

### 第三章 Geometry Player 的設計理念

為了幫助國中小學生建構一個可以探索幾何性質的學習環境，以及能協助老師更輕鬆方便的展示幾何形體動態變化的過程，本研究利用 Flash 開發一套名為 Geometry Player 的動態幾何軟體，該軟體主要參酌 van Hiele 的幾何學習理論，Duval 提出的幾何圖形之四種認知理解方式，Paivio 等學者的動態心像理論，再融合國中小幾何實際教學內容以及研究者八年來的實際教學經驗所設計而成，希望它不僅能符合老師實際教學的需求並能成為國中小學生探索幾何的心智夥伴。

#### 第一節 van Hiele 幾何學習理論

荷蘭數學教育家 van Hiele 夫婦根據完形心理學的結構論及皮亞傑的認知論，在歷經多年的深入研究後，於 1957 年提出一個幾何學習的模型。此套幾何思考理論主要解釋學生在學習幾何時所產生困難的地方，依據該理論，學生之幾何思考可以分為以下五個層次：

##### 層次1：視覺層次 (visualization)

這個層次的學生可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形，透過視覺觀察各種具體實物，以它們的外形輪廓來辨認圖形，但此階段學生雖能依據幾何體的外觀，說出各種形狀(例如：三角形，正方形，圓形等)，卻不能瞭解其真正意義，例如：旋轉 $45^\circ$ 的正方形即不認為是正方形。劉好(1998)建議這階段的學童宜多安排感官操作的活動，讓學童透過視覺進行分類、造型、堆疊、描繪、著色等活動獲得幾何圖形的正確概念。

##### 層次2：分析層次 (analysis)

這個層次的學生已經具有辨別圖形特徵的能力，他們能從圖形的構成要素以及構成要素之間的關係分析圖形，並且可以利用實際操作(如摺疊、尺量、角度測量或格子觀察)的方式，發現某一群圖形的共有性質或規則。劉好(1998)指出此階段的學生，宜安排一些製作及檢驗的活動，使其從中獲得圖形的性質。

##### 層次3：非形式演繹層次(informal deduction)

這層次的學生不但能夠了解、掌握、運用構成圖形的各種要素，並且可以透過非正式論證把先前發現的性質作邏輯性聯結，更進一步能探求各種幾何圖形的內在屬性關係以及各圖形之間的包含關係，並可使用定義去理解及發現其中的特性，如看到四邊形兩雙對邊相等，不必將所有屬性均描述出來即能確認是平行四邊形，而且在了解圖形內在關係後，可以建立長方形是平行四邊形的一種；平行四邊形中，若有一個角為直角時，此四邊形即為長方形等概念。

##### 層次4：形式演繹層次(formal deduction)

對於這一層次的學生而言，可以用演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理的網路結構。他們可以在一個公設系統中建立幾何理論，知道幾何圖形之充分必要條件，發現正逆命題間的差異性(例如：正五邊形各邊長均相等，但邊長均相等的五邊形不一定是正五邊形)。

#### 層次5：嚴密系統層次(rigor)

達到這個層次的人，可以在不同的公理系統中建立定理，並且分析或比較這些系統的特性。例如能區別歐氏幾何與非歐幾何的差異，也可了解抽象推理幾何，甚至可自創一種幾何公設系統，一般人很難達到這個層次，即使是以數學為專業者亦不容易達成。根據van Hiele(1986)的說法，此層次只是理論的需要，在教學上沒有實用的價值，所以，通常不是教學研究的重點(吳德邦，1998)。

依據van Hiele的主張，學生要從一層次進步到另一層次，主要仰賴於老師合宜的教學與學生正確的學習方法，而不是年齡的增長與生理上的成熟，許多學生學習幾何所發生的困難，主要是因為學校的教材內容不符合學生思考的層次，以致於造成學生只有依靠記憶或背誦來學習，其效果當然不佳，因此教學活動扮演著極重要的角色，而且正確的教學活動可以使進階更為容易(Wu，1994)。為此，van Hiele 提出五階段學習模式(five-phase learning model)，幫助教師在一個學習環境中教導學生更有效率的學習，Fuys, Geddes 和Tischler(1988)也曾針對van Hiele提出的五階段學習理論舉例說明如何設計學習的課程以協助學生學習。這五個學習階段模式分別說明如下：

