

# 國立交通大學

## 電機與控制工程學系

### 碩士論文

多個不穩定線性系統存在使系統穩定之切換律以及

線性控制系統在致動器出現故障時

存在共同穩定器之研究

On Existence and Construction of Stabilizing Switching Laws

Between Unstable Linear Systems and the Existence of

Common Stabilizer for a Class of Linear Control Systems

Experience Actuator's Outage

研究生：張嘉良

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十四年七月

多個不穩定線性系統存在使系統穩定之切換律以及  
線性控制系統在致動器出現故障時  
存在共同穩定器之研究

On Existence and Construction of Stabilizing Switching Laws Between  
Unstable Linear Systems and the Existence of  
Common Stabilizer for a Class of Linear Control Systems  
Experience Actuator's Outage

研 究 生：張嘉良

Student: Jia-Liang Chang

指 導 教 授：梁耀文 博士

Advisor: Dr. Yew-Wen Liang

國立交通大學電機與控制工程學系



A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

June 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年七月

# 國立交通大學

## 論文口試委員會審定書

本校 電機與控制工程 學系碩士班 張嘉良 君

所提論文 多個不穩定線性系統存在使系統穩定之切換律  
以及線性控制系在致動器出現故障時  
存在共同穩定器之研究

**On Existence and Construction of Stabilizing Switching**  
**Laws Between Unstable Linear Systems and the Existence of**  
**Common Stabilizer for a Class of Linear Control Systems**  
**Experience Actuator's Outage**

合於碩士資格標準、業經本委員會評審認可。

口試委員：

_____	_____
陳俊宏	邱政河
鄭瑞中	_____
_____	_____

指導教授：

梁耀文

教授

系主任：

楊谷澤

教授

中華民國九十四年六月二十四日

# 多個不穩定線性系統存在使系統穩定之切換律以及 線性控制系統在致動器出現故障時 存在共同穩定器之研究

研究生：張嘉良

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要

本篇論文主要在探討兩個關於多個不穩定系統間是否存在有穩定切換律之判斷條件的對等關係，並且利用此對等關係來判斷線性控制系統在致動器發生故障時是否存在有共同穩定器。更進一步，我們針對二階系統來瞭解這些判斷條件對應於幾何上的意義為何，並提供一個利用特徵值與特徵向量來判斷是否存在有使系統穩定之切換律的對等條件。根據這兩個條件的對等關係，我們將其應用於判斷多個不可穩定化線性控制系統是否存在適當的控制器及穩定切換律。這些控制律及穩定切換律在本論文中也被完整且明確的提出。最後，我們也整理出一個演算法則來判斷線性控制系統是否存在有共同穩定器並且提出完整的建構方法。

**On Existence and Construction of Stabilizing Switching Laws  
Between Unstable Linear Systems and the Existence of  
Common Stabilizer for a Class of Linear Control Systems  
Experience Actuator's Outage**

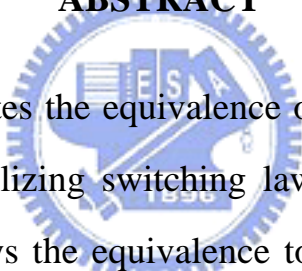
Student: Jia-Liang Chang

Advisor: Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University

**ABSTRACT**



This thesis investigates the equivalence of two sufficient conditions for the existence of stabilizing switching laws between unstable linear systems, and then employs the equivalence to the existence of common stabilizers of a linear control system in the presence of actuator's outage. To further understand the geometrical insight of these conditions, an equivalent condition involving the information of eigenvalues and eigenvectors of system dynamics is presented for planar systems. With the help of the equivalent relation, a condition for the existence of controllers and stabilizing switching laws between  $N$  unstabilizable linear control systems is presented, too. Finally, an algorithm for checking and constructing the existence of common stabilizer for a class of linear control system of experiencing actuator's outage is also explicitly presented.

# 目錄

中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
圖目錄	VI
<b>Chapter 1. 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機	5
1.3 論文架構	6
<b>Chapter 2. N個n階不穩定系統間存在穩定切換律之研究設計</b>	<b>7</b>
2.1 兩個n階不穩定系統	7
2.2 N個n階不穩定系統	9
2.3 2階不穩定系統	16
2.4 不可穩定之控制系統	21
<b>Chapter 3. 共同穩定器的研究與設計</b>	<b>24</b>
3.1 共同穩定器之問題描述	24
3.2 共同穩定器之設計與研究	25
3.3 2階系統共同穩定器之設計與研究	29
<b>Chapter 4. 模擬與討論</b>	<b>31</b>
4.1 兩個不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論	31
4.2 三個不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論	37
4.3 不可穩定線性控制系統之穩定切換律設計與討論	42

4.4 共同穩定器之設計與討論 . . . . .	45
<b>Chapter 5. 結論與未來研究方向</b>	<b>51</b>
5.1 結論 . . . . .	51
5.2 未來的研究方向 . . . . .	52
參考文獻. . . . .	53



# 圖目錄


圖 1 穩定系統之收斂路徑以及切換法則：	
(A) 穩定系統 $A_1$ (B) 穩定系統 $A_2$ (C) 切換法則 1 (D) 切換法則 2 . . . . .	4
圖 2 特徵向量在平面上的分佈圖 . . . . .	20
圖 3 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 1 秒：(a) $s_1, s_2$ 對時間分佈圖	
(b) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (c) $x_1$ 為橫軸 $x_2$ 為縱軸分佈圖 . . . . .	34
圖 4 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒：(a) $s_1, s_2$ 對時間分佈圖	
(b) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (c) $x_1$ 為橫軸 $x_2$ 為縱軸的分佈圖 . . . . .	35
圖 5 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒， $\epsilon = 0.1$ ：(a) $s_1, s_2$ 對時間分佈圖	
(b) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (c) $x_1$ 為橫軸 $x_2$ 為縱軸的分佈圖 . . . . .	36
圖 6 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒， $\epsilon = 0.9$ ：(a) $s_1, s_2$ 對時間分佈圖	
(b) $x_1, x_2$ 對時間的分佈圖 (c) $x_1$ 為橫軸 $x_2$ 為縱軸的分佈圖 . . . . .	37
圖 7 三個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒， $\epsilon = 0.5$ ：(a) $s_{12}, s_{21}$ 對時間分佈圖	
(b) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (c) $x_1$ 為橫軸 $x_2$ 為縱軸分佈圖 . . . . .	41
圖 8 兩個不可穩定系統，模擬時間取 5 秒， $\epsilon = 0.5$ ：(a) $s_1, s_2$ 對時間分佈圖 (b)	
$x_1, x_2, x_3$ 對時間的分佈圖 (c) $x_1, x_2, x_3$ 之狀態分佈圖 . . . . .	45



# CHAPTER 1

## 序論

### 1.1 研究背景



近年來，關於Hybrid system的研究受到相當多的注意([2],[13],[16],[17], [19]-[26])。其中關於切換系統的穩定性分析更是一個重要的研究。，其中包含了數個連續時間(continuous-time)的子系統，並且在這數個子系統中有一個切換規則來切換這數個系統。類似這種的切換系統有很多實際的應用，例如：adaptive control, intelligent control以及其他機械系統([19],[21])。為何要研究切換系統，其動機有相當多。如adaptive control，為了在控制期間有”multiple modalities”或”variable structure”來改善transient response[20]或不能被單一的迴授控制律所穩定化的系統[3],[10]。這些系統都非常適合使用切換系統的方式來達到穩定控制的目的。接下來我們簡單提出兩個切換系統的實際例子：

範例 1 : 飛行器的經度動態模式 [1]

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \delta$$

或

$$\dot{x} = Ax + B\delta; \alpha = C_1x$$

其中  $q$  為俯仰率 (the pitchrate),  $\alpha$  為攻角 (the constrained angle of attack), 控制變數  $\delta$  是飛機與水平之間的夾角, 其中包含了兩個控制器。而上述的控制系統其目的在於控制飛行角度, 使得攻角  $\alpha \leq \alpha_{lim}$ 。而輸出方程式為

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{n}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} \delta$$

或

$$n_z = C_2x + D_2\delta$$

其中  $n_z$  為法向加速度 (normal acceleration)。而此控制系統主要是在控制飛行器的法向加速度, 使得飛行器可以達到飛行員要求的速度。假設整個飛行器的系統可由兩個控制器 ( $K_1, K_2$ ) 為 full state 迴授, 分別產生兩種輸出

$$\delta_1 = -Fx + [C_1(-A + BF)^{-1}B]^{-1}\alpha_{lim}$$

$$\delta_2 = -Gx + [(C_2 - D_2G)(-A + BG)^{-1}B + D_2]^{-1}r(t)$$

在這裡  $\delta_1$  為穩定入侵角所設計之控制器輸出使得  $\alpha = \alpha_{lim}$ , 而  $\delta_2$  的控制使  $n_z$  追蹤至  $r(t)$ , 其中  $r(t)$  為要求的飛行速度。所以, 經由系統的切換, 可以隨時調整飛行器的飛行角度與速度, 讓飛行器可以隨飛行員的控制而飛往目的地。並且有一個最大控制法則:

$$\delta = \max(-Fx + k_1\alpha_{lim}, -Gx + k_2r(t))$$

讓飛行器能夠在兩個控制器之間切換, 使得飛行器的飛行角度或是速度可以在一個穩定的範圍內。

## 範例 2 : 汽車手排檔的簡易動態系統 [5]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{1 + \beta(p)}[-\alpha(x_2) + u]\end{aligned}$$

其中  $x_1$  為車速， $x_2$  為引擎每分鐘之轉速， $u \in [0, 1]$  為節流筏的位置， $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  為手排檔的檔數。當  $x_2 > 0$ ， $\alpha(x_2) > 0$ ， $\beta(p)$  為  $p$  函數。當汽車換檔時， $\beta(p)$  也有所不同，系統切換於不同的線性系統之間加上控制節流筏以達到駕駛所要求的速度。

對於切換系統其穩定性分析以及設計大致可以分為三種 [13]。第一種是探討系統在任意切換頻率下，仍然可以達到漸進穩定 (asymptotically stable) 的條件。一個直接的方法來檢驗系統是否具有此特性，就是經由探討是否所有的系統  $\dot{x} = A_i x$ ， $i = 1, \dots, n$  可找出一個共同的里奧波若夫函數 (Common Lyapunov Function)  $V(x) = x^T P x$  使得  $\dot{V}(x) = x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0$ ， $\forall x \neq 0$ ， $i = 1, \dots, n$ 。很顯然的，存在共同的里奧波若夫函數的充分條件，就是要所有的子系統都要是漸進穩定而且滿足交換律 (commute) [17, 20, 22, 24, 25]。

相對於第一種，第二種也假設所有子系統都是漸進穩定，但不存在共同的里奧波諾夫函數。此類型穩問題的目標是否決定適當的切換法則使系統達到漸進穩定的目的。因為即使每個系統都是漸進穩定，如果不考慮切換法則，仍然可以使得整個系統發散。以下我們用一個圖來做個簡單的說明。

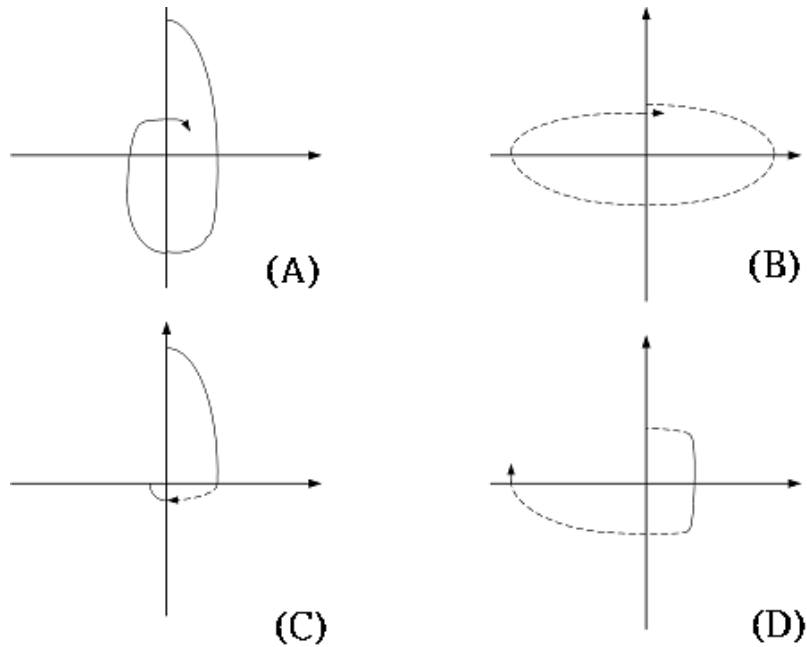


圖 1: 穩定系統之收斂路徑以及切換法則：(A) 穩定系統  $A_1$  (B) 穩定系統  $A_2$  (C) 切換法則 1 (D) 切換法則 2

如上圖所示，圖 (A)、(B) 代表兩個漸進穩定系統的收斂軌跡。圖 (C) 為正確的切換方法，可以使兩個系統更快的達到漸進穩定。而圖 (D) 為錯誤的切換方法，使得整個軌跡逐漸遠離原點。由此可見，正確的切換法則也是非常重要的。[2] 提出一種以多個里奧波諾夫函數來完成穩定性分析的方法。最後一種，如同上述的第二種需要考慮切換法則，但是不同的地方是最後一種可以允許系統為不穩定。而這類研究的主要目的就是要尋找存在穩定切換律的條件，並且建構出切換法則使得整個系統達到漸進穩定 [16, 26, 29]。在本篇論文當中，我們只考慮最後一種，也就是考慮不穩定系統間存在穩定切換律的條件。

上述的三種關於切換系統的穩定性分析的研究，以里奧波諾夫原理來建構穩定切換律是其中一種方法，本篇論文也是運用此方法。而類似的方法還可以運用到其他不同的系統，例如建構模糊切換系統 [6]、[11] 或是用 LQR 來解決不穩定系統之間切換 [8]、[9]。由此可見，切換系統的運用相當的廣泛，可以用來解決許多問題，所以這個問題非常值得繼續深入的研究下去。最近還有一種新的建構穩定切換律的方

法，此種方法叫做LMI(Linear matrix inequality)。只要確定存在穩定切換律，則可以用LMI的方法找出穩定切換律[4],[12],[28]。

## 1.2 研究動機

在[26]之中提供了一個判斷存在穩定切換律的條件以及建構穩定切換律的方法。而有另一個條件也可以判斷是否存在穩定切換律，若滿足此條件則一定可以找到穩定切換律。以下是這兩個存在穩定切換律的判斷條件：

$$\exists P > 0, \text{ 使得 } \cup_{i=1}^2 \{x|x^T(A_i^T P + P A_i)x < 0\} = R^n \setminus \{0\}$$

$$\exists \beta > 0 \text{ 使得 } A_1 + \beta A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣}$$

這兩個判斷條件前者是由理論上來判斷，但是沒有完整的建構穩定切換律的方法。而後者有著完善的判斷條件以及完善的建構方法。而這兩個條件已經在1996 [7]中被證明為對等條件。如此一來，建構穩定切換律以及判斷其存在的條件不管在理論上或是實際運用上都將相當的完善。但是，這兩個判斷條件都限制在只有兩個不穩定系統的情況之下。而一般情況下，系統可能不只一個。因此，我們將針對這兩個條件，將這兩個條件推廣到針對多個不穩定系統是否存在穩定切換律的條件。而將這兩個條件修改如下：

$$\exists P > 0 \text{ 使得 } \cup_{i=1}^N \{x|x^T(A_i^T P + P A_i)x < 0\} = R^n \setminus \{0\}$$

$$\exists \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣}$$

所以，在本篇論文當中，我們將有完整的證明，證明這兩個條件互為對等條件。如此一來，當有多個不穩定系統時，我們可以用這兩個條件來判斷是否存在穩定切換律。另外，我們還特別討論多個2階不穩定系統在幾何上的意義，並且利用其特徵值與特徵向量的關係，快速的判斷是否存在穩定切換律。除此之外，我們還將這兩個條件運用在不可穩定的控制系統上。因為不可穩定的系統，往往都不可以運用

