學家窮畢生之力，研究各種學習理論，到最後卻發現，再好的教材或教法，都不如讓孩子從遊戲中快樂地學習。引發學習動機並保持學習興趣，才能培養積極的學習態度，終其一生都受用不盡(Norman, 1981)。

Norman 於1981年提出遊戲學習法，他認為讓孩子從遊戲中快樂的學習才是最好的教法。引發學習動機並保持學習興趣，方能培養積極的學習態度。動機是學生主動參與學習活動的指標，動機越高，則學習者態度愈積極，而電腦遊戲便是增加學習動機有效的方法。此種學習理論結合電腦輔助教學技術，而產生「遊戲式CAI」。

(五)問題解決式(problem solving) CAI：

問題解決式CAI 是指學生利用已有的數據，在電腦求得所需的答案。在學校課程的應用範圍，多為數學、理化等科目。學生於使用此CAI時，通常必需具備撰寫電腦程式的邏輯概念，並對該問題的知識與背景有深入的了解。

Lave(1988)認為學習的發生必須是活動、脈絡與文化交互作用的結果。因此，

應將學習者置於富含學習理念與行為的情境中，才能獲得真正學習。情境式學習對CAI 設計應用如下：

- 1.思考源於行動：學習知識，必須配合實際工作的經驗才能達成，故知識須融入學習情境中。
- 2.課程不僅要重視知識的傳授，更要重視求知的過程。

美國Vanderbilt University 的認知科技群(GTGV)以「情境認知」的理論為基礎，提出了「錨式情境教學法」，其設計原則如下：

- 1.採用影碟呈現的形式：給學習者一真實的畫面刺激幫助理解。
- 2.採用以敘述故事的方式來呈現資料：創造出有意義的學習情境。
- 3.生成性的結構：不告知學習者下一步的方向，留給他空間思考，並嘗試解題。
- 4.隱藏資料的設計：以嵌入的方式把資料隱藏於故事影片中。
- 5.問題的複雜度:問題必需夠複雜才符合情境探索。
- 6.配對式的故事：使知識被重複演練。
- 7.多樣學科領域的設計：使知識在不同學科遷移。

由上可知，情境學習理論與錨式學習理論主要應用於問題解決式電腦輔助教學的設計上。

綜合本節所提的電腦輔助教學模式與理論基礎，我們可以發現在CAI教學模式中，電腦扮演了三種角色：

- (一)「指導者」(tutor):可以指導學習者從事相關學科的學習活動，此時電腦具有部份教師的角色。
- (二)「工具」(tool): 用來幫助學習者學習的工具，此時電腦是用來解決統計分析、文書處理、資料管理…等問題的工具角色。
- (三)「受教者」(tutee):學習者利用電腦來做事，使電腦成為接收命令、執行動作的徒弟角色。

不論電腦扮演的是什麼樣的角色，電腦既不會思考也不會教學，真正負責整個教學流程的還是教師，因此教師如何善用電腦科技來進行有效教學更是近年來教育科技的研究重點。另外，由於電腦多媒體具備互動的功能，可提供學習者主動學習的機會，因此電腦輔助教學結合多媒體介面已是不可避免的趨勢。接下來研究者將討論電腦多媒體與教學的相關理論。

三、電腦多媒體與教學

(一)多媒體的定義與特性

多媒體(Multimedia)是由多種(Multi)及媒體(Media)兩個字組合而成的。它是一種結合多種媒體(如文字、圖片、聲音、影像、動畫等)的應用，加上網際網路及全球資訊網的發達，在全球資訊網上也可以使用多媒體的系統。現代人稱多媒體乃指「電腦多媒體」，其意義就是利用電腦科技來整合多媒體的一種新觀念及新技術。多媒體包括文字、圖籤或靜態影像、平面動畫或立體動畫、動態影像、聲音或音效、音樂等等多媒體，新一代電腦多媒體除了整合各式各樣媒體，加上網路及多媒體資料庫後更加完整(黃朝恭，2000; Alistair & Simon, 1994)。傳統

的網路應用系統所用到的媒體只有一種「文字」，而電腦多媒體的系統所運用到的媒體種類較多，也比較吸引人的興趣，下面就列舉幾項特性(陳志寶，2001)：

1. 感官的感受加強學習效果：多媒體適合各種不同個別的學習型態，不管視覺的、口語的、聽覺的或者是操作的學習，都適合引用多媒體來教學。
2. 鼓勵和肯定學生個別表現：依學生個別差異來決定其接受的課程，只要學生透過文字、影像和聲音等方式來傳達其意願，並且經由教師認可，學生便能在其學習過程中，就有更多的控制權和依自己的想法來學習。
3. 營造一種主動的學習活動：非以往那種紙上談兵的方式，因為學生必須要親自參與學習的情境，並且用心思考。
4. 有益溝通：多媒體的使用開啓了學生與教師之間溝通的橋梁，學生不只可以用口語的方式，更可以用各種不同的溝通媒介來與教師溝通。當學生創造屬於他自己的學習環境，他可更加從容地學習，而且可以和其周圍的同學互相討論。

多媒體電腦輔助教學的核心概念是以知識領域為主幹，運用電腦科技結合合適的學習理念，輔佐知識領域的學習，並控制學習者個別化學習環境的教學課程(溫嘉榮，1998)。何榮桂與朱延平(1995)認為這種教學方式係指運用電腦之交談式或互動式的功能來引介教材，以提供個別化、立即回饋，不受人性干擾及空間與時間限制的多元媒體教學環境。多媒體電腦輔助教學具有傳統教學方法所無法比擬的彈性與機動性，特別在語言、數學、理化諸學科，效果特別顯著(鐘萬生，1999)。

因為多媒體具有互動功能，可以根據學習者的需求，提供學習者學習之機會(Savenye, 1994)，同時也符合人類主動思考及決定之心智能力。而互動式多媒體已被教育科技專家認定是提昇教學效果最有利的輔助媒體之一(Jonassen, 2000)，因此電腦輔助學習軟體設計結合多媒體介面已是不可避免的趨勢(莊雅如，1996)。