##### 階段 1：學前諮詢(information)

老師在教學之前，先與學生進行雙向溝通，教師經由觀察與發問，來了解學生已經具備那些知識，藉以作為教學準備的參考。在這階段，使用字彙與用辭是相當重要的，獨特的字彙、用語和題目的標題透過對話而被引入，且作了觀察，提出了問題。

##### 階段 2：引導學習方向(guided orientation)

教師引導學生探索、操作(例如：排列、組合、積木、摺紙等活動)，在學生探索的活動過程中，教師宜有計劃的依序引導學生學習方向，使其了解幾何的概念。

##### 階段 3：解說(explication)

這個階段的學生，已逐漸了解幾何圖形的關係，教師引導學生討論學習主要內容，學生們在課堂上學習透過討論去表達他們所觀察到的結構，老師隨時注意討論所使用的習慣措詞，讓學生能用正確的語言符號表達結構的相關性。

##### 階段 4：自由探索(free orientation)

進入這個階段的學生，教師可以選擇適當的教材以及幾何問題，鼓勵學生思考與解答這些幾何問題。學生透過較複雜的工作學習在關係的網絡中找到他的方向，例如在知道一種四邊形的性質以後，調查另一種四邊形的同類性質。

##### 階段 5：統整(integration)

老師能夠藉由給予學生一個有關他們學習過的東西之通盤概念，來幫助學生將所學習到的幾何概念與知識統整起來，學生總結他所學到的概念，然後反思他的運作關係，因而能夠內化吸收且統一宗旨和關係，並且加以轉變成一套新的思考模式。例如，總結一種圖形的各種性質。

依據九年一貫數學課程中幾何主題的內容設計及教學目標，參考 van Hiele 幾何思考層次理論，國小低年級學童屬於 van Hiele 幾何思考的視覺層次，所以教材的設計應從視覺與觸覺等感官活動為起點，透過具體物的操作以達成教學目的；而中年級學童則是從視覺層次過渡到分析層次，此時的兒童已開始注意到多邊形的構成要素，於是讓學

童透過要素抽離的實際活動來認識圖形的構成要素，同時也提供抽離的反向活動，從要素建構圖形；高年級學童的幾何概念發展程度，大都已進入 van Hiele 幾何發展層次的分析期，他們能注意到圖形組成要素的特性，可以利用構成要素造出圖形，並能歸納一些圖形的共同特徵。而國中階段的學生則希望能從分析期提升到非形式演繹期，應以操作探索為根本，建立學生簡單推理的根基，由具體操作情境漸漸進入推理幾何情境中，慢慢養成統整能力。對於正處於前三層次的國中小學生而言，幾何教學應重視學生操作探索的學習活動，注重幾何圖形結構的觀察與操作，學習以觀察、測試、實驗等歸納方式以獲得幾何性質，而組成概念元素的觀察及元素之相關性的操作，可使演繹證明過程更加清楚與便利(Hershkowitz, 1990)。

九年一貫課程中有關幾何主題教學立意雖然良好，根據其精神所編成的幾何教材也都漸漸的強調操作、實驗、探索、觀察、歸納進而邏輯推理的學習過程，然而落實到實際的教學中，卻仍難擺脫傳統幾何教學偏重演繹、證明方式宣告幾何性質的教學模式，忽略以觀察、測試、實驗等歸納方式以獲得幾何性質，而這樣的現象在國中階段更是如此。究其原因應和老師教學工具及學生操作探索工具有關，現今大多數的國中數學教師仍只和幾十年前老師使用同樣的工具：粉筆、黑板、圓規、三角板(可當直尺用)，利用這些工具所產生的幾何圖形為單一的靜態圖形，一旦構圖完成，僅能說明符合某條件的特例圖形，教學者並無法在黑板上操弄這些幾何物件及它的構成元素，況且不論某些不容易在黑板上呈現的圖形(如方格紙)，試想這樣的教學道具如何引導學生從事操作探索的學習活動；而學生操作探索的工具和教師也如出一轍，粉筆變成鉛筆、黑板變成白紙、大圓規變成小圓規、三角板變成直尺，想當然爾，除了少數的學生能從中發現探索的樂趣，大多數的學生只能期待簡單有效但不明究理的計算方法。近來各家數學版本教材設計了不少剪紙、摺紙的學習探索活動，讓學生能透過移動、旋轉、翻轉、分割、拼合等操作過程來發現幾何性質；除此之外，也設計了很多造形探索活動，透過操弄它的組成元素(如點、線)使幾何圖形產生變動，然後經由測量、計算來觀察幾何量的變化情形或其它構成元素的變動情形。從這些學習活動的設計中，我們可以發現它們大都以動態的方式呈現，以往只能呈現單一靜態圖形的黑板已不能應付這樣的學習變革，以致於很多老師都大喊無法適應，甚致很多人都希望能回歸國編本的時代。

