

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

估測正交頻率多重傳輸系統  
時間偏移的最佳脈衝整型濾波器



Optimal Pulse Shaping Filter for Timing  
Offset Estimation in OFDM System

研究生: 呂佩樺

指導教授: 鄭木火博士

中華民國九十四年七月

# 估測正交頻率多重傳輸系統時間偏移的最佳脈衝整型濾波器

研究生: 呂佩樺

指導教授: 鄭木火博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要

在正交頻率多重傳輸 (Orthogonal frequency-division multiplexing) 系統中, 時間偏移 (timing offset) 及頻率偏移 (frequency offset) 的估測是很重要的課題。在文獻中有很多方法來估測這兩個參數, 有些方法是利用訓練序列 (training sequences) 或領航符號 (pilot symbols), 有些方法則是利用週期靜態性 (cyclostationary) 來作估測。在利用訓練序列或領航符號的方法裡是以接收到資料的相關性 (correlation) 或最大概似函數 (likelihood function) 來估測時間及頻率偏移。本論文所討論的方法是利用最大概似函數來估測時間及頻率偏移。既有文獻的方法並沒有考慮到因取樣時間誤差所造成的非整數時間偏移。因此本論文的主要貢獻是將非整數時間偏移加入考量。我們發現使用不同的脈衝整型濾波器 (pulse shaping filter) 其時間及頻率偏移的估測誤差也不同。我們並推導出此二估測參數之 CR 邊界 (Cramér-Rao bounds), 而且設計一脈衝整型濾波器以使得估測時間偏移誤差之 CR 邊界為最小, 之後再以模擬結果驗證其優越性。

**關鍵詞:** 正交頻率多重傳輸、最大概似法、脈衝整型濾波器。

# Optimal Pulse Shaping Filter for Timing Offset Estimation in OFDM System

Student: Pey-Huan Lu      Advisor: Dr. Mu-Huo Cheng

Institute of Electrical and Control Engineering  
National Chiao-Tung University

## Abstract

It is important to estimate the frequency offset and timing offset in an orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) system. Many approaches have been developed in literature. Some approaches use training sequences or pilot symbols, others use the property of cyclostationarity for estimation. Those approaches via training sequences or pilot symbols employ the correlation or the maximum likelihood function for parameter estimation. This thesis focuses on the maximum likelihood approach. In literature, the approaches via the maximum likelihood function, as far as we know, only estimate integer timing offset but neglect the inevitable noninteger timing offset. This thesis considers this noninteger timing error. It is observed that the pulse shaping filter will influence the estimation performance. Thus we derive the Cramér-Rao bound and use this bound as the measure to design optimal pulse shaping filter such that the Cramér-Rao bound for the estimation error of timing offset is minimized. Simulations are then performed to verify the usefulness of this design.

**Keywords:** OFDM, Maximum Likelihood, pulse shaping filter.

# 誌謝

此論文能順利完成，要特別真誠地感謝我的指導教授鄭木火教授，在這短短的兩年研究生涯中，無論是待人接物的誠懇真摯或治學態度的嚴謹細心，均使我在生活及學識上獲益良多。因此在本論文付梓之際，對於辛勤傳道授業的老師致上最誠摯的謝意。

在口試期間承蒙林清安教授和林源倍教授撥空指正並提供許多寶貴的意見。在此感謝你們的辛勞。同時感謝畢業學長再生、琪展、鈞哲、政衛、立峰、逸帆等的加油打氣，以及實驗室的所有成員：振杰、天貴、嘉富、國偉、俊維、啓峰、信良、浩偉在課業上的切磋討論及生活上的歡聲笑語，為平靜單調的研究生生活增添不少色彩。

最後要感謝我的家人，由於他們的付出和不斷地鼓勵，讓我能無後顧之憂的從事研究，順利完成學業，並且有能力面對下一波的困難與挑戰。



# 目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
圖目錄	vi
表目錄	viii
<b>1 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 簡介	1
1.2 研究內容	1
1.3 論文架構	2
<b>2 時間與頻率偏移的估測</b>	<b>3</b>
2.1 簡介	3
2.2 系統模型	3
2.3 最大概似函數	4
2.4 時間與頻率偏移的 CR 邊界	8
<b>3 最佳化的脈衝整型濾波器</b>	<b>10</b>
3.1 簡介	10
3.2 最佳化方法簡介	10
3.3 最佳化脈衝整型濾波器	12



3.4	最佳化脈衝整型濾波器與其他濾波器的比較 . . . . .	17
4	模擬結果 . . . . .	21
4.1	模擬參數設定 . . . . .	21
4.2	最佳化脈衝整型濾波器模擬結果 . . . . .	22
4.3	指數脈衝整型濾波器模擬結果 . . . . .	27
4.4	升餘弦脈衝整型濾波器模擬結果 . . . . .	29
4.5	討論 . . . . .	33
5	結論 . . . . .	34
	參考文獻 . . . . .	35



## 圖目錄

圖 2.1 正交頻率多重傳輸系統示意圖 . . . . .	3
圖 2.2 包含 $N_s$ 組重覆資料的觀測示意圖 . . . . .	4
圖 3.1 在不同SNR 之下的最佳化脈衝整型濾波器 . . . . .	14
圖 3.2 最佳化脈衝整型濾波器在不同SNR 及時間偏移的時間估測誤差 . . . . .	15
圖 3.3 SNR=0dB 之最佳化脈衝整型濾波器在不同 SNR 及時間偏移的時間估測誤差 . . . . .	15
圖 3.4 SNR=10dB 之最佳化脈衝整型濾波器在不同 SNR 及時間偏移的時間估測誤差 . . . . .	16
圖 3.5 SNR=20dB 之最佳化脈衝整型濾波器在不同 SNR 及時間偏移的時間估測誤差 . . . . .	16
圖 3.6 指數及升餘弦脈衝整型濾波器 . . . . .	17
圖 3.7 指數脈衝整型濾波器時間估測誤差 . . . . .	18
圖 3.8 升餘弦脈衝整型濾波器時間估測誤差 . . . . .	18
圖 3.9 各個脈衝整型濾波器時間與時間估測誤差關係圖 . . . . .	19
圖 4.1 IEEE 802.11a 先導符號架構 . . . . .	21
圖 4.2 最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.1$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	23
圖 4.3 最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.2$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	23
圖 4.4 最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.3$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	24
圖 4.5 最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.4$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	24
圖 4.6 SNR=10 dB 之最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.1$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	25
圖 4.7 SNR=10 dB 最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.2$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	25
圖 4.8 SNR=10 dB 之最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.3$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	26
圖 4.9 SNR=10 dB 最佳化脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.4$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	26
圖 4.10 指數脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.1$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	27

圖 4.11	指數脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.2$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	27
圖 4.12	指數脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.3$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	28
圖 4.13	指數脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.4$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	28
圖 4.14	升餘弦脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.1$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	29
圖 4.15	升餘弦脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.2$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	29
圖 4.16	升餘弦脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.3$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	30
圖 4.17	升餘弦脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.4$ 時的頻率及時間估測誤差 . . . . .	30
圖 4.18	脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.1$ 時的時間估測誤差 . . . . .	31
圖 4.19	脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.2$ 時的時間估測誤差 . . . . .	32
圖 4.20	脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.3$ 時的時間估測誤差 . . . . .	32
圖 4.21	脈衝整型濾波器在 $\theta = 0.4$ 時的時間估測誤差 . . . . .	33





## 表目錄

表 3.1 各SNR 時的 $c_1, c_2$ 值. . . . .	13
表 3.2 各脈衝整型濾波器在不同SNR 時的 J 值. . . . .	20



# 第 1 章

## 緒論

### 1.1 簡介

在正交頻率多重傳輸 (orthogonal frequency-division multiplexing) 系統之中, 接收端的同步 (synchronization) 是一個很重要的步驟。此同步包含了載波頻率偏移 (carrier frequency offset) 及符號時間偏移 (symbol timing offset) 的估測, 因為要準確的補償這兩個偏移解調出原本的資料, 必須要準確估測出這兩個效應。許多文獻[2]-[10] 已經提出估測的方法, 有些方法是利用訓練序列(training sequences) 或領航符號 (pilot symbols)[2]-[7], 有些方法利用週期靜態性(cyclostationary)[8][9][10] 來作估測。在利用訓練序列或領航符號的方法裡是利用接收到資料的相關性[2][3] 或最大概似函數[4][5][6][7]來估測時間及頻率偏移。而我們較有興趣的是以最大概似法(maximum likelihood) 求得時間及頻率偏移, 也就是在所觀察到資料的機率密度函數 (probability density function) 為最大時, 其時間及頻率偏移即為估測值。既有文獻中[4][5][6][7]利用最大概似函數估測時並沒有考慮到因取樣時間誤差所造成的非整數時間偏移。因此本論文將非整數時間偏移加入考量, 利用最大概似函數估測時間及頻率偏移。我們發現使用不同的脈衝整型濾波器(pulse shaping filter) 其時間及頻率偏移的估測誤差也會不同。我們也推導出此兩參數的 CR 邊界 (Cramér-Rao bound), 並以 CR 邊界為準則設計使估測時間偏移誤差之 CR 邊界為最小的脈衝整型濾波器。之後再以 IEEE 802.11a[1] 中的短先導符號為例, 將所設計出的脈衝整型濾波器進行模擬, 驗證其優越性。

### 1.2 研究內容

為求時間偏移估測的精準, 本論文將非整數時間偏移加入考量, 利用最大近似函數估測正交頻率多重傳輸系統中頻率及時間偏移。估測結果顯示, 使用不同的脈衝整型濾波器會影響到頻率及時間偏移

的估測結果。因此我們以CR 邊界為準則，設計出一脈衝整型濾波器，此脈衝整型濾波器將使估測時間偏移誤差為最小。

### 1.3 論文架構

本論文架構如下：第二章介紹系統模型並且在加入脈衝整型濾波器後，以最大概似法估測出時間及頻率偏移，並且推導其 CR 邊界。第三章介紹以最佳化方法設計脈衝整型濾波器的過程，且與其他常用的脈衝整型濾波器作比較。第四章，將此最佳化以及其他常用的脈衝整型濾波器，使用到最大概似法時間及頻率偏移估測進行模擬。第五章為本論文的結論。



## 第 2 章

### 時間與頻率偏移的估測

#### 2.1 簡介

在這一章，我們將推導最大概似函數，以估測正交頻率多重傳輸系統中的時間與頻率偏移。由於[4]的模型中並沒有考慮到非整數部份的時間偏移，因此我們將此模型加入脈衝整型濾波器，以得到非整數時間偏移的估測值，並且推導出時間與頻率的 CR 邊界值。

#### 2.2 系統模型

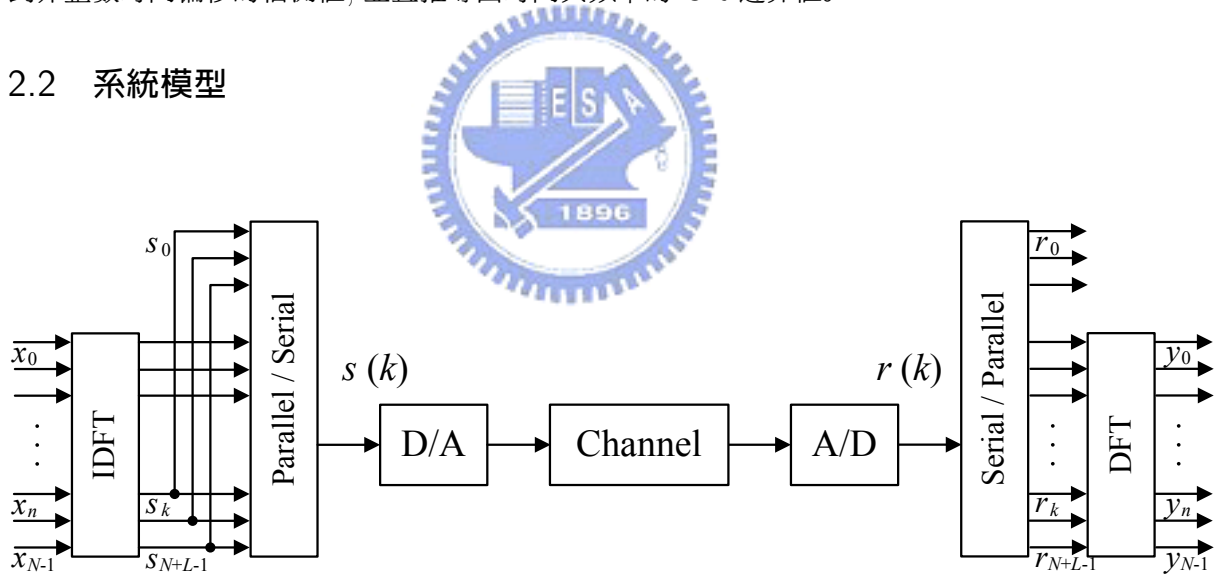


圖 2.1: 正交頻率多重傳輸系統示意圖

圖2.1 是正交頻率多重傳輸系統的示意圖。假設接收到的訊號為 (2.1) 式，其中  $s(k)$  是傳送出的訊號，為白高斯隨機分佈， $N$  為一個正交頻率多重傳輸符號的次載波 (subcarriers) 數目， $\epsilon$  表示傳送端與接收端振盪器的頻率誤差，以載波間距為單位。為了得到非整數部份的時間偏移誤差，我們引入一個脈衝整型濾波器  $h(t)$ ，並且假設頻寬為足夠寬，因此在  $|t| \geq T_x/2$  時， $h(t) = 0$ ， $\theta$  表示時間的偏移，為一實數，以傳送訊號的週期  $T_x$  為一單位， $\theta_I = \text{int}(\theta + 0.5)$ ， $\text{int}(x)$  表示

取  $x$  的整數值,  $n(k)$  則是複數附加白雜訊 (additive white Gaussian noise)。

$$r(k) = s(k - \theta_I)h(\theta - \theta_I)e^{j2\pi k\epsilon/N} + n(k) \quad (2.1)$$