的，所以我們利用切換系統的設計方法，來設計控制系統的控制器，使得不可穩定的系統仍然可以利用切換系統的觀念來達到穩定控制。

而在[14]中提到了共同穩定器的設計，我們發現到其中的一些觀念可以用前面提到的兩個判斷條件來做應用。所以，我們利用這兩個判斷條件以及[14]中的觀念來設計共同穩定器。如此一來，我們可以利用這兩個判斷條件來判斷是否存在共同穩定器，進而運用在實際的系統上。

### 1.3 論文架構

這一篇論文，主要分成下列四章：第二章首先介紹兩個關於不穩定系統間存在穩定切換律的判斷條件，並且整理出[26]中建構穩定切換律的步驟，然後將這兩個條件推廣到針對 $N$ 個不穩定系統之間是否存在穩定切換律的判斷條件，並提供一個充分條件來尋找穩定切換律。最後將不穩定系統限定在2階系統，討論其幾何上的意義，並且利用其特征值與特徵向量之間的關係，提出一個快速判斷是否存在穩定切換律的條件。第三章主要是在介紹共同穩定器的設計方式，我們利用[14]的觀念以及第二章中的兩個條件，提出一個判斷是否存在共同穩定器的條件。並且提供一個方法來尋找共同穩定器。第四章主要的內容就是針對第二、三章提出的條件，我們以一些簡單的例子來做一個模擬，證實我們所提出的方法可以真正的運用在一些例子身上。第五章是將此篇論文作一個總結，並且提供一些未來的研究方向。

# CHAPTER 2

## N 個 n 階不穩定系統間存在穩定切換律之研究設計

在這一章節，我們要來探討在 N 個不穩定 (unstable) 系統之間，存在穩定切換律的充分條件，以及如何建構穩定切換律。我們將分為四個小節來探討：

- 2.1：介紹在兩個不穩定系統之間，存在穩定切換律的兩個充分條件。而這兩個系統已被證明為對等條件。並且有完整的建構穩定切換律的方法與步驟。
- 2.2：根據 2.1 節的條件，將其推廣到 N 個不穩定系統，並證明兩個條件仍然為對等條件。以及如何建構穩定切換律。
- 2.3：針對 2 階的不穩定系統，探討其幾何意義，並利用其特徵值以及特徵向量，快速判斷 N 個不穩定系統之間是否存在穩定切換律。
- 2.4：討論不可穩定的控制系統如何設計控制器並建構穩定切換律。

### 2.1 兩個 n 階不穩定系統

在這一節當中，我們要介紹兩個不穩定系統間存在穩定切換律的兩個充分條件，這兩個條件分別由不同的人所提出。考慮 2 個線性系統

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

其中，這兩個系統皆不穩定。換言之， $A_1, A_2$  都不是赫維茲矩陣 (Hurwitz matrix)。對於兩個不穩定系統之間存在穩定切換律的充分條件，可以用接下來的式子來表

示：

$$\exists P > 0, \text{ 使得 } \cup_{i=1}^2 \{x|x^T(A_i^T P + P A_i)x < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (2.2)$$

很明確的，在上述的條件下，我們可以定義里奧波諾夫函數 (Lyapunov function)

$$V(x) = x^T P x \quad (2.3)$$

，然後在這兩個系統中找到一個適當的切換律，使得在任何時間下  $\dot{V} < 0$ ，並且讓  $x(t) \rightarrow 0$  隨著  $t \rightarrow \infty$ 。然而式子 (2.2) 沒有提供方法來尋找這樣的  $P$ 。在 1994, Wicks et. al. [26] 也提出了一個存在穩定切換律之充分條件，如接下來的條件 (2.4) 所示：

$$\exists \beta > 0 \text{ 使得 } A_1 + \beta A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (2.4)$$

當條件 (2.4) 成立時，他們提供了方法來驗證是否存在  $\beta$ ，並且有明確的步驟來建構穩定的切換律。所以，這兩個條件比較起來，前者為理論導向，而且沒有提供明確的方法來尋找適當的  $P$ ，並建構穩定的切換律。相反的，後者有明確的建構穩定切換律的步驟在 [26]。然而在 1996 年，這兩個條件已經被證明為相等的 [7]。有了這個結果，條件 (2.4) 也可以使用 [26] 中所提出的建構步驟，而不再只是一個理論的結果。接下來，我們來簡單的介紹求解在式子 (2.4) 中的  $\beta$  值的方法以及建構穩定切換律的步驟。

**演算法則 1：**

Step 1 : 使用羅斯赫維茲穩定準則來檢查  $A_1 + \beta A_2 = A_{eq}$  是否存在一個  $\beta \in (0, \infty)$ ，使得  $A_{eq} := A_{eq}(\beta)$  是一個赫維茲矩陣。如果是的話，則進行 Step 2。否則這個方法失敗，無法找到  $\beta$  值。

Step 2 : 選擇一個  $\beta$  值，使得  $A_{eq}$  為一個赫維茲矩陣。並且求解出  $P$ ，由下列的里奧波諾夫方程式

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} + Q = 0$$



對於任一  $Q > 0$ 。

Step 3 : 定義,  $i = 1, 2$

$$L_i = A_i^T P + P A_i,$$

$$\Omega_i^- = \{x | x^T L_i x < 0\}$$

以及切換平面

$$s_1(x) = x^T (L_1 - \epsilon L_2) x$$

$$s_2(x) = x^T (L_2 - \epsilon L_1) x$$

其中  $\epsilon$  滿足  $0 < \epsilon < 1$ 。

Step 4 : 根據下列的規則來切換兩系統：

(1) 在初始狀態時間  $t_0$  時, 如果  $x(t_0) \in \Omega_i^-$ , 則由系統  $A_i$  開始。

(2) 當  $s_i(x)$  由負值改變到正值, 則系統相對的由  $A_i$  切換到  $A_j$ , 其中  $i = 1, 2$  並且  $i \neq j$ 。



## 2.2 N 個 n 階不穩定系統

上一節的條件都是針對兩個不穩定線性系統。然而, 在一般的情況下, 系統可能不只兩個。因此, 在這一節, 我們要將上一節的結果推廣到  $N$  個線性不穩定系統。所以, 我們將式子 (2.1) 修改為下列式子 (2.5) :

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

其中系統  $A_i, i = 1, \dots, N$  皆不滿足赫維茲矩陣。而上節中所提出的存在穩定切換律的條件 (2.2) 以及 (2.4) 也將改寫為下列二式 :

$$\exists P > 0, \text{ 使得 } \cup_{i=1}^N \{x | x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (2.6)$$

$$\exists \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (2.7)$$

而且在2.1節中，條件(2.2)以及條件(2.4)已經被證明為對等條件。並且，只有針對兩個切換系統，而我們要將條件(2.2)以及條件(2.4)推廣到針對N個切換系統。因此，我們也要證明上述的條件(2.6)以及(2.7)仍為對等條件。為了方便證明，我們介紹另一個存在穩定切換律的條件：

$$\exists P > 0 \text{ 以及 } \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i L_i < 0 \quad (2.8)$$

其中

$$L_i := A_i^T P + P A_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

然後，我們將要證明這三個條件(2.6)-(2.8)互為對等條件。首先我們證明條件(2.7)以及條件(2.8)為對等條件：

**輔助定理 1**：條件(2.7)以及條件(2.8)為對等條件。

證明：“ $\implies$ ”當條件(2.7)成立

$$\implies \exists \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣}$$

$$\implies \exists P > 0, Q > 0 \text{ 使得 } A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q < 0$$

$$\implies \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right)^T P + P \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) = -Q < 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i^T P + P A_i) = -Q < 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^N \alpha_i L_i = -Q < 0$$

“ $\longleftarrow$ ”當條件(2.8)成立

$$\implies \exists P > 0 \text{ 以及 } \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i L_i = -Q < 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i^T P + P A_i) = -Q < 0$$

$$\implies A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q < 0$$

因為  $P > 0$  並且  $Q > 0$  所以  $A_{eq}$  必為一個赫維茲矩陣 ■。

接下來我們證明“條件(2.7) $\implies$ 條件(2.6)”。

**輔助定理 2** : 條件 (2.7)  $\implies$  條件 (2.6)

證明：當條件 (2.7) 成立

$$\implies \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣}$$

$$\implies \forall Q > 0, \exists P > 0, \text{ 使得 } A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q < 0$$

$$\implies \forall x \neq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i x^T (A_i^T P + P A_i) x = -x^T Q x < 0$$

$$\implies \forall x \neq 0, x^T \alpha_1 (A_1^T P + P A_1) x + x^T \alpha_2 (A_2^T P + P A_2) x + \cdots + x^T \alpha_N (A_N^T P + P A_N) x$$

$$\implies \forall x \neq 0 \text{ 至少有一個 } x^T (A_i^T P + P A_i) x, i = 1, \dots, N \text{ 小於零。} \quad \blacksquare$$

最後我們將證明”條件 (2.6)  $\implies$  條件 (2.8)”。在證明之前，我們先定義底下  $2N$  個子集合

$$\Omega_i^+ := \{x | x^T L_i x \geq 0, \|x\| = 1\}, i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

以及

$$\Omega_i^- := \{x | x^T L_i x < 0, \|x\| = 1\}, i = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

式子 (2.10) 以及 (2.11) 所代表的子集合有一些共同的特性：

**輔助定理 3** :

(a) 集合  $\Omega_i^+$  以及  $\Omega_i^-$  皆對稱於原點。

(b)  $L_i$  的不穩定的特徵值所對應的單位特徵向量皆包含於  $\Omega_i^+$ ，其穩定的特徵值所對應的單位特徵向量皆包含於  $\Omega_i^-$ 。

(c)  $\Omega_i^+$  以及  $\Omega_i^-$  都是一個連通集合或是由兩個連通集合所組成。若是由兩個連通集合組成時，其形式為  $\Omega_i^+ = \Omega_{i1}^+ \cup \Omega_{i2}^+$ ，並且  $\Omega_{i1}^+ = -\Omega_{i2}^+$ ，其中  $-\Omega_{i2}^+ := \{-x | x \in \Omega_{i2}^+\}$ 。  $\Omega_i^- = \Omega_{i1}^- \cup \Omega_{i2}^-$ ，並且  $\Omega_{i1}^- = -\Omega_{i2}^-$ ，其中  $-\Omega_{i2}^- := \{-x | x \in \Omega_{i2}^-\}$ 。

(d) 如果條件(2.6)成立，則 $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+ \cap \cdots \cap \Omega_N^+ = \emptyset$ 並且 $S \setminus \{\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ \cup \cdots \cup \Omega_N^+\} \neq \emptyset$ ，

其中 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ 。

證明：

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ， $x^T L_i x$ 必定等於 $(-x^T) L_i (-x)$ ，並且 $x$ 與 $-x$ 必對稱於原點。

(b) 對於任一個 $L_i$ 我們可以，我們可以找到一個矩陣 $U_i$ 使得

$$U_i^T L_i U_i = \text{diag}(\lambda_{i1}^+, \cdots, \lambda_{im_i}^+, \lambda_{i(m_i+1)}^-, \cdots, \lambda_{in}^-) = D_i \quad (2.12)$$

其中 $\lambda_{ij}^+$ ， $j = 1, \cdots, m_i$ 為 $L_i$ 之正的特徵值， $x_{ij}^+$ ， $j = 1, \cdots, m_i$ 為其對應之單位特徵向量， $\lambda_{ij}^-$ ， $j = m_i + 1, \cdots, n$ 為 $L_i$ 之負的特徵值， $x_{ij}^-$ ， $j = m_i + 1, \cdots, n$ 為其對應之單位特徵向量。並且 $(x_{ij}^+)^T L_i x_{ij}^+ \geq 0$ ， $(x_{ij}^-)^T L_i x_{ij}^- < 0$ ，由此可知 $x_{ij}^+ \subseteq \Omega_i^+$ 而且 $x_{ij}^- \subseteq \Omega_i^-$ ，故(b)得證。

(c) 首先我們假設 $L_i$ 為對角線矩陣，如下列所示：

$$L_i = \text{diag}(\lambda_{i1}^+, \cdots, \lambda_{im_i}^+, \lambda_{i(m_i+1)}^-, \cdots, \lambda_{in}^-) \quad (2.13)$$

其中 $\lambda_{ij}^+ \geq 0$ ， $j = 1, \cdots, m_i$ 並且 $\lambda_{ij}^- < 0$ ， $j = m_i + 1, \cdots, n$ 。定義一個集合

$$\Gamma_i = \{(x = 0, \cdots, 0, x_{m_i+1}, \cdots, x_n)^T \mid \|x\| = 1\} \subset \Omega_i^- \quad (2.14)$$

並且 $\Gamma_i$ 為單位圓上的一個子集合，也是一個連通集合或是由兩個對稱於原點的連通集合所組成。現在 $x \in \Omega_i^-$ 意味著：

$$x^T L_i x = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}^+ x_j^2 + \sum_{j=m_i+1}^n \lambda_{ij}^- x_j^2 \quad (2.15)$$

等於

$$\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}^+ (tx_j)^2 + \sum_{j=m_i+1}^n \lambda_{ij}^- x_j^2 < 0, \forall 0 \leq t \leq 1 \quad (2.16)$$

或

$$x_t^T L_i x_t < 0, \forall 0 \leq t \leq 1 \quad (2.17)$$

其中  $x_t := (tx_1, \dots, tx_{m_i}, x_{m_i+1}, \dots, x_n)^T$ ，也就是接下來的集合

$$\{x_t / \|x_t\| \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \Omega_i^- \quad (2.18)$$

因此，對於在  $\Omega_i^-$  的任何一點，都可以在找到一條平滑的路徑完全落在  $\Omega_i^-$  裡面，並且其起始點為  $x$  以及  $\Gamma_i$ 。也就是說， $\Omega_i^-$  也是一個連通集合或是由兩個連通集合所組成，如同  $\Gamma_i$  一樣。

假如  $L_i$  不是對角矩陣，我們可以用一矩陣  $U_i$  使得  $U_i^T L_i U_i$  成為一個對角矩陣  $D_i$ 。然而集合  $\Omega_i^-$  將以  $x = Uy$  線性轉換成  $\bar{\Omega}_i^- := \{y \mid y^T D_i y < 0, \|y\| = 1\}$ 。而一個連通集合經由線性轉換之後其特性不變，仍然為一個連通集合。

故 (c) 得證。

(d) 很明顯的當條件 (2.6) 成立，表示  $\Omega_i^- \cup \dots \cup \Omega_N^-$  包含整個空間，所以不存在  $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+ \cap \dots \cap \Omega_N^+$  的地方。 ■



接下來，證明”條件 (2.6)  $\implies$  條件 (2.8)”

**輔助定理 4**：條件 (2.6)  $\implies$  條件 (2.8)

證明：當條件 (2.6) 成立，則表示  $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_N^-$  包含整個空間。定義

$$\Omega_{12}^+ = \Omega_3^+ \cap \dots \cap \Omega_N^+$$

並且，因為  $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_N^-$  包含整個空間，所以， $\Omega_1^- \cup \Omega_2^-$  必也包含  $\Omega_{12}^+$ ，且  $\Omega_1^- \cap \Omega_2^- \subseteq \Omega_{12}^+$ ，否則在  $\Omega_{12}^+$  中將存在  $x$  使得  $x^T L_i X > 0$ ， $i = 1, \dots, N$  的地方。所以，我們只要在系統  $L_1, L_2$  之中，可以找到一個  $\alpha_1$  使得  $x^T (L_1 + \alpha_1 L_2) x < 0$ ， $\forall x \in \Omega_{12}^+$ 。並且令  $L_1 + \alpha_1 L_2$  為一個新的  $\bar{L}_1$ ，則剩餘的系統  $\bar{L}_1, L_3, \dots, L_N$  仍然滿足條件 (2.6)。