從 van Hiele 的幾何學習理論出發，再考慮現今幾何實際教學的困境，研究者希望能利用近來蓬勃發展的資訊科技來幫助解決這些困難點，基於這樣的理念及背景，研究者開始著手利用 Flash 設計幾何軟體教材，不僅期望它能讓老師更方便容易的呈現幾何動態變化的過程，協助老師平常幾何教學活動順利的進行，更期望提供學生操作探索的環境，在這些過程中學生可以建構、操作、實驗、觀察、歸納及推理，進而更清楚掌握幾何的概念、結構和性質。但如何讓所設計的軟體達到這些目標呢？研究者首先參考 Duval(1995)提出的四種幾何圖形認知理解方式與 Paivio 的動態心像理論，然後反省八年來幾何教學的經驗，並深入研究國中幾何課程內容，深思如何設計軟體才能讓老師輕鬆方便使用並能彌補傳統教學工具的不足，思考什麼樣的幾何環境及幾何元件才符合國中生操作探索的需要。

## 第二節 幾何圖形的認知理解與動態心像

具體的幾何圖形可以幫助我們瞭解幾何概念的內在本質，也有助於我們解題及找到幾何證明的關鍵想法。然而在實際的情況中卻發現，幾何圖形常常無法幫助學生對一個問題的解答獲得一些關鍵性的啟思與洞察(Duval,1995)，為探索此一現象，Duval(1995)認為應從個體對幾何圖形的認知理解方式著手，他認為某些圖形是具啟發性的，經由圖形的操弄及維度的轉變，可以幫助我們解決原來並不容易解決的幾何問題，因此在他的研究中，提出了四種幾何圖形的認知理解：知覺性、構圖性、論述性及操作性理解。

### (1) 知覺性理解(perceptual apprehension)

知覺性理解是個體認知到圖形的組織法則與繪圖線索，並將這些訊息組織成一個整體性的辨識。以知覺性理解方式所產生的心像與視網膜圖像不同，知覺性理解後的心像保留了被整合過的法則與線索，但也可能伴隨著某些錯誤。此外，由於一幾何圖形常由幾個子圖所構成，因此知覺性理解也包含了子圖形辨識及命名。

### (2) 構圖性理解(sequential apprehension)

構圖性理解是個體構造一個圖形或是描述其結構的一種認知歷程，個體對於圖形基本組織的理解不是依賴視覺的法則與線索，而是構圖工具限制與數學性質的理解，因此個體若不了解相關的數學性質與作圖工具的限制，將無法完成目標圖形。

### (3) 論述性理解(discursive apprehension)

論述性理解是個體透過語言或文字來描述一個圖形所具有的性質或進行推理活動的認知歷程，對於同一個圖形而言，每個人所見的脈絡與性質都不盡相同，對於圖形的說明能顯示個體對圖形的理解程度，因此沒有任何說明的圖形是一種模糊的表徵。

### (4) 操作性理解(operative apprehension)

操作性理解是個體轉換心像或實體圖像的一種認知歷程，個體將圖像轉換後，知覺的辨識與原圖像之完形不同者，才稱個體產生操作性理解(Duval, 2002)。這些變換在心智中或實體世界中操作，提供個體對於圖形的啟思，在幾何問題中，一種或數種操作能使圖形呈現出解決之道，這也就是圖形對一個問題提供洞察的方式。

Duval 進一步認為有三種不同的方式轉換圖形：

- ①. 分解組合方式(The mereologic way)：將一個給定的圖像分割成幾個部分或是將幾個圖形組合成一個圖形。
- ②. 光學方式(The optic way)：將一個圖形放大、縮小、鏡射或以不同的視點來觀察同一個圖形。
- ③. 平移旋轉方式(The place way)：改變一個圖形的位置或方向。