(二)多媒體的網路學習環境

全球資訊網(World Wide Web, WWW)已成為人們生活中不可缺少的一部份。而目前所採用的全球資訊網教學系統是把超媒體教材放在網路上，讓學習者透過WWW 依個別的學習需求進行學習(孫春在，1997)。WWW 整合了文字、聲音、影像，是目前主流的網路多媒體應用的技術。根據研究指出，使用者對多媒體資訊不但在感官上易於接受，而且在記憶處理上較易接受，但多媒體所帶來的衝擊並不僅是感官與記憶上，更重要的是多媒體所帶給使用者的親和性界面(朱錦鳳，1994；張史如，1997；Bertrand & Stephen, 1995)。另外，加上WWW的通訊功能可以跨越時空的隔閡以及Web可以提供超媒體與超文件的內容與互動的機制，使得Web成為一個非常重要且具有彈性的學習環境(陳年興和王敏煌，1998)。

就多媒體和全球資訊網的特性來說，如果能夠將兩者有效結合起來將會形成一套強而有效率的系統，學習者一方面可以利用普及性很高的全球資訊網

來隨時學習；另外一方面又可以因為多媒體的功能來有效幫助學習。

(三)多媒體學習認知理論架構

多媒體學習認知理論有三個假設(Mayer, 2003):雙頻假設(the dual channel assumption)、有限能力假設(the limited capacity assumption)與主動學習假設(active learning assumption)，其內涵說明如下：

1. 雙頻假設(the dual channel assumption)是指人類對於視覺與言語的表徵 (representation)具有分離資訊處理系統(Paivio, 1986; Clark & Paivio, 1991; Baddeley, 1992, 1998)。
2. 有限能力假設(the limited capacity assumption)是指在每個資訊處理頻道發生所能處理的資訊總數是非常有限的(Baddeley, 1992, 1998; Chandler & Sweller, 1991; van Merriënboer, 1997)。
3. 主動學習假設(active learning assumption)是指「有意義的學習」是當學習者從事主動認知處理時才會發生的，包含注意相關文字和圖片，在心智上將他們組織成相關的言語和圖片的表徵，並且在心智上將言語和圖片的表徵與先備知識整合在一起(Mayer, 1999a, 1999b, 2001; Wittrock, 1989)。這種主動學習過程可以支援解題遷移(problem-solving transfer)。

多媒體學習的認知理論架構如圖 2-1-1：

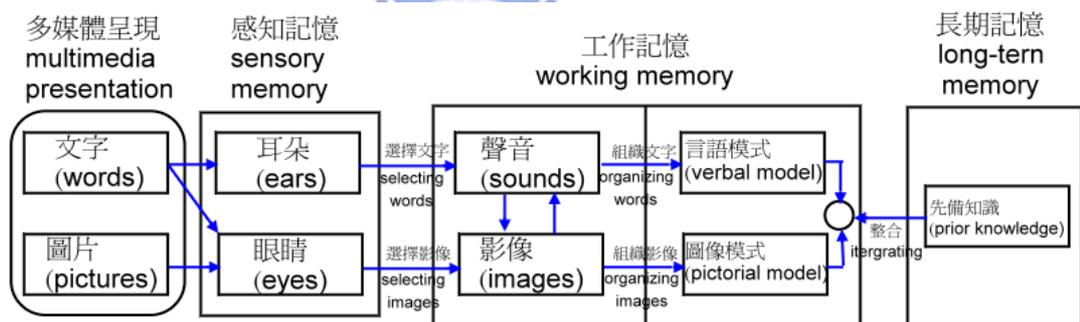


圖 2-1-1 多媒體學習認知理論架構圖

根據上圖所述，學習者要能從事有意義學習需要下列三個過程：

1. 選擇(selecting): 對於感知記憶所接收的文字或影像做選擇，並進入工作記憶區。
2. 組織(organizing): 在工作記憶區中，對於所選擇的文字或影像進行組織並分別放入言語模式與圖像模式。
3. 整合(integrating): 將言語模式與圖像模式配合先備知識做整合，使其進入長期記憶區。