定義

$$g_1(\alpha_1) := x^T (L_1 + \alpha_1 L_2) x, \forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$$

我們希望找到一個  $\alpha_1$  使得  $g_1(\alpha_1) < 0$ 。而在集合  $(\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$  中，我們知道  $x^T L_1 x > 0$ ,  $x^T L_2 x \leq 0$ 。因為集合  $(\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$  為一個 compact set，所以，我們可以在  $(\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$  中找到一個  $x$  使得  $x^T L_1 x = l_1$ ,  $x^T L_2 x = -l_2$  其中  $l_1, l_2 > 0$ ，並且  $g_1(\alpha_{11}) = 0$ ， $\alpha_{11} = l_1/l_2$  為最大值。我們希望  $g_1(\alpha_1) < 0$ ,  $\forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$  只要選擇  $\alpha_1 > \alpha_{11}$ ，則  $g_1(\alpha_1) < 0$ ,  $\forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$ 。同理，定義

$$g_2(\alpha_1) := x^T (L_1 + \alpha_1 L_2) x, \forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$$

我們希望  $g_2(\alpha_1) < 0$ 。而在集合  $(\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$  中，我們知道  $x^T L_1 x < 0$ ,  $x^T L_2 x > 0$ 。而集合  $(\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$  也是 compact set。所以，我們可以在  $(\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$  中找到一個  $x$  使得  $g_2(\alpha_{12}) = 0$ ，並且  $\alpha_{12}$  為最小值。因此，我們希望  $g_2(\alpha_1) < 0$ ,  $\forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$  只要選擇  $\alpha_1 < \alpha_{12}$ ，則  $g_2(\alpha_1) < 0$ ,  $\forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$ 。根據上述的結果，我們所找到的  $\alpha_{11}$  以及  $\alpha_{12}$ ，我們可以歸納出下列二式：

$$\alpha_1 > \alpha_{11} \iff x^T (L_1 + \alpha_1 L_2) x < 0, \forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-) \quad (2.19)$$

$$\text{以及 } \alpha_1 < \alpha_{12} \iff x^T (L_1 + \alpha_1 L_2) x < 0, \forall x \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-) \quad (2.20)$$

因此，只要  $\alpha_{11} < \alpha_{12}$ ，則我們可以找到一個  $\alpha_1$ ，滿足  $\alpha_{11} < \alpha_1 < \alpha_{12}$ 。使得式子 (2.19)、(2.20) 皆成立。

接下來我們證明  $\alpha_{11} < \alpha_{12}$ 。我們以反正法，假設  $\alpha_{11} > \alpha_{12}$ 。所以，我們可以找到一個  $\alpha_1^*$ ，滿足  $\alpha_{12} < \alpha_1^* < \alpha_{11}$ 。由式子 (2.19)、(2.20)，我們知道將存在一個  $x_1 \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-)$  以及  $x_2 \in (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-)$  使得  $x_1^T (L_1 + \alpha_1^* L_2) x_1 \geq 0$  以及  $x_2^T (L_1 + \alpha_1^* L_2) x_2 \geq 0$ 。定義  $\Omega^* = \{x | x^T (L_1 + \alpha_1^* L_2) x \geq 0, \|x\| = 1\}$ 。我們可以發現

$$\Omega^* \cap (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-) \neq \emptyset \text{ 以及 } \Omega^* \cap (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-) \neq \emptyset \quad (2.21)$$

而根據輔助定理 3，我們知道  $\Omega^*$  必為一個連通集合。所以

$$\Omega^* \subseteq (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_1^-) \cup (\Omega_{12}^+ \setminus \Omega_2^-) \quad (2.22)$$

並且， $(\Omega_1^- \cap \Omega_2^-) \subseteq \Omega^*$ 。但是，我們定義  $\Omega^* = \{x | x^T(L_1 + \alpha_1^* L_2)x \geq 0, \|x\| = 1\}$ ，其中也包含了  $\Omega_1^- \cap \Omega_2^-$ ，不管  $\alpha_1^*$  為任何大於0的值， $x^T(L_1 + \alpha_1^* L_2)x$  都不可能小於0。所以，我們假設錯誤，故  $\alpha_{11} < \alpha_{12}$ 。因此，我們在  $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$  之中，選擇一個  $\alpha_1$ 。令  $(L_1 + \alpha_1 L_2) = \bar{L}_1$ 。

接下來，我們只要重複上述的步驟，以  $\bar{L}_1, L_3$ ，找一個  $\alpha_2$ ，令  $(\bar{L}_1 + \alpha_2 L_3) = \bar{L}_2$ 。一直到化減為一個系統  $\bar{L}_N$ ，並且  $x^T \bar{L}_N x < 0, \forall x$ 。則  $\bar{L}_N$  為一個赫維茲矩陣，並且， $\bar{L}_N = L_1 + \alpha_1 L_2 + \dots + \alpha_{N-1} L_N$ 。 ■

經由輔助定理 1、2、4，我們知道條件 (2.7)  $\iff$  條件 (2.8) 並且條件 (2.6)  $\iff$  條件 (2.8)，所以條件 (2.6)  $\iff$  條件 (2.7)  $\iff$  條件 (2.8)，因此我們有了以下的定理 1：

**定理 1**：條件 (2.6)  $\iff$  條件 (2.7)  $\iff$  條件 (2.8)

我們已經證明完條件 (2.6)、(2.7) 互為對等條件，接下來我們要提供一個方法來尋找條件 (2.7) 中的  $\alpha_i$ 。當條件 (2.7) 成立，則我們可以找到  $\alpha_i$  使得  $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$  為赫維茲矩陣。以下為我們的步驟：

**演算法則 2**：

Step 1：由系統  $A_i, i = 1, \dots, n$  取出兩個系統  $A_1, A_2$ 。根據羅斯赫維茲穩定準則由矩陣

$A_1 + \alpha_1 A_2$  尋找  $\alpha_1$ ，使得矩陣  $A_1 + \alpha_1 A_2$  之特徵方程式的經由羅斯赫維茲的方法計算後變號次數為最少，並且小於零的值為最小值。

Step 2：令  $A_1 + \alpha_1 A_2 = \bar{A}_1$ ，同 step 1，以羅斯赫維茲準則計算矩陣  $\bar{A}_1 + \alpha_2 A_3$ ，並求解

出  $\alpha_2$ 。以同樣的方法求解出所有的  $\alpha_i$ ，若到最後可以找到  $\alpha_i$  使得  $A_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_{i-1} A_i$  為赫維茲矩陣，則進行下一個步驟。

Step 3：令  $A_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_{i-1} A_i = A_{eq}$  為赫維茲矩陣，並且由 Riccati equation  $A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q$  其中  $Q > 0$ ，求解出一個正定 (positive define) 矩陣  $P$ 。

Step 4 : 定義,  $i = 1, 2, \dots, N$

$$L_i = A_i^T P + P A_i,$$

$$\Omega_i^- = \{x | x^T L_i x < 0\}$$

以及切換平面

$$s_{ij}(x) = x^T (L_i - \epsilon L_j) x, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad \forall i \neq j$$

其中  $\epsilon$  滿足  $0 < \epsilon < 1$ 。

Step 5 : 根據下列的規則來切換兩系統：

(1) 在初始狀態時間  $t_0$  時,  $i = \arg \min_j (x^T(t_0) L_j x(t_0))$ , 則由系統  $A_i$  開始。並且

$$s_{ij}(x(t_0)) < 0, \quad \forall j \neq i$$

(2) 當  $s_{ij}(x)$  由負值改變到正值, 取  $\max_j s_{ij}(x(t))$ , 則系統  $A_i$  則切換到系統  $A_j$ ,

其中  $i = 1, 2, \dots, N$  並且  $i \neq j$ 。

## 2.3 2階不穩定系統

在這一節當中, 我們要討論當條件(2.6)以及條件(2.7)成立時, 其幾何意義為何。所以, 我們針對2階系統來探討其在平面上的幾何意義。首先, 我們先來探討  $L_i$  的不穩定的特徵值與特徵向量之間的關係。先針對只有兩個系統的情況, 如(2.1)。令  $\{\lambda_1^+, \lambda_2^-\}$  為  $L_1$  的特徵值,  $\{\mu_1^+, \mu_2^-\}$  為  $L_2$  的特徵值。而  $x_{11}^+$  為  $L_1$  不穩定的特徵值所對應的特徵向量, 而  $x_{21}^+$  為  $L_2$  不穩定的特徵值所對應的特徵向量。

定義

$$\delta_1 := x_{21}^{+T} L_1 x_{21}^+ \quad (2.23)$$

$$\delta_2 := x_{11}^{+T} L_2 x_{11}^+ \quad (2.24)$$

很明顯的, 當條件(2.6)成立, 則

$$\delta_1 < 0 \text{ 以及 } \delta_2 < 0 \quad (2.25)$$



由定理1的推論，我們有以下的結果：

**序列定理1**：當條件(2.6)成立，則  $\lambda_1^+ \mu_1^+ < \delta_1 \delta_2$ 。

證明：當條件(2.6)成立，由定理1，將存在一個  $\beta > 0$  使得  $L_1 + \beta L_2 < 0$ 。也就是說

$$x_{11}^{+T} (L_1 + \beta L_2) x_{11}^+ = \lambda_1^+ + \beta \delta_2 < 0 \text{ 以及 } x_{21}^{+T} (L_1 + \beta L_2) x_{21}^+ = \delta_1 + \beta \mu_1^+ < 0 \quad (2.26)$$

也等於是

$$\lambda_1^+ < -\beta \delta_2 \text{ 以及 } \mu_1^+ < -\frac{\delta_1}{\beta} \quad (2.27)$$

或

$$\lambda_1^+ \mu_1^+ < \delta_1 \delta_2 \quad (2.28)$$

■

考慮  $A_1$  以及  $A_2$  都不是赫維茲矩陣，我們可以找一個  $P$  使得  $L_i = A_i^T P + P A_i$ ,  $i = 1, 2$  也都不是赫維茲矩陣。所以我們取  $(\lambda_1^+, x_{11}^+)$  以及  $(\mu_1^+, x_{21}^+)$  為  $L_1$  以及  $L_2$  的特徵值與特徵向量。並且取  $\|x_{11}^+\| = 1$  以及  $\|x_{21}^+\| = 1$ ，並且

$$x_{11}^{+T} x_{21}^+ \geq 0 \quad (2.29)$$

由序列定理1，我們知道當條件(2.6)成立則

$$\lambda_1^+ \mu_1^+ < \delta_1 \delta_2 \quad (2.30)$$

也等於

$$\lambda_1^+ \mu_1^+ < \lambda_2^- \mu_2^- \quad (2.31)$$

其中  $\lambda_2^-$ ,  $\mu_2^-$  為  $L_1$ ,  $L_2$  的穩定特徵值。且條件(2.30)或條件(2.31)為條件(2.6)之必要條件。然而，如果我們加入一個特別的條件如下列的(2.32)，則我們將有對於條件(2.6)之充分必要條件。

**定理 2**：考慮兩個系統如 (2.1)。當條件 (2.6) 成立若且唯若條件 (2.30) 或條件 (2.31) 成立，並且

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &< \frac{\lambda_1^+ \mu_1^+ + \lambda_1^- \mu_1^- - 2\sqrt{\lambda_1^+ \mu_1^+ \lambda_1^- \mu_1^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\mu_1^+ - \mu_1^-)} \\ \text{或 } \theta &> \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^- \mu_1^-} - \sqrt{\lambda_1^+ \mu_1^+}}{\sqrt{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\mu_1^+ - \mu_1^-)}} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

其中  $\theta$  為  $x_{11}^+$  以及  $x_{21}^+$  之間的夾角。

證明：我們可以很容易的知道， $\{x|x^T \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^-)x \geq 0\}$  以及  $\{x|x^T \text{diag}(\mu_1^+, \mu_2^-)x \geq 0\}$  為對稱於原點兩邊的圓錐形式。並且其圓錐所張的的角度分別為  $2 \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_1^+/\lambda_1^-}$  以及  $2 \tan^{-1} \sqrt{-\mu_1^+/\mu_1^-}$ 。而且圓錐的角度經由線性轉換之後，仍然不變。而且， $L_1$  以及  $L_2$  為對稱矩陣，所以一定可以找到正交的特徵向量，將  $L_1$  以及  $L_2$  轉換為對角矩陣。因此，條件 (2.6) 成立，則  $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+ = \emptyset$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \theta > \tan^{-1} \left( \sqrt{-\lambda_1^+/\lambda_1^-} \right) + \tan^{-1} \left( \sqrt{-\mu_1^+/\mu_1^-} \right) \\ &\Leftrightarrow \cos \theta < \cos \left\{ \tan^{-1} \left( \sqrt{-\lambda_1^+/\lambda_1^-} \right) + \tan^{-1} \left( \sqrt{-\mu_1^+/\mu_1^-} \right) \right\} \\ &\Leftrightarrow \cos \theta < \frac{\sqrt{\lambda_1^- \mu_1^-} - \sqrt{\lambda_1^+ \mu_1^+}}{\sqrt{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\mu_1^+ - \mu_1^-)}} \end{aligned}$$

由定理 2 可知，兩個 2 階不穩定系統  $L_1$  以及  $L_2$  要符合條件 (2.6)，除了特徵值的關係要符合 (2.31)，特徵向量所夾的角度也要滿足 (2.32)。而當此兩個系統為對角矩陣時，他們有一樣的的特徵向量

$$x_{11}^+ = \pm x_{21}^- \text{ 以及 } x_{21}^+ = \pm x_{11}^- \quad (2.33)$$

其中  $x_{11}^-$  以及  $x_{21}^-$  分別為  $L_1$  以及  $L_2$  穩定特徵值所對應的單位特徵向量。則條件 (2.6) 成立若且唯若條件 (2.30) 或條件 (2.31) 條件成立。

**序列定理 2** : 當  $L_1$  以及  $L_2$  有同樣的特徵向量  $x_{11}^+ = \pm x_{21}^-$  以及  $x_{21}^+ = \pm x_{11}^-$ 。則條件 (2.6) 成立若且唯若條件 (2.30) 或條件 (2.31) 條件成立。

有了上述的條件，當只有兩個 2 階不穩定系統時，我們可以很快的經由系統特徵值與特徵向量，來判斷出是否存在穩定切換控制律。但當系統超過兩個以上時，則需要些微的修改，接下來我們就來討論  $N$  個 2 階系統在幾何上的意義。

考慮  $N$  個二階不穩定系統，如式子 (2.5)。令  $\{\lambda_i^+, \lambda_i^-\}$  為  $L_i$  之特徵值， $\{x_{i1}^+, x_{i1}^-\}$  分別為  $L_i$  之特徵值所對應的特徵向量。

**定理 3** : 考慮  $N$  個二階系統如 (2.5)。條件 (2.6) 成立若且唯若

$$\phi_i < \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_i^-}{\lambda_i^+}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_{i+1}^-}{\lambda_{i+1}^+}}, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (2.34)$$

$$\pi - \left( \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i \right) < \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_i^-}{\lambda_i^+}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_N^-}{\lambda_N^+}} \quad (2.35)$$

成立。不失一般性我們可以令  $x_{11}^-$  在  $y$  軸上，由上而下依序為  $x_{11}^-, x_{21}^-, \dots, x_{N1}^-$ 。而  $\phi_i$  為  $x_{i1}^-$  與  $x_{(i+1)1}^-$  之間的夾角。