黃哲男(2002)參考 Duval 幾何圖形的四種認知理解，探索個體於幾何解題活動時之動態心像的類型與運作機制時，發現學生常用動態心像的類型主要有割補、變換、動態模擬三種類型，若將其研究結果與 Duval 理論中之操作性理解相比較，可得如圖 3-1 的結果。

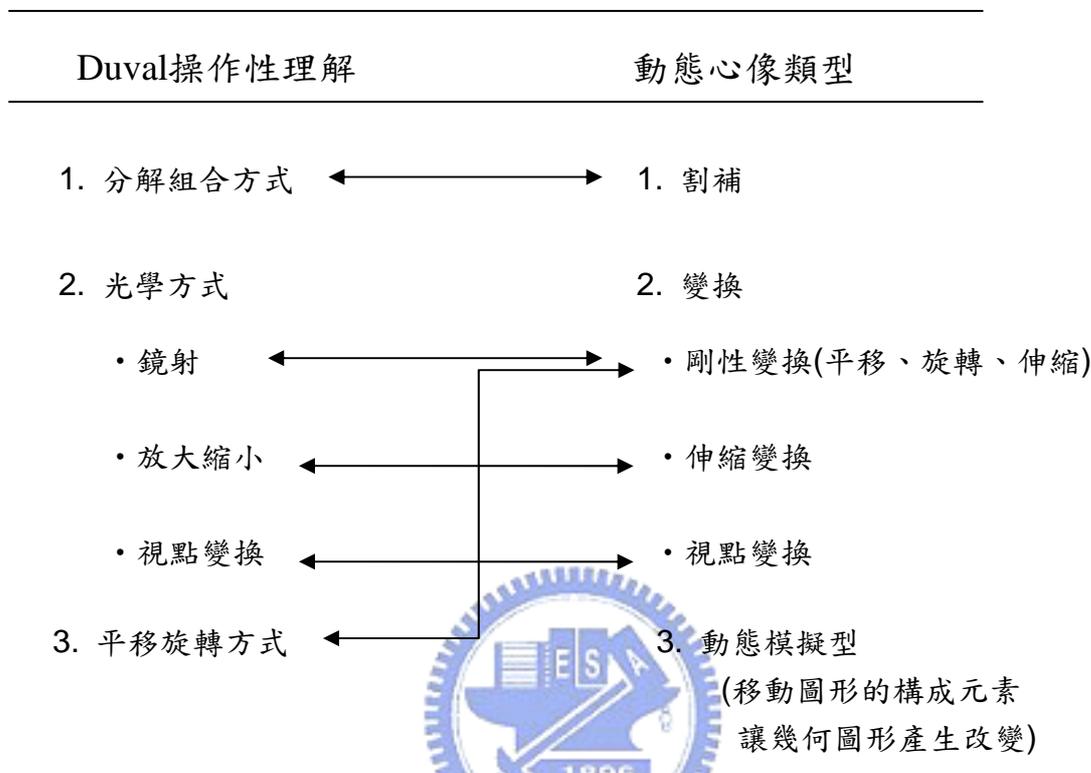


圖3-1：Duval操作性理解與動態心像類型之比較

有一些學者(Bishop, 1989；Lean & Clements, 1981)指出，在數學學習的過程中，學習者經常需要在腦海中建構及操作相關的心像，這種心像操作之心智活動能力會影響學習者的學習，另有一些學者 Brown & Wheatly(引自 Brown & Presmeg, 1993)認為動態心像乃是達成數學理解的一個特別重要的部分，且心像操作是達成數學理解的一個必要能力，更有許多學者(Harada, Gallou-Dumiel & Nohda, 2000)研究發現，缺乏動態的觀點將使得幾何圖形在幾何學習與解題活動中產生負面的影響。因此將圖形視為動態體，並將動態觀點融入課程設計之中，應被重視與強調。但如何發展動態心像操作的能力呢？Rosser、Lane 與 Mazzeo(1988, 引自 Clement & Battista, 1992)確認 Piaget 與 Inhelder 的研究，認為個體得充分發展對空間知覺訊息保留與回憶的能力之後，才能發展透過不同視角觀察旋轉、移動後之心像所呈現之不同訊息的能力。Kaput(1995)認為，幾何圖形之所以在幾何學習與解題活動中扮演關鍵的角色，主要是因為其為一個重要的外部實體表徵(external-physical representations)，個體透過視覺化的感知與原有的內部心智表徵(internal-physical representations)產生交互作用，進而產生新的概念結構或鍵結舊有的結構以整合成一較大的知識結構，在此心智運作歷程中，將會產生顯示與活動兩個系統(display system & action system)，其中顯示系統將外部實體表徵投射至大腦產生內部心