多媒體教學設計的挑戰是如何引導學習者主動認知並使學習者可以建構有意義的內在表徵過程。

四、電腦輔助教學的相關研究與學習成效

幾十年來，許多國內外的學者在電腦輔助教學的相關研究上都貢獻了無數的心力，以下彙整相關研究成果作為本研究電腦輔助教學設計的印證。

國外相關研究：

1. Burns和Bozeman(1981)以後設分析法研究電腦輔助學習，研究發現電腦輔助學習的學習成效優於傳統課堂教學。
2. Gadzella(1982)探討電腦輔助學習對學習成效之影響，研究發現實驗組的學習成效優於控制組。
3. Bangert-Drowns、Kulik和Kulik(1985)等人選擇1968至1982年間相關電腦輔助教學的研究進行綜合分析，並以統計方法歸納出各研究共同結果及特徵，發現如下的結論：
 - (1)電腦輔助教學對國中及高中學生的學業成就有正向的影響。
 - (2)將電腦以不同型式應用，例如電腦輔助教學、電腦管理教學及電腦強化教學等方式，所獲得的學習成就有差異。
 - (3)電腦輔助教學會影響學生對電腦及學科的態度。
 - (4)電腦輔助教學對小學生及低成就學生的學習成效較佳。
 - (5)電腦輔助教學可以縮短學生學習知識的時間。
 - (6)電腦輔助教學的使用者會受到新奇效應的影響。
4. Roblyer等人(1988)曾驗證1980至1987年間相關電腦輔助教學的82篇文獻進行研究，結果發現大學生和成人的學習成效高於小學生和中學生，科學課程的學習成效優於數學及語文課程，低成就學生學習成效的提昇高於一般學生，以及對自我、學科及電腦態度都有影響。
5. Dorn(1993)以74位大學生為研究對象，探討「互動式問題解決中心電腦輔助教學」對學生學習初等統計學學習表現的影響，研究結果指出，實驗組學習表現優於控制組，表示問題解決式電腦輔助教學能引起學生的學習興趣。
6. Claire和Gratt(1995)以後設分析法對1966-1992年間的120篇的研究作分析，其結論如下：
 - (1)對電腦輔助學習組與對照組之記憶力作比較時，電腦輔助教學組的表現較佳。
 - (2)在教學的態度及教材方面，電腦輔助學習組表現亦較傳統方法為佳。
 - (3)高能力的組別可由電腦輔助學習中獲得較佳的效益。
 - (4)女性可由電腦輔助學習中獲得較傳統教學為佳的學習效果。
 - (5)實行電腦輔助學習的學習者中有60%其成績優於傳統教學。
7. Merrill和Hammons(1996)使用互動式電腦輔助教學媒體做教育訓練，可以減低成本的花費64%、減少原來學習時間的36%、使學生學業成績進步11%、學習態度提高了28%以及學生綜合成績進步32%。
8. 學生透過良好的多媒體呈現與傳統言語訊息形式相比可以更深入的學習，包括改善解題遷移(problem-solving transfer)測驗的表現 (Mandl & Levin, 1989; Mayer, 2001; Najjar, 1998; Schnotz & Kulhavy, 1994; Sweller, 1999; van Merriënboer, 1997)。

國內相關研究：

1. 戴文雄(1994)對高工學生運用CAL(Computer Assisted Learning)做補充教學時，在機械製圖之立體圖轉三視圖及三視圖轉立體圖上之能力，顯著優於傳統教學，同時學習者對電腦輔助學習的態度皆較具信心、喜好而少焦慮。
2. 蔡文煉(1995)在自編的多媒體整數減法課程軟體中，對數學學習障礙之國小學生進行補救教學，學生之學習成就大幅進步，且其成效更優於傳統補救教學方式。同時實驗組學生對本套課程軟體之教學方式、情意、興趣及態度等均呈肯定積極的反應。
3. 許瀚濃(1997)針對國中二年級學生對多媒體電腦輔助學習影響之因素研究結論指出，學生具有正確積極電腦態度，其經由多媒體電腦輔助學習的學習成效也較佳。
4. 蔡輝龍(1998)以彙總研究探討多種媒體呈現方式對學習成效的影響之研究結果中指出，進行學習過後一段時間，再測量學習成效，發現使用文字圖例和文字動畫的學習者，較單用文字媒體的學習者，可擷取較多的相關資訊。
5. 羅豪章(1998)以國中理化課程為研究內容，自行設計一套電腦輔助學習軟體，在實證研究後發現受測學生在經由參加學校的標準化成就測驗後的結果顯示，經由本電腦輔助學習軟體的輔助學習可以幫助學生在校獲致較好的學習成就。
6. 簡綜男(2000)在探究互動式多媒體輔助教材在電腦教學之學習成效後指出以電腦教學為主的互動式多媒體輔助教材對不同年齡層次學生之問題解決能力及理解能力的成效有顯著的助益。可見多媒體輔助教材的確可以提升學生之問題解決及理解能力。
7. 洪維欣(2000)在對透視圖的教學實驗結果後，顯示出透過電腦輔助教學的幫助，學生可以在相同的學習時間下(與沒有實施電腦輔助教學比較)有較佳的學習成效。
8. 梁勇能(2000)在經過在GSP環境教學之後，實驗組的學生在空間能力表現顯著比控制組來得好。
9. 張俊彥和董家莒(2000)發現電腦輔助教學確實比傳統式教學顯著的增進學生的科學學習成就。

綜合以上國內外相關電腦輔助教學的研究，其研究對象包含小學、國中、高中到大學，甚至成人教育都有，而所獲得的印證都是受到各階層學生的肯定及正向結果的居多，而且在學習成效上也大部分都是比傳統式的教學方式佳，所以可以證明電腦輔助教學一直是各方研究的焦點，也是各級學校的努力方向，未來各科的教學應該脫離不了使用電腦來作為輔助教學的工具，此亦是本研究採用電腦輔助教學作為實驗教學的因素之一。

第二節 van Hiele 幾何學習理論

一、van Hiele 幾何思考層次理論

在1957年荷蘭數學教育家van Hiele 及他的妻子提出一個幾何學習的模型。他們發現學童在學習幾何時遭遇了許多的困難，於是深入研究完形心理學的結構論及皮亞傑的認知理論，提出幾何思考模式之理論解釋學童在學習幾何時所產生困難的地方。此理論主張學童之思考可以分為以下五個層次，本研究採用van Hiele 在1986年針對5個層次提出的說法加以說明：

(一)層次1(Level 1) -視覺 (Visualization)

對於此一層次的學童而言，可以藉著圖形的輪廓由視覺及觀察判斷得知形體，學童可以依據幾何體之外觀，說出形狀(例如：三角形，角，平行線等)。吳德邦(1998)說明此階段的兒童可以透過實體物操作，例如旋轉或移動，就可以辨別圖形之異同，可以用非數學的術語，知道各種圖形，但是卻無法瞭解這些圖形之真正意義。劉好(1998)認為此一階段之活動，宜多安排感官操作之活動，讓兒童透過視覺進行分類、造型、堆疊、描繪、著色等活動。

(二)層次2(Level 2) -分析(Analysis)

對於此一層次的學童而言，可以具有辨別圖形特徵之能力。學童可以依據實物的圖形觀察組成圖形的基本要素分析幾何概念，但不能辨別出圖形之間的相關關係(例如：菱形、正方形、平行四邊形、長方形之間有何關係)，學童並不一定能知道當其邊長不相等時，其面積亦有可能相等，此階段的學童無法推理得知其中之關係。劉好(1998)認為此階段的學童，宜安排一些製作及檢驗的活動，使學童從製作與檢驗中獲得圖形的性質。