證明：考慮  $N$  個線性系統如 (2.5)，我們假設  $N=4$ 。考慮這四個系統穩定的特徵值所對應的特徵向量，在平面上的分佈。如圖 2 所示：

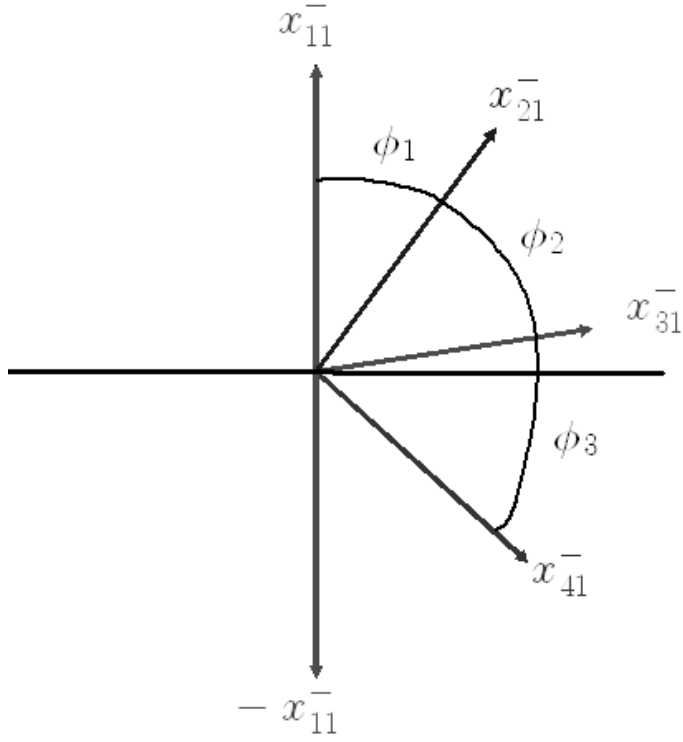


圖 2: 特徵向量在平面上的分佈圖

當條件(2.6)成立，則 $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ 必須包含整個平面。由輔助定理3，我們知道 $\Omega_i^-$ 皆對稱於原點，所以我們只要考慮縱軸的右半部。只要右半部皆包含於 $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ ，則左半部必定也包含於 $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ 。我們知道 $\{x | x^T L_i x \leq 0, i = 1, \dots, 4\}$ 的範圍為對稱於原點兩邊的圓錐形式。並且其圓錐所張開的角度為 $2 \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_i^- / \lambda_i^+}$ 。首先考慮 $x_{11}^-$ 以及 $x_{21}^-$ 之間，其 $x^T L_1 x < 0$ 以及 $x^T L_2 x < 0$ 的範圍必須有交集。所以，

$$\phi_1 < \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_1^- / \lambda_1^+} + \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_2^- / \lambda_2^+}$$

同理， $x_{21}^-$ 以及 $x_{31}^-$ 之間還有 $x_{21}^-$ 以及 $x_{41}^-$ 之間也必須滿足

$$\phi_2 < \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_2^- / \lambda_2^+} + \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_3^- / \lambda_3^+}$$

$$\phi_3 < \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_3^- / \lambda_3^+} + \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_4^- / \lambda_4^+}$$

則 $x_{11}^-$ 以及 $x_{41}^-$ 之間已經都包含於 $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ 。接下來只要檢查 $-x_{11}^-$ 以及 $x_{41}^-$ 之間， $x^T L_1 x < 0$ 以及 $x^T L_2 x < 0$ 的範圍是否有所交集：

$$\implies \pi - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) < \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_1^- / \lambda_1^+} + \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_4^- / \lambda_4^+}$$

$$\implies \pi - \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i\right) < \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_1^-/\lambda_1^+} + \tan^{-1} \sqrt{-\lambda_4^-/\lambda_4^+}$$

如此一來，則右半平面皆包含於  $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ ，由輔助定理3，我們知道左半平面對稱於右半平面，所以，左半平面也包含於  $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ 。故整個平面皆包含於  $\Omega_1^- \cup \dots \cup \Omega_4^-$ ，滿足條件(2.6)。

在一般的情況下， $L_i$  的特徵向量不一定會如圖2中分佈。但  $L_i, i = 1, \dots, N$  皆為實對稱矩陣，必定存在一個  $U_1$  使得  $U_1^T L_1 U_1$  為一個對角矩陣，並讓  $L_1$  之穩定特徵值之特徵向量正好落在  $y$  軸上。然後以同樣的  $U_1$  對  $L_i$  做線性轉換，使得  $U_1^T L_i U_1 = D_i, i = 1, \dots, N$ ，則可以使  $D_i$  之特徵向量如圖2中所分佈。 ■

有了定理3的條件，我們只要以系統的特徵值與特徵向量，帶入條件(2.34)以及條件(2.35)，就可以判斷是否存在穩定切換律。

## 2.4 不可穩定之控制系統

在這一節當中，我們要加入控制器  $u(x)$  於不可穩定的系統之中，使得這  $N$  個不可穩定之系統滿足條件(2.6)或(2.7)，進而達到穩定控制的目的。考慮  $N$  個線性系統

$$\dot{x} = Ax + B_i u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.36)$$

其中  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$ ，並且  $(A, B_i)$  這  $N$  個系統皆不可穩定 (unstabilizable)。也就是說，不存在線性狀態迴授

$$u_i(x) = K_i x, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.37)$$

使得  $A + B_i K_i = A_i$  為赫維茲矩陣。但在2.2節的討論中，即使系統皆不為穩定矩陣，但仍然可能存在穩定切換律。因此，我們只要選擇適當的  $u_i(x)$ ，使得  $A + B_i K_i = A_i$  滿足條件(2.7)，仍然可以找到適當的切換律，使得  $x(t) \rightarrow 0$  隨著  $t \rightarrow \infty$ 。接下來，我們根據2.2節中的結果，來研究穩定切換律的存在條件。

根據條件(2.7)結果，只要存在 $K_i, i = 1, \dots, N$ 使得

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B_i K_i) \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (2.38)$$

或是等同於條件(2.8)，存在 $P > 0$ 使得

$$\left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B_i K_i) \right\}^T P + P \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B_i K_i) \right\} < 0 \quad (2.39)$$

或

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i [(A + B_i K_i)^T P + P(A + B_i K_i)] < 0 \quad (2.40)$$

我們選擇

$$K_i = -B_i^T P \quad (2.41)$$

則式子(2.40)變成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^T P + P A - 2P B_i B_i^T P) < 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^T P + P A) - \sum_{i=1}^N \alpha_i (2P B_i B_i^T P) < 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

同除以 $\alpha_1$ ，令 $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_1} = \beta_i, i = 1, \dots, N-1$ ，則變成下列式子

$$A_\beta^T P + P A_\beta - 2P B_\beta B_\beta^T P < 0 \quad (2.43)$$

其中

$$A_\beta = \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i\right) A, \quad B_\beta = (B_1, \sqrt{\beta_1} B_2, \dots, \sqrt{\beta_{N-1}} B_N) \quad (2.44)$$

如式子(2.43)所示，存在 $P > 0$ 以及 $\alpha_i > 0$ 使得(2.43)成立，若且唯若 $(A_\beta, B_\beta)$ 為可穩定。所以，我們有接下來的結果。

**定理 4**：考慮 $N$ 個線性控制系統，如(2.36)所示。假設 $(A, B_i), i = 1, \dots, N$ 皆不可穩定，但 $(A, B)$ 為可穩定，其中 $B = (B_1, \dots, B_N)$ 。則存在 $K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ 使得在系統

$A + B_i K_i$  之間，存在穩定切換律。而  $K_i$  可以依照式子 (2.41) 的方式來選取。而  $P$  可以經由解下列的 Riccati equation 所求得

$$A_\beta^T P + P A_\beta - 2 P B_\beta B_\beta^T P = -Q \quad (2.45)$$

其中  $Q > 0$ ,  $\beta_i > 0$ 。

證明：要證明上述的定理，我們只需要證明  $(A_\alpha, B_\alpha)$  為可穩定若且唯若  $(A, B)$  為可穩定。若  $(A, B)$  為可穩定，其中  $B = (B_1, \dots, B_N)$ ，必定存在一個  $\bar{K} = (\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_N)^T$ ，使得  $A + B\bar{K}$  為一個赫唯茲矩陣。而  $A + B\bar{K} = A + \sum_{i=1}^N B_i \bar{K}_i$ 。對  $(A_\alpha, B_\alpha)$ ，其中  $A_\alpha = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) A = \alpha A$ ,  $B_\alpha = (\sqrt{\alpha_1} B_1, \dots, \sqrt{\alpha_N} B_N)$ ，我們取  $K = (\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_1}} \bar{K}_1, \dots, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_N}} \bar{K}_N)^T$ 。所以

$$\begin{aligned} A_\alpha + B_\alpha K &= A_\alpha + \sum_{i=1}^N \sqrt{\alpha_i} B_i \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_i}} \bar{K}_i \\ &= \alpha A + \sum_{i=1}^N \alpha B_i \bar{K}_i \\ &= \alpha (A + \sum_{i=1}^N B_i \bar{K}_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

而  $A + \sum_{i=1}^N B_i \bar{K}_i$  為一個赫唯茲矩陣，且  $\alpha > 0$ 。故  $(A_\alpha, B_\alpha)$  為可穩定。並且，可以由式子 (2.45) 來求解  $P$ 。 ■

由上面的定理我們知道只要  $(A, B)$  為可穩定，則一定存在穩定切換律。由上面的證明，我們可以發現  $(A, B)$  與  $(A_\alpha, B_\alpha)$  其實只是倍數上的關係，所以我們可以任意選擇  $\alpha_i > 0$ ，然後由  $(A_\alpha, B_\alpha)$  求解出所需要之  $P$ ，定義出  $A - \alpha_i B_i B_i^T P = A_i$ ，接下來依只要依照演算法則 2 的步驟，就可以建構穩定切換律。

# CHAPTER 3

## 共同穩定器的研究與設計

接下來在這個章節，我們要來討論存在共同穩定器的判斷方法。我們藉由尋找共同的二次里奧波諾夫函數，並且利用在第二章已有的結果來判斷是否存在共同穩定器。

- 3.1: 介紹尋找共同穩定器的動機與用途。
- 3.2: 根據第二章的結果，判斷共同穩定器存在的方法。
- 3.3: 對於2階系統，針對其幾何意義，利用其特徵值與特徵向量來判斷是否存在共同穩定器。

### 3.1 共同穩定器之問題描述

在第二章中，我們提到了有關於切換系統的問題，就是如何在不穩定的系統之間找出適當的切換律以達到穩定控制。但是，當系統有故障發生的時候，是否可以用剩下來的控制器繼續運作，並且保有原來的穩定特性，這是個值得研究的問題。最近在可靠度控制中對於控制器容錯控制的議題有相當多的相關研究([14]、[15]、[18]、[27]、[30])。因此，我們也來探討一下關於共同穩定器的問題。

為什麼要設計共同穩定器，我們做一個簡單的說明。在一般的情況下，不管任何系統都有可能發生故障，有可能是因為人為因素或是外在的因素，也可能是因為



系統老舊等等。一旦有了故障發生，就需要維修，否則系統可能無法正常運作。但是，有一些特別的系統一旦發生故障，其維修的費用或是維修的過程相當的費時又費力，如在外太空的人造衛星、探測器等。因為這些特別的系統，我們無法避免故障的發生，所以一個可行的方法就是利用系統的redurdancy來設計共同穩定器，使得系統發生故障時，剩下來的控制器仍然可以使原來的系統正常的運作。如此一來，我們可以省下了故障的維修費用以及回收的費用，也不必設計多餘感應器來檢查系統是否有發生故障。

在[27]中，將可能發生故障的控制元件預設在某一特定的集合內。而另一篇文章[14]，將[27]中的結果推廣到故障的情況可以不在預設的集合中，並且，容許故障的控制器也可以不只一個。而且共同穩定器主要在找一個 $\beta > 0$ 使得 $A - (\beta)B_i B^T P$ 為赫維茲矩陣，其條件與第二章的條件(2.4)有共同之處。因此，我們利用第二章的兩個對等條件以及[14]中的觀念，來探討共同穩定器的存在條件。

### 3.2 共同穩定器之設計與研究

在這一節，我們要利用第二章2.1節的兩個條件以及[14]中的方法來探討存在共同穩定器的條件。考慮一個線性系統

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。根據[14]中，定義控制矩陣之集合

$$\mathcal{B} = \{B_i \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid B_i \text{ 是將 } B \text{ 中的某些行向量以零向量取代}, \\ \text{ 並且 } (A, B_i) \text{ 皆為可穩定}\} \quad (3.2)$$

也就是每個 $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $B_i$ 表示控制矩陣 $B$ 中某些控制器發生故障。並且很明顯的集合 $\mathcal{B}$ 中包含有限多個矩陣。而我們的目的就是要找系統 $(A, B_i)$ 的共同穩定器，其中 $B_i \in \mathcal{B}$ 。

由線性系統定理知道，一對線性系統 $(A, B)$ ，如果 $A$ 之不穩定的子空間包含於 $(A, B)$ 可控的範圍內，則此系統為可穩定化[15]。由此定理，我們或許會猜測如果系

統  $(A, B_i)$ ,  $B_i \in \mathcal{B}$  其可控的範圍皆包含  $A$  的不穩定子空間，則  $\mathcal{B}$  存在共同穩定器。

但是，很不幸的，這樣的猜測是錯誤的。以下為一個例子：

**範例 3**：考慮系統 (3.1)，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

令

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

我們可以很容易的知道  $(A, B)$  以及  $(A, B_i)$ ,  $i = 1, 2$  皆為完全可控。根據 (3.2) 的定義，我們知道  $\mathcal{B} = \{B, B_1, B_2\}$ 。假設這三個系統的共同穩定器為  $u = Kx$ ，其中

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

也就是說  $A + B_i K$ ,  $i = 1, 2$  都是赫維茲矩陣。根據羅斯赫維茲穩定準則， $(A + B_1 K)$  為穩定矩陣，則  $\text{tr}(A + B_1 K) = k_{11} - k_{12} + 3 < 0$  以及  $\det(A + B_1 K) = 2k_{11} - k_{12} + 2 > 0$ ，其中  $\text{tr}(\cdot)$  以及  $\det(\cdot)$  為矩陣之對角線和以及行列式值。所以，只要取  $k_{11} > 1$ ,  $k_{12} > 4$ ，則  $(A + B_1 K)$  為赫維茲矩陣。同理，對於系統  $(A + B_2 K)$ ， $\text{tr}(A + B_2 K) = k_{21} + k_{22} + 3 < 0$  以及  $\det(A + B_2 K) = 2k_{21} + k_{22} + 2 > 0$ 。只要選擇  $k_{21} > 1$ ,  $k_{22} < -4$ ，則  $(A + B_2 K)$  為赫維茲矩陣。接下來，我們檢查系統  $(A + BK)$ ， $\det(A + BK) = 2k_{11}(k_{22} + 1) + 2k_{21}(1 - k_{12}) - k_{12} + (k_{22} + 2)$ ，帶入由系統  $(A + B_1 K)$  以及  $(A + B_2 K)$  所求得值，我們發現  $\det(A + BK) < 0$ 。因此，我們知道這三個系統沒有共同穩定器。

由上面述的例子來看，我可以發現並不是所有的可穩定的系統都有共同穩定器，一定要滿足某些條件，才有可能存在共同穩定器。首先，我們設計控制器  $u$  使得系統在沒有故障發生時其性能最好，然後再來探討如何選取共同穩定器。因為系統  $(A, B)$  為可穩定，因此，我們可以令  $u = -B^T P x$ ，則沒有發生故障時系統的性能最好。藉由解 algebraic Riccati equation (ARE) 來得到我們所要的正定矩陣  $P$ 。如下列

