

# 目錄

圖目錄 .....	1
表目錄 .....	3
第一章 緒論 .....	4
第二章 懸吊系統 .....	6
第一節 懸吊系統分類 .....	6
第二節 主動式與半主動式懸吊系統比較 .....	9
第三節 懸吊系統的評價方式與舒適度 .....	11
第四節 舒適度評價方式之間比較 .....	15
第五節 半車懸吊系統描述 .....	17
第三章 灰色理論與架構 .....	26
第一節 灰色系統理論簡介 .....	26
第二節 灰色系統理論之產生背景 .....	27
第三節 灰色系統的基本概念 .....	29
第四節 灰色理論，機率統計及模糊理論的差異性 .....	32
第五節 灰色生成 .....	34
第六節 灰色 GM(1, 1)模型 .....	39
第四章 利用根軌跡設計 PID 控制器 .....	48
第一節 PID 控制器 .....	48
第五章 實驗結果分析與模擬 .....	55
第一節 模擬實際路徑 .....	55
第二節 模型一模擬 .....	60
第三節 模型二模擬 .....	62
第四節 模型三模擬 .....	64
第五節 計算模型三預測資料 .....	66
第六章 結論與未來展望 .....	92
參考文獻 .....	93

# 圖目錄

圖 2- 1 BURTON DOUGLAS CHART.....	12
圖 2- 2 JANEWAY RECOMMENDATIONS GRAPH.....	14
圖 2- 3 GOLDMAN PRESENTATION .....	15
圖 2- 4 BURTON DOUGLAS, JANEWAY, GOLDMAN 舒適度.....	16
圖 2- 5 半車系統懸吊模型.....	17
圖 3- 1 原始數列 .....	36
圖 3- 2 一次累加生成.....	36
圖 3- 3 二次累加生成.....	37
圖 3- 4 灰色建模架構.....	41
圖 3- 5 灰色預測流程圖.....	45
圖 4- 1 標準二階系統方塊圖 .....	50
圖 4- 2 (A) 傳統 PID 控制器方塊圖.....	50
圖 4- 3 (B) 傳統 PID 控制器方塊圖 .....	50
圖 5- 1 半車懸吊系統模型.....	55
圖 5- 2 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡.....	61
圖 5- 3 加 PID 控制器後 ZRF 對 X1 的根軌跡 $PID=(1+0.031s+(0.074s)^2)/s$ .....	61
圖 5- 4 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡.....	63
圖 5- 5 加 PID 控制器後 ZRF 對 X1 的根軌跡 $PID=(1+0.034s+(0.074s)^2)/s$ .....	63
圖 5- 6 CASE1 模擬實際路徑圖.....	66
圖 5- 7 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡.....	69
圖 5- 8 加 PID 控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡 $PID=(1+0.046s+(0.086s)^2)/s$ .....	69
圖 5- 9 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖.....	72
圖 5- 10 加 PID 控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖 $PID=(1+0.034s+(0.077s)^2)/s$ .....	72
圖 5- 11 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖.....	75
圖 5- 12 加 PID 控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡 $PID=(1+0.037s+(0.074s)^2)/s$ .....	76
圖 5- 13 實際路徑.....	77
圖 5- 14 預測路徑.....	77
圖 5- 15 車子不加控制器時的振幅.....	78
圖 5- 16 車子加控制器時的振幅.....	78
圖 5- 17 車子在預測下加控制器後的振幅.....	79
圖 5- 18 CASE2 模擬實際路徑.....	81
圖 5- 19 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖.....	83
圖 5- 20 加 PID 控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖 $PID=(1+0.044s+(0.09s)^2)/s$ .....	84

圖 5- 21 沒加控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖 .....	87
圖 5- 22 加 PID 控制器時 ZRF 對 X1 的根軌跡圖 $PID=(1+0.044s+(0.081s)^2)/s$ .....	87
圖 5- 23 實際路徑 .....	88
圖 5- 24 預測路徑 .....	88
圖 5- 25 車子不加控制器時的振幅 .....	89
圖 5- 26 車子加控制器時的振幅 .....	89
圖 5- 27 車子在預測下加控制器後的振幅 .....	90