圖 (2.2) 為我們觀察了  $L$  個資料的示意圖, 其中橫座標中 1 到  $L$  為(2.1) 式中的  $k$  值, 代表我們

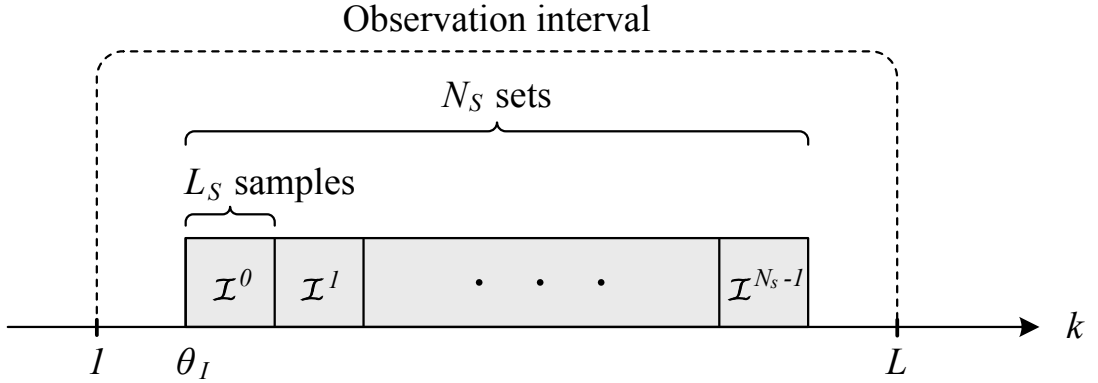


圖 2.2: 包含  $N_s$  組重覆資料的觀測示意圖

所觀測的範圍, 範圍大於整個短先導符號, 而這  $L$  個訊號裡包含的  $N_s$  組重覆資料, 以  $\mathcal{I}^p$  來表示,  $p = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , 而每一組重覆資料裡包含了  $L_s$  個抽樣 (sample), 而因為接收端並不知道時間偏移為多少, 因此定義取樣集合:

$$\mathcal{I}^p \equiv \{\theta_I + pL_s, \theta_I + pL_s + 1, \dots, \theta_I + pL_s + (L_s - 1)\}, \quad p = 0, 1, \dots, N_s - 1 \quad (2.2)$$

### 2.3 最大概似函數

如同先前所描述, 每個  $\mathcal{I}^p$ ,  $p = 0, 1, \dots, N_s - 1$  的資料是相同的, 因此我們若將所觀測到的  $L$  個訊號定義為一個  $L \times 1$  的向量  $\mathbf{r} = [r(1) \dots r(L)]^T$ , 上標  $T$  表示將矩陣轉置 (transpose), 就可以注意到落在  $\mathcal{I}^p$ ,  $p = 0, 1, \dots, N_s - 1$  上的  $r(k)$  之間是有相關性的 (correlated), 也就是說, 對於  $m, n \in [0, N_s - 1]$ ,  $\forall k \in \mathcal{I}^0$ :

$$E[r(k + nL_s)r^*(k + mL_s)] = \begin{cases} \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2, & m = n; \\ \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{-j(m-n)\epsilon'}, & m \neq n; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $\epsilon' = 2\pi L_s \epsilon / N$ ,  $E[\cdot]$  表示取期望值,  $\sigma_s^2 = E[s^2(k)]$ , 為訊號能量,  $\sigma_n^2 = E[n^2(k)]$ , 為雜訊能量。而對於  $r(k)$ ,  $k \notin \bigcup_{p=0}^{N_s-1} \mathcal{I}^p$  是相互無相關性的 (uncorrelated)。

接下來我們推導  $\theta$  和  $\epsilon$  的對數-可能性 (log-likelihood) 函數,  $\Lambda(\theta, \epsilon)$ 。這個對數-可能性函數是對  $L$  個所觀測到的資料  $\mathbf{r}$  在給定時間偏移  $\theta$  及頻率偏移  $\epsilon$  時的機率密度函數 (probability density function),  $f(\mathbf{r}|\theta, \epsilon)$ , 取對數後的結果。利用 (2.3) 式中所觀察到的  $\mathbf{r}$  相互間的相關性性質, 對數-可能性函數可表示為:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\theta, \epsilon) &= \ln f(\mathbf{r}|\theta, \epsilon) \\
 &= \ln\left(\prod_{k \in I^0} f(r(k), r(k+L_s), \dots, r(k+(N_s-1)L_s)) \prod_{k \notin \bigcup_{p=0}^{N_s-1} I^p} f(r(k))\right) \\
 &= \ln\left(\prod_{k \in I^0} \frac{f(r(k), r(k+L_s), \dots, r(k+(N_s-1)L_s))}{f(r(k))f(r(k+L_s)) \cdots f(r(k+(N_s-1)L_s))} \prod_{k \in I} f(r(k))\right) \\
 &= \ln\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\mathcal{C}\right) \\
 &= \ln \mathcal{A} + \ln \mathcal{C} - \ln \mathcal{B}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

我們將對數-可能性函數分為三個部份來推導, 其中  $\mathcal{A} = \prod_{k \in I^0} f(r(k), r(k+L_s), \dots, r(k+(N_s-1)L_s))$ ,  $\mathcal{B} = \prod_{k \in I^0} f(r(k))f(r(k+L_s)) \cdots f(r(k+(N_s-1)L_s))$ ,  $\mathcal{C} = \prod_{k \in I} f(r(k))$ 。對單一個  $r(k)$  來說, 它的機率密度函數  $f(r(k))$  是一個一維的複數高斯分佈 (Gaussian distribution) 函數, 可表示為:

$$f(r(k)) = \frac{1}{\pi(\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \exp\left(-\frac{|r(k)|^2}{\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2}\right) \tag{2.5}$$

而  $\mathcal{A}$  部份為  $N_s$  維的複數高斯分佈, 以 (2.6) 示表示,

$$\begin{aligned}
 \ln \mathcal{A} &= \ln \prod_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} f(r(k), r(k+L_s), \dots, r(k+(N_s-1)L_s)) \\
 &= \ln \prod_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} f(\mathbf{z}(k)) \\
 &= \ln \prod_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \frac{1}{\pi^{N_s} \det(\mathbf{R})} \exp(-\mathbf{z}^H(k)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}(k)) \\
 &= -N_s L_s \ln \pi - L_s \ln \det(\mathbf{R}) - \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \mathbf{z}^H(k)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}(k)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} r(k) \\ r(k + L_s) \\ \vdots \\ r(k + (N_s - 1)L_s) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

而上標  $H$  表示將矩陣轉置共軛 (transpose conjugate (hermitian)),  $\mathbf{R}$  是  $\mathbf{z}(k)$  的相關性矩陣, 利用 (2.3) 的關係式, 可以得到相關性矩陣 (2.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^H(k)] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2 & \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{-j\epsilon'} & \dots & \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{-j(N_s-1)\epsilon'} \\ \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{j\epsilon'} & \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2 & \dots & \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{-j(N_s-2)\epsilon'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{j(N_s-1)\epsilon'} & \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) e^{j(N_s-2)\epsilon'} & \dots & \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中的  $\mathbf{q} = [1, e^{j\epsilon'}, \dots, e^{j(N_s-1)\epsilon'}]^T$ , 我們可以直接求得 (2.9), 以及利用反矩陣定理 (matrix inversion lemma)[11]求得  $\mathbf{R}^{-1}$ , 表示如(2.10), 其中的  $\mathbf{I}$  是單位矩陣, 而這個單位矩陣的維度與  $\mathbf{R}$  相等。

$$\det(\mathbf{R}) = (\sigma_n^2)^{N_s-1} (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \mathbf{q}\mathbf{q}^H \quad (2.10)$$

將 (2.9) 與 (2.10) 代入 (2.6) 式, 可得 (2.11) 式, 其中的  $\mathbf{z}^H(k)\mathbf{z}(k) = \sum_{m=0}^{N_s-1} |r(k + mL_s)|^2$ , 而  $\mathbf{z}^H(k)\mathbf{q}\mathbf{q}^H\mathbf{z}(k)$  則如同 (2.12) 所表示, 其中的  $\gamma_m(k)$  為  $\sum_{p=m}^{N_s-1} r(k + (p-m)L_s)r^*(k + pL_s)$ , 上標  $*$  是取共軛複數的意思。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{A} &= -N_s L_s \ln \pi - L_s \ln [(\sigma_n^2)^{N_s-1} (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)] \\ &\quad - \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \frac{\mathbf{z}^H(k)\mathbf{z}(k)}{\sigma_n^2} + \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \frac{\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \mathbf{z}^H(k)\mathbf{q}\mathbf{q}^H\mathbf{z}(k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^H(k)\mathbf{q}\mathbf{q}^H\mathbf{z}(k) &= \sum_{m=0}^{N_s-1} |r(k + mL_s)|^2 + 2 \sum_{m=1}^{N_s-1} \sum_{p=m}^{N_s-1} \Re\{r(k + (p-m)L_s)r^*(k + pL_s)e^{jm\epsilon'}\} \\ &= \mathbf{z}^H(k)\mathbf{z}(k) + 2 \sum_{m=1}^{N_s-1} \Re\{\gamma_m(k)e^{jm\epsilon'}\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

最後將 (2.12) 代入 (2.11) 即可得到  $\mathcal{A}$  部份的結果

$$\begin{aligned}
 \ln \mathcal{A} &= -N_s L_s \ln \pi - L_s \ln[(\sigma_n^2)^{N_s-1} (N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)] \\
 &+ \frac{2\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \sum_{m=1}^{N_s-1} \Re\{\gamma_m(k) e^{jm\epsilon'}\} \\
 &- \frac{\sigma_n^2 + (N_s - 1)\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \mathbf{z}^H(k) \mathbf{z}(k)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$\mathcal{B}$  部份為  $N_s \times L_s$  個一維複數高斯分佈的機率密度函數相乘, 結果如下

$$\begin{aligned}
 \ln \mathcal{B} &= \ln \prod_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \prod_{m=0}^{N_s-1} f(k + mL_s) \\
 &= \ln \prod_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \prod_{m=0}^{N_s-1} \frac{1}{\pi(\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \exp\left(-\frac{|r(k + mL_s)|^2}{\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2}\right) \\
 &= - \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \sum_{m=0}^{N_s-1} (\ln \pi + \ln(\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)) \\
 &\quad - \frac{1}{\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \sum_{m=0}^{N_s-1} |r(k + mL_s)|^2 \\
 &= -N_s L_s \ln \pi - N_s L_s \ln(\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2) \\
 &\quad - \frac{1}{\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I+L_s-1} \sum_{m=0}^{N_s-1} \mathbf{z}^H(k) \mathbf{z}(k)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

而  $\mathcal{C}$  部份則是  $L$  個一維複數高斯分佈的機密度函數相乘, 表示為:

$$\begin{aligned}
 \ln \mathcal{C} &= \ln \prod_{k=1}^L f(r(k)) \\
 &= \ln\left(\prod_{k=1}^L \frac{1}{\pi(\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \exp\left(-\frac{|r(k)|^2}{\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2}\right)\right) \\
 &= -L \ln \pi - L \ln(\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2) - \frac{1}{\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2} \sum_{k=1}^L |r(k)|^2
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

最後將 (2.13), (2.14) 及 (2.15) 代入 (2.4) 式, 其中與  $\theta$  和  $\epsilon$  無關的常數部份, 並不會影響最大化  $\Lambda(\theta, \epsilon)$  的結果, 因此我們可以將它忽略, 經過整理及運算之後即可得到所求  $\theta$  和  $\epsilon$  的對數-可能性函數,



$$\begin{aligned}
 \Lambda(\theta, \epsilon) &= \ln f(\mathbf{r}|\theta, \epsilon) \\
 &= \ln \mathcal{A} + \ln \mathcal{C} - \ln \mathcal{B} \\
 &= \ln \frac{(\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)^{N_s L_s - L}}{(N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)^{L_s}} - \frac{1}{\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2} \sum_{k=1}^L |r(k)|^2 \\
 &\quad + \frac{2\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I + L_s - 1} \sum_{m=1}^{N_s - 1} \Re\{\gamma_m(k) e^{jm\epsilon'}\} \\
 &\quad - \frac{(N_s - 1)\sigma_s^4 h^4(\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2) (\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I + L_s - 1} \mathbf{z}^H(k) \mathbf{z}(k) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

得到  $\theta$  和  $\epsilon$  的對數-可能性函數後，我們以最大概似法估測時間與頻率的偏移  $\hat{\theta}_{ML}$  與  $\hat{\epsilon}_{ML}$ ，就是在此對數-可能性函數為最大值時的  $\theta$  及  $\epsilon$ ，表示如下，

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{ML}, \hat{\epsilon}_{ML} &= \arg \max_{\theta, \epsilon} \ln \frac{(\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)^{N_s L_s - L}}{(N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)^{L_s}} - \frac{1}{\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2} \sum_{k=1}^L |r(k)|^2 \\
 &\quad + \frac{2\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I + L_s - 1} \sum_{m=1}^{N_s - 1} \Re\{\gamma_m(k) e^{jm\epsilon'}\} \\
 &\quad - \frac{(N_s - 1)\sigma_s^4 h^4(\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2) (\sigma_s^2 h^2(\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \sum_{k=\theta_I}^{\theta_I + L_s - 1} \mathbf{z}^H(k) \mathbf{z}(k) \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

## 2.4 時間與頻率偏移的 CR 邊界

由於時間與頻率誤差的估測結果若是越接進 CR 邊界，則此估測越有效益，因此我們在本節推導時間及頻率偏移的 CR 邊界，並且在模擬部份將我們的估測結果與 CR 邊界作比較。而時間及頻率偏移的 CR 邊界求得方法如 (2.19)(2.18)：

$$\text{Var}(\hat{\epsilon}) \geq \left\{ -E \left[ \frac{\ln \partial^2 f(r|\theta, \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.18)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left\{ -E \left[ \frac{\ln \partial^2 f(r|\theta, \epsilon)}{\partial \theta^2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.19)$$

其中頻率偏移的 CR 邊界推導如 (2.20) 式所表示:

$$\begin{aligned}
 -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(r|\theta, \epsilon)}{\partial \epsilon^2}\right] &= \frac{2\sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I)}{\sigma_n^2 (N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I) + \sigma_n^2)} \left(\frac{2\pi L_s}{N}\right)^2 \\
 &\cdot \sum_{k=\theta}^{\theta+L_s-1} \sum_{m=1}^{N_s-1} \sum_{p=m}^{N_s-1} m^2 \Re\{E[r(k + (p-m)L_s)r^*(k + pL_s)]e^{jme'}\} \\
 &= \frac{8\pi^2 L_s^3 \sigma_s^4 h^4 (\theta - \theta_I)}{N^2 \sigma_n^2 (\sigma_n^2 + N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I))} \sum_{m=1}^{N_s-1} m^2 (N_s - m) \\
 &= \frac{2\pi^2 L_s^3 N_s^2 (N_s^2 - 1) \sigma_s^4 h^4 (\theta - \theta_I)}{3N^2 \sigma_n^2 (\sigma_n^2 + N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I))} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

因此頻率偏移的 CR 邊界為

$$\text{Var}(\hat{\epsilon}) = E[(\hat{\epsilon} - \epsilon)^2] \geq \frac{3N^2 \sigma_n^2 (\sigma_n^2 + N_s \sigma_s^2 h^2 (\theta - \theta_I))}{2\pi^2 L_s^3 N_s^2 (N_s^2 - 1) \sigma_s^4 h^4 (\theta - \theta_I)} \quad (2.21)$$