智表徵，而活動系統則有操作該表徵的能力。然而許多研究顯示，表徵的建立轉換與鏈結是一極為複雜的認知歷程，教師不應假設學生可以輕易地經由傳統的紙本、黑板所提供單一靜態的特例圖形便能建構一般性的表徵。

隨著科技的發展，電腦不僅可呈現文字、圖形、符號等表徵方式，還可以呈現傳統紙本、黑板無法展示的動態表徵，然而也不能假設在有了這些動態表徵之後，學生便能建立正確的相應表徵，若能讓電腦具有互動性，使用者則可以透過操弄螢幕上的外部表徵，藉由動態視覺化的過程產生一具有動態維度的內部視覺表徵，並產生相對應的動態心像(Morrow, 1997)，只有在個體的心像與螢幕上的物件存在一個對應時，兩者之間的鏈結才會提升至最佳的狀態，為達成此一目的，個體需完全理解螢幕上的物件變化及其背後所蘊含的數學知識，並以相應的方式於心智中操作心像。

根據以上的理念，研究者反省自己的教學經驗，深研國中幾何課程的內容，開始著手使用 Flash 設計 Geometry Player 動態幾何探索軟體。

### 第三節 設計 Geometry Player

老師在展示幾何內容或學生在操作探索幾何性質時，大都會經過三個步驟：建構幾何圖形、操作幾何圖形、測量幾何量觀察其變化情形。以下就針對這三步驟，考量 Geometry Player 該如何設計才能符合國中幾何課程內容及國中學生的需求。

#### (1) 建構幾何圖形：

在操弄探索一個幾何圖形之前必先準確的建構出該圖形，即使是利用摺紙、剪紙、切割、拼合的方式探索幾何性質也必是如此，一般常用的動態幾何軟體(如 GSP、Cabri)主要利用尺規作圖的方法來建構幾何圖形，它們使用的基本元件分別為點、直線和圓，再加上作中點、垂線、平行線、角平分線等作圖方法所建構而成，和我們平常利用直尺、圓規的作圖圖法並無不同，然而這樣的構圖方法對一個不熟悉尺規作圖的國中生而言是有困難的，連單單一個簡單的 ASA 作圖都得花相當長的時間還不一定學得會，如何期望他能利用尺規畫出一個正七邊形，然後觀察它的線對稱方式。

Geometry Player 參考國中幾何教材常用的幾何圖形，並考量學生的幾何構圖能力，在建構圖形的元件及方法上做了一些改進，當學生對一個幾何圖形產生知覺性理解之後，便能利用它的子圖形建構出完整的幾何圖形，而不用完全受制於尺規的限制，當然也不能捨棄尺規作圖的方法，因此 Geometry Player 也納入國中常用的尺規作圖方法，以期能幫助學生更無負擔的去建構出他所想要的圖形：

- ①. 八個圖形建構元件：點、直線、圓、角、三角形、一般四邊形、平行四邊形、正多邊形。

依據 Duval 幾何圖形認知理解的理論，個體對一個幾何圖形的認知最初是知覺性理解，然後再引發其它三種理解。研究者不想因為國中學生礙於尺規作圖能力的不足而影響其往後操作探索幾何的機會，因此當學生能對一個幾何圖形產生知覺性理解，他便能利用他的子圖形建構出該圖形，分析國中幾何常見的幾何圖形，我們大都可以把它拆解成點、直線、圓、角、三角形、平行四邊形(含：正方形、長方形、菱形、平行四邊形)、非平行四邊形、多

邊形、正多邊形，研究者便根據這些圖形設計八個圖形建構元件，而使用者可以透過滑鼠操控這些圖形，以建構出符合需要的圖形。為了讓建構圖形更加輕鬆容易方便及精確，使用者可以顯示隱藏線段或邊的長度及內角外角或一般角的度數以協助構圖的進行，如顯示三角形的頂角及該頂角的兩邊長，便可協助建構頂角 120 度兩腰長 4 公分的等腰三角形。