# 表目錄

表 2- 1 JANEWAY RECOMMENDATIONS 不同頻域之舒適度參數 .....	13
表 3- 1 機率統計, 模糊理論, 灰色理論三項比較 .....	33
表 4- 1 PID 參數性能指標對照表 .....	53
表 6- 1 三種PID 控制方法的比較.....	92



# 第一章 緒論

為了適應每種路況及駕駛環境的變化，滿足對車輛操控性與舒適性的需求，並提升車輛安全性，優良的車輛懸吊系統扮演了重要的角色，所以我的研究將以提高車輛的舒適性為主要的訴求。由於近年來，懸吊系統的研究已成為車輛研究的重點。從傳統的被動式懸吊機械結構改進以及其彈簧及阻尼常數的最佳化，到可動調整阻尼參數的半主動式懸吊以及可輸入控制力直接改變車身動態，調整壓力以改變彈簧常數，並動態調整阻尼參數的全主動式懸吊，都大幅的提升了懸吊系統的性能。另外，由於電子控制以及感知器、致動器技術的進步，半主動式以及主動式懸吊已成為未來懸吊系統的主流。此篇研究將以半車懸吊系統作為主軸，討論路面振幅與車體的引力中心之間的關係。希望能夠降低路面對車體的影響，以達到提高舒適度的結果，將在第二章中對半車懸吊系統作一詳細介紹[9]。

在這個自然界紛繁浩大，以及人類社會錯綜複雜，整個世界給人一種灰色(Grey)朦朧(Hazy)及模糊(Fuzzy)的感覺。即使在科學技術高度發展的今天，人類面臨的眾多問題，也都還包含有大量未知的、不確定的、及訊息不完全的自然因素和社會因素。這些因素中有些目前還無法完全被人掌握。因此，人們不得不在“部分已知”；“部分未知”；“部分確定”；“部分不確定”；“部分完全”；“部分不完全”等狀況下，充分去應用所得到各種自然訊息和社會訊息，進行預測與決策，也就是在灰色、朦朧及模糊的環境下，

根據不完全，不確定及不明確的訊息去確定自己的目標與行為。因為我的模型存在著未知的參數，所以我利用了灰色理論去進行預測，這在第三章中都會詳細說明。

大家都知道 PID 控制器的歷史長而久遠，而其構想首見於 1922 年 Minorsky 所發表的論文中，但 PID 控制器原型則首見於 1936 年 Callender 等人論文中，延用至今已有六十幾年，且已廣泛的使用於控制器中。就大部份的工業控制系統而言，以結構簡單且操作安全性高的數個獨立 PID (Proportional-Integral-Derivative) 控制器，已可達到不錯的伺服控制與強健性等性能，PID 控制器雖然能夠抑制因操作情況作小範圍變動時而產生的誤差，但當設定點或負載變動時，受控體的參數變化，致使某些或所有迴路的 PID 控制參數均須重新調整，使調整後的參數能適切的保持控制性能在容許的規格內，這整個調整過程常賴有經驗的工程師去費時的調整，所以 PID 控制器存在著反覆調整控制器的缺點。但是現在調整 PID 控制器參數已有許多方法準則可以利用，在第四章會作詳細介紹。

在此篇論文中，使用了半車懸吊系統的模型。將此懸吊系統依角度分為三種 Model，利用灰色預測 GM(1, 1) 模型去預測路徑。得到系統轉移函數後，利用 Root Locus 去設計 PID 控制器，以得到更佳的響應。第二章介紹半車懸吊系統的模型以及各懸吊系統的優缺點。第三章介紹灰色系統理論的由來及應用。第四章介紹 PID 控制器的優缺點及設計 PID 控制器。第五章則是將系統代入實際參數去實際模擬各種情況。第六章則是結論與未來展望。