而時間偏移誤差的部份, 因為其計算過程非常複雜, 我們利用 MATLAB 裡符號運算的方法, 來求得二次微分的結果, 因此時間偏移誤差的 CR 邊界為 (2.22) 式, 其中  $\eta = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} h^2 (\theta - \theta_I)$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2 (1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[\frac{dh(\theta - \theta_I)}{d\theta}\right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} \quad (2.22)$$

## 第 3 章

### 最佳化的脈衝整型濾波器

#### 3.1 簡介

在上一節裡，我們求得了時間與頻率偏移的 CR 邊界，而由 (2.22) 式可觀察出，這個時間偏移的標準差會因脈衝整型濾波器的大小以及斜率的不同而改變，這個時間偏移的標準差是  $h$  及  $\frac{dh}{d\theta}$  的函數， $h$  又是  $\theta$  的函數，因此若我們希望能夠求出在時間誤差為 0 到 0.5 之間標準差為最小的脈衝整型濾波器，如同 (3.1) 所示，我們希望求得能夠使  $J$  為最小的脈衝整型濾波器  $h(\theta)$ ，其中

$$\eta = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} h^2(\theta)$$

$$J = \int_0^{0.5} \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2 (1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} d\theta$$

$$= \int_0^{0.5} f(\theta, h(\theta), h'(\theta)) d\theta \quad (3.1)$$

爲了求出此結果，我們利用變分法 (Calculus of Variations)[12] 中，針對可解出此類最佳化問題的部份來解出我們所要的最佳化脈衝整型濾波器。

#### 3.2 最佳化方法簡介

本節簡介變分法[12] 中可解出針對最佳化脈衝整型濾波器所需要的最重要部份。在此最佳化方法的目的是在求出最佳化問題的解，而這些問題是在給定一個包含方程式，曲線，或者表面的集合之中，找出具有某種最大或最小化特性的一個。其問題型式可以 (3.2) 來表示。

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \quad (3.2)$$

希望求出使  $J(y)$  爲最小值的  $y$ ，而其中  $y$  是在  $x \in [a, b]$  裡的平滑函數 (smooth functions)， $a$  與  $b$  則是邊界點， $y_a$  及  $y_b$  是規定的邊界值。

在[12] 當中, 我們得知所求的最佳化解  $y_0$  必須滿足尤拉微分方程式 (Euler differential equation), 也就是 (3.3) 式。其中  $f_y$  表示包含多個變數的函數  $f$  對  $y$  取偏微分, 也就是  $\frac{\partial}{\partial y} f$ 。

$$f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_{y'}^0(x) = 0, \quad \text{for all } x \in (a, b) \quad (3.3)$$

而其中

$$\begin{aligned} f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) &= f_y^0(x) \\ f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) &= f_{y'}^0(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

此外, 我們也知道, 對於一個不含  $x$  的函數  $f$ , 也就是在  $f_x = 0$  的情況之下, 可以使用一個  $H$  函數, 如 (3.5) 式所示:

$$H(x) = y_0'(x) f_{y'}^0(x) - f(x, y_0(x), y_0'(x)) \quad (3.5)$$

接下來將  $H$  函數對  $x$  微分經過整理後, 可將尤拉微分方程式代入計算, 就可以得到  $H$  函數的微分為 0, 表示如下:

$$\begin{aligned} H'(x) &= y_0''(x) f_{y'}^0(x) + y_0'(x) \frac{d}{dx} f_{y'}^0 - f_y^0(x) y_0'(x) - f_{y'}^0(x) y_0''(x) \\ &= -y_0'(x) \left( f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_{y'}^0(x) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

因此,  $H(x)$  為一個常數, 如 (3.7) 所示

$$H(x) = y_0'(x) f_{y'}^0(x) - f(x, y_0(x), y_0'(x)) = c \quad (3.7)$$

而此時可以看出, (3.7) 式是一個  $y$  以及  $y'$  的方程式, 若是我們可以解出這個對  $y'$  的方程式, 就可以得到一個  $y' = g(y, c)$  的方程式, 問題就變得很單純了, 接下來只要以分離變數 (separation of variables) 法就可以將問題解出來了。

### 3.3 最佳化脈衝整型濾波器

現在針對我們的問題 (3.1), 重複如 (3.8), 我們將利用前一節的結果來解出此問題的最佳化解, 得到所期望的最佳化脈衝整型濾波器。

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{0.5} \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} d\theta \\
 &= \int_0^{0.5} f(\theta, h(\theta), h'(\theta)) d\theta \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

對照到前一節,  $x$  對應到本節的  $\theta$ , 而  $y$  對應到本節的  $h$ , 則  $h$  滿足尤拉微分方程式 (3.9), 且由於  $f$  只包含了  $h$  及  $\frac{dh}{d\theta}$  兩個變數, 不包含  $\theta$ , 也就是對  $\theta$  的偏微分  $f_\theta = 0$ , 在此情況下我們就可以使用到  $H$  函數為一常數的特性, 如同 (3.10) 所表示

$$f_h(\theta) - \frac{d}{d\theta} f_{h'}(\theta) = 0, \quad \text{for all } h \in (a, b) \tag{3.9}$$

$$H(\theta) = h'(\theta) f_{h'}(\theta) = f(\theta, h(\theta), h'(\theta)) = c \tag{3.10}$$

所以運用了  $h$  滿足尤拉微分方程式 (3.9), 以及  $H$  函數 (3.10) 的特性, 我們將  $f(\theta, h(\theta), h'(\theta))$  代入 (3.10) 式, 再經過計算, 可以得到

$$\begin{aligned}
 H(\theta) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial h'(\theta)} \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} \right\} \\
 &\quad \cdot h'(\theta) - \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} \\
 &= h'(\theta) \frac{(-2) \frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^3 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} \\
 &\quad - \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} \\
 &= -\frac{3}{4} \frac{(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} \\
 &= c \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

因爲 (3.11) 中的  $c$  爲一個常數, 所以可將  $c$  與  $-\frac{3}{4}$  合併成爲另一個常數, 我們將它令爲  $c_2$ , 則再經過整理, 得到下面的式子,

$$\frac{dh(\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{c_1} \frac{(1 + \eta N_s)(1 + \eta)}{\sqrt{\eta \text{SNR} [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]}} \quad (3.12)$$

我們可以看出, (3.12) 式是脈衝整型濾波器  $h$  對時間  $\theta$  的微分, 也就是脈衝整型濾波器斜率的方程式。因此我們只要將邊界條件代入解出常數部份, 就可以得到所求的最佳化脈衝整型濾波器。

於是將 (3.12) 式利用分離變數法來作運算, 也就是將包含  $h$  的部份與  $dh$  放在方程式的左邊, 將包含  $\theta$  與  $d\theta$  的部份放在右邊, 再對兩邊取積分, 如式子 (3.13) 所表示,

$$\int \frac{\sqrt{\eta \text{SNR} [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]}}{(1 + \eta N_s)(1 + \eta)} dh = -\int \frac{1}{c_1} d\theta + c_2 \quad (3.13)$$

(3.13) 中含有  $c_1$  與  $c_2$  兩個常數項, 就可以由邊界條件來求得, 此邊界條件就是在  $\theta = 0$  時,  $h = 1$ , 在  $\theta = 0.5$  時,  $h = 0$ , 而 (3.13) 式中,  $\theta$  部份的積分很容易得到, 但是  $h$  部份的積分則非常冗長, 因此我們藉由 MATLAB 的幫助求得  $h$  部份的積分, 再由邊界條件求得  $c_1$  與  $c_2$ , 代回 (3.12) 式, 以 MATLAB 即可求得最佳化的脈衝整型濾波器  $h$ 。表 3.1 爲以 MATLAB 計算出在 SNR 爲 0 dB, 5 dB,  $\dots$ , 20 dB 時的  $c_1$  及  $c_2$  值。而圖 (3.1) 爲最佳化的脈衝整型濾波器, 由上而下分別爲 SNR=0 至 20dB。

表 3.1: 各 SNR 時的  $c_1, c_2$  值

SNR	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB	20 dB
$c_1$	0.0824	0.0483	0.0318	0.0231	0.0180
$c_2$	23.2441	27.5251	32.9070	38.8300	44.9562

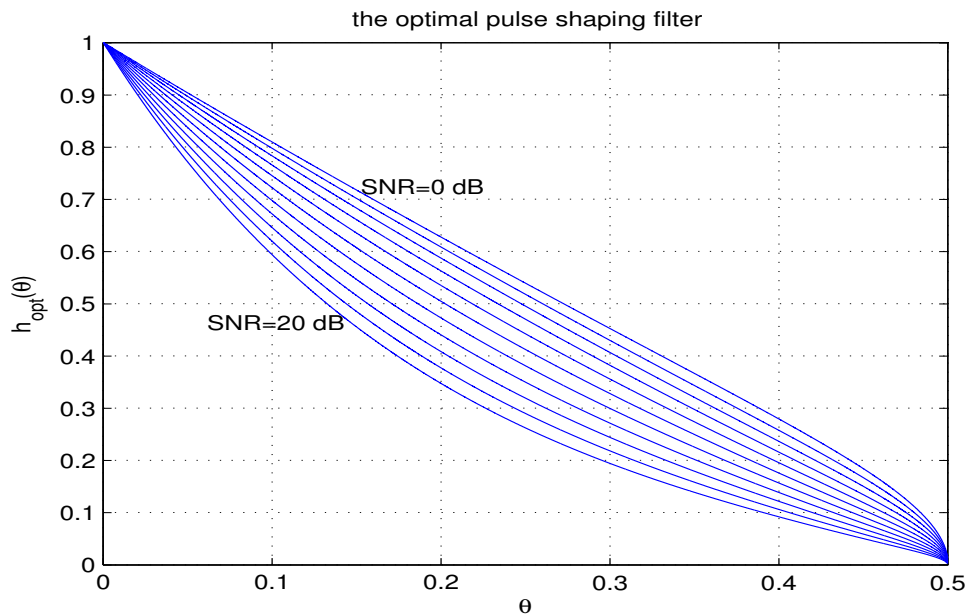


圖 3.1: 在不同SNR 之下的最佳化脈衝整型濾波器

現在我們求得了最佳化的脈衝整型濾波器，便能夠得到它在不同的時間偏移及 SNR 之下的最大概似時間偏移估測誤差的標準差，下圖 (3.2) 即為 SNR 最佳化脈衝整型濾波器對時間偏移估測誤差標準差，橫軸為時間  $\theta$ ，縱軸為時間估測誤差，而由上至下分別為 SNR = 0 dB, 5dB, ..., 20dB 時的情況，可以看到由於我們所求的在  $\theta = 0$  到  $\theta = 0.5$  時的最佳化脈衝整型濾波器，所以在此區間中的估測誤差隨著時間誤差的改變皆保持在相同的大小。

而由於在不同 SNR 之下會有不同的最佳化脈衝整型濾波器，因此可以針對我們系統的 SNR 不同，而選擇不同 SNR 的最佳化脈衝整型濾波器，(3.3),(3.4),(3.5) 分別為 SNR = 0 dB, 10dB, 20dB 時的最佳化整型濾波器工作在各 SNR 時的時間估測誤差表示圖，其中可看出，若是系統中的 SNR 與一開始選用的值相差在  $\pm 10$  dB 之內時，其誤差也都能夠接近最佳化的水平線。