式子所示：

$$A^T P + PA - PBB^T P + H = 0 \quad (3.6)$$

其中  $H$  為任意的正定 (positive define) 矩陣。如此，當系統沒有故障發生時，這個控制器可以正常的運作。此時，式子 (3.1) 變成了

$$\dot{x} = (A - BB^T P)x \quad (3.7)$$

其中  $(A - BB^T P)$  為一個赫維茲矩陣。根據第二章 2.1 節中的條件 (2.4) 的定義，我們可以發現將存在一個  $\beta > 0$  使得  $A + (-\beta)BB^T P$  為一個赫維茲矩陣。而在 2.1 節中又有提到條件 (2.2) 以及條件 (2.4) 為對等條件，也就是說，矩陣  $A$  的不穩定範圍都將被矩陣  $-BB^T P$  所覆蓋。也就是說

$$\{x | x^T (A^T P + PA)x < 0\} \cup \{x | -x^T PBB^T Px < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (3.8)$$

因此，我們令控制器為  $u = -\beta B^T P x$ ，其存在共同穩定器的充分條件為對於所有的  $B_i, i = 1, \dots, k$ ，其中  $B_i \in \mathcal{B}$ ， $\mathcal{B}$  如式子 (3.2) 所示， $A + (-\beta)B_i B_i^T P$  必須皆為赫維茲矩陣。

接下來就來介紹如何以 2.1 節中的兩個條件 (2.2) 以及 (2.4)，來判斷是否存在共同穩定器。首先，我們定義

$$\Omega_A^+ = \{x | x^T (A^T P + PA)x \geq 0, \|x\| = 1\} \quad (3.9)$$

以及

$$\Omega_{B_i}^- = \{x | x^T (-PB_i B_i^T P)x < 0, \|x\| = 1\} \quad (3.10)$$

我們有以下的定理：

**定理 5** : 如果  $\Omega_A^+ \subseteq \Omega_{B_i}^-$ , 其中  $\Omega_A^+$ ,  $\Omega_{B_i}^-$  定義如式子 (3.9), (3.10)。若且唯若我們可以找到  $\beta_i > 0$  使得  $A + (-\beta_i B_i B^T P)$  皆為赫維茲矩陣, 其中  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, k$ 。

證明：見第 2 章中的輔助定理 1-4 之證明。

所以，當定理 5 的條件成立時，則我們可以根據羅斯赫維茲 (Routh-Hurwitz) 穩定準則，個別求出使得  $A + (-\beta_i B_i B^T P)$  為赫維茲矩陣的  $\beta_i$  的範圍。顯而易見的， $\beta_i$  之範圍為  $(c_i, \infty)$ ，其中  $c_i > 0$ 。所以我們只要選擇一個  $\beta \in (\max(c_i), \infty)$ ，則  $A + (-\beta B_i B^T P)$  皆為穩定矩陣，而  $u = -\beta B^T P x$  為我們所設計的共同穩定器，並且系統沒有發生故障時其性能為最好。

根據上述的方法，我們整理出一個步驟，來設計共同穩定器：

**演算法則 3** :

Step 1 : 令所有可能發生故障但仍可穩定的控制系統為  $(A, B_i)$ ，其中  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, k$ 。



Step 2 : 依照原控制系統 (3.1)，令  $u = -B^T P x$ ，並利用式子 (3.6)，來求解出一個正定矩陣  $P$ 。

Step 3 : 檢查  $\Omega_A^+$  是否都有包含於  $\Omega_{B_i}^-$  中。

Step 4 : 利用羅斯赫維茲穩定準則來求解  $(A + (-\beta_i) B_i B^T P)$  為赫維茲矩陣之  $\beta_i$  的範圍，並取  $\beta_i$  之範圍的交集。

上述的設計方法，主要目的在於使系統在沒有發生故障時性能最好。但系統發生故障時，雖然系統仍然可以運作，但性能可能變的很差。因此，若我們希望系統在發生故障時性能可以更好，則我們可以根據 [14] 中的定義，由發生最壞情況時的控制器來做設計。首先，定義  $\mathcal{B}$  的子集合為  $\mathcal{B}_1 = \{B_1, \dots, B_k\}$ ，其中  $\mathcal{B}$  的定義如 (3.2) 所示。若  $\text{Range}(B_1) \subseteq \text{Range}(B_2) \subseteq \dots \subseteq \text{Range}(B_k)$  則我們稱  $\mathcal{B}_1$  為巢狀 (nested)，並且

$B_1$  為系統  $(A, B_i)$  的最壞情況 (最少數可用的控制器) 其中  $B_1 \in \mathcal{B}_1$ 。在一般的情況下, 可能有數個巢狀子集合  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s \in \mathcal{B}$ , 我們令這些巢狀子集合的最壞情況分別為  $B_1^*, B_2^*, \dots, B_k^*$ , 其中  $B_i^* \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, k$ 。然後選擇其中一組控制器  $B_1^*$ , 其中

$$\text{rank}(B_1^*) = \min_{1 \leq j \leq k} \text{rank}(B_j^*) = l$$

令  $u = -B_1^{*T} P x$ 。接下來依照演算法則3的步驟, 求出一個正定矩陣  $P$ , 並且檢查是否所有的  $\Omega_A^+$  都包含於  $\Omega_{B_i^*}^-$  中, 其中  $\Omega_{B_i^*}^- = \{x | -x^T (P B_i^* B_i^{*T} P) x < 0, \|x\| = 1\}$ 。若所有的  $\Omega_A^+$  都包含於  $\Omega_{B_i^*}^-$  中, 則我們可以找到一個  $\beta > 0$  使得  $A - \beta B_i^* B_i^{*T} P$  皆為赫維茲矩陣。所以我們可以設計共同穩定器為  $u = -\beta B^T P x$ , 並且當系統發生故障時性能可以比上面的設計方法好。

### 3.3 2階系統共同穩定器之設計與研究

在這一節, 我們將針對2階線性控制系統來討論共同穩定器的存在條件。考慮線性控制系統如(3.1)所示, 其中  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B = [b_1, \dots, b_m], b_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, i = 1, \dots, m$ 。定義控制器發生故障時的矩陣為  $B_i$ , 其中  $B_i$  是將  $B$  矩陣的  $b_j$  向量以零向量所取代,  $\forall j \neq i$ 。根據上一節的方法, 因為  $(A, B)$  為可穩定, 我們可以令  $u = -B^T P x$ , 代入 algebraic Riccati Equation 求解出我們所要的矩陣  $P$ 。接下來, 我們要來檢查每個  $\Omega_{B_i}^-$  是否都包含  $\Omega_A^+$ , 其中  $\Omega_A^+$  以及  $\Omega_{B_i}^-$  定義如式子(3.9)、(3.10)。

根據上述  $B_i$  的定義, 我們知道  $\text{rank}(B_i)$  皆為1。所以, 矩陣  $P B_i B_i^T P$  皆為實對稱的半正定矩陣, 並且  $\text{rank}(-P B_i B_i^T P) = 1$ , 令矩陣  $-P B_i B_i^T P$  之特徵值為  $(-\lambda_i, 0)$ , 對應於  $-\lambda_i$  的單位特徵向量為  $x_i$ 。定義

$$\Omega_{B_i}^0 = \{x | x^T (-P B_i B_i^T P) x = 0, \|x\| = 1\} \quad (3.11)$$

很明顯的,  $\Omega_{B_i}^0$  為對稱於原點的兩點, 令此兩點為  $\pm x_i^0$ , 並且  $x_i^T x_i^0 = 0$ 。也就是說  $x_i$  與  $x_i^0$  這兩個向量互相垂直。所以, 我們可以很容易的經由矩陣  $(-P B_i B_i^T P)$  的單位特徵向量  $x_i$  得到  $x_i^0$ 。而我們希望  $\Omega_A^+ \subseteq \Omega_{B_i}^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ , 並且  $\Omega_{B_i}^- = \mathbb{R}^2 \setminus \{\Omega_{B_i}^0\}$ 。所

以，只要  $x_i^0 \notin \Omega_A^+, \forall i = 1, \dots, m$ ，則  $\Omega_A^+ \subseteq \Omega_{B_i}^-, i = 1, \dots, m$ 。因此，我們只要將  $x_i^0$  代入矩陣  $(A^T P + PA)$  中，檢查是否  $x_i^{0T} (A^T P + PA) x_i^0 < 0$  對於所有  $i = 1, \dots, m$ 。若所有  $x_i^{0T} (A^T P + PA) x_i^0 < 0$ ，則我們可以找到  $\beta_i > 0$  使得  $(A + (-\beta_i) B_i B_i^T P), \forall i = 1, \dots, m$  皆為赫維茲矩陣。接下來只要以羅斯赫維茲得方法求出  $\beta_i$  的範圍，並取其交集，則我們可以得到一個  $\beta > 0$  使得  $(A + (-\beta) B_i B_i^T P)$  皆為赫維茲矩陣。

接下來，我們將上述的推論做一個簡單的整理，而有了以下這個定理：

**定理 6**：如果  $\Omega_A^+ \subseteq \Omega_{B_i}^-$  或  $\Omega_{B_i}^0 \not\subseteq \Omega_A^+$  成立，其中  $\Omega_A^+, \Omega_{B_i}^-, \Omega_{B_i}^0$  定義如式子 (3.9)、(3.10) 以及 (3.11)，則我們可以找到一個共同穩定器  $u = -\beta B^T P x$ 。

因此，針對二階系統我們可以經由系統的特徵向量的關係來判斷是否存在共同穩定器，然後經由演算法則 3 的方法設計我們所要的共同穩定器。



# CHAPTER 4

## 模擬與討論

在這個章節，我們要以幾個簡單的例子來說明前兩個章節所提出的一些結果。根據第2、3章中所提出的穩定切換律的建構方法與判斷條件以及共同穩定器的設計方式，經由範例的說明，我們可以更瞭解先前所討論出來的結果以及如何運用這些條件。

- 4.1：針對[26]中，關於兩個不穩定系統存在穩定切換律的問題提出相關的例子與討論。
- 4.2：對於N個不穩定系統存在穩定切換律的問題提出相關的例子與討論。
- 4.3：對於N個2階不穩定系統存在穩定切換律的問題提出相關的例子與討論。
- 4.4：對於共同穩定器的問題提出相關的例子與討論。

### 4.1 兩個不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論

根據[26]中的例子，我們依照步驟1的方法，實地的建構穩定切換律。並且討論

Step 3中的 $\epsilon$ 對於整個切換系統有何影響。以下為[26]中所提出的例子：

範例 4 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}$$

分析：經由簡單的計算， $A_1$ 之特徵值為  $1.5 \pm 2.1794 i$ 、 $A_2$ 之特徵值為 0.358 以及 -10.3852。所以  $A_1, A_2$  皆為不穩定矩陣。根據步驟 1，來建構穩定切換律。

Step 1 : 定義

$$A + \beta A_2 = A_{eq} = \begin{bmatrix} -4 + 3\beta & -5 + 5\beta \\ 7 - 7\beta & 7 - 13\beta \end{bmatrix}$$

矩陣  $A_{eq}$  之特徵方程式

$$\begin{aligned} \Delta(A_{eq}) &= \det(SI - A_{eq}) = \begin{vmatrix} S + 4 - 3\beta & 5 - 5\beta \\ -7 + 7\beta & S - 7 + 13\beta \end{vmatrix} \\ &= S^2 + (-3 + 10\beta)S + 7 + 3\beta - 4\beta^2 \end{aligned}$$

以羅斯赫維茲準則尋找  $\beta$  使得  $A_{eq}$  為赫維茲矩陣，若  $A_{eq}$  為赫維茲矩陣則

$$\begin{cases} -3 + 10\beta > 0 \\ -4\beta^2 + 3\beta + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta > 0.3 \\ -1 < \beta < 1.75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.3 < \beta < 1.75$$

Step 2 : 選擇  $\beta = \frac{2}{3}$ ，所以  $A_{eq} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ 。令一矩陣  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，由

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q$$

$$\text{求解出 } P = \begin{bmatrix} 0.5413 & 0.0105 \\ 0.0105 & 0.3147 \end{bmatrix}$$



Step 3 : 定義

$$L_1 = A_1^T P + P A_1 = \begin{bmatrix} -1.7832 & 1.028 \\ 1.028 & -4.3007 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = A_2^T P + P A_2 = \begin{bmatrix} 1.3007 & -1.1014 \\ -1.1014 & -8.0769 \end{bmatrix}$$

選擇  $\epsilon = 0.5$ ，則

$$S_1(x) = x^T (L_1 - \epsilon L_2) x = x^T \begin{bmatrix} -2.4336 & 1.5787 \\ 1.5787 & 8.3392 \end{bmatrix} x$$

$$S_2(x) = x^T (L_2 - \epsilon L_1) x = x^T \begin{bmatrix} 2.1923 & -1.6154 \\ -1.6154 & -10.2273 \end{bmatrix} x$$

Step 4 : 接下來我們選擇初始值為  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，根據 [26] 中的切換法則以電腦模擬其結

果。我們發現到  $x$  由  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結果如圖 3、4 所示。



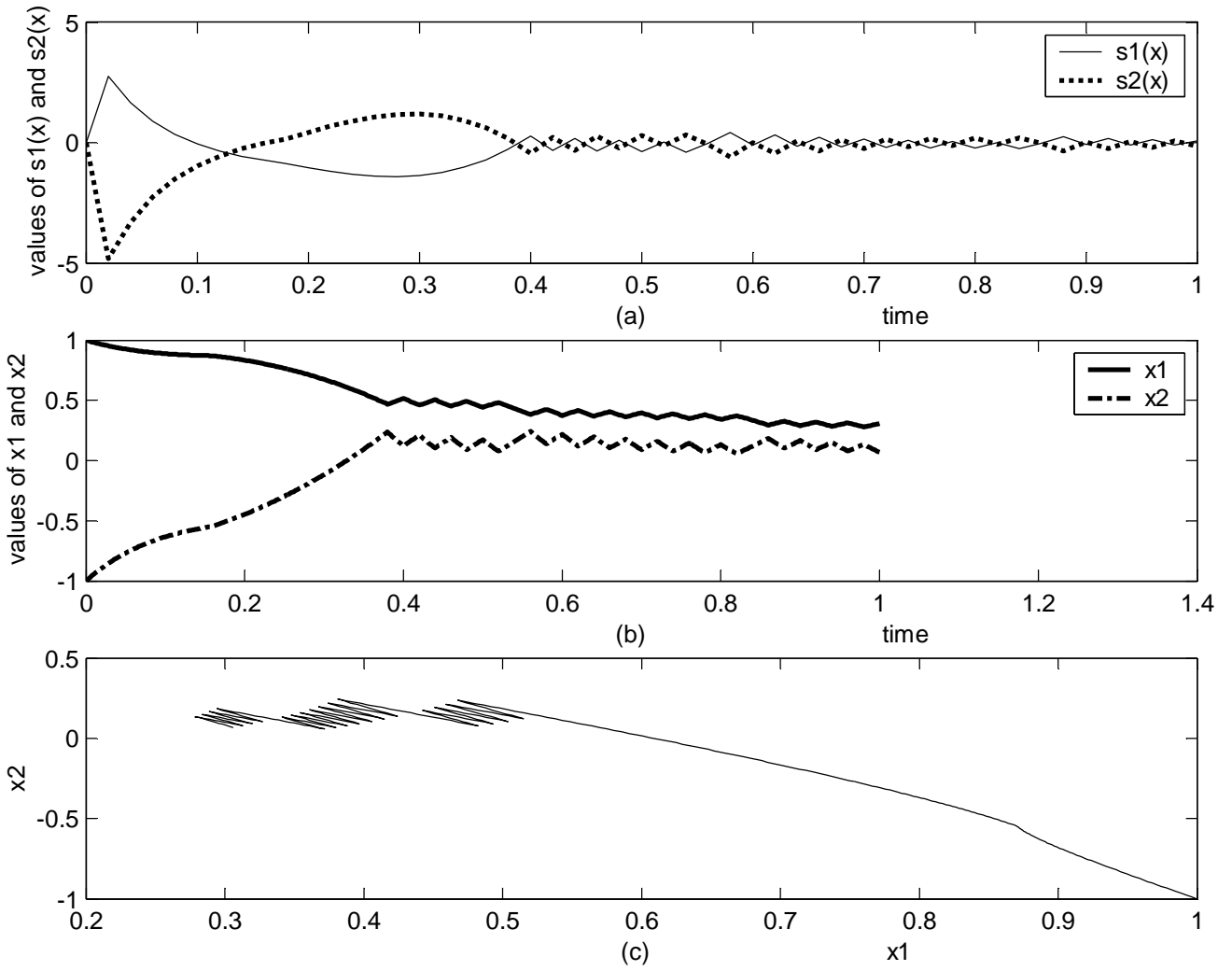


圖 3: 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 1 秒：(a)  $s_1, s_2$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (c)  $x_1$  為橫軸  $x_2$  為縱軸分佈圖