## 第二章 懸吊系統

### 第一節 懸吊系統分類

#### (一) 被動式懸吊系統

大多數車輛使用之懸吊系統，主要由彈簧與阻尼器組成。其中彈簧為儲能元件暫時吸收路面傳來之衝擊能量，並加以儲存。阻尼器為耗能元件，依懸吊作動的速度提供某種比例之被動反向抵抗力，使振動漸趨收斂，並將能量轉變成熱或聲音等形式向四周發散。以彈簧而言，一般使用扭力桿、葉片彈簧、圈狀彈簧或氣體彈簧結構，其中以圈狀彈簧或氣體彈簧控制精度較高，廣泛使用於中小型車輛上，扭力桿與葉片彈簧的強度與可靠性高，且構造簡單，多用於負載大的中大型車輛上[1]。阻尼器則以液壓回路為主流，亦有氣壓式阻尼器，部分較高級的被動式懸吊系統雖設有高速及低速阻尼回路，可依據懸吊系統作動速度切換不同回路，但因無法依據車體運動情形切換，因此仍屬於被動式懸吊系統，被動式懸吊系統的優點是成本低廉，耐久性優良，缺點是參數一旦設定即不能調整，可調整之設計也無法在行進間根據路況與車身運動狀況動態調整，因此效果不及半主動式或主動式懸吊。

#### (二) 主動式懸吊

主動式懸吊系統由彈簧、阻尼器、比例或伺服致動裝置及其動力源、蓄壓器，控制器以及各種車輛運動狀態感知器

組成。對於外界路面不平整造成的振動，及加、減速與轉彎造成的車身晃動，全主動式懸吊可以經由感知器獲取車體運動情況及路面狀況資訊，由控制器輸出控制訊號至比例或伺服致動裝置，對懸吊系統輸入能量，以主動控制車身狀態。一般而言，主動式懸吊的作動方式為使用感知器量測車體或懸吊系統的位移、速度或加速度，反饋至控制器，輸出控制訊號至懸吊系統的致動器，以產生力量輸出至懸吊系統，並改變阻尼係數，使懸吊系統快速回到穩定態。主動式懸吊的優點為可外加控制力來改變車體運動狀態，抑制外界傳來擾動之效果良好，但缺點為系統複雜度高，系統體積龐大不利於裝置，消耗能量大，且成本高昂[2]。

### (三) 半主動式懸吊

最早的半主動式懸吊系統觀念在 1973 年提出[3]，其特性介於被動式懸吊系統與主動式懸吊系統之間，由彈簧、伺服或比例驅動的可調節阻尼器、蓄壓器，控制器以及各種車輛狀態感知器組成。半主動式懸吊保留了主動式懸吊的控制回路部分，但取消致動器及壓力源等對懸吊系統輸入能量的機構，以伺服或比例可調節阻尼器取代，大幅減低了系統的複雜度與成本，裝置空間亦可縮小，接近被動式懸吊系統。雖然半主動式懸吊系統與被動式懸吊系統皆沒有額外的能量輸入以改變車體運動狀態，抑制外界傳來之擾動，但半主動式懸吊系統仍可以經由感知器獲取車體運動情況及路面狀況資訊，由控制器輸出控制訊號至比例或伺服致動裝置，以隨時改變懸吊系統的阻尼參數，使懸吊系統在硬至軟之間的狀態切換，以有效的消散車體的擾動，近年來由於控制技術的發展漸趨成熟，半主動式懸吊可以在較低系統複雜度，

較低成本與幾乎不消耗能量的狀況下，達成接近主動式懸吊的效果，因此漸漸在一些高級量產車輛上出現，如 Mercedes Benz 的 S class，BMW 7 Series，Land Rover 的 Discovery，Peugeot 607、406 等。另外，以電控方式改變 ER (Electro Rheological) 流體的黏度，或藉由控制電磁線圈，改變 MF (Magnetic Fluid) 流體的黏度，以達成半主動式懸吊之阻尼控制的研究，亦有汽車製造商進行研究中，如美國 GM (General Motor) 曾發佈消息，在近幾年內可將裝置 ER 半主動式懸吊系統的車輛量產上市[10]。



## 第二節 主動式與半主動式懸吊系統比較

### (一) 主動式懸吊系統

1. 外加額外的致動元件所需費用較高
2. 系統構造複雜度高
3. 可有效控制車身狀態
4. 控制效果較半主動式佳
5. 需要高精度高響應的油壓伺服閥

### (二) 半主動式懸吊系統

1. 所需動力近乎於零，費用較低廉
2. 構造較簡單
3. 只能用於垂直震動的控制上
4. 乘座舒適度近乎於主動式懸吊系統，但操控性能還是無法與主動式懸吊系統比擬。