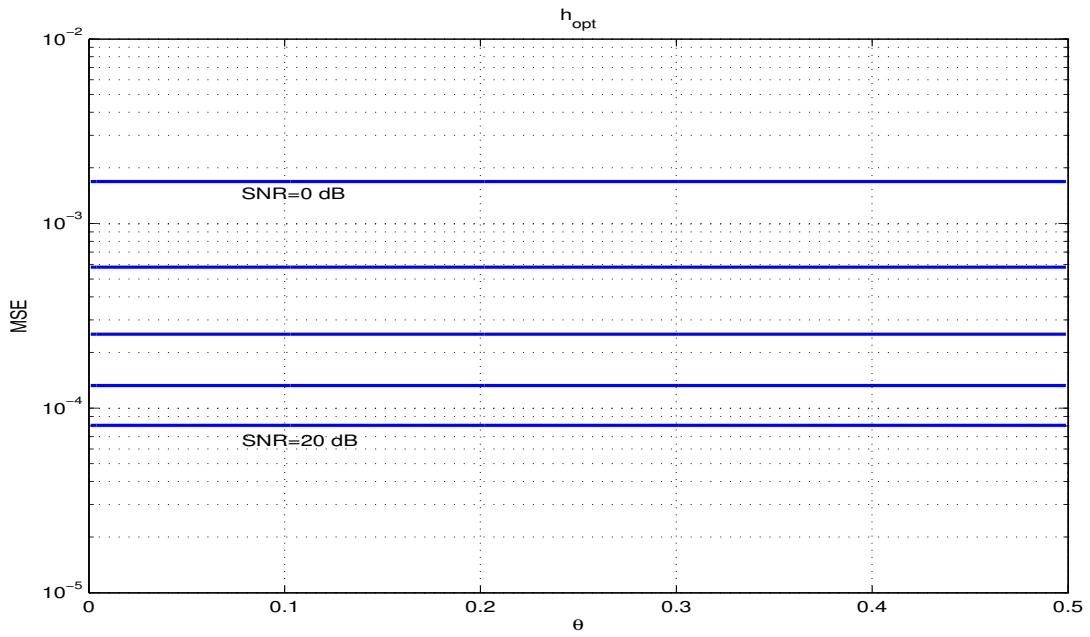


圖 3.2: 最佳化脈衝整形濾波器在不同SNR 及時間偏移的時間估測誤差

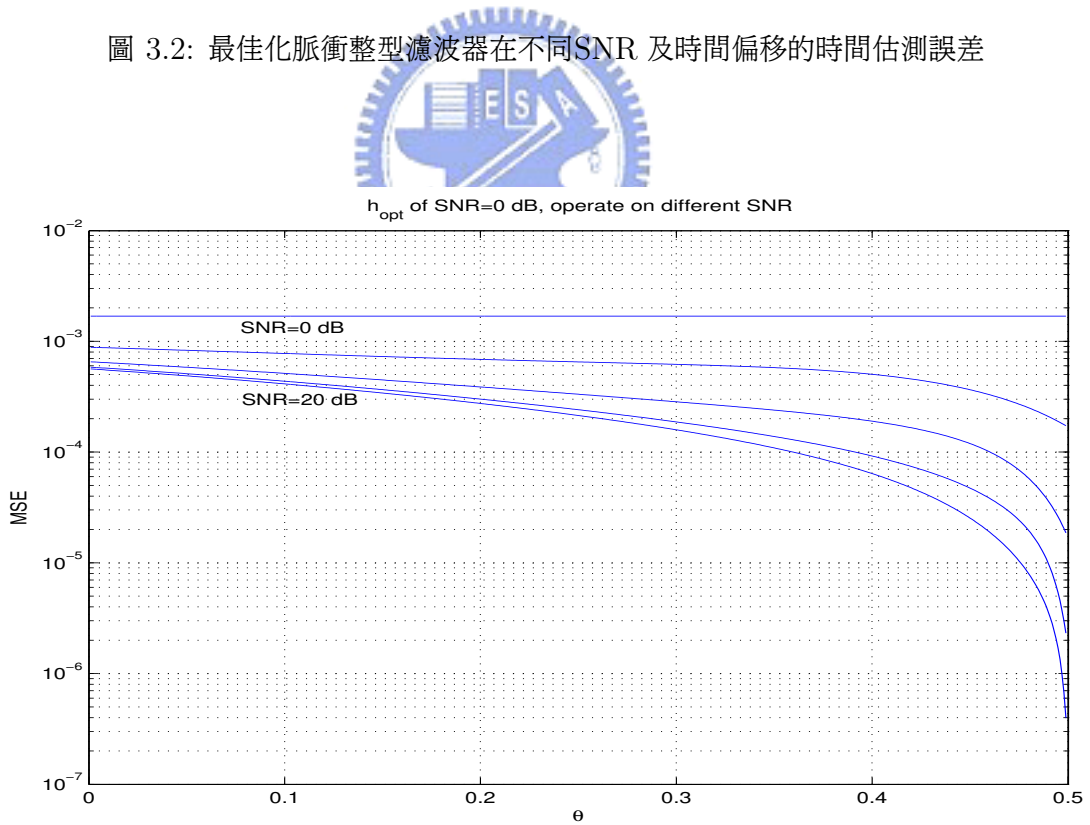


圖 3.3: SNR=0dB 之最佳化脈衝整形濾波器在不同 SNR 及時間偏移的時間估測誤差



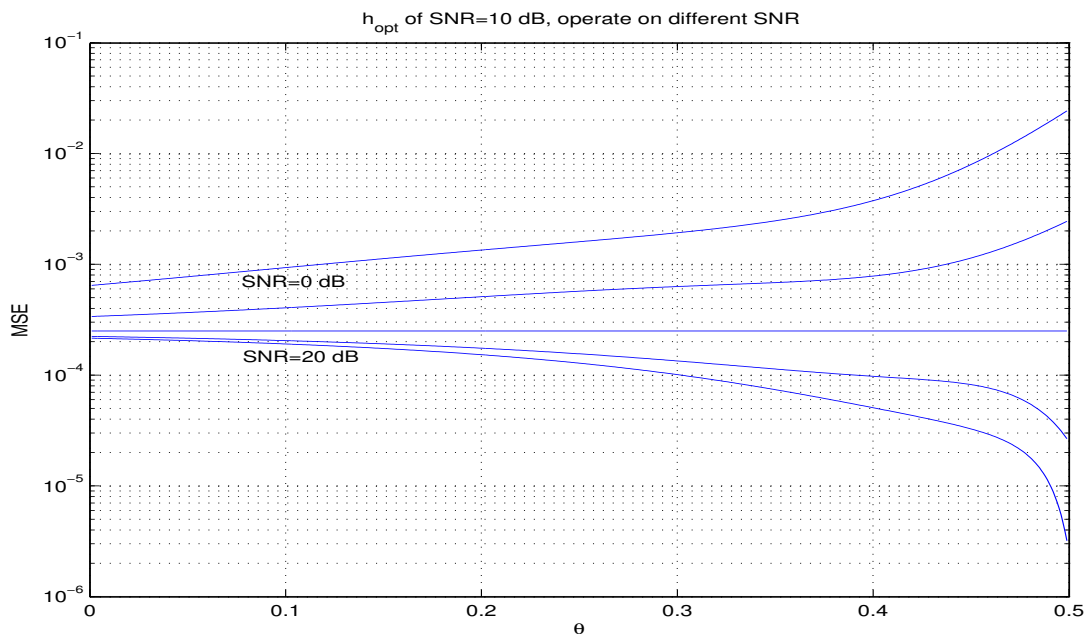


圖 3.4: SNR=10dB 之最佳化脈衝整形濾波器在不同 SNR 及時間偏移的時間估測誤差

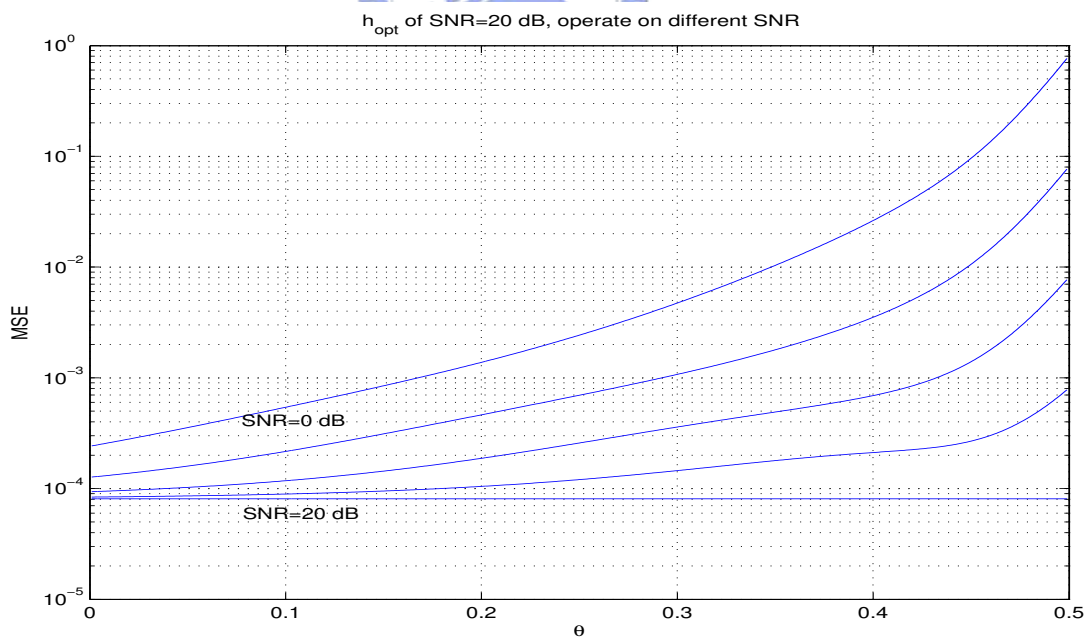


圖 3.5: SNR=20dB 之最佳化脈衝整形濾波器在不同 SNR 及時間偏移的時間估測誤差

### 3.4 最佳化脈衝整型濾波器與其他濾波器的比較

在上一節我們得到了最佳化脈衝整型濾波器  $h_{opt}$ ，而我們將這個最佳化脈衝整型濾波器與升餘弦 (raised cosine) 脈衝整型濾波器以及指數 (exponential) 脈衝整型濾波器，針對它們使用在 OFDM 系統時時間偏移誤差估測的標準差作比較。

由於我們的最佳化脈衝整型濾波器的邊界條件為  $h(0) = 1$ ，以及  $h(0.5) = 0$ ，因此我們選擇了較接近此邊界條件的  $\alpha = 0.5$ ， $T = T_x/2$  的升餘弦脈衝整型濾波器  $h_{rc}$ ，以及  $\mu = 0.1$  的指數脈衝整型濾波器  $h_{exp}$ ，其中

$$h_{exp}(\theta) = \exp\left(-\frac{|\theta|}{\mu}\right) \quad (3.14)$$

$$h_{rc}(\theta) = \frac{\text{sinc}\left(\frac{\theta}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi\alpha\theta}{T}\right)}{1 - 4\left(\frac{\alpha\theta}{T}\right)^2} \quad (3.15)$$

而圖 (3.6) 是指數脈衝整型濾波器  $h_{exp}$  及升餘弦脈衝整型濾波器  $h_{rc}$  的示意圖，其中橫座標代表時間  $\theta$ ，以傳送訊號的週期  $T_x$  為單位。

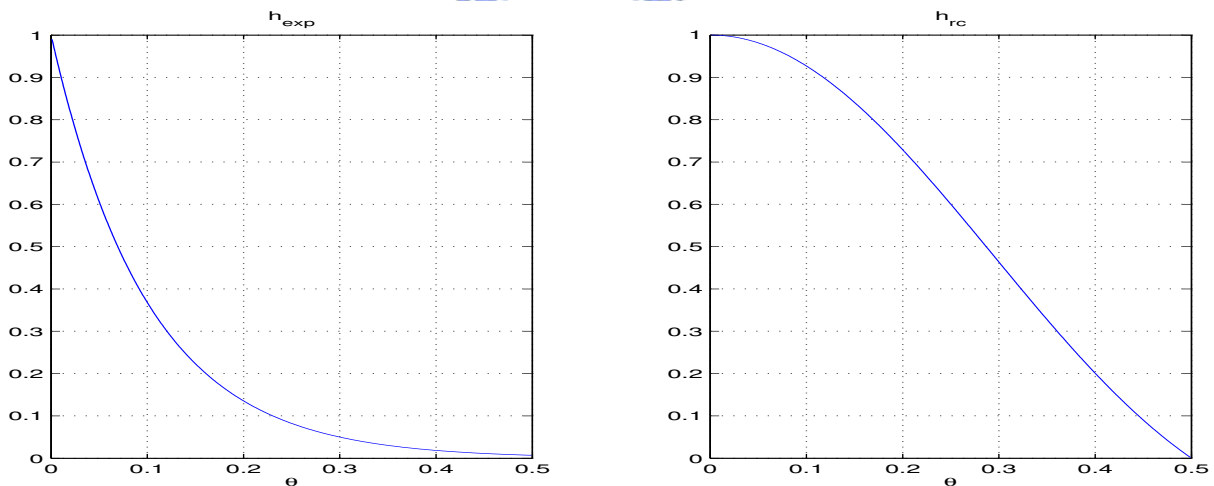


圖 3.6: 指數及升餘弦脈衝整型濾波器

當我們分別將  $h_{exp}$  以及  $h_{rc}$  使用在第 2 章所描述的系統時, 以最大概似法 (2.17) 式對時間偏移作估測, 就分別會有不同的誤差, 我們將其誤差的 CR 邊界 (2.22) 以圖形表示, 橫軸為時間  $\theta$ , 縱軸為 CR 邊界, 由上至下分別為  $SNR = 0\text{ dB}, 5\text{ dB}, \dots, 20\text{ dB}$  時的情況,

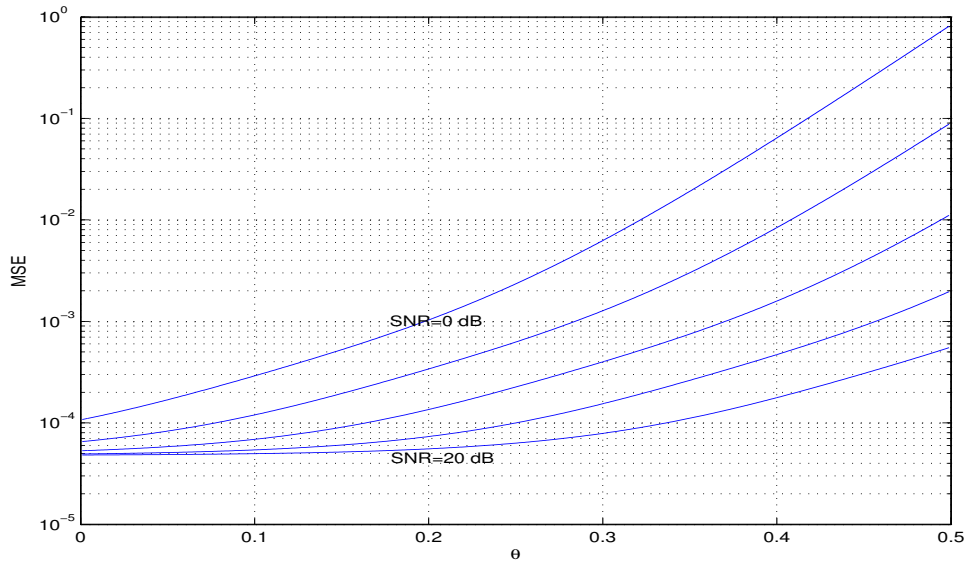


圖 3.7: 指數脈衝整形濾波器時間估測誤差

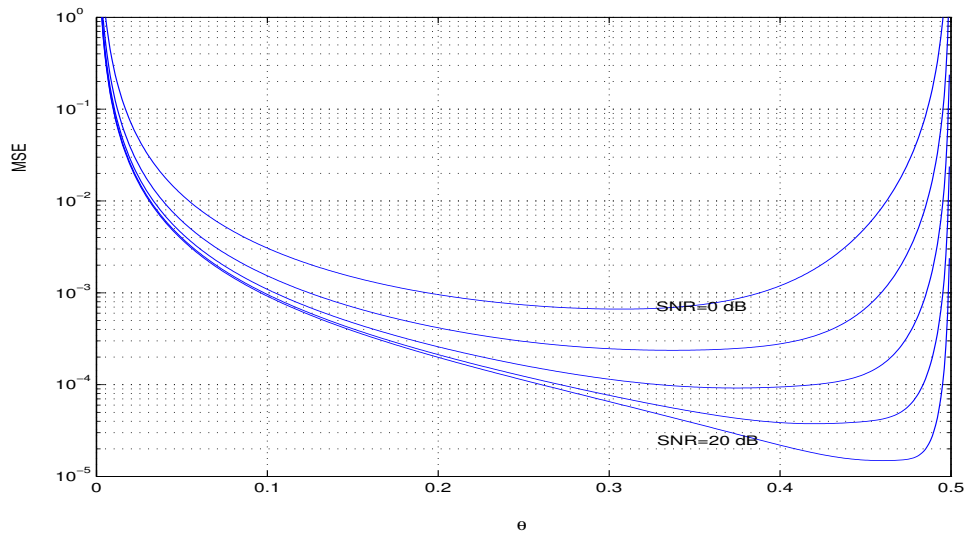


圖 3.8: 升餘弦脈衝整形濾波器時間估測誤差

下圖 (3.9) 是  $h_{opt}$   $h_{exp}$  以及  $h_{rc}$  時間偏移估測誤差標準差在 10 dB 時, 時間對時間估測誤差的關係圖:

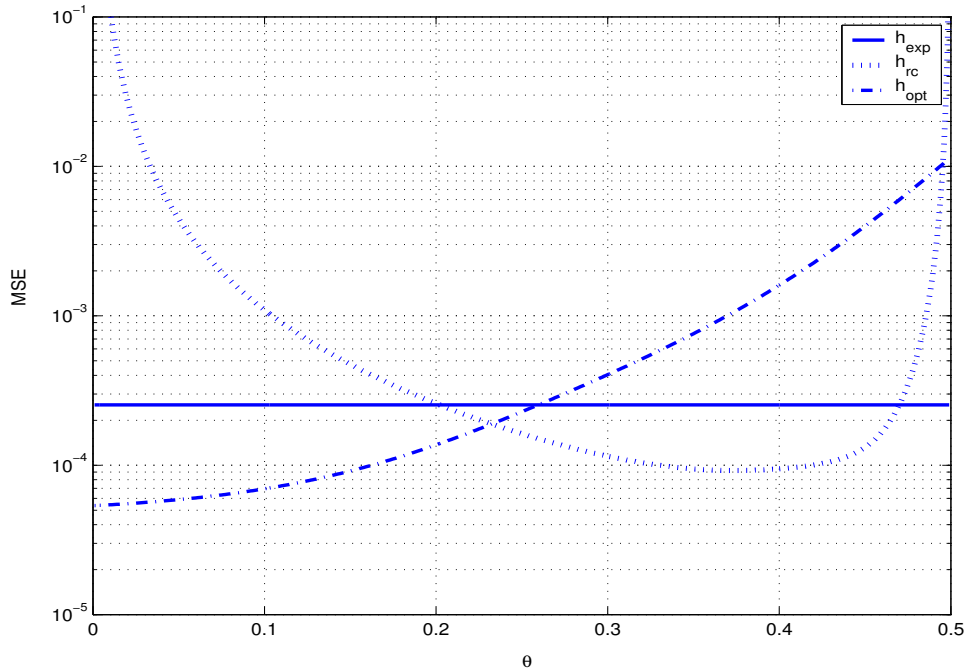


圖 3.9: 各個脈衝整型濾波器時間與時間估測誤差關係圖

我們分別對此三種脈衝整型濾波器在 SNR 為 0 dB, 10 dB, 及 20 dB 時取  $J$  之值, 也就是 (3.8) 式, 重覆如下:

$$J = \int_0^{0.5} \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta N_s)^2(1 + \eta)^2}{\eta \text{SNR} \left[ \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right]^2 [\eta^2 N_s^2 (L + L_s(1 - N_s)) + 2\eta L N_s + L + N_s L_s (N_s - 1)]} d\theta$$

則此三種脈衝整型濾波器以及 SNR 為 10 dB 最佳脈衝整型濾波器的  $J$  值利用 MATLAB 計算結果如表 3.2 所示:

表 3.2: 各脈衝整型濾波器在不同SNR 時的 J 值

	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB	20 dB
$h_{opt}$	$8.49 \times 10^{-4}$	$2.92 \times 10^{-4}$	$1.26 \times 10^{-4}$	$6.66 \times 10^{-5}$	$4.05 \times 10^{-5}$
$h_{opt10dB}$	$1.61 \times 10^{-3}$	$3.41 \times 10^{-4}$	$1.26 \times 10^{-4}$	$7.58 \times 10^{-5}$	$6.17 \times 10^{-5}$
$h_{exp}$	$3.25 \times 10^{-2}$	$3.83 \times 10^{-3}$	$5.96 \times 10^{-4}$	$1.51 \times 10^{-4}$	$6.11 \times 10^{-5}$
$h_{rc}$	$9.62 \times 10^{-3}$	$5.74 \times 10^{-3}$	$3.55 \times 10^{-3}$	$2.86 \times 10^{-3}$	$2.72 \times 10^{-3}$

表3.2 是分別對  $h_{opt}$  ,  $h_{rc}$  ,  $h_{exp}$  , 以及 SNR 為 10 dB 的  $h_{opt}$  的 CR 邊界對  $\theta$  積分所得的結果。我們可以明顯看出, 在 SNR 為 0 dB 時,  $J_{opt} < J_{opt10dB} < J_{rc} < J_{exp}$  ; 在 SNR 為 10 dB 時,  $J_{opt} < J_{opt10dB} < J_{exp} < J_{rc}$  ; 在 SNR 為 20 dB 時,  $J_{opt} < J_{exp} < J_{opt10dB} < J_{rc}$  , 也就是在  $\theta = 0$  到 0.5 之間, 我們的最佳化脈衝整型濾波器的 J 值為最小, 因此對於利用最大概似法估測時間偏移時, 使用最佳化脈衝整型濾波器的效果會是最好的。若是使用 SNR 為 10 dB 的最佳化脈衝整型濾波器, 在  $\pm 10dB$  之內時其估測時間偏移的效果也是很好的。



## 第 4 章 模擬結果

在這一章我們將最佳化脈衝整型濾波器以及指數與升餘弦脈衝整型濾波器使用到 (2.17) 式, 也就是以最大概似法估測時間偏移及頻率偏移的結果進行模擬, 並與所求出的 CR 邊界做比較。

### 4.1 模擬參數設定

在模擬的部份, 由於 IEEE 802.11a 規定的短先導符號符合我們的架構, 也就是包含了重覆的資料, 所以我們將這部份拿來進行模擬。圖 (4.1) 是 IEEE 802.11a 先導符號的架構圖:

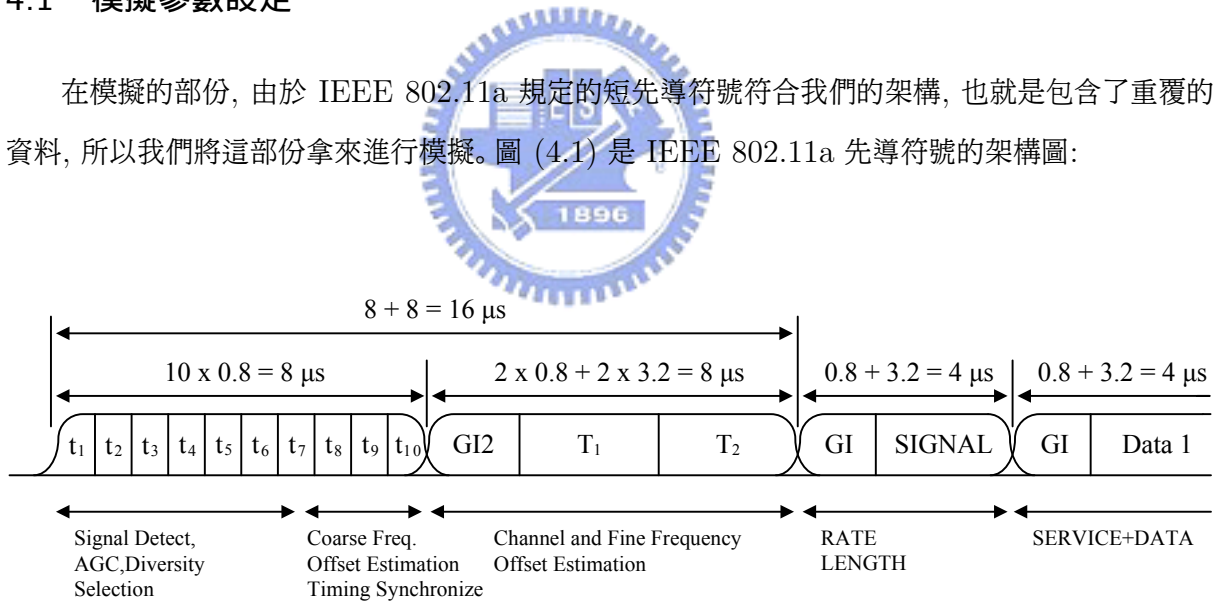


圖 4.1: IEEE 802.11a 先導符號架構

圖 (4.1) 中, 前  $16 \mu s$  的部份為先導符號的部份, 其中包含了短訓練符號 (training symbols) 及長訓練符號, 其中  $t_1$  到  $t_{10}$  代表相同的短訓練符號,  $T_1$  及  $T_2$  表示相同的長訓練符號, 如同先前所使用的架構, 我們在此取用這 10 個短先導符號來估測時間及頻率誤差, 因此  $N_s = 10$ , 而次載波的數量  $N = 64$ , 取樣頻率為 20 MHz, 其中一個短先導符號時間為  $0.8 \mu s$ , 因此每一個短先導符號裡

包含了  $L_s = 16$  個抽樣。而我們對每一種情況進行了 1000 次模擬，取估測誤差平方的平均值，分別對 SNR=0 dB, 5 dB,  $\dots$ , 20 dB 進行模擬。

在此我們也針對多重路徑通道時的時間及頻率偏移估測結果來作模擬，所使用的多重路徑通道模型是類似[4]中所使用的模型，其延遲範圍 (delay spread)  $K_{max}$  為  $0.75 \mu s$ ，相當於 15 個取樣，而其平均能量隨著時間增加呈現指數程度的衰減，在每個時間點都是大小為 Rayleigh 分布，角度均勻分布的複數值，其數學模型如下：

$$h_k = \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}\sigma_k^2) + j\mathcal{N}(0, \frac{1}{2}\sigma_k^2) \quad (4.1)$$

$$\sigma_k^2 = \sigma_0^2 e^{-kT_s/T_{RMS}} \quad (4.2)$$

$$\sigma_0^2 = 1 - e^{-T_s/T_{RMS}} \quad (4.3)$$

其中  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2}\sigma_k^2)$  代表平均值為 0，標準差為  $\frac{1}{2}\sigma_k^2$  的高斯隨機變數，(4.3) 式則是為了讓此多重路徑通道平均功率為 1 而設的規範，其中  $T_{RMS} = 100$  ns，相當於 2 個取樣。

在圖 (4.2) 到 (4.21) 中，圖 (a) 為時間偏移估測，圖 (b) 為頻率偏移估測，橫軸為 SNR(dB)，縱軸為估測誤差的標準差；而圖中的曲線部份，CRB 代表 CR 邊界值，AWGN 代表在附加白雜訊通道模擬結果，RAY 代表在多重路徑通道模擬結果，由於我們較在意的是時間偏移估測的部份，因此接下來所進行的模擬，都只有對頻率偏移為 0.15 時的情況作模擬，也就是接下來的模擬頻率偏移的部份都為 0.15，將不再覆述。

## 4.2 最佳化脈衝整型濾波器模擬結果

在這一節利用圖 (3.1) 所示的最佳化整型濾波器，在不同的 SNR 之下會有相對應的整型濾波器，使用到 (2.17) 式的最大概似法進行時間偏移以及頻率偏移估測，圖 (4.2) 到 (4.5) 為模擬的結果，分別是對時間偏移  $\theta$  為 0.1, 0.2,  $\dots$ , 0.4 所作的模擬結果。

在第三章中我們得知，此最佳化整型濾波器對時間偏移的估測，其估測誤差並不會隨著時間偏移而改變，因此在圖 (4.2) 到 (4.5) 的 (a) 圖中，其 CR 邊界都是一樣的，在附加白雜訊通道的模擬結果，幾乎都非常貼進此 CR 邊界，估測結果都很準確，在多重路徑通道的部份，雖然偏離了 CR 邊界值，在 SNR 較大時估測誤差也都接近  $10^{-3}$ ；而頻率偏移的估測，在附加白雜訊通道及多重路徑通道的估測模擬結果都很接近 CR 邊界，估測效果也都是很好的。

圖 (4.6) 至圖 (4.9) 為 SNR=10 dB 的最佳化整型濾波器對時間及頻率估測結果，其時間偏移

估測誤差在 10 dB 時，其估測誤差不隨  $\theta$  改變而改變；我們可看出在頻率偏移估測的部份，在附加白雜訊通道及多重路徑通道的估測都非常接近 CR 邊界，表示估測結果極佳；而在時間偏移估測部份，附加白雜訊通道的估測結果也非常接近 CR 邊界值，但是在多重路徑通道時的估測就較為偏離 CR 邊界，但也都在可接受的範圍之內。