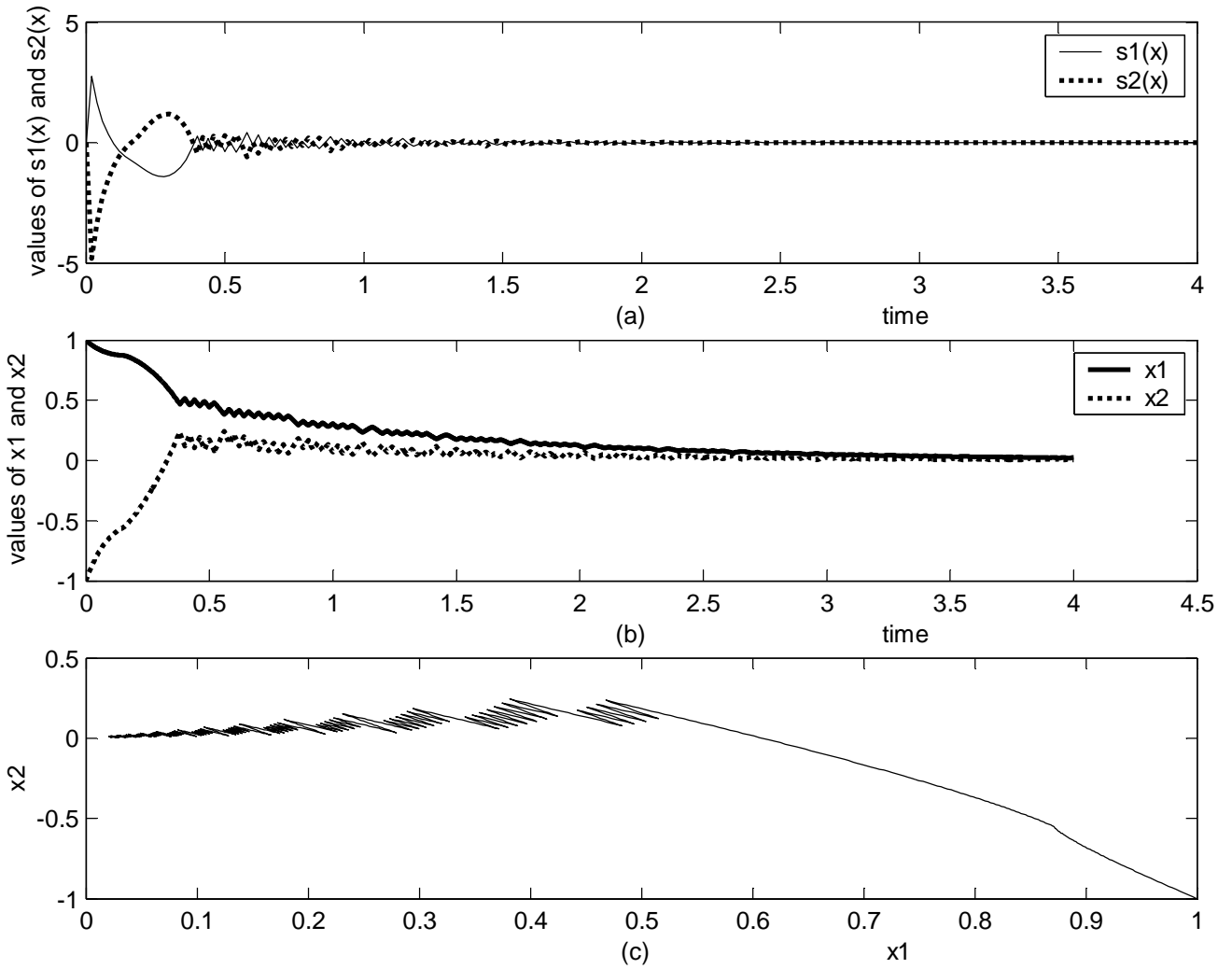


圖 4: 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒：(a)  $s_1, s_2$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (c)  $x_1$  為橫軸  $x_2$  為縱軸的分佈圖

上述的例子是關於兩個不穩定系統之間尋找穩定切換律的方法以及其模擬結果。

接下來，我們要來探討 $\epsilon$ 對模擬結果的影響。先前的模擬結果我們選取 $\epsilon = 0.5$ ，現

在我們選擇 $\epsilon = 0.1$ 以及 $\epsilon = 0.9$ 來和 $\epsilon = 0.5$ 時做個比較。首先，我們選擇 $\epsilon = 0.1$ ，

其模擬結果如圖5。我們可以發現圖5中有一種鋸齒狀的圖形，我們稱作為跳切

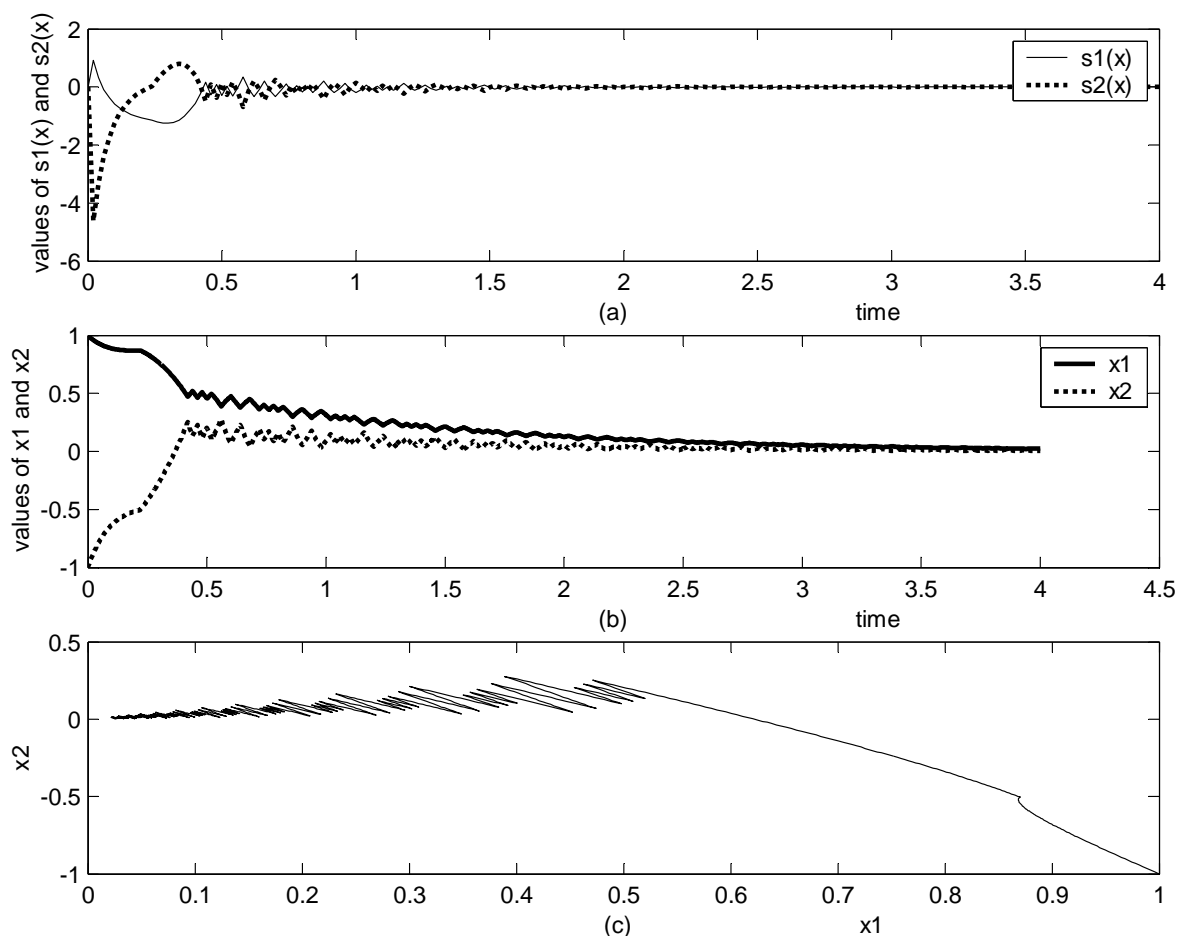


圖 5: 兩個二階不穩定系統，模擬時間取4秒， $\epsilon = 0.1$ ：(a)  $s_1, s_2$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (c)  $x_1$  為橫軸  $x_2$  為縱軸的分佈圖

(Chattering) 現象。而這種現象對整個系統而言是不好的，所以我們希望能夠減少這

種跳切現象。接下來選擇 $\epsilon = 0.9$ ，其模擬結果如圖6。當 $\epsilon = 0.9$ 時，我們看到仍然

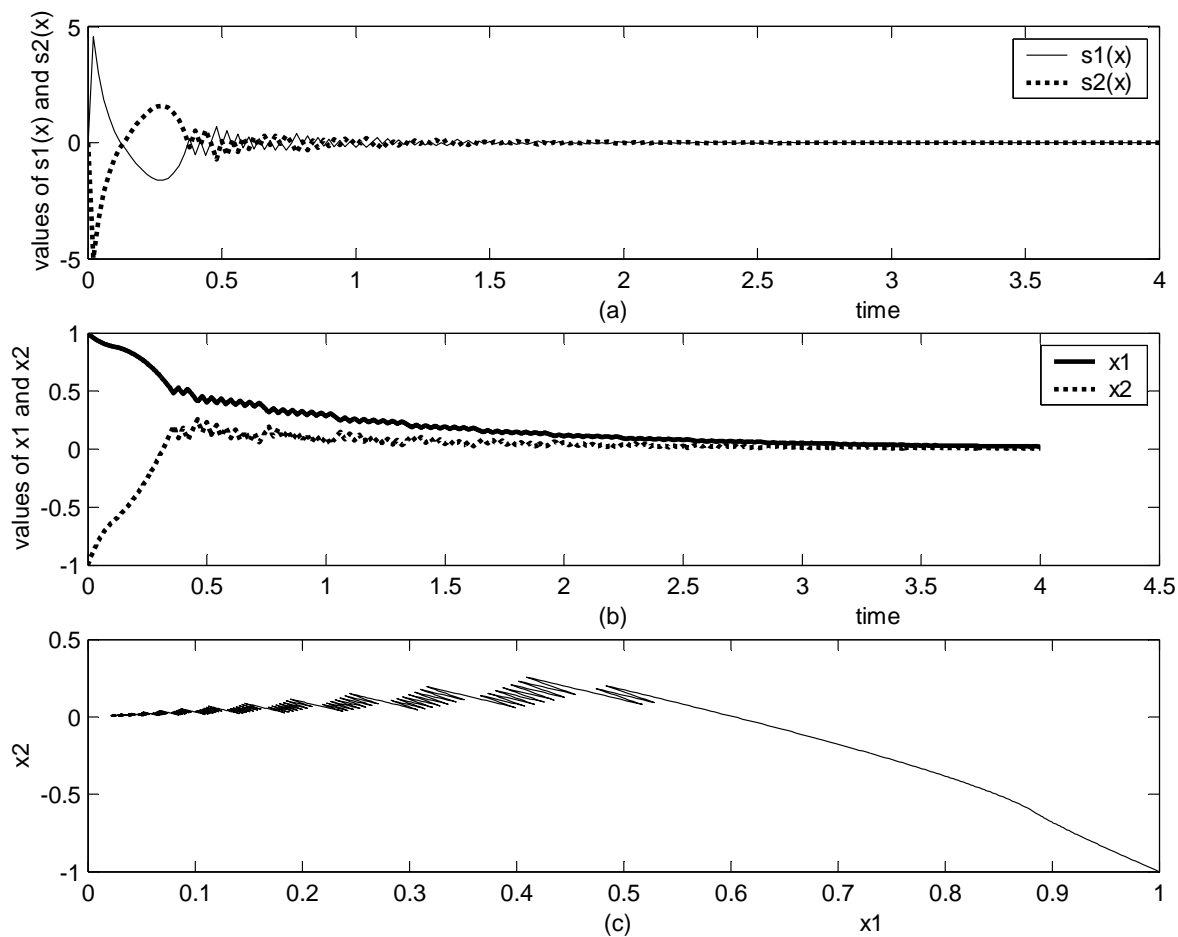


圖 6: 兩個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒， $\epsilon = 0.9$ ：(a)  $s_1, s_2$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2$  對時間的分佈圖 (c)  $x_1$  為橫軸  $x_2$  為縱軸的分佈圖

有跳切現象，但明顯比  $\epsilon = 0.1$  時要多，而  $\epsilon = 0.5$  時則介於兩者之間。也就是說，當  $\epsilon$  越大則跳切現象就越明顯。因此，當我們在設計切換律時， $\epsilon$  要選擇越靠近 0，則更可以減少切跳現象。

## 4.2 三個不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論

在這一節，我們要來討論三個不穩定系統如何尋找穩定切換律使得系統達到穩定控制。並且驗證 2.3 節中，針對 2 階系統以其特徵值與特徵向量的關係，快速判斷是否存在穩定切換律的條件。

## 範例 5

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

分析：經由簡單的計算  $A_1, A_2, A_3$  之特徵值分別為  $\{-2, 2\}$ 、 $\{-6.2426, 2.2426\}$ 、 $\{-1, 1\}$ 。由此可見  $A_1, A_2, A_3$  皆為不穩定的矩陣。接下來，我們根據步驟 2 的方法來建構穩定切換律。

Step 1：首先，我們選擇系統  $A_1, A_2$ ，以羅斯赫維茲的方法來找一個  $\alpha_1 > 0$ ，使得

$A_1 + \alpha_1 A_2$  為赫維茲矩陣。定義

$$A_1 + \alpha_1 A_2 = \begin{pmatrix} -2 + \alpha_1 & 3\alpha_1 \\ 3\alpha_1 & 2 - 5\alpha_1 \end{pmatrix}$$

其特徵方程式為

$$\Delta_1(s) = s^2 + 4\alpha_1 s - 4 + 12\alpha_1 - 14\alpha_1^2$$

以羅斯赫維茲的方法許找一個  $\alpha_1$  使得  $A_1 + \alpha_1 A_2$  為赫維茲矩陣

$$s^2 \quad 1 \quad -4 + 12\alpha_1 - 14\alpha_1^2$$

$$s^1 \quad 4\alpha_1$$

$$s^0 \quad -4 + 12\alpha_1 - 14\alpha_1^2$$

若  $A_1 + \alpha_1 A_2$  為赫維茲矩陣，則

$$\begin{cases} 4\alpha_1 > 0 \\ -4 + 12\alpha_1 - 14\alpha_1^2 > 0 \end{cases}$$

經由計算，我們發現  $-4 + 12\alpha_1 - 14\alpha_1^2$  永遠小於零，對於所有  $\alpha_1 > 0$ 。所以無法找到  $\alpha_1 > 0$  使得  $A_1 + \alpha_1 A_2$  為赫維茲矩陣。而  $-4 + 12\alpha_1 - 14\alpha_1^2$  的最小值發生在  $\alpha_1 = \frac{3}{7}$  的時候，所以為了方便計算，我們選擇  $\alpha_1 = 1$ ，令

$$A_1 + \alpha_1 A_2 = \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Step 2：同 Step 1，我們要找一個  $\alpha_2 > 0$  使得  $\bar{A}_1 + \alpha_2 A_3$  為赫維茲矩陣。定義

$$\bar{A}_1 + \alpha_2 A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 - \alpha_2 \\ 3 - \alpha_2 & -3 \end{pmatrix}$$