優良的懸吊系統須具備將路面的顛簸訊號與乘座空間隔絕，其中傳統式的懸吊系統靠著調整機構、彈簧與減壓器以得到較佳的舒適性與操控性。而主動式懸吊系統則是藉由控制系統，隨系統動態的變化而改變或額外加入控制力，藉以得到較佳的乘座舒適性。在發展懸吊系統與其控制器時，我們必須認知，一組良好的懸吊系統，應該要達到下列特性：

1. 調節車體之運動狀態：一組理想的懸吊系統，應能隔離路面狀況及慣性作用的輸入干擾，如崎嶇路面及加減速的慣性作用造成的車身狀態變化，以維持車體的運動在最小值。
2. 調節懸吊系統本身的運動狀態：多餘的懸吊系統及車輪相對於地

面的運動，將導致輪胎承受之地面正向力持續變化，以致車輛之接地性不良，影響車輛操控性。

3. 達成良好力量分佈：為達到良好的操控性，所有車輪與地面間必須維持適當並穩定的接觸力[4]。

傳統的被動式懸吊系統，僅能維持一組固定的參數設定，無法同時滿足上述性能要求，例如，提高衰減力可以抑制懸吊系統本身運動，並維持較佳車輛接地性，但卻無法隔離路況變化傳至車體之干擾。而半主動式與主動式懸吊系統，可藉由感知器得知外界路況變化資訊，驅動致動器以動態調整懸吊系統參數，滿足對於操控性與舒適性的需求，因此已經成為未來懸吊系統之主流[19]。



### 第三節 懸吊系統的評價方式與舒適度

關於懸吊系統的表現，最直接的評價方式，就是車輛的振動情形，也就是乘客的舒適感與乘坐感。在這一領域的研究中，並沒有辦法找到對於人類舒適與否感覺的絕對評價標準，例如：某個頻率下的振幅或加速度對於舒適與否的明確值。然而，在這個領域不同研究者的報告之間，定義或有差距，但是仍然能夠找到共通的方向。本節將介紹三種不同的舒適度評價方式[5]：

- (一) *Burton Douglas Chart*：由航空工程師的研究中歸納整理出來，描述人體處在不同頻率與振幅的垂直振動下的反應。
- (二) *Janeway Recommendations*：由車輛及鐵路工程方面的研究中整理出來，描述人體處在不同頻率與振幅的垂直振動下的反應，且根據不同頻率域描述最大可忍受速度、加速度。
- (三) *Goldman Presentation*：以生物學的觀點描述人體在簡諧振動下能夠忍受之限度，定義頻率上限達 60HZ。

前三項評價方式詳述如下：

- (一) *Burton Douglas Chart*：

在航空器中的乘客與機員經常承受各種形式的振動干擾，干擾造成的影響必須仔細的檢驗，以確保舒適感。圖 2-1 的曲線是以乘客站立或坐在座位上，承受垂直方向的正弦干擾為基準繪出。圖 2-1 中自左上至右下有三條斜線，將圖分成四個區域，這三條斜線是根據量測得之速度與加速度繪出，較上方的線代表較大的速度與加速度，在分隔成的四個區域中，由右上至左下分別為感受極端不愉快區域、感受不愉快區域、可感知區域以及幾乎感覺不到的區域。