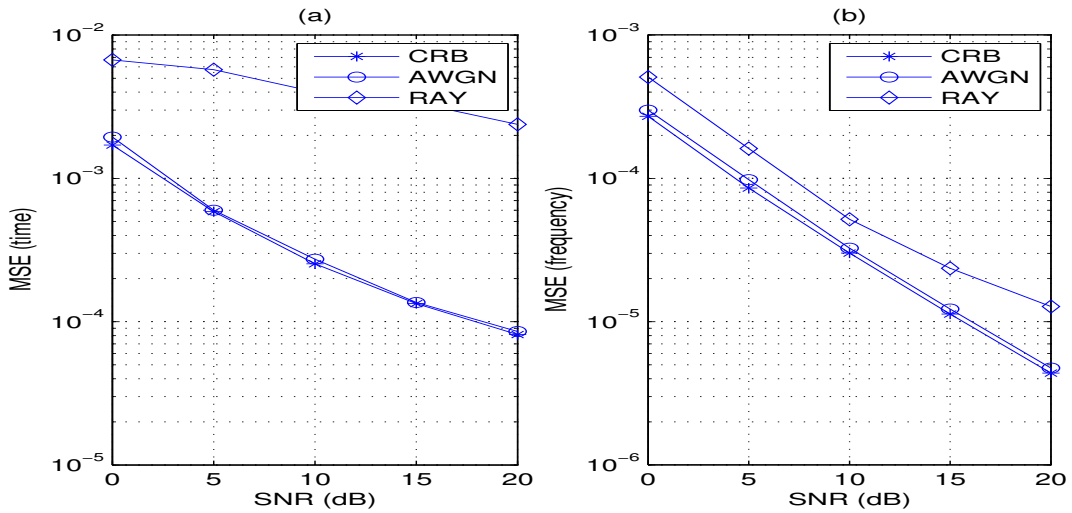


圖 4.2: 最佳化脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.1$  時的頻率及時間估測誤差

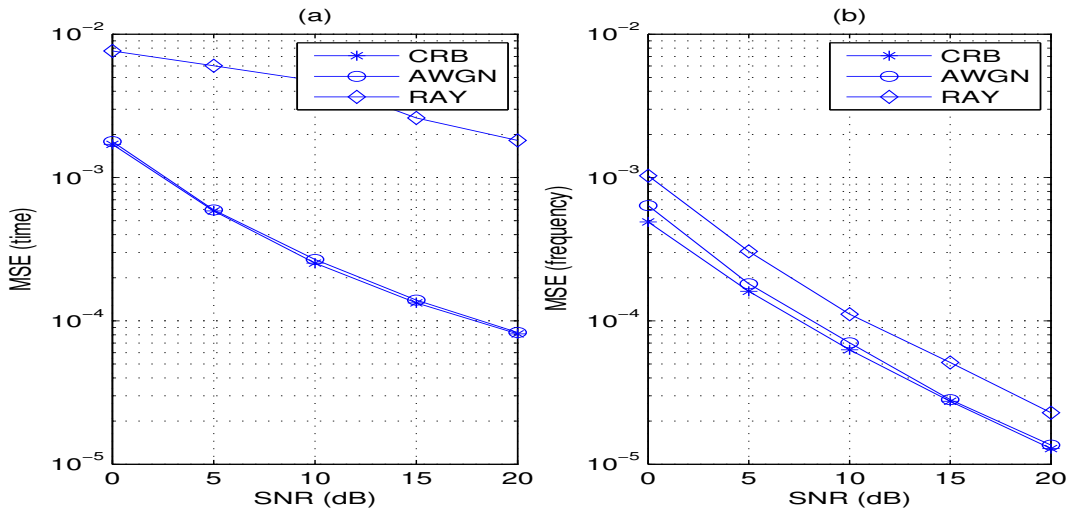


圖 4.3: 最佳化脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.2$  時的頻率及時間估測誤差



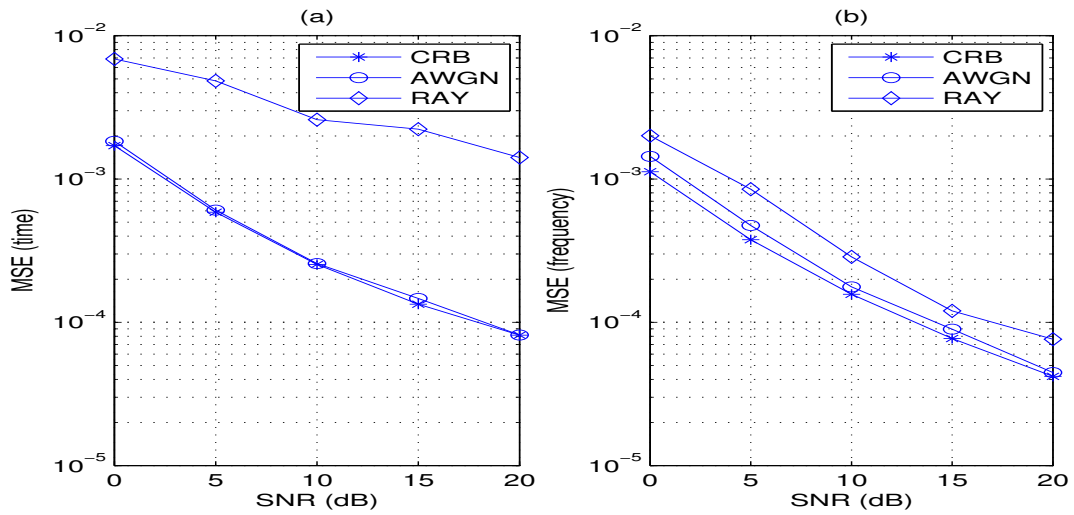


圖 4.4: 最佳化脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.3$  時的頻率及時間估測誤差

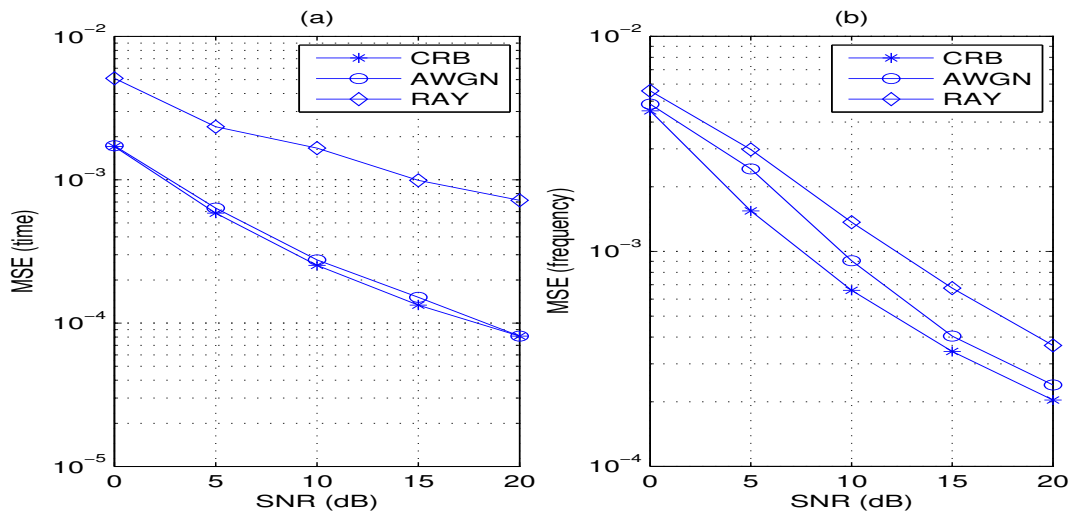


圖 4.5: 最佳化脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.4$  時的頻率及時間估測誤差

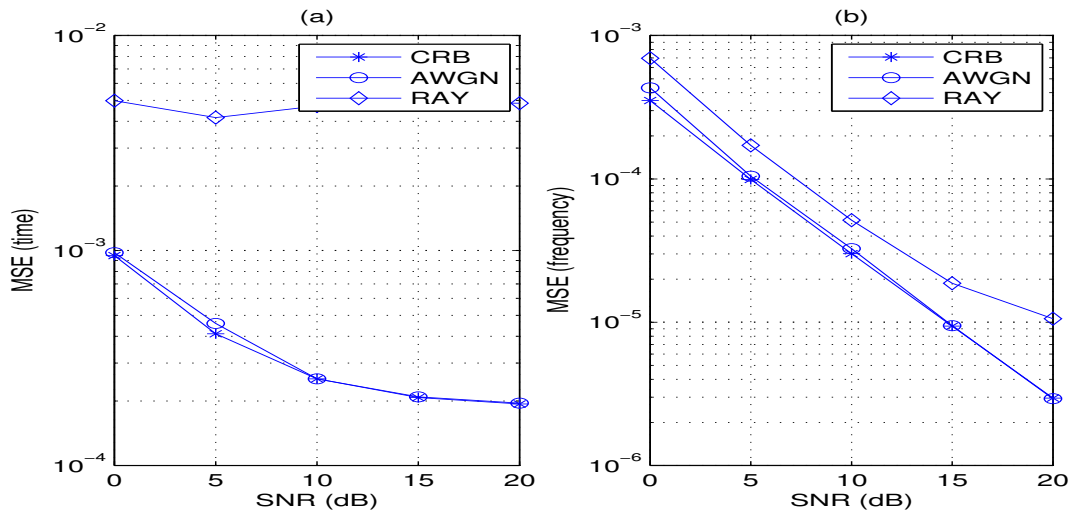


圖 4.6: SNR=10 dB 之最佳化脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.1$  時的頻率及時間估測誤差

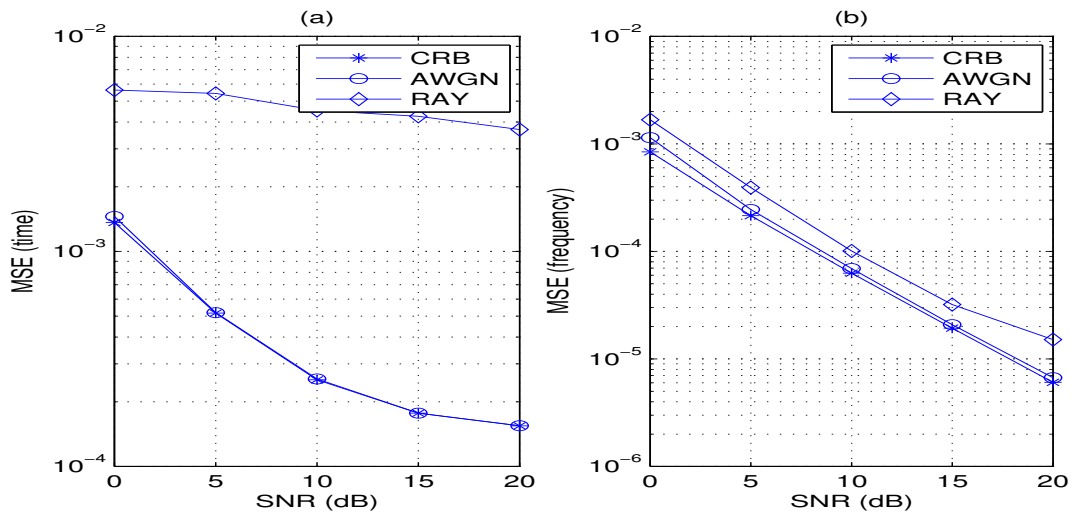


圖 4.7: SNR=10 dB 最佳化脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.2$  時的頻率及時間估測誤差

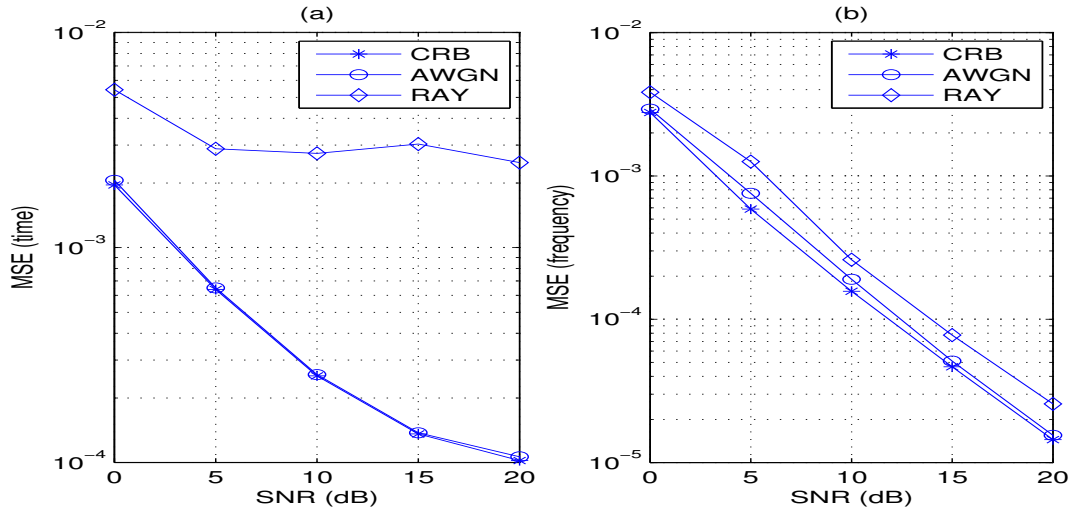


圖 4.8: SNR=10 dB 之最佳化脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.3$  時的頻率及時間估測誤差

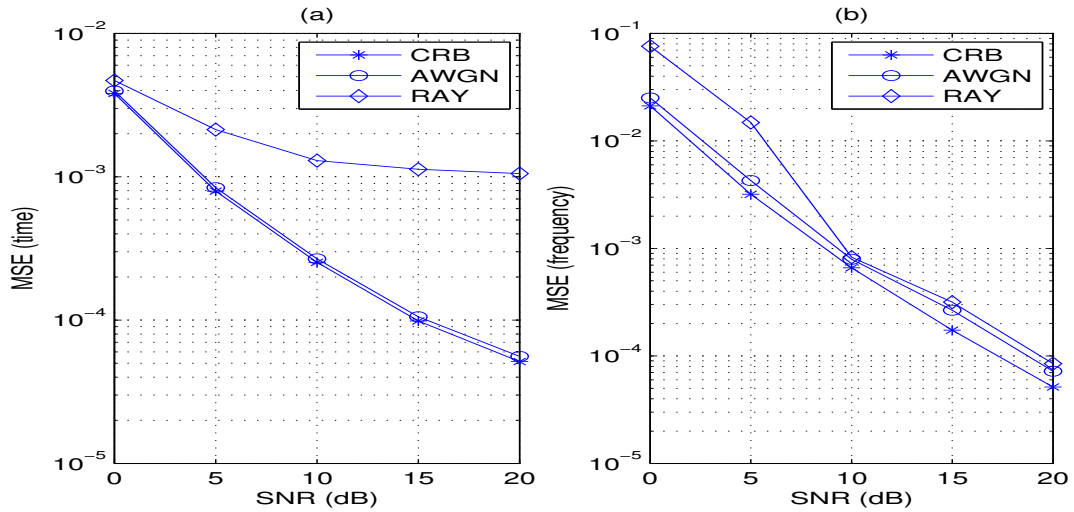
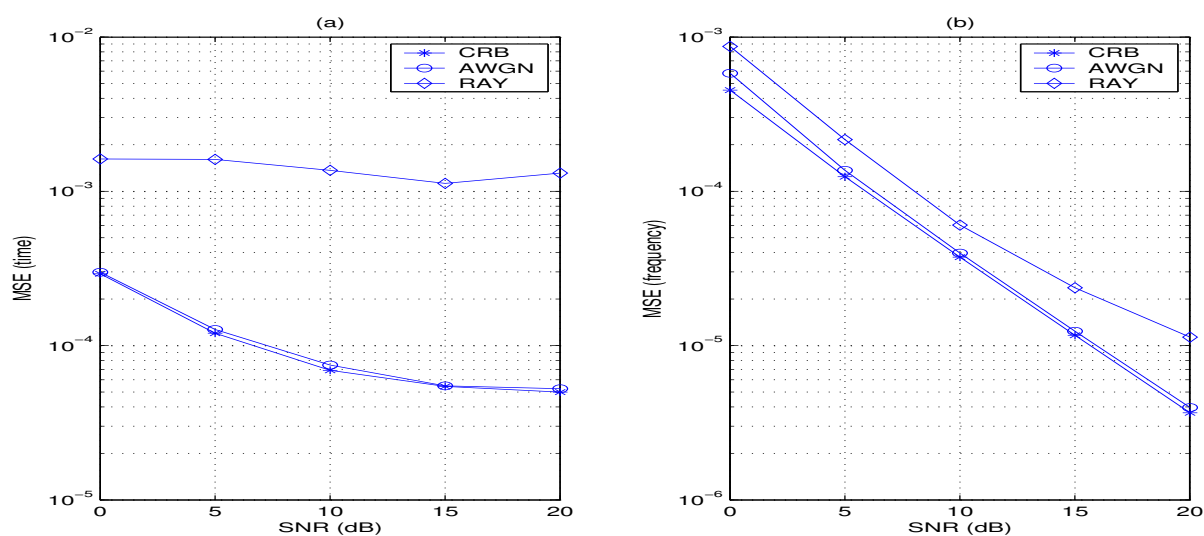
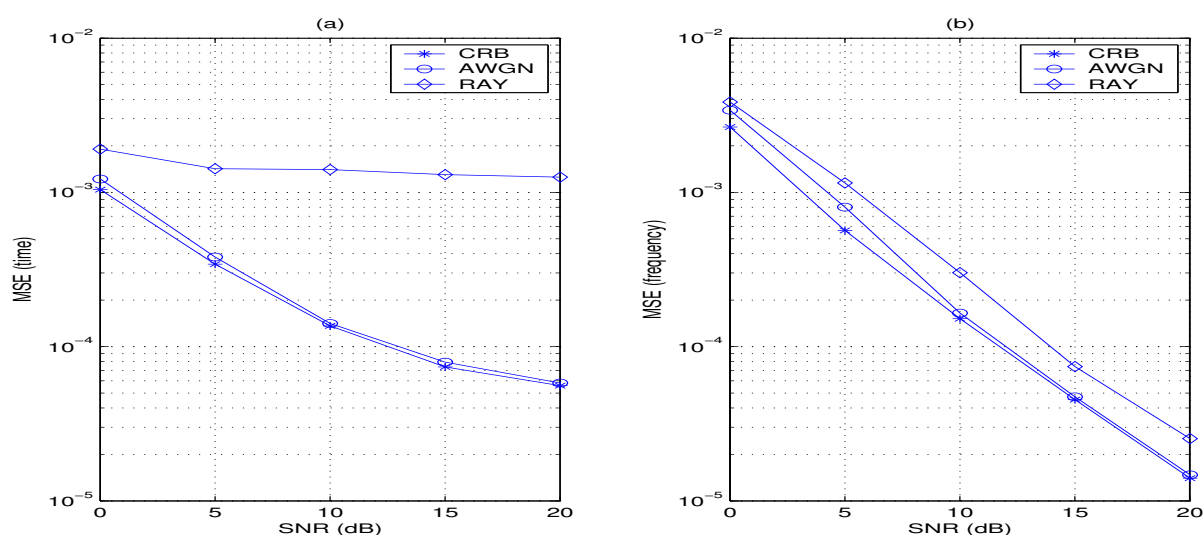