其特徵方程式為

$$\Delta_2(s) = s^2 + 4s - 6 + 6\alpha_2 - \alpha_2^2$$

由羅斯赫維茲的方法尋找一個  $\alpha_2$  使得  $\bar{A}_1 + \alpha_2 A_3$  為赫維茲矩陣。經由計算，我們可以得到  $3 - \sqrt{3} < \alpha_2 < 3 + \sqrt{3}$ 。所以我們選擇  $\alpha_2 = 3$ ，經由這樣的選擇可得到

$$A_{eq} := \bar{A}_1 + 3A_3 = A_1 + A_2 + 3A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Step 3：選擇  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，由

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q$$

求解出  $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1667 \end{pmatrix}$

Step 4 : 定義

$$L_1 = A_1^T P + P A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = A_2^T P + P A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1.6667 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = A_3^T P + P A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0 \end{pmatrix}$$

選擇  $\epsilon = 0.5$ ，則

$$s_{12}(x) = x^T (L_1 - \epsilon L_2) x = x^T \begin{bmatrix} -2.9000 & -1.8000 \\ -1.8000 & 2.1667 \end{bmatrix} x$$

$$s_{21}(x) = x^T (L_2 - \epsilon L_1) x = x^T \begin{bmatrix} 2.8000 & 2.0000 \\ 2.0000 & -2.2667 \end{bmatrix} x$$

$$s_{13}(x) = x^T (L_1 - \epsilon L_3) x = x^T \begin{bmatrix} -2.0000 & 0.6000 \\ 0.6000 & 0.6667 \end{bmatrix} x$$

$$s_{31}(x) = x^T (L_3 - \epsilon L_1) x = x^T \begin{bmatrix} 1.8000 & -0.6667 \\ -0.6667 & -0.6000 \end{bmatrix} x$$

$$s_{23}(x) = x^T (L_2 - \epsilon L_3) x = x^T \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.6000 \\ 2.6000 & -1.6667 \end{bmatrix} x$$

$$s_{32}(x) = x^T (L_3 - \epsilon L_2) x = x^T \begin{bmatrix} -0.9000 & -2.4667 \\ -2.4667 & 1.5000 \end{bmatrix} x$$

Step 4 : 選擇初始值為  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，根據[26]中的切換法則，並且以電腦模擬其結果。

我們發現  $x$  由  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結果如圖 7。



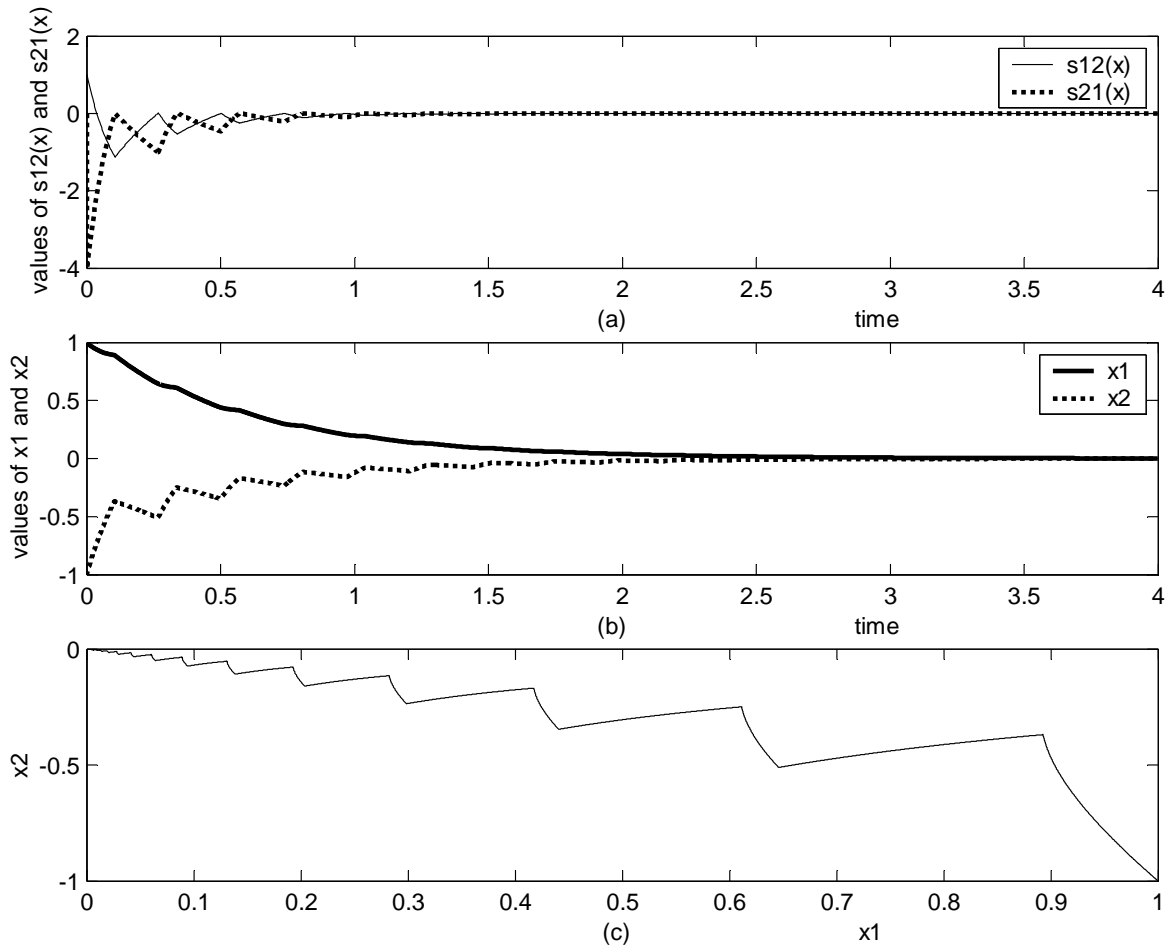


圖 7: 三個二階不穩定系統，模擬時間取 4 秒， $\epsilon = 0.5$ ：(a)  $s_{12}, s_{21}$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (c)  $x_1$  為橫軸  $x_2$  為縱軸分佈圖

上述的例子是關於三個不穩定系統之間尋找穩定切換律的方法以及其模擬結果。

接下來我們要根據 2.3 節中，提到可以用 2 階系統的特徵值與特徵向量快速判斷是否存在穩定切換律，在此做一個簡單的應用。如範例 5 中的  $A_1, A_2, A_3$ ，其特徵值與特徵向量分別為  $\{-2, 2\}$ 、 $\{-1, 1\}$ 、 $\{-6.2426, 2.2426\}$ 。定義對應於負的特徵值的單位特徵向量為：

$$x_1^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2^- = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, x_3^- = \begin{bmatrix} -0.3827 \\ 0.9239 \end{bmatrix}$$

而定理 3 中提到了存在穩定切換律的判斷條件：

$$(1) \phi_i < \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_i^-}{\lambda_i^+}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_{i+1}^-}{\lambda_{i+1}^+}}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$(2) \pi - \left( \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i \right) < \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_i^-}{\lambda_i^+}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_N^-}{\lambda_N^+}}$$

其中  $\phi_i$  為  $x_{i1}^-$  與  $x_{(i+1)1}^-$  之間的夾角。接下來我們就來驗證  $A_1, A_2, A_3$  是否存在穩定切

換律。首先檢查(1)式：

$$\phi_1 = \cos^{-1}(x_1^{-T} x_2^-) = 45 < \tan^{-1} \sqrt{\frac{2}{2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{1}} = 90$$

$$\phi_2 = \cos^{-1}(x_2^{-T} x_3^-) = 67.5 < \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{1}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{6.2426}{2.2426}} = 115.24$$

接下來檢查(2)式：

$$180 - (\phi_1 + \phi_2) = 67.5 < \tan^{-1} \sqrt{\frac{2}{2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{6.2426}{2.2426}} = 115.24$$

由次可見上面兩是都成立，所以系統  $A_1, A_2, A_3$  存在穩定切換律。由先前的模擬也驗

證了我們的結果。

### 4.3 不可穩定線性控制系統之穩定切換律設計與討論

在這一節我們要以簡單的例子來討論如何設計控制器，使得不可穩定的控制系

統之間存在穩定切換律。

#### 範例 6

$$A = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 14 \\ -70 & -27 & 20 \\ -140 & -58 & 60 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

經由簡單的計算，我們可以發現  $(A, B_1), (A, B_2)$  皆為不可穩定化，但  $(A, B)$  為可穩定化，其中  $B = [B_1 \ B_2]$ 。接下來我們要來討論系統是否存在穩定切換律，使得整個控制系統可以達到穩定控制。

分析：首先我們選取  $\beta = 2$ ，令

$$A_\beta = (1 + \beta)A = \begin{bmatrix} -96 & -42 & 42 \\ -210 & -81 & 87 \\ -420 & -174 & 180 \end{bmatrix}$$

$$B_\beta = [B_1 \ \sqrt{\beta}B_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1.4142 \\ 10 & -1.4142 \end{bmatrix}$$

令  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，解 Riccati equation

$$A_\beta^T P + P A_\beta - P B_\beta B_\beta^T P = -Q$$

得到

$$P = \begin{bmatrix} 36.4 & 18.1 & -18.2 \\ 18.1 & 21.1 & -15.1 \\ -18.2 & -15.1 & 12.1 \end{bmatrix}$$

設計控制器

$$u_1 = -B_1^T P x = [18.8457 \ 9.0588 \ -9.6652]x, \quad u_2 = -B_2^T P x = [-0.1419 \ 6.0258 \ -2.9239]$$

所以我們可以得到

$$A_1 = (A - B_1 B_1^T P) = \begin{bmatrix} 5.7 & 4.1 & -5.3 \\ 14.2 & 18.3 & -19.3 \\ 48.5 & 32.6 & -36.7 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = (A - B_2 B_2^T P) = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 14 \\ -69.9 & -33 & 31.9 \\ -139.9 & -64 & 62.9 \end{bmatrix}$$

令

$$L_1 = A_1^T P + P A_1 = \begin{bmatrix} -473.8535 & -228.7671 & 243.4154 \\ -228.7671 & -61.3358 & 93.2482 \\ 243.4154 & 93.2482 & -113.4880 \end{bmatrix}$$
$$L_2 = A_2^T P + P A_2 = \begin{bmatrix} 236.4267 & 114.3836 & -121.7077 \\ 114.3836 & 30.1679 & -46.6241 \\ -121.7077 & -46.6241 & 56.2440 \end{bmatrix}$$

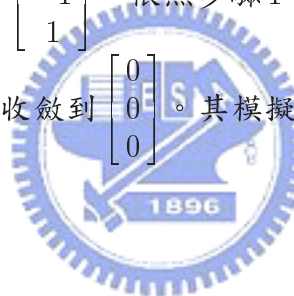
取  $\epsilon = 0.5$ ，其切換平面

$$s_1(x) = x^T (L_1 - 0.5L_2)x$$

$$s_2(x) = x^T (L_2 - 0.5L_1)x$$

接下來我們選擇初始值為  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，依照步驟1中所定義的切換法則，以電腦模擬

其結果。我們發現  $x$  由  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結果如圖8。



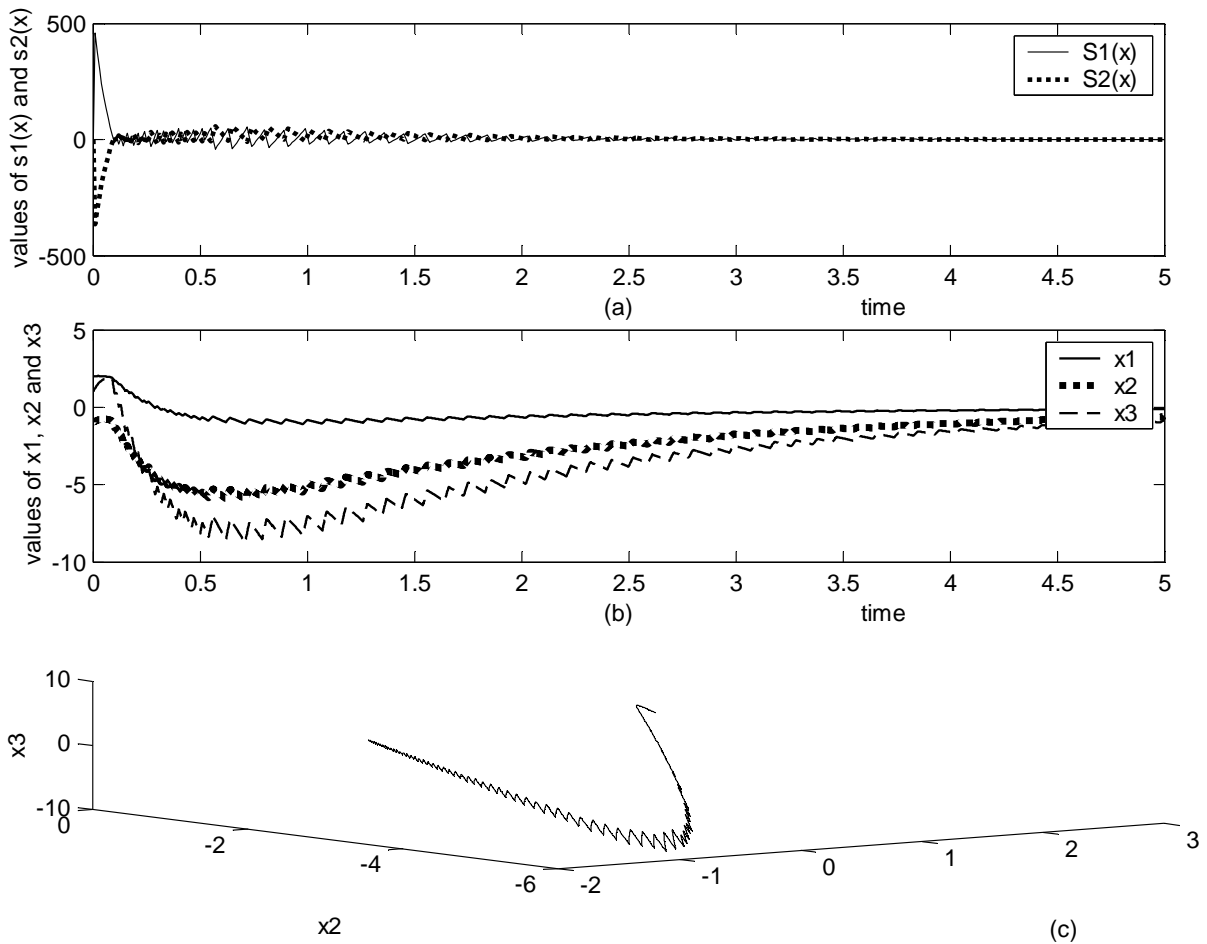


圖 8: 兩個不可穩定系統，模擬時間取 5 秒， $\epsilon = 0.5$ ：(a)  $s_1, s_2$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2, x_3$  對時間的分佈圖 (c)  $x_1, x_2, x_3$  之狀態分佈圖

#### 4.4 共同穩定器之設計與討論

在這一節我們要以簡單的例子來說明如何尋找共同穩定器。首先以 [14] 中的例子並且利用我們所提出的判斷條件來判斷是否存在共同穩定器。

##### 範例 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 10 & 0.01 \\ 10 & 0.01 \end{pmatrix}$$

接下來我們根據步驟 3 來設計共同穩定器。

Step 1 : 令第二與第一個控制器發生故障時為  $B_1$  以及  $B_2$  , 其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.01 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