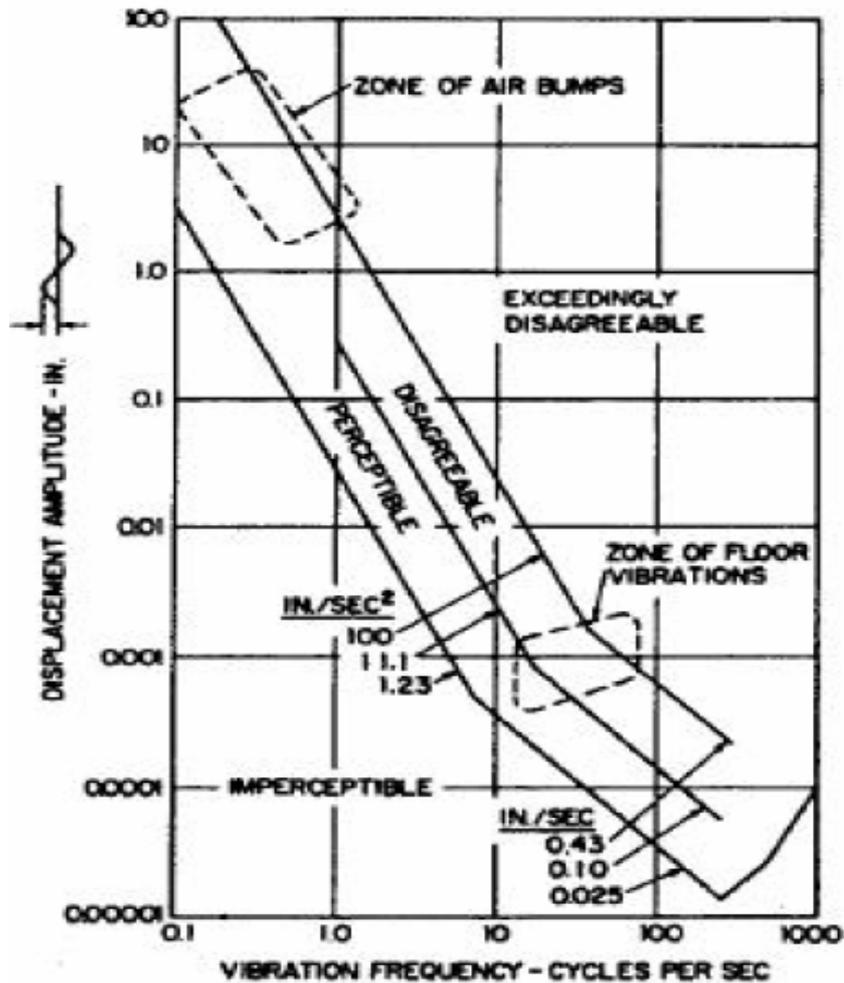


圖 2- 1 Burton Douglas Chart

雖然 Burton Douglas Chart 是以垂直方向的正弦干擾為基準繪出，但是其他型式的穩態垂直振動仍然可以利用此表得到近似的結果。

(二) *Janeway Recommendations* :

Janeway Recommendation 對於舒適度的定義如圖所示，圖中所有的資料以振幅與頻率為參數，根據 J.C Meister 圖繪出，其中三種虛線代表三個區域：

1. 感受強烈 (strongly noticable) 區，位於圖中短虛線下方區域。
2. 不舒服 (uncomfortable) 區域，位於短虛線與長虛線之間。

3. 非常不舒服 (very uncomfortable) 區域，位於點虛線右上方。

在三種虛線之外，另外繪有一條實線，作為舒適與不舒適之分界，實線左下方為感受舒適的區域，實線右上方為感受不舒適的區域。

圖 2-2 中另外繪有各種不同形狀之標記，代表其他研究者所定義的舒適度限界的分佈情形，可以發現大部分研究者之結論相當接近。因為所有的測試，均在五分鐘內完成，人體承受振動之時間並不長，在實際情況中若暴露在振動的時間加長，高頻區域的曲線可以容許較大的調整。在 Janeway Recommendations 圖表 2-1 的最上方表格中，將頻率分成三個區域，標示出在低頻(1-6 HZ)、中頻(6-20HZ)、高頻(20-60 HZ) 三個頻域中，人體能承受之極限，並以頻率與振幅組成之參數表示之，各區域的頻率與振幅關係如表 2-1 所示。

表 2-1 Janeway Recommendations 不同頻域之舒適度參數

Frequency Range (CPS)	Amplitude versus Frequency, in
1-6	$af^3 = 2$ (Constant jerk)
6-20	$af^3 = \frac{1}{3}$ (Constant peak acceleration)
20-60	$af^3 = \frac{1}{60}$ (Constant peak velocity)