(三)層次3(Level 3) -非形式演繹(Informal Deduction)

對於此一層次的學童而言，可以針對兩個形體之間的關係加以說明(例如：平行四邊形的對邊平行且其對角相等)。在此一時期的學童已可使用定義去理解並發現幾何形體的特性，並能以非正式之討論去理解相關之幾何關係(例如：正方形也是長方形的一種，因為其角度及特性均與長方形相符合)。

(四)層次4(Level 4) -形式演繹(Formal Deduction)

對於此一層次的學童而言，可以用幾何的方式推論其所理解之幾何圖形之意義，並且建立相關定理之結構，亦即此階段之學童可以經由抽象推理的過程來證明幾何問題，知道幾何圖形之充分必要條件(例如：正五邊形邊長均相等，內角亦均相等，但邊長均相等的五邊形不一定是正五邊形)。

(五)層次5(Level 5) -嚴密系統(Rigor)

對於此一層次的學童而言，可以在不同之定理系統中操作，可以學習非歐幾何及比較不同之系統。根據van Hiele(1986)的說法，此層次只是理論的需要，在教學上沒有實用的價值，所以通常不是教學研究的重點(吳德邦，1998)。

根據Hoffer(1981)的說法，他認為van Hiele的幾何思考低層次應劃分成更多的思考層次，以利更加詳細描述學生在幾何思考低層次的表現情形。Clements和Battista

(1992)則使用LOGO環境嘗試幫助學童增進van Hiele幾何思考層次。他們認為證明導向的幾何課程需發展至Level 4，但有超過70%的學童在高中初期只發展到Level 2或3的程度，課程必需加以設計才能使學生發展至Level 4或更高的層次。從以上的研究報告及van Hiele夫婦的說法，幾何概念的發展，在上述五個層次有其次序性，學習者必須具備前一層次的先備知識後，教師才能依據該能力，進行更高層次的教學活動。研究報告也顯示，不同的學習者會在不同的層次，同一個學習者對於不同的幾何概念也有可能發展不同的思考層次(吳德邦，1998; Golinskaia, 1997; Poehl, 1998; Swafford, Jones & Thornton, 1997)。

二、van Hiele 五階段學習理論

van Hiele 認為以上所述各層次間的學習，主要依靠教學的組織與方法，因此從某一層次進階到下一個層次間的過程，教學活動扮演著極重要的角色，而且正確的教學活動可以使進階更為容易(Wu, 1994)。van Hiele 提供了教師更清楚理解「教學流程」(Knowing Process)的重要性以及如何發生，幫助教師在一個學習環境中教導學童更有效率的學習(Mayberry, 1981)。依照van Hiele 的理論架構，教師在教學的過程中應該理解並注意到學童的幾何思考層次，才能設計適當的課程幫助學童們發展到更高階的幾何思考層次。Fuys、Geddes和Tischler(1988)曾針對van Hiele 的五個學習階層舉例說明如何依照van Hiele 的五項學習階層設計課程協助學童學習。van Hiele (1986)訂定五個學習階層，依序為：學前諮詢(Information)、引導學習方向(Guided Orientation)、解說(Explication)、自由探索(Free Orientation)、統整(Integration)。這五個學習階層分別說明如下：

第一階段：學前諮詢

教師在教學之前，先與學生雙向溝通，教師經由觀察與發問，來了解學生已經具備那些知識，藉以作為教學準備之參考。老師和學生為了這個層次而對題目和目標進行對話，在此階段，使用字彙與用辭是相當重要的(Billstein, Libeskind & Lott, 1993)，這個層次中獨特的字彙、用語和題目的標題，透過對話而被引入，教師應觀察到這一點並提出問題與學生討論。

第二階段：引導學習方向

教師引導學生探索、操作，在學生探索的活動過程中，教師宜有計劃的依序引導學生，使其了解幾何的概念。van Hiele(1984)認為第二個階段，是指正確的指引方向，學生藉由資料來深入探究，並了解整個學習的方向；當獨特的結構逐漸呈現在他面前，相關資料就因此浮現出來。老師透過資料和活動，仔細的連續講解，學生們也因此而探究出研究的要旨，而學生就可對所包含的概念和結構更加熟悉。這個資料和活動應該逐漸地呈現這層次中特獨的結構給學生們，為了使學生更加了解學習的內容，這些資料應該包含經過設計的簡短課題。

第三階段：解說

此階段的教學，教師宜引導學生討論學習的主要內容，使其幾何概念提升到理解的層次。van Hiele(1984)指出，在第三個階段的教學過程中，經驗的獲得取決於正確的語言符號和學生們在課堂上透過討論去表達他們所觀察結構之意見，老

師只需注意這些討論所使用的習慣措辭，關連系統在這第三個階段就有一部份形成了。來自老師的少許幫助，學生們就能建立他們的經驗，且精練他們的詞彙，因此他們可以表達、交換和討論結構的相關性。老師的角色是幫助學生有正確和合適的字彙和語言。

第四階段：自由探索

進入這個學習階段，教師可以選擇適當的教材以及幾何問題，鼓勵學生思考與解答這些幾何問題。van Hiele(1984b)指出:第四階段是自由探索期，學習的範圍是大多數學生知道的，但學生仍需迅速地找到他的方向。藉著分派學習任務並以不同的方式來完成，所有解題方法的種類就在學習的領域中，這些方法秀出了不同的思考路徑。學生們在不同的方式上遭遇更多複雜且有許多步驟的課題，當他們靠自己解決這個課題時，他們獲得了經驗，學生們在概念主題的學習中，作出了許多明確的關連性。對於學生來說，藉由學習，研究主題間的許多關連性就變得明確了(Hoffer, 1983: 208)。

第五階段：統整

學生所學習到的幾何概念與知識，統整起來，教師的職責在鼓勵與啟發學生理解與應用幾何概念，來解各種有關的教學問題。van Hiele(1984: 247)解釋說:

「最後的階段是整合，學生雖然已經糾正他自己，但是他仍然必需獲得他所使用的方法的概觀理念。因此他試著去濃縮他的思想所探索過的全部範圍。在這一點上，老師能藉著供給「整體的概念」來幫助本工作。重點是這概括並不能呈現任何新的事物給學生，他們只是摘要的擷取一些學生已經知道的東西」。

學生能夠內化吸收且統一宗旨和關係，並加以轉變成一套新的思考模式。老師能夠藉由給予學生一個有關他們學習過的東西之通盤概念來幫助學生學習(Billstein, Libeskind & Lott, 1993: 499; Crwoley, 1987: 5)。「老師藉由提供有關學生已知道的東西之整體概念來幫助此統整過程，並注意不可以提出新的或不一致的概念來加入考慮的條件中」(Hoffer, 1983: 208)。

三、van Hiele 理論的相關研究

van Hiele 幾何思考之理論，包含三個範圍，即：領悟的本質、幾何思考層次及五階段學習模式(Hoffer, 1983)。van Hiele 夫婦主張學生之思考可以分為五個層次，這些層次是循序漸進，學生的思考能力到達某一層次之後，才可以依序發展至下一層次(van Hiele, 1957: 213)。教師在教導學生幾何概念時，扮演相當重要的角色，教師的教法正確的話，學生的幾何概念很快就可順利進入更高的層次。van Hiele 認為教師可以幫助學生透過觀察幾何形體的結構，瞭解其中的關係，進而產生更高層次的思考。van Hiele 的幾何思考層次理論，最早是引起蘇聯數學教育家的注意，自1960年代起，蘇聯即依據van Hiele的理論，改革蘇聯的幾何課程(Burger & Shaughnessy, 1986a; Usiskin, 1987)，而美國自1974年，由Wirszup(1976)將van Hiele 理論引入美國，開始進行一系列相關的研究。van Hiele幾何思考之理論，自1979年開

始即陸續有相關研究報告產生，茲將國內外研究結果討論如下：

Coxford(1978), Mayberry(1983), Borg和Gall(1989), Baynes(1998), Bell(1998)和 Matos(1999)等人的研究皆認為van Hiele幾何思考層次具有階層性且能正確的描述學生的幾何思考與學習狀況。有些研究者(Burger & Shaughnessy, 1986a; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Mayberry, 1983)認為van Hiele幾何思考層次雖然有階層性，但是對於將學生指派到單一層次，即層次是離散的，則有一些存疑。Mayberry(1983)認為學生在不同的概念會有不同的幾何思考層次；Usiskin(1982)發現在幾何思考層次間轉換的學生難以有效的分類；Burger和Shaughnessy(1986a)的研究中指出有學生在不同的問題中顯現出不同的幾何思考層次，甚至有些學生在同一個問題也有從一個層次變動到另一個層次的行為發生，因此他們認為幾何思考層次應該是連續的，而不是離散的。本研究中，基於統計的考量仍然將學生指定到單一的思考層次上。

Usiskin(1982)在其研究中發現9-34%的中學生尚且無法顯露出視覺層次的思考特質。而26%的學生經過一年的幾何課程之後依然處於層次0，也就是未達到視覺層次。因此，Clements & Battista(1992)認為有比視覺層次更基本的層次存在，稱之為前認知(pre-cognition)層次。他們認為這個層次的學生無法辨認共同的圖形，他們也許可以區分曲線的圖形和直線圍成的圖形，但是無法區分同一類型的圖形。例如，他們可以區分圓形和正方形，但是無法辨認一個正方形和長方形，因為他們缺乏形成必要的視覺影像的能力。

至於幾何思考層次的指派上，有的研究者利用紙筆測驗(Usiskin, 1982)；也有研究者利用訪談方式，針對學生在每個活動中所表現出來的思考層次來指派(Burger & Shaughnessy, 1986b; Fuys & Geddes, 1984)，但是在上述的方式中，學生有發生在層次間跳動的行為，因此，也有研究者採取不同的方式。Gutiérrez, Jaime和Fortuny(1991)採用學生獲得van Hiele幾何思考層次的程度來代替指派學生一個幾何思考層次的方式；何森豪(1998)則是將van Hiele幾何思考層次量尺化以代替「全有全無」的測驗模式，可獲得較精確的能力估計值。

Usiskin(1982)在其芝加哥的研究計畫中，發展一套van Hiele幾何思考層次測驗，包括25題選擇題，每個層次5題。以學生答對某個層次5個問題中的3題或4題，檢定為通過該層次形式一或形式二測驗。他針對美國約2700位修習幾何課程的中學生(14~17歲)進行研究。分別在秋季和春季以此測驗各施測一次，並輔以幾何測驗與證明測驗。結果發現層次五不是不存在就是不可測驗的，而其他層次都可由測驗測出。他的研究結果發現van Hiele幾何思考層次對於同時施測的標準幾何內容是個良好的預測指標。而秋季的van Hiele幾何層次對於春季幾何學習成效是個良好的預測指標。該研究也證實van Hiele的理論可以用來解釋學生在幾何課中所遇到的困難和表現。

在van Hiele幾何思考層次的理論下，一些研究者試著與其它主題作連結。林軍治(1992)發現van Hiele幾何思考層次越高的兒童越傾向於場地獨立性；而van Hiele 層次低的兒童，無論是在國小3年級或是5年級，其幾何概念理解測驗的分數，顯著低於層次高的兒童。Smyser(1994)得到高中學生的van Hiele幾何思考層次

和幾何成就測驗成顯著的正相關。Naraine(1989)對於大學生的研究中，則發現van Hiele幾何思考層次與空間視覺能力成顯著相關。從學生在van Hiele 幾何思考層次的分佈來看，在小學生中，不同的年級有顯著的不同，但是性別上並沒有差異(林軍治，1992; 盧銘法，1996)。