圖 4.9: SNR=10 dB 最佳化脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.4$  時的頻率及時間估測誤差

## 4.3 指數脈衝整型濾波器模擬結果

圖 (4.10) 至圖 (4.13) 為指數脈衝整型濾波器用在估測時間及頻率誤差偏移的模擬結果，分別為時間偏移  $\theta$  為 0.1, 0.2, 0.3, 0.4，頻率偏移為 0.15 時的模擬結果，可看出時間偏移估測誤差在附加白雜訊通道估測模擬很貼近 CR 邊界，多重路徑通道則較偏離，而頻率偏移估測誤差在附加白雜訊通道及多重路徑通道時的估測都很接近 CR 邊界值。

圖 4.10: 指數脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.1$  時的頻率及時間估測誤差圖 4.11: 指數脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.2$  時的頻率及時間估測誤差

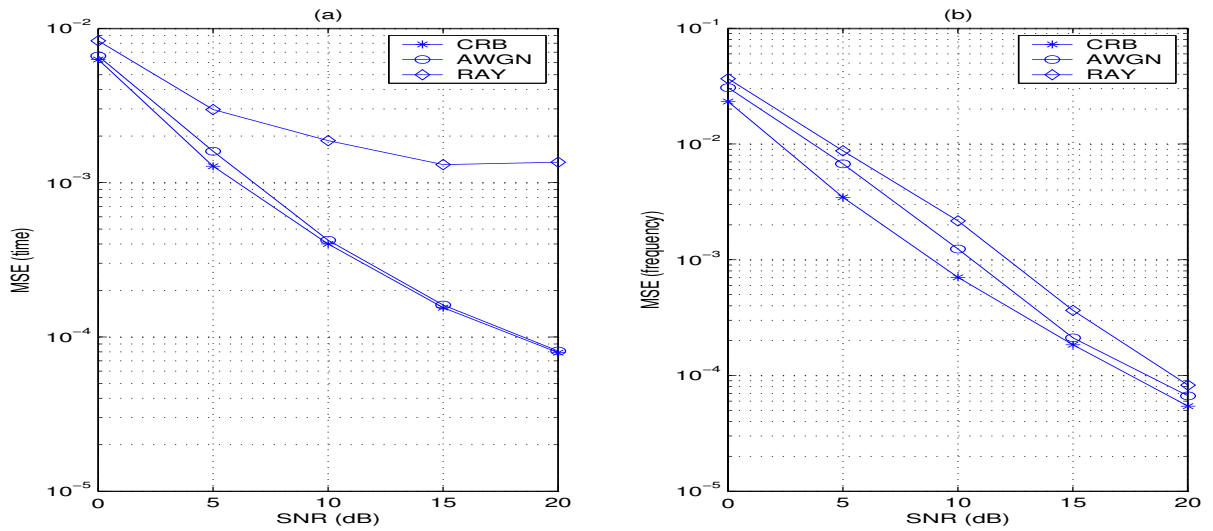


圖 4.12: 指數脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.3$  時的頻率及時間估測誤差

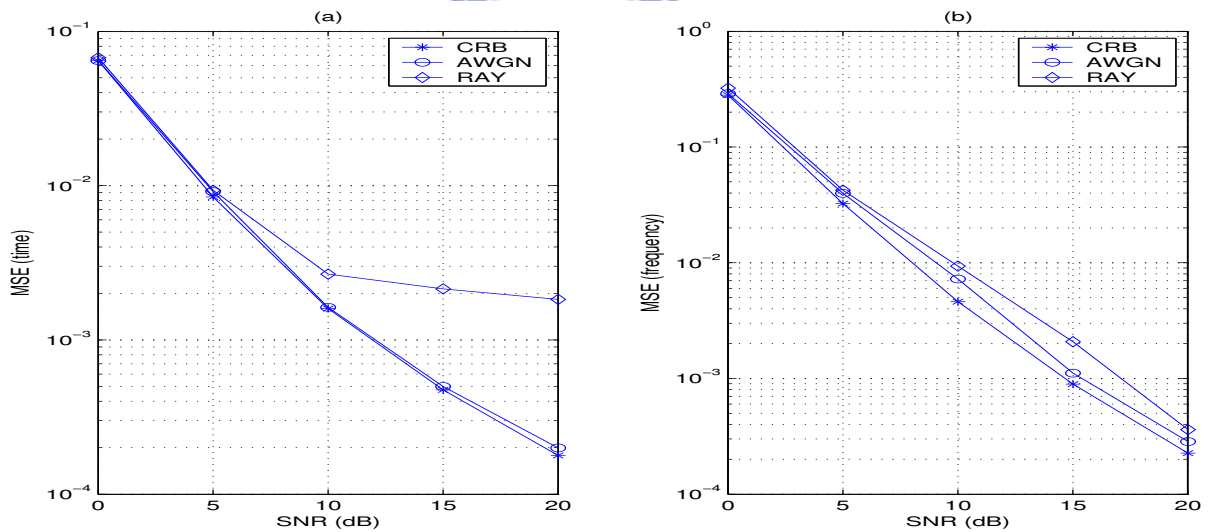


圖 4.13: 指數脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.4$  時的頻率及時間估測誤差

### 4.4 升餘弦脈衝整型濾波器模擬結果

圖 (4.14) 至圖 (4.17) 為升餘弦脈衝整型濾波器用在估測時間及頻率誤差偏移的模擬結果，分別為時間偏移  $\theta$  為 0.1, 0.2, 0.3, 0.4，頻率偏移為 0.15 時的模擬結果，可看出時間偏移估測誤差在附加白雜訊通道估測模擬很貼近 CR 邊界，多重路徑通道則較偏離，而頻率偏移估測誤差在附加白雜訊通道及多重路徑通道時的估測都很接近 CR 邊界值。

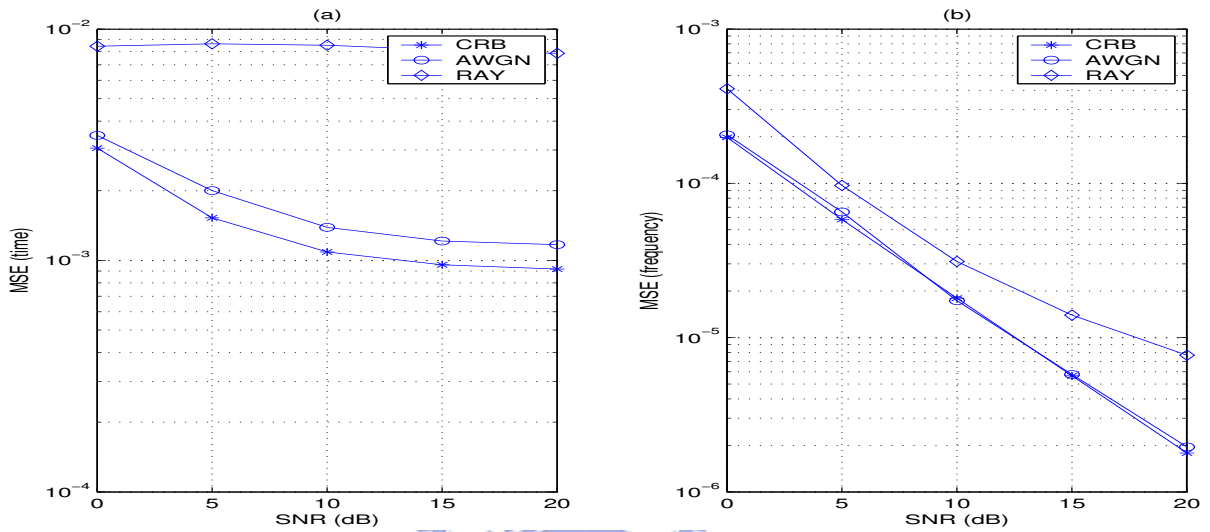


圖 4.14: 升餘弦脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.1$  時的頻率及時間估測誤差

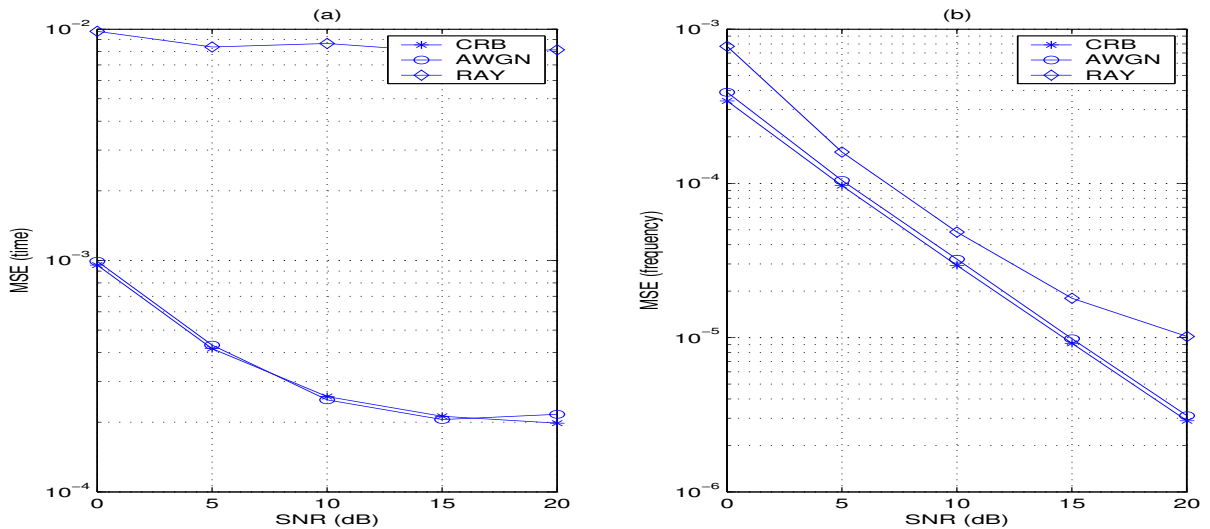


圖 4.15: 升餘弦脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.2$  時的頻率及時間估測誤差

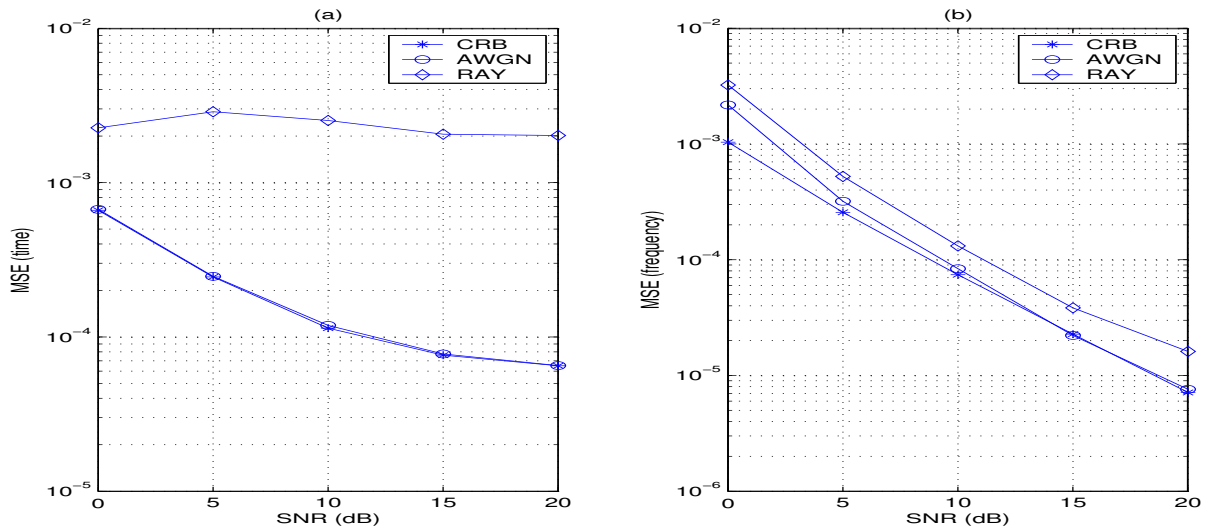


圖 4.16: 升餘弦脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.3$  時的頻率及時間估測誤差