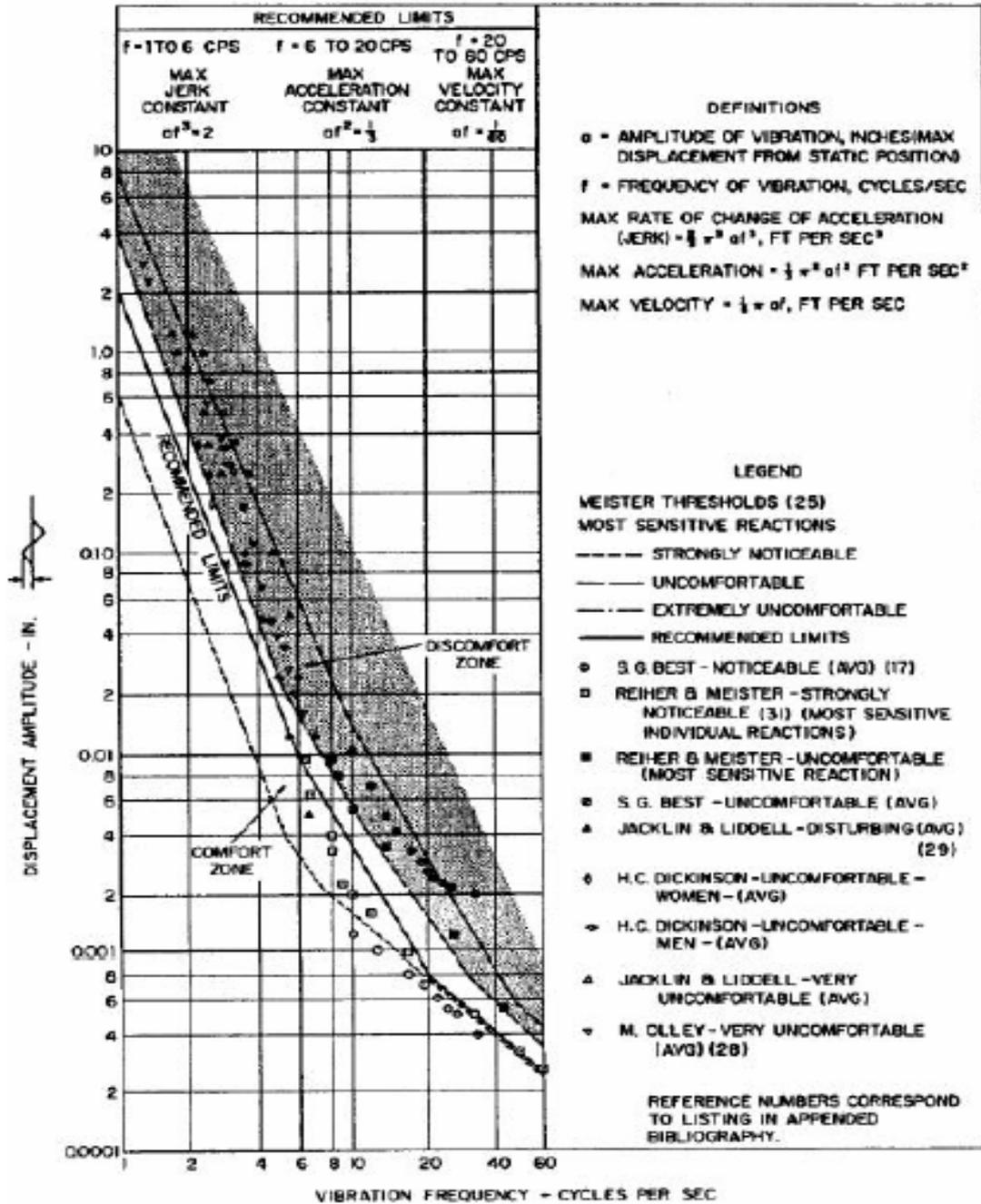


圖 2- 2 Janeway Recommendations Graph

(三) Goldman Presentation

圖 2-3 根據振幅與頻率將圖分成三部分，從右上至左下分別為不可接受區域、感覺不愉快區域、可接受區域。圖中每一點是由不同的研究報告，取四組至九組數值平均得之。

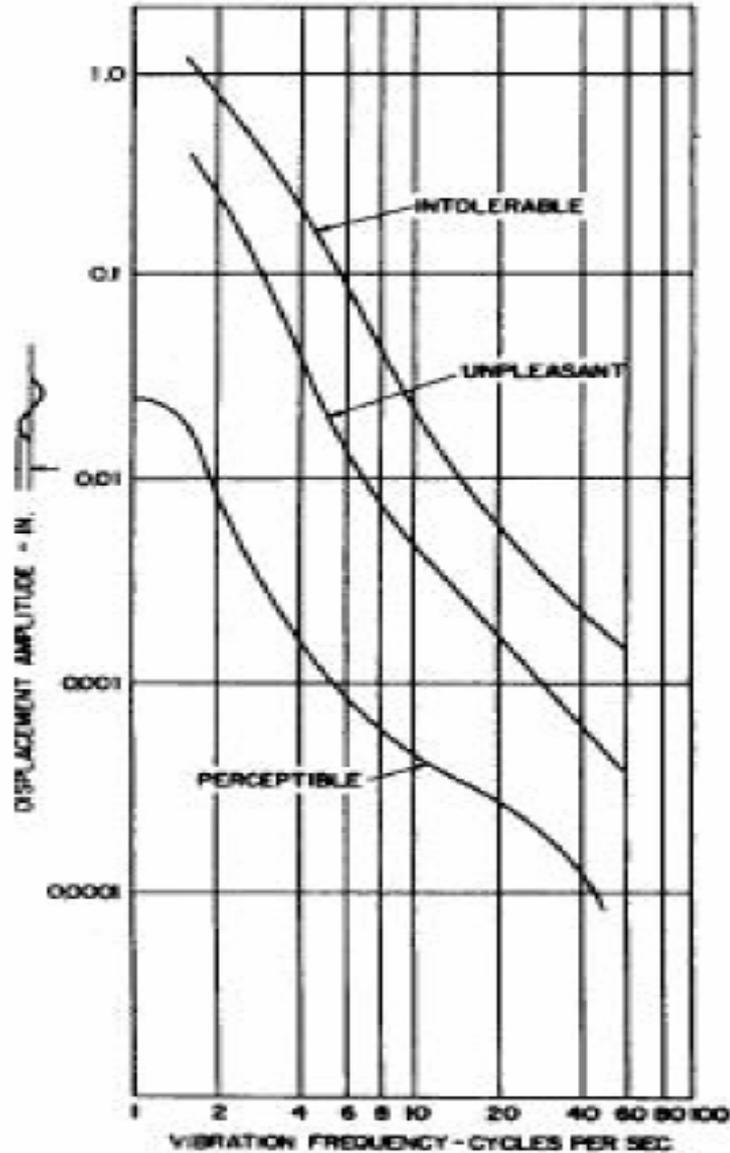


圖 2- 3 Goldman Presentation

#### 第四節 舒適度評價方式之間比較

在三種不同的舒適度評價方式中可以發現，在頻率大於 4 HZ 時，三種圖表的結論相當一致，但是在在頻率小於 4 HZ 時，由於各作者採用的資料以及應用領域不同，對於舒適度有不同的詮釋，例如，Burton Douglas 圖上定義的”有點不舒適”之區域，對照到 Janeway Recommendation 圖中，仍為可接受的範圍[6]。