此外，利用van Hiele的五階段教學理論，Wu(1994)發現對於我國師範學生的非歐幾何學的數學成就，比採用傳統的講授式教學法，更能產生較高的幾何思考層次，而其幾何成就也比採用傳統教學法顯著來得高！而林永發(1998)認為van Hiele理論和學生的幾何臆測理論型態基本上是相容的，足以刻畫學生的幾何臆測思維型態；其中層次1的學生能做視覺式的臆測，層次2的學生能做分析式的臆測，層次3的學生能作命題式的臆測。

由以上研究報告得知，大部份研究顯示van Hiele幾何思考層次理論對於提昇學童的幾何概念是有所幫助的，能夠引導學童的學習能力，尤其在適當的指示及教導下對於學童的學習有明顯的幫助。但並非所有特性均能從研究中研究出來，也因為無法發展一個標準的測驗試卷來測量學童的van Hiele層次，而測驗卷對於學童的思考程序也無法加以判別，研究者有必要透過訪談(interview)，調查表(protocol forms)或檢測表(checklist)發現其中的共通性。因為大部份的研究者並不能完全將上述形式提供一個標準化的格式，因此在判定學童之幾何思考層次時容易有爭議出現，有時需透過表決才能決定學生的幾何思考層次。

針對van Hiele理論所發展的測驗卷，因為無法提供標準化的測驗卷，Usiskin(1982)在其芝加哥研究計畫中，以14~17歲修習幾何課程的青少年為對象，根據van Hiele理論編製了一套van Hiele幾何思考層次測驗卷，Usiskin和Senk(1990)提到這個測驗被很多人廣泛地用來決定van Hiele層次。因此本研究採取Usiskin在芝加哥所發展的測驗卷做為調查研究決定學生幾何思考層次之依據。

第三節 資訊科技融入數學的教學設計

一、心智工具與 ICON model

Jonassen(2000)將電腦與學習分成三個階段，分別是「從電腦學知識(learning from computer)」、「學電腦知識(learning about computer)」與「用電腦學知識(learning with computer)」，此三階段對應到台灣資訊教育發展分別是電腦輔助教學(CAI)、資訊素養(computer literacy)與資訊融入教學(technology implementation)；Jonassen 認為第三階段「用電腦學知識」也就是資訊融入教學階段，應該要使用心智工具(mindtools)來達到教學的目標。Jonassen 認為心智工具是指以電腦為主的工具或學習環境，並且已經適合或發展成具有誘發學習者從事批判性思考與高層次思考的心智夥伴(intellectual partner)，因此 Jonassen 認為電腦應扮演的角色如下：

- (一)電腦支援知識建構(knowledge construction)。
- (二)電腦支援探索活動(explorations)。

- (三)電腦支援做中學(learning by doing)。
- (四)電腦支援對話學習(learning by conversing)。
- (五)電腦支援反思學習(learning by reflecting)。

研究者根據以上 Jonassen 對心智工具的看法將，數學電子教材分類如下：

- (一) 展示型(presentation): 能呈現接近真實的數學概念情境與誘發學生學習的電子教材。
- (二) 互動型(interaction): 需具有探索(exploration)、引導(guidance)、做中學(learning by doing)功能的展示型電子教材。
- (三) 建構型(construction): 能支援知識建構，對話學習與反思學習的互動型電子教材。

數學電子教材的類型應該是建構型包含互動型，互動型又包含展示型，至於數學電子教材的類型與數學心智工具的關係可參考表 2-3-1 之說明。

表 2-3-1 數學電子教材類型與數學心智工具的關係

數學電子教材	數學心智工具
展示型(presentation)	誘發學生學習。
互動型(interaction)	誘發學生學習、支援探索活動與支援做中學。
建構型(construction)	誘發學生學習、支援探索活動、支援做中學、支援知識建構、支援對話學習與支援反思學習。

Black 與 McClintock(1996)認為科學學習應強調學習者對於資訊的解釋與知識建構的過程，因此提出了一套建構式科學教學模組的設計原則，稱為「解釋建構設計教學模組」(The interpretation construction design model)。這個模組主要是討論建構式科學教學的八個原則，包含「真實情境活動中的觀察」、「解釋建構」、「納入先備知識於教學情境中」、「認知衝突」、「認知學徒制」、「合作學習」、「多重解釋」與「多重應用」(Tsai, 2001)，簡稱為 ICON model，分別介紹如下：

- (一)真實情境活動中的觀察(Observations in authentic activities)

Roth(1995, 1997)在他一系列探索「真實情境活動中的觀察」的研究中提到，科學教學的問題必需鬆散的定義使學生可以建構他們自己的架構。與科學家的日常生活環境有一些共同特徵的「真實」學習環境可以幫助學生充分體驗在科學知識建構上多種的、不確定的與教材方面觀點的層次。這已經影響了當代科學教育的練習活動，比如說大量的提供非常理想的情境來引導學生探索。

情境認知(situated cognition)與錨點教學(anchored instruction)的概念也建議教學者必需提供一些在真實任務或情境中能讓學生做一些觀察的教學活動 (Borg & Gall, 1989; Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1990)；雖然有一些科學的概念在傳統教室中不容易觀察(如原子的存在)，但是我們可以鼓勵學生以他們不一樣的觀點來解釋科學教學所提出的一些結果(例如:根據粒子的模型來看這件事。)。這和 Novak 與 Gowin(1984)所倡導的「學習就是一種有意義經驗的改變」的學習觀點相當一致。

(二)解釋建構(Interpretation construction)

建構主義的主要觀點就是知識不是被動的接收而是主動的認知並完成目標所建立的。學習者並非只是簡單的重現所學得的知識，而必需自己重新去建構這些知識；因此老師必需創造一個讓學生對於新資訊有機會建構解釋的學習環境，更進一步，透過老師的引導，學生可以建構出一些可以檢查、確認或挑戰他們解釋觀點的議題。

近代的科學哲學家已經相信科學並非只是表現真實世界發生的事實而已，而應該是某種解釋人類發現自然現象的方法(Duschl, 1990; McComas, 1996, 1998)。