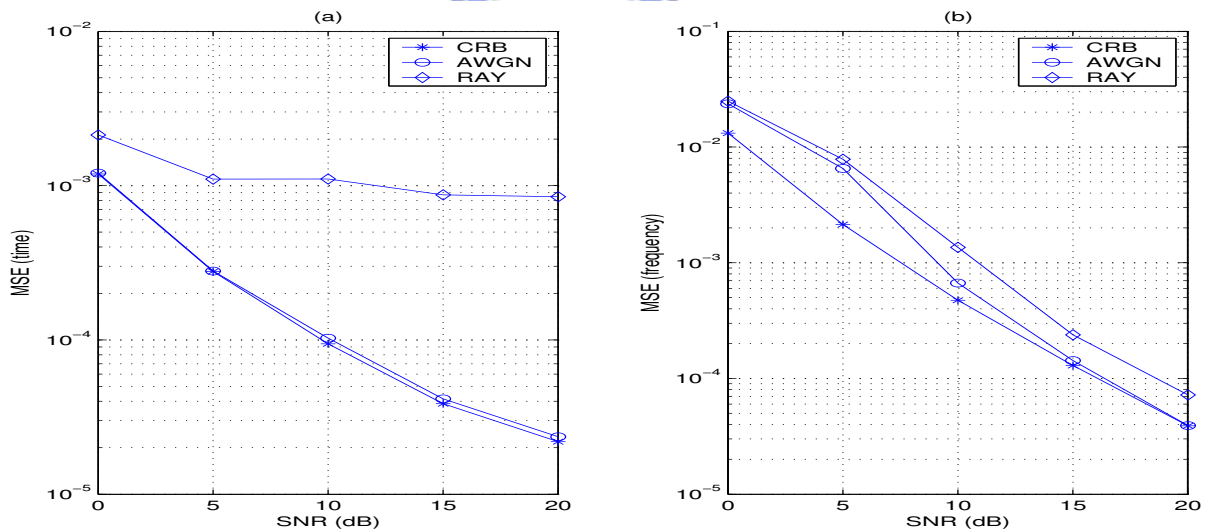


圖 4.17: 升餘弦脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.4$  時的頻率及時間估測誤差

圖 (4.18) 至圖 (4.21) 則是三種脈衝整形濾波器在  $\theta$  為 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 時, 在白高斯雜訊通道的估測誤差示意圖, 其中虛線部份為 CR 邊界。可以看出在  $\theta$  較小時, 指數脈衝濾波器的估測誤差較  $h_{opt}$  小, 但在  $\theta$  較大時, 指數脈衝濾波器的估測誤差就會比  $h_{opt}$  來的大。在升餘弦的部份則是在  $\theta$  較小時, 估測誤差較大, 在  $\theta$  較大時, 估測誤差就比  $h_{opt}$  小。但是對整個  $\theta$  作平均時, 由於模擬結果顯示估測很接近 CR 邊界, 所以如同上一章所說的,  $h_{opt}$  的估測誤差會是最小的。

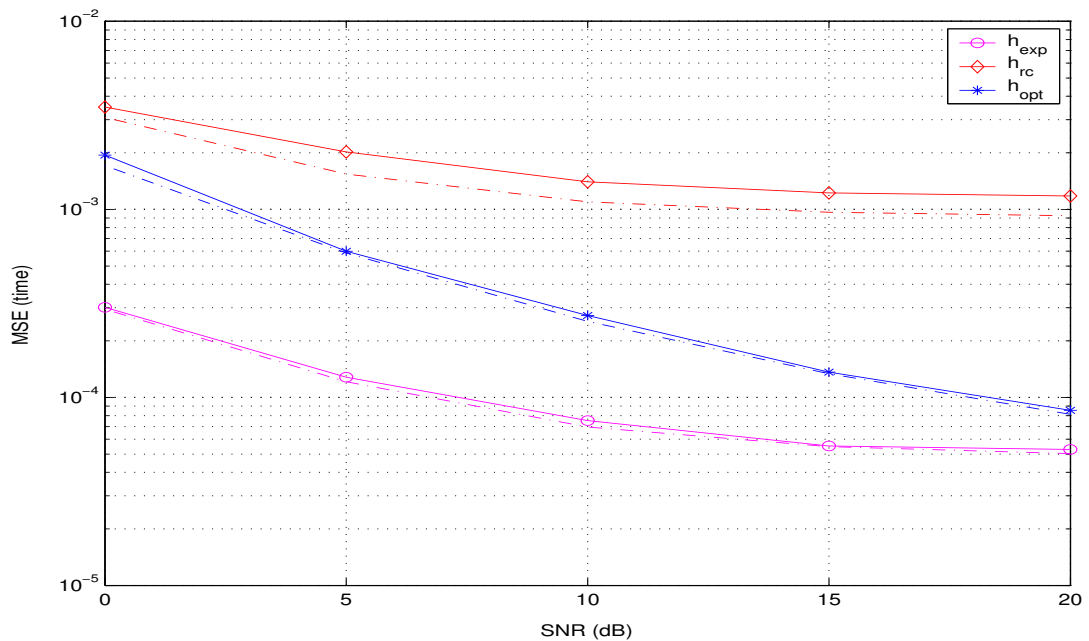


圖 4.18: 脈衝整形濾波器在  $\theta = 0.1$  時的時間估測誤差



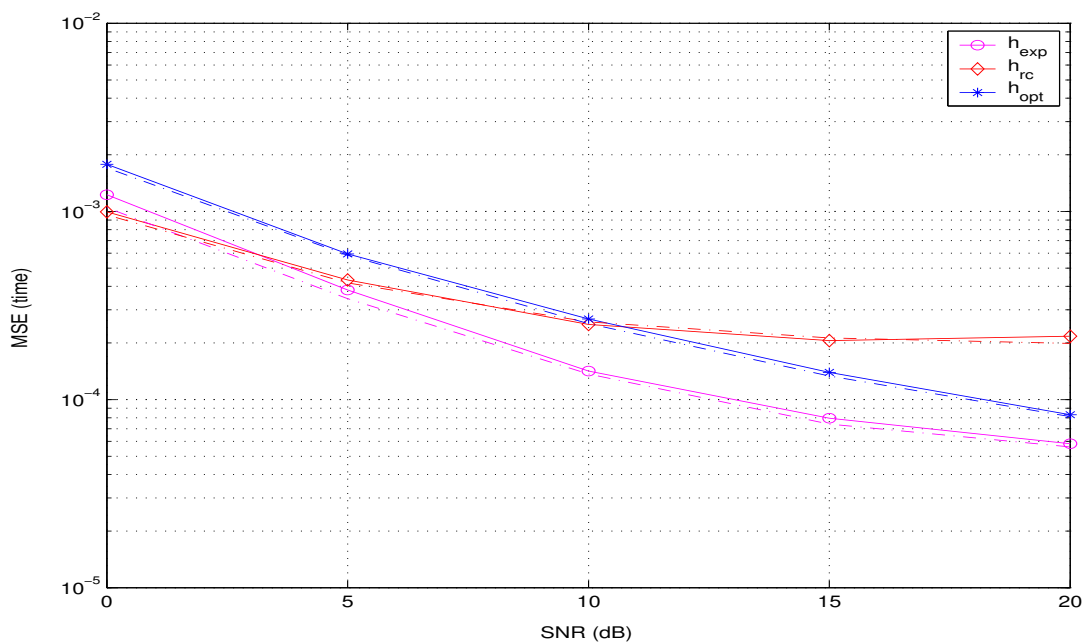


圖 4.19: 脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.2$  時的時間估測誤差

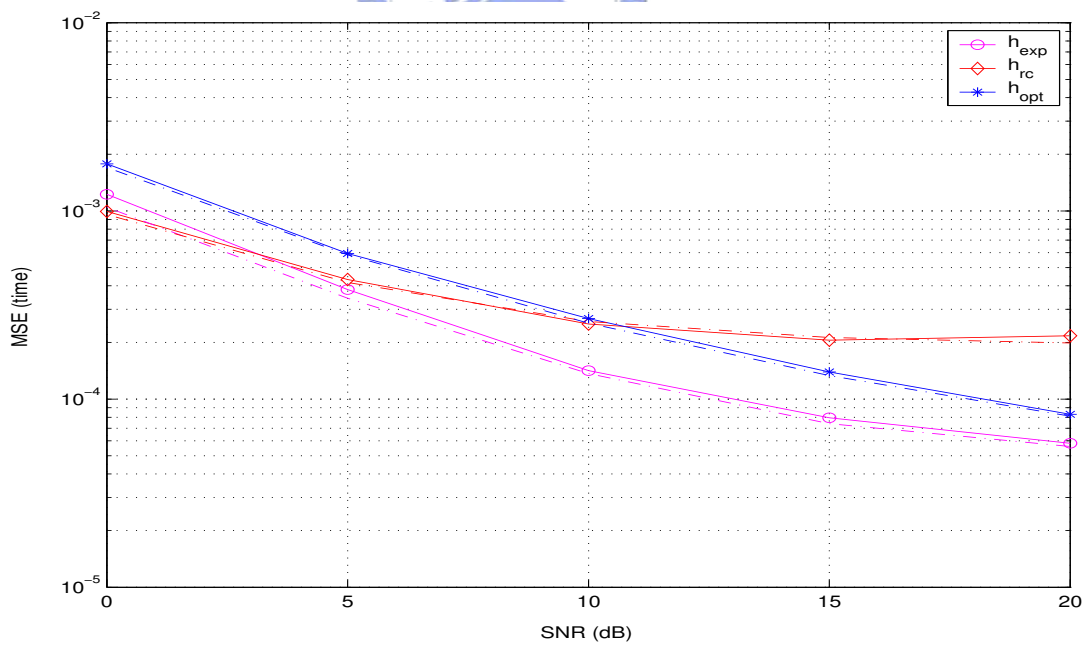
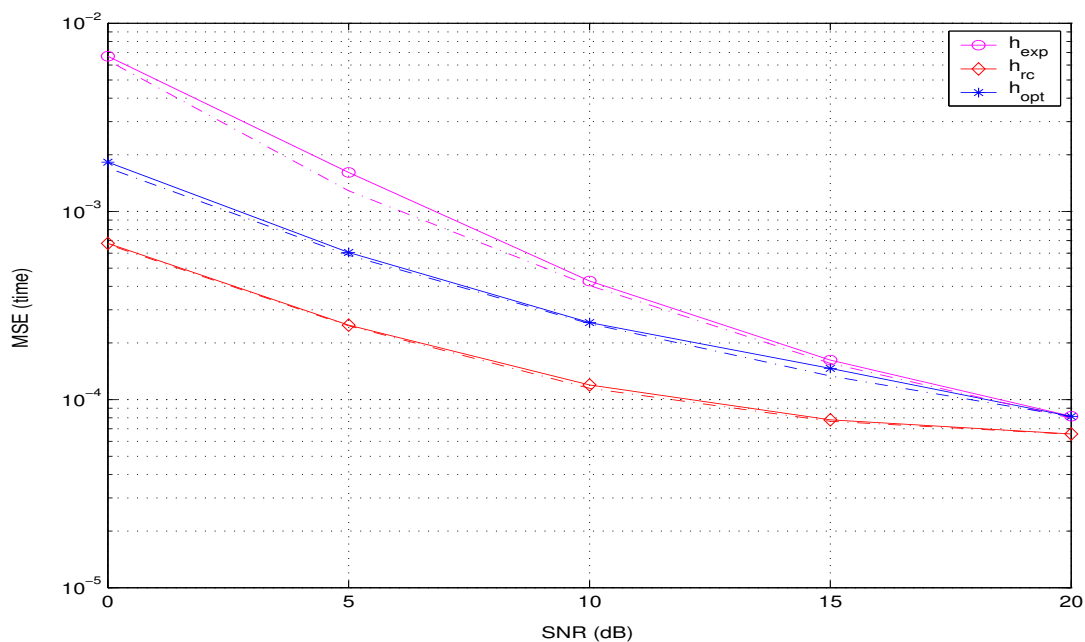


圖 4.20: 脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.3$  時的時間估測誤差

圖 4.21: 脈衝整型濾波器在  $\theta = 0.4$  時的時間估測誤差

#### 4.5 討論

在模擬結果中，最佳化，指數，及升餘弦脈衝整型濾波器在時間偏移估測誤差部份，附加白雜訊通道估測結果都很接近 CR 邊界；而多重路徑通道估測部份都會較偏離，但是我們可以觀察到，最佳化脈衝整型濾波器的估測誤差在這部份是較小的。而在頻率偏移估測部份，則都是能準確估測，但是會隨著  $\theta$  的增加，脈衝整型濾波器的值減小，頻率偏移估測準確度會跟著降低。

而由於模擬結果與 CR 邊界相符，因此如同第三章所述，在  $\theta = 0$  至 0.5 之間平均分佈時，我們所推導出的脈衝整型濾波器在此最大概似法估測時間偏移時，為最佳化的脈衝整型濾波器。

## 第 5 章

### 結論

這篇論文的重點在於針對估測時間偏移的精準度, 利用 IEEE 802.11a 短先導符號的特性推導出最大概似函數, 求出時間及頻率誤差的估測值, 並推導出 CR 邊界, 利用最小化 CR 邊界來求得最佳化的脈衝整型濾波器, 對於不同的 SNR 值會有各個相對的最佳整型濾波器, 因此對於不同 SNR 選擇相符合的脈衝整型濾波器, 便能夠使時間偏移的估測達到更精準的估測結果, 而同時也能保持頻率偏移估測的精準度; 其缺點則是計算量相對的提高, 因此如果想要提高時間偏移估測的精準度, 使用最佳化整型濾波器則需付出計算上的複雜度。而由模擬結果顯示, 所推導出的最佳化整型濾波器估測結果確實保持了在時間偏移估測上的精準性。



## 參考文獻

- [1] IEEE Std 802.11a: “Wireless LAN medium access control(MSC) and physical layer(PHY) specifications: high-speed physical layer in the 5 GHz band,” Dec. 1999.
- [2] T. M. Schmidl and D. C. Cox, “Robust frequency and timing synchronization for OFDM,” *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 45, no. 12, pp. 1613-1621, Dec. 1997.
- [3] H. Minn, M. Zeng, and V. K. Bhargava, “On timing offset estimation for OFDM systems,” *IEEE Commun. Lett.*, Vol. 4, no. 7, pp. 242-244, Jul. 2000.
- [4] J.J. van de Beek, M. Sandell, and P.O. Borjesson, “ML estimation of time and frequency offset in OFDM systems,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 45, No. 7, pp. 1800-1805, Jul. 1997.
- [5] M. Li and W. Zhang, “A novel method of carrier offset estimation for OFDM systems,” *IEEE Trans. Consumer Electron.*, Vol. 49, pp. 975-971, Nov. 2003.
- [6] E. Chiavaccini and G. M. Vitetta, “Maximum-likelihood frequency recovery for OFDM signals transmitted over multipath fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 52, pp. 244-251, Feb. 2004.
- [7] P. H. Moose, “A technique for orthogonal frequency division multiplexing frequency offset correction,” *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 42, pp. 2908-2914, Oct. 1994.
- [8] F. Gini and G.B. Giannakis, “Frequency offset and symbol timing recovery in flat-fading channels: a cyclostationary approach,” *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 46, pp. 400-411, Mar. 1998.

- [9] H. Bolcskei, “Blind estimation of symbol timing and carrier frequency offset in wireless OFDM systems,” *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 49, pp. 988-999, Jun. 2001.
- [10] B. Park, H. Cheon, and E. Ko, “A blind OFDM synchronization algorithm based on cyclic correlation,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, pp. 83-85, Feb. 2004.
- [11] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computation*, 2nd ed. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [12] U. B. Manderscheid, *Introduction to the Calculus of Variations*, Chapman and Hall, 1991.