我們可以很容易的檢查, 其中  $(A, B)$ 、 $(A, B_1)$  以及  $(A, B_2)$  都是可穩定。所以

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B\}$$

Step 2 : 依照原始系統  $(A, B)$  來設計控制器  $u$ 。令  $u = -B^T P x$ , 並且以式子 (3.6), 令

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 求解出一個正定矩陣}$$

$$P = \begin{pmatrix} 4.1248 & 4.4818 & -4.5929 \\ 4.4818 & 5.7637 & -5.8110 \\ -4.5929 & -5.8110 & 6.0028 \end{pmatrix}$$

Step 3 : 令

$$L_0 = A^T P + P A = \begin{pmatrix} 8.2496 & 12.2633 & -8.2496 \\ 12.2633 & 15.2686 & -10.9285 \\ -8.2496 & -10.9285 & 6.3661 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = -P B_1 B^T P = \begin{pmatrix} -9.0804 & -12.0791 & 8.0615 \\ -12.0791 & -16.0681 & 10.7237 \\ 8.0615 & 10.7237 & -7.1569 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = -P B_2 B^T P = \begin{pmatrix} -0.1692 & -0.1842 & 0.1881 \\ -0.1842 & -0.2004 & 0.2048 \\ 0.1881 & 0.2048 & -0.2092 \end{pmatrix}$$

令

$$\Omega_A^+ = \{x | x^T L_0 x \geq 0, \|x\| = 1\}$$

$$\Omega_{B_i}^0 = \{x | x^T L_i x = 0, \|x\| = 1\}, i = 1, 2$$

其中  $L_1, L_2$  都是 rank=1 的矩陣，所以  $\Omega_{B_i}^0$  所包含的向量與  $L_i$  所對應的負的特徵向量互相垂直。而我們要檢查的條件  $\Omega_{B_i}^0$  不能包含於  $\Omega_A^+$  中，必須要檢查無限多點，是一個相當複雜的計算。而在第二章中，我們已經證明了另一個對等條件，只要存在  $\beta_i > 0$  使得  $A + (-\beta_i)B_i B^T P = A_i$ ,  $i = 1, 2$  為赫維茲矩陣，則  $\Omega_{B_i}^0$  與  $\Omega_A^+$  的交集必為空集合。

Step 4 : 以羅斯赫維茲穩定準則求解  $\beta_i$  使得  $A + (-\beta_i)B_i B^T P$ ,  $i = 1, 2$  為赫維茲矩陣。

經由直接計算，我們可以求得  $A + (-\beta_i)B_i B^T P$ ,  $i = 1, 2$  之特徵方程式為

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) &= s^3 + 16.3461\beta_1 s^2 + (7.6588 \times 10^{-13}\beta_1^2 + 33.1471\beta_1 - 1)s \\ &\quad + 16.801\beta_1 + 7.6588 \times 10^{-13}\beta_1^2 \\ \Delta_2(s) &= s^3 + 0.041\beta_2 s^2 + (-1.5446 \times 10^{-20}\beta_2^2 + 0.0453\beta_2 - 1)s \\ &\quad + 0.0042\beta_2 + -1.5446 \times 10^{-20}\beta_2^2 \end{aligned}$$

經由計算的結果，我們發現

$$\begin{cases} \beta_1 > 0.7 \\ \beta_2 > 24.5 \end{cases}$$

則  $A + (-\beta_i)B_i B^T P = A_i$ ,  $i = 1, 2$  皆為赫維茲矩陣。所以，我們選擇  $\beta = 25$ ，令

$u = -25B^T P x$ ，則  $A + (-\beta)B_i B^T P$ ,  $i = 1, 2$  之特徵值分別為  $\{-1033, -406.6196, -1\}$ 、

$\{-0.013 \pm 0.3242 i\}$ ，而  $A - BB^T P$  之特徵值為  $\{-1.9115, -406.7671, -1\}$ 。由此

可見， $A - \beta BB^T P$ ,  $A - \beta B_1 B^T P$  以及  $A - \beta B_2 B^T P$  皆為赫維茲矩陣，所以我們

所設計的共同穩定器  $u = -25B^T P$  的確為我們所要求的。

接下來我們針對2階線性控制系統，以其特徵值與特徵向量，快速的判斷是否存在共同穩定器，並且設計共同穩定器。

### 範例 8

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

令  $B_1, B_2$  分別代表第二個與第一個控制器故障時的矩陣，其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

接下來對系統  $(A, B)$ ，以式子 (3.6)，代入  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  求得一正定矩陣

$$P = \begin{pmatrix} 3.5353 & 4.3971 \\ 4.3971 & 5.901 \end{pmatrix}$$

令

$$L_0 = A^T P + P A = \begin{pmatrix} 12.2412 & 16.8412 \\ 16.8412 & 20.5962 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = -P B_1 B^T P = \begin{pmatrix} -0.7426 & -1.2960 \\ -1.2960 & -2.2617 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = -P B_2 B^T P = \begin{pmatrix} -12.4986 & -15.5452 \\ -15.5452 & -19.3345 \end{pmatrix}$$



接下來我們要判斷是否存在穩定切換律，所以我們要檢查  $\Omega_{B_i}^0$ ,  $i = 1, 2$  是否有包含於  $\Omega_A^+$ ，其中

$$\Omega_A^+ = \{x | x^T L_0 x \geq 0, \|x\| = 1\}$$

$$\Omega_{B_i}^0 = \{x | x^T L_i x = 0, \|x\| = 1, i = 1, 2\}$$

而我們知道  $\Omega_{B_i}^0$  的範圍是與  $L_1, L_2$  所對應的負的單位特徵值互相垂直的兩點。而

$L_1, L_2$  所對應的負的特徵值分別為

$$x_1^- = \begin{pmatrix} 0.4972 \\ 0.8676 \end{pmatrix}, x_2^- = \begin{pmatrix} 0.6266 \\ 0.7793 \end{pmatrix}$$

由於  $L_i$  為對稱矩陣所以

$$\Omega_{B_1}^0 = \{x_1^0 = + \begin{pmatrix} 0.8676 \\ -0.4972 \end{pmatrix} \text{ 或 } - \begin{pmatrix} 0.8676 \\ -0.4972 \end{pmatrix}\}$$

$$\Omega_{B_2}^0 = \{x_2^0 = + \begin{pmatrix} 0.7793 \\ -0.6266 \end{pmatrix} \text{ 或 } - \begin{pmatrix} 0.7793 \\ -0.6266 \end{pmatrix}\}$$

我們要判斷  $\Omega_{B_i}^0$ ,  $i = 1, 2$  是否有包含於  $\Omega_A^+$ ，只要將  $x_1^0, x_2^0$  代入  $L_0$  中：

$$x_1^{0T} L_0 x_1^0 = -0.2237$$

$$x_2^{0T} L_0 x_2^0 = -0.926$$

皆小於 0。所以  $\Omega_{B_i}^0$ ,  $i = 1, 2$  不包含於  $\Omega_A^+$  中，因此我們可以找到共同穩定器。接

下來令共同穩定器為  $u = -\beta B^T P x$ ，以羅斯赫維茲的方法尋找一個  $\beta > 0$  使得

$(A - \beta BB^T P), (A - \beta B_1 B^T P), (A - \beta B_2 B^T P)$  皆為赫維茲矩陣。其特徵方程式分別為

$$\Delta_1(s) = s^2 + (1 + 4.1775\beta)s - 5 + 9.8756\beta + 1.5275\beta^2$$

$$\Delta_2(s) = s^2 + (1 + 0.6421\beta)s - 5 + 0.2196\beta$$

$$\Delta_3(s) = s^2 + (1 + 3.5353\beta)s - 5 + 9.656\beta$$

經由簡單的計算，我們發現只要選擇  $\beta > 22.77$  則  $(A - \beta BB^T P), (A - \beta B_1 B^T P), (A - \beta B_2 B^T P)$  皆為赫維茲矩陣。我們選擇  $\beta = 23$ ，則  $(A - 23BB^T P), (A - 23B_1 B^T P), (A - 23B_2 B^T P)$  之特徵值分別為  $\{-84.9555, -12.1264\}$ 、 $\{-0.0033, -15.7659\}$ 、 $\{-79.5850, -2.7277\}$ 。

由此可見， $(A - \beta BB^T P), (A - \beta B_1 B^T P), (A - \beta B_2 B^T P)$  皆為赫維茲矩陣，所以我們

所設計的共同穩定器  $u = -23B^T P x$  為我們所要求的共同穩定器。



# CHAPTER 5

## 結論與未來研究方向



### 5.1 結論

此篇論文主要在探討關於 $N$ 個不穩定系統之間是否存在穩定切換律以及不可穩定化的系統如何設計控制器使得系統存在穩定切換律。除此之外，本篇論文也探討共同穩定器的問題。接下來我們把本篇論文的主要結果整理如下：

1. 我們把第2.1節中的兩個對等條件，對於兩個不穩定系統 $\dot{x} = A_i x$ ,  $i = 1, 2$ 之間是否存在穩定切換律的判斷條件推廣到對於 $N$ 個不穩定系統 $\dot{x} = A_i x$ ,  $i = 1, \dots, N$ 的判斷條件。並且提供一個充分條件來建構穩定切換律。
2. 針對 $N$ 個2階不穩定系統，我們探討其在幾何上的意義。討論不穩定系統的穩定範圍與不穩定範圍在平面上如何分佈才存在穩定切換律。並且提供一個判斷條件，以系統的特徵值與特徵向量快速判斷是否存在穩定切換律。

3. 將第1點中針對不穩定系統的問題，我們將問題延伸為對於不可穩定的系統  $\dot{x} = Ax + B_i u_i, i = 1, \dots, N$ ，也就是  $(A, B_i), i = 1, \dots, N$  皆為不可穩定化。我們利用第2章的判斷條件設計控制器  $u = -B_i P x$ ，使得不穩定系統  $(A - B_i B_i^T P)$  存在穩定切換律並且達到穩定控制。
4. 我們將第2章中探討存在穩定切換律的判斷條件與[14]討論共同穩定器的問題做一個結合。我們發現第2章的兩個判斷條件與[14]中的觀念有相通之處，所以將這兩個結果轉化為判斷是否存在共同穩定器的條件，並且利用已有的結果設計共同穩定器。

## 5.2 未來的研究方向

在本篇論文中的主要貢獻已在上一小節做一個總整理。不過除了上述的結果以外，還有一些可以延伸下去的研究。

1. 在第2章中，對於N個不穩定系統  $\dot{x} = A_i x, i = 1, \dots, N$  要找到  $\alpha_i$  使得  $\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i$  為赫維茲矩陣，我們只提出了一個充分條件來尋找  $\alpha_i$ 。由於尋找這樣的  $\alpha_i$  不是一件容易的事情，所以在往後也許有更快速的方法來尋求  $\alpha_i$ 。
2. 在第2章中，我們主要討論的問題是不穩定與不可控制的系統間是否存在穩定切換律。而在一般的系統當中，往往都會有雜訊或是外界的干擾。所以在往後的研究我們可以加入雜訊於系統之中，然後再以切換系統的方法將雜訊給消除掉。
3. 在第2章中，我們都是針對線性非時變的系統來討論，在往後也可以朝時變或是離散時間(discrete-time)系統的問題來研究。
4. 在第2章中，我們所討論的是不穩定系統之間切換的問題。而在一般的實際系統當中，都是穩定系統間的切換。所以，將我們的研究結果應用在實際例子上是一個最重要的課題。

## 參考文獻

- [1] M.S. Branicky, “Analysis of continuous switching systems: Theory and examples,” *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, MD, pp. 3110-3114, June 29-July 1 1994.
- [2] M.S. Branicky, “Multiple Lyapunov function and other analysis tools for switched and hybrid systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 475-482, 2000.
- [3] R.W. Brockett, “Asymptotic stability and feedback stabilization,” in *Differential Geometric Control Theory* (R.W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussmann, eds.), pp. 181-191, Birkhauser, Boston, 1983.
- [4] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, “Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 11, pp. 1883-1887, 2002.
- [5] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, B. Lennartson, “Perspectives and results on stability and stabilizability of hybrid systems,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 88, pp. 1069-1082, 2000.
- [6] G. Feng, “Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov function and bilinear matrix inequalities,” *Fuzzy systems, FUZZ'03. The 12th IEEE International Conference*, Vol. 2, pp. 1327-1332, May 25-28, 2003.
- [7] E. Feron, “Quadratic stabilizability of switched system via state and output feedback,” technical report CICS-P-468, MIT, 1996.
- [8] H.F.L. Frank, K.S.T. Peter, C.K. Li, “The control of switching dc-dc converters -A general LQR problem,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 38, No. 1, pp. 413-418, 1991.
- [9] H.F.L. Frank, K.S.T. Peter, C.K. Li, “An improved LQR-based controller for switching dc-dc converters,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 40, No. 5, pp. 521-528, 1993.
- [10] J.P. Hespanha and A.S. Morse, “Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching,” *Automatica*, Vol. 35, pp. 385-393, 1999.
- [11] M. Johansson, A. Rantzer and K-E. Arzen, “Piecewise quadratic stability of fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*., Vol. 7, No. 6, pp. 713-722, 1999.
- [12] Z. Ji, L. Wang, G. Xie and F. Hao, “Linear matrix inequality approach to quadratic stabilisation of switched systems,” *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, Vol. 151, No. 3, pp. 289-294, 2004.

- [13] D. Liberzon and A.S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control System Magazine*, Vol. 19, pp. 59-70, 1999.
- [14] Y.-W. Liang and D.-C. Liaw, "Common stabilizers for linear control systems in the presence of actuator outage," *2001 Chinese Automatic Control Conference*, held at Tauyen, Taiwan, pp. 42-46, February 16-17, 2001.
- [15] D.-C. Liaw, Y.-W. Liang and T.C. Lee, "Reliable control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 706-710, 2000.
- [16] Z.G. Li, C.Y. Wen and Y.C. Soh, "Stabilization of a class of switched systems via designing switching laws," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, pp. 665-670, 2001.
- [17] C.F. Matrtin and W.P. Dayawansa, "On the existence of a Lyapunov function for a family of switching systems," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 1820-1821, December 1996.
- [18] J.V. Medanic, "Design of realiable controllers using redundant control elements," *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, San Francisco, CA, pp. 3130-3134, June 2-4, 1993.
- [19] A.S. Morse, ed., *Control Using Logic-Based Switching*, London: Springer-Verlag, 1997.
- [20] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov functions for stable LTI systems with commuting A-matrices," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2469-2471, 1994.
- [21] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, "Adaptive control using multiple models," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 42, No. 2, pp. 171-187, 1997.
- [22] T. Ooba and Y. Funahashi, "Two conditions concerning common quadratic Lyapunov functions for linear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 42, No. 5, pp. 719-721, 1997.
- [23] E. Skafidas, R.J. Evans, A.V. Savkin and I.R. Petersen, "Stability results for switched controller systems," *Automatica*, Vol. 35, pp. 553-564, 1999.
- [24] R.N. Shorten and K.S. Narendra, "On the stability and existence of common Lyapunov Function for stable linear switching systems," *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, pp. 3723-3724, December 16-18, 1998.
- [25] R.N. Shorten and K.S. Narendra, "On common quadratic Lyapunov function for pairs of stable LTI systems whose system matrices are in companion form," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 48, No. 4, pp. 618-621, 2003.

- [26] M.A. Wicks, P. Peleties and R.A. DeCarlo, "Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switching systems," *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 3492-3497, December 14-16, 1994.
- [27] R.J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control," *Automatica*, pp. 137-143, 1995.
- [28] G. Xie and L. Wang "Quadratic stability and stabilization of discrete-time switched systems with state delay," *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, pp. 3235 - 3240, December 14-17 , 2004.
- [29] X. Xu and P.J. Antsaklis, "Stabilization of second-order LTI switched systems," *International Journal of Control*, Vol. 73, pp. 1261-1279, 2000.
- [30] Q. Zhao and J. Jiang, "Reliable state feedback control system design against actuator failures," *Automatica*, pp. 1267-1272, 1998.