(三)納入先備知識於教學情境中(Contextualizing prior knowledge)

近來有許多研究揭示學生接受正式科學教學之前已經根深蒂固的有一些天真的科學概念，科學教育者稱之為「迷思概念」(misconceptions)或「另有概念」(alternative conceptions)。這樣的先備知識通常會與要接受的科學觀點有所衝突，並且會影響學生對於解說與實驗的觀察與對於科學文字與教師授課內容的理解(Champagne, Gunstone & Klopfer, 1983)。

如果學生的先備知識不能被清楚的探索或挑戰的話，很快的在科學教學之後，他們又會回到原來的「另有概念」，或他們會無法統整自己已經知道與所學的科學概念(Wandersee, Mintzes & Novak, 1994; Solomon, 1983)。由於學生對於所要學的科學概念有各種不同的先備知識，所以科學老師必需安排可以讓學生探索與應用他們先備知識的課程，並診斷他們的「另有概念」。

(四)認知衝突(Cognitive conflict)

由矛盾與異象資料(anomalous data)所引起的的認知衝突是一個改變學生「另有概念」的必要條件，雖然不見得是充份條件(Hewson, 1985; Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982)。矛盾的事件可被設計用來提供挑戰學生的「另有概念」。然而，教師要選擇適當的矛盾事件，不要引起學生的混淆與挫敗(Tsai, 2000)。

(五)認知學徒制(Cognitive apprenticeship)

採建構教學式的老師在新資訊建構的專業表現對學生是一個很好的示範(Bendar, Cunningham, Duffy & Perry, 1992)。Collins、Brown 和 Newman(1998)建議認知學徒的三個步驟是建模(modeling)、指導(coaching)與退出(fading)。他們認為教師的回應無法被仔細描述，對於學生各種不同的解釋建構需要給予情境上適當的指導。換句話說，建構主義教學者，一方面將學習視為一種建構知識的過程，另一方面強調由老師所指導的認知學徒的重要。因此建構式教學設計與 1970 年代教育學者所提的發現式(discovery learning)的教學設計是完全不同的。

發現式的教學方法是假設學習者可以憑著他們自己的努力去發現並獲得有意義的知識。發現式學習的擁護者認為對於孩子來說，獨立發現與證明科學知識假設的正確性與解釋實驗的結果是非常直接與簡單的(Matthews, 1994)。然而建構主義教學者不能忽略在許多的狀況之下學生必需是教師的學徒來從事知識建構的觀察與解說。

(六)合作學習(Collaboration)

科學知識的成長與成熟通常是經由一大群科學家的討論與磋商而成的;同理,學生的科學知識可以視為個人的建構過程,但卻必需是社會認同的。我們不能忽略社會認知的本質,而且學習應該視為學生經由與同儕、教師與其他學生的討論、辯論與磋商等從事有意義建構的社會認知活動(Cognition and Technology Group at Vabderbilt, 1992)。許多的教育學者強調合作學習對於學生知識建構的重要性。根據過去許多資料顯示合作群體學習可以促進、激勵學生達成目標與對學習的態度(Springer, Stanne & Donovan, 1999)。從建構主義的觀點來說,教學者應鼓勵學生在觀察、解釋與課程進行中採取合作學習的方式。在這樣的狀況下,建構式的科學教師不只要扮演一個提問者的角色,也要扮演知識提供者的角色,通常也需要與學生協商他們的經驗與解釋,經由知識共同建構來確認解說的正確性。教師也必需說服學生接受科學概念的價值。

(七)多重解釋(Multiple interpretations)

科學常常被認為以提供唯一正確的答案為目標,然而從科學史的課本上我們可以發現科學家各種不同的但有效的理論觀點來解釋同一個現象。例如,地震的成因就有許多不同的科學理論:氣壓的改變、地表上升的氣體與版塊的移動等(Dushl, 1987)。如上所述,科學家不只是展示事實而已,同時也需對於自然現象有多種的解釋。

同理,學生也應該被鼓勵以不同的理論觀點來解釋或解決科學問題。Martin(1972)曾經提出下列的看法:學科學的學生應該被教一些在這個研究領域中不同的理論。如果可以的話,科學史中的一些理論應該重新被提及與再檢驗。學生不只是接觸不同的理論方法,而且應該學習應用不同的理論。經由接觸多重的解釋與理論觀點,學生可以得到進一步應用科學概念的彈性架構。舉例來說,解決近代物理的問題,學生可以使用波或粒子的觀點來解釋事件的行為。另外經過不同理論觀點的接觸,學生也可以了解每個理論使用的限制,並對科學形成一個較為真實的心像。

合作學習的方法可以是一個達到多重解釋的中心策略(Bednar, Cunningham, Duffy & Perry, 1992)。例如:學生可以對於一個自然現象合作建構出不同的解釋,然後他們可以一起評估這些觀點,並進一步決定在一個指定的課程中那一個觀點用來解釋此現象是最有用與最有意義的。因為多重解釋可能有不同的方法來得到科學上正確的答案,因此建議教學者應該提供多元的評估模式來獲得學生在科學想法上更完整的心像。

(八)多重應用(Multiple manifestations)

一個有用的科學概念往往會被應用在不同的情況中。例如:牛頓的運動定律可以用來解釋行星間的運動,也可以解釋一些小粒子間的運動。教育學者也建議當學習一個新的科學概念時,顯示其多樣性對學生的概念改變是一個需要的條件(Posner et al., 1982)。換句話說,新的概念不只要能解決前人的困難,也要有延伸性可以回應各種新的質詢。看到同一個概念的多重應用,學生會較有可塑

性。他們也應該被鼓勵在不同的時間與不同的情境下運用相同的概念。

研究者認為 ICON Model 不僅可使用在科學教學的設計上，對於數學教學模組之開發也提供了很有用的建議。綜合上述原則，一個好的數學教學設計應提供學生真實情境活動的觀察、讓學生有解釋建構的機會、將學生先備知識納入教學情境中、提供學生認知衝突的機會、採用認知學徒制引導學生探索問題、鼓勵學生採合作學習的方式、鼓勵學生以不同的觀點來看問題及將所學的數學概念應用在各種不同的情境中。