- ②. 七種常用作圖方法：過兩點作一直線、利用圓心及圓上一點作圓、利用圓上三點作圓、作線段中點、作垂線、作平行線、作角分線。

Geometry Player 只採用鍵盤輸入的方式而完全捨棄利用滑鼠點選方式來實行尺規作圖方法，研究者主要考量在於想藉此讓學生熟悉尺規作圖常用的術語，加強其論述表達的能力，在建構圖形的過程中，也希望能對論述性理解有所啟發。

- ③. 一個常用的探索工具：方格紙。

在探索對稱圖形、圖形的放大縮小、幾何量的變動及計算圖形的面積等課程中，方格紙是經常被使用的工具，在黑板上畫一個準確方格紙對大都數的老師而言，可說是非常困難而且耗費時間，因此研究者將它納入建構圖形的基本元件，讓使用者可以自由移動方格紙並調整它的單位大小。

## (2) 操作幾何圖形：

一般常用的動態幾何軟體主要透過滑鼠對「點」的操弄而改變幾何圖形，它的操作方式比較傾向於黃哲男(2002)提出的動態模擬操作，然而對於割補、變換等幾何動態心像操作方式，及 Duval 所提出的分解組合、光學、平移旋轉三種圖形操作方式並無法有效對應，例如無法透過滑鼠直接旋轉、放大縮小三角形，而這樣的限制無法真實反應個體實際操作圖形的狀況及需求，因此即使像「剪下任意三角形的三內角，觀察其是否能拼成一個平角」這樣簡單的操作探索活動都很難在這些動態幾何軟體上實作。

Geometry Player 設計的對象是針對國中學生，而其在心智運作圖形變動的能力尚不成熟，需要藉由外在更多的協助使其心智運作能力獲得提升，若以運用電腦而言，研究者認為最好的方式是讓螢幕上的物件與個體的心像存在一個對應，透過滑鼠對物件的操作讓鏈結提升至最佳的狀態，因此研究者參考 Duval 在操作性理解中提及的三個圖形操作方式及黃哲男提出的動態心像操作方式，利用他們所提的概念設計 Geometry Player 幾何圖形的操作方式。

在前一小節中提及的建構幾何圖形元件，它們的設計不只為單純的建構幾何圖形，更大的原因是因為操作探索的目的而開發這些元件，Geometry Player 圖形操弄方法有下列兩種特性：

- ①. 在不改變圖形的大小形狀下，我們可以將操弄分解成三個動作：平移、旋轉、鏡射，並且為了解決放大縮小相似的問題，便再引入伸縮的功能，因此 Geometry Player 中的圖形元件都有這四項功能，為了讓螢幕的圖形變化與個體心像產生對應，研究者強調經由滑鼠對圖形的直接操弄來提升它們之間的連結。

- ②. 針對每個圖形元件不同性質發展出它獨特的操弄方法：以三角形為例，可以操控一頂點在平行於對邊的直線上移動使其面積保持不變，或使其在三角形的外接圓上移動使該點的頂角保持不變，或讓它在橢圓上移動使三角形的周長保持不變，也可操控三角形一頂角的兩邊，使其如同打開圓規一般，只有頂角改變但它的兩邊長不變，也就是樞紐方式。

(3) 測量幾何量觀察其變化情形：

考量學生對於複雜數字的恐懼，因此將長度的測量值精確到小數點第一位，角度的測量值也精確至小數點第一位，但後果是會使得測量不過精準，這樣的取捨是利是弊還有待研究。

van Hiele 幾何學習理論告訴我們在國中小階段幾何操作探索的重要性，但根據研究者的教學經驗發現，由於教學工具的關係，使得我們很難落實建構、操作、實驗、觀察、歸納及推理的學習活動，因此想藉由資訊科技的協助來解決當前幾何教學的困境，Duval 提出的幾何圖形認知理解方式及 Paivio 等學者們提出的動態心像理論正好可提供我們幾何軟體設計的方向，再參考坊間常用的動態幾何軟體，彌補其在應用在國中小幾何教學上的不足，因此研究者使用自己最熟悉的軟體 Flash 開發一套動態幾何探索軟體 Geometry Player，希望其能對國中小幾何教學有所助益，往後也能針對它的缺失做立即的改進。