二、建構式 van Hiele 五階段學習模式

Jonassen 心智工具的概念要如何實現在數學教學的設計上呢?研究者提出以 van Hiele 五階段學習理論為主並整合 ICON model 設計八原則，稱為「建構式 van Hiele 五階段學習模式」，做為資訊融入數學教學模組的設計原則。表 2-3-2 列出建構式 van Hiele 五階段學習模式與心智工具的關係。

表 2-3-2 建構式 van Hiele 五階段學習模式與心智工具的關係

建構式 van Hiele 五階段學習模式		心智工具
Van Hiele 五階段學習模式	在 ICON 模式中的設計原則	電腦支援
一、學前諮詢(information)	納入先備知識於教學情境中 (Contextualizing prior knowledge)	誘發學生學習
二、引導學習方向(guided orientation)	真實情境活動中的觀察 (Observations in authentic activities) 認知衝突(Cognitive conflict) 認知學徒制(Cognitive apprenticeship)	支援做中學 支援探索活動
三、解說(explication)	解釋建構(Interpretation construction)	支援知識建構
四、自由探索(free orientation)	多重解釋(Multiple interpretations) 多重應用(Multiple manifestations) 合作學習(Collaboration)	支援深思學習 支援對話學習
五、統整(integration)	多重解釋(Multiple interpretations) 多重應用(Multiple manifestations) 合作學習(Collaboration)	支援深思學習 支援對話學習

三、幾何電腦學習環境設計

為了幫助學生建構一個可以探索幾何性質的學習環境，利用電腦提供視覺化的功能，配合數學學科內容，引起學生在學習幾何上的興趣與動機，是本研究在 Flash 電腦輔助教學軟體設計上的一大考量。因為 Cunningham(1991)認為視覺化的好處包括能夠將焦點放在複雜問題的特定組成部份或是細節上，顯現作用的變動過程，以及增加對於數學問題和過程的直觀與瞭解。他認為一個視覺化的教學應找尋機會來呈現變動過程或是發展數學的過程，並且給學生適當的機會來探索和 control 它們。Hoyle(1987)認為應該把電腦視為是一個圖像表徵的工具，因為它能提供

視覺的回饋。她認為學生在一個交互影響的電腦環境中所進行的活動，無可避免地將引起一些知覺上的模擬兩可(ambiguity)與衝突，因而刺激學生對於知覺線索(perceptual cues)感到懷疑，並重新思考原先的直覺，並且嘗試將圖像回饋和他們的幾何知識作明顯的連結。Hershkowitz(1990)覺得電腦環境可允許在螢幕上操作特定物件，幫助學生將這些看成是物件的表徵。如果使用不適當的策略，立即的視覺回饋可以造成學生的認知衝突，讓學生再去重新思考解題過程。Dreyfus和Hadas(1991)也認為，雖然在電腦螢幕上的圖形表徵依舊是二維的，但是這個表徵是連續變動的，如此可增加適應性用來滿足下列的教學需求：

- (一)讓電腦執行構圖，如此可驅使學生需要在定義的基礎下去進行並且避免被不準確或是錯誤的圖像所欺騙。
- (二)讓學生的迷思概念顯現出來，因此造成一個認知衝突。
- (三)引導學生去猜測性質，並且在電腦的輔助下去檢驗猜測。這也許可再次引起在某項假設下，預期會發生的事情和真正在螢幕上所發生的事情的一個衝突。

所以Reusser(1996)認為設計任何以電腦為基礎(computer-based)的教育系統應該建立在下列兩種基礎下：(一)在學習和理解的特定內容的研究上；(二)在學習者的教學模式(pedagogical model)和學習的過程。他提出六項用來設計以電腦為基礎的智慧型教育工具的原則：

- (一)和科技導向的系統比較，認知工具應被用來作為達成教育目標的一個方法。
- (二)藉著提供專家的程序性(procedural)和知識領域的概念性(conceptual)輔助來刺激和幫助學生努力地進行知識領域的建構、瞭解和技能的獲得。現代電腦中，可直接操作的圖形介面很適於提供學生表徵上和程序上的支持。
- (三)提供學生易懂的表徵工具來使學生思考和溝通。
- (四)提供一個能盡量由學習者控制的系統或是一個可多樣控制且最小輔助的系統(只有當學生真正需要幫助時介入)。
- (五)電腦應該允許學生表達和溝通他們的心智模型，並且反映出他們的過程和學習的成果。
- (六)以電腦為基礎的教學，應從個別慢慢擴充到合作的學習。因此，電腦應該慢慢整合到教室的教學情境中。

而Collins(1996)以建構主義的觀點來討論如何設計一個學習環境。他提到建構主義的觀點強調在於學習而非教學，強調有助於學習的環境而非教學目標。從思考的角度來看，Yakimanskaya(1991)表示幾何思考牽涉到對於心像持續地再編碼，從真實的空間影像到這些影像的圖象表徵之間的轉換。他認為由思考所操作的空間心像必須是動態的、可修正的和可以使用的。

綜合上述的觀點來看，透過Flash所設計的電腦輔助教學幾何軟體來呈現動態的圖形變換，應該是一個不錯的選擇。而在設計Flash電腦輔助的學習環境時，利用Flash軟體可以動態模擬的特性與高互動的功能，將物件設計成可以讓學生主動操作與控制，以呈現物件接近真實的旋轉或是變換的情形，幫助學生達到理解幾

何概念的效果。另外，Flash電腦輔助教學軟體如何配合van Hiele五階段學習模式與ICON Model設計原則，發展出一套「國中平面幾何基礎課程」來幫助學生有意義學習，正是本研究幾何數位教材開發的努力方向。