圖 2-4 表示三種圖表在 1-10 HZ 頻率範圍內的差異，值得注意

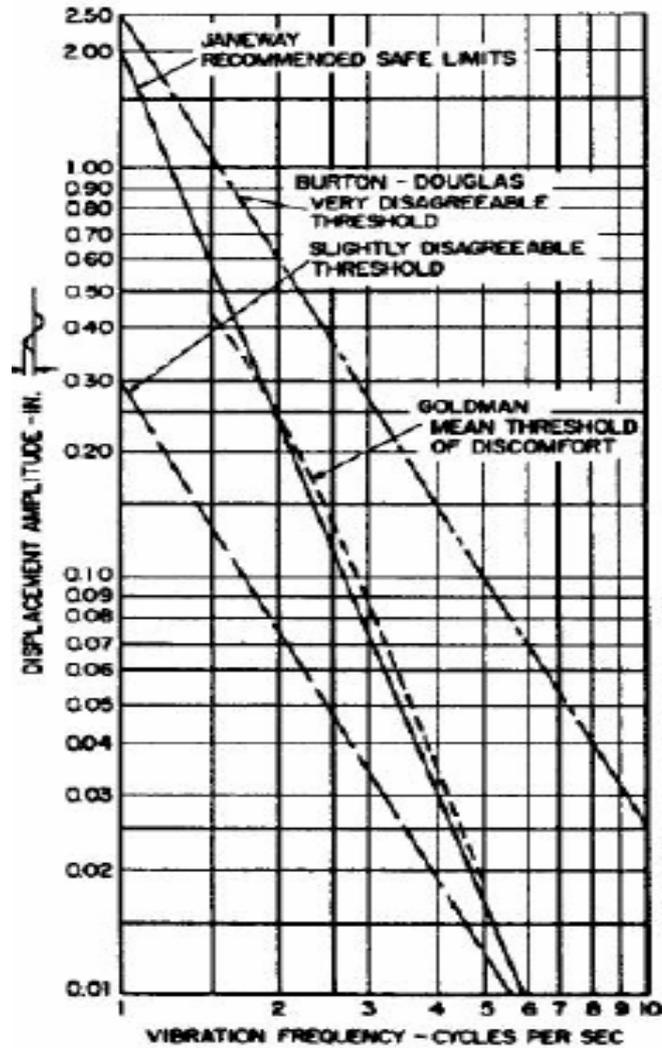


圖 2- 4 Burton Douglas, Janeway, Goldman 舒適度  
曲線在 1-10HZ 頻率範圍內的比較

的是，在 1-10HZ 頻率範圍內，Janeway 圖表與 Goldman 圖表相當接近，但是，在實際應用時，仍需針對不同領域加以選擇。

本節介紹之舒適度評價方式是由振動之頻率與振幅的相對關係定義，要達成良好之舒適性，良好的懸吊系統必須能夠達成吸收振動，降低振動的頻率、有效抑制車輛振幅、抑制振動造成的車體加速度及其變化率的目標。

## 第五節 半車懸吊系統描述

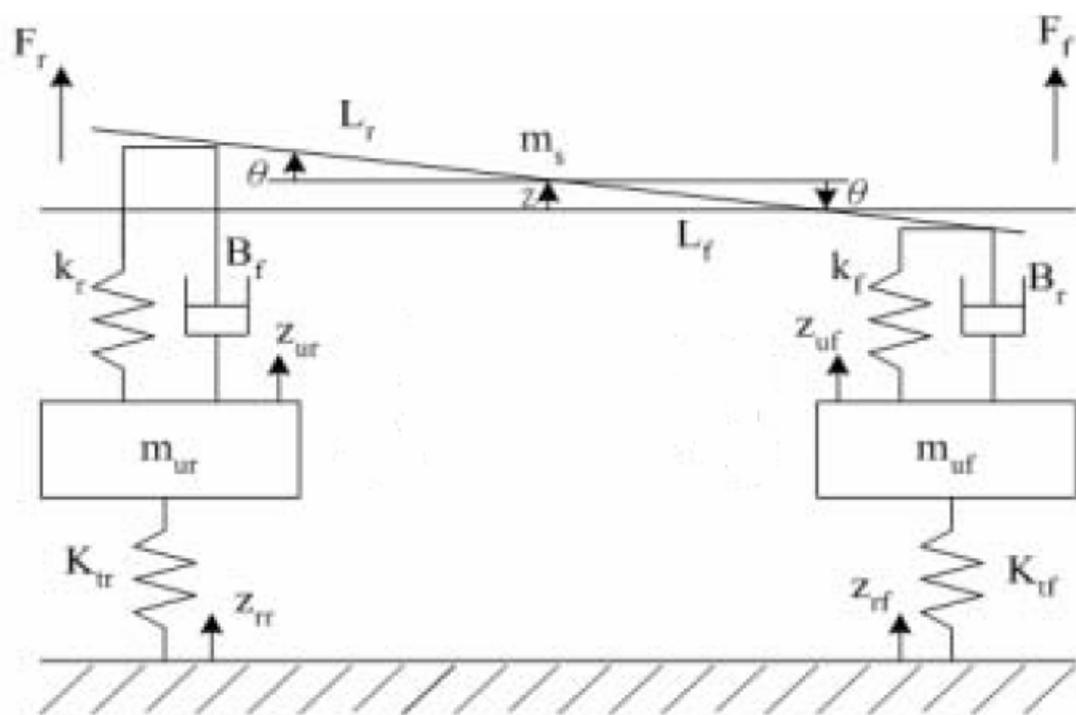


圖 2-5 半車系統懸吊模型

(一) 車輛懸吊裝置系統的主要功能如下：

1. 提供直線的命令使車輪遵守，如此一來車輪可以在不平坦的道路上行走，避免底盤接觸地面上的粗糙。
2. 維持車輛在適當的行駛方向，保持姿勢在路的表面。
3. 反應縱向的輪箍力量〈包含加速和煞車〉，橫向的力量和煞車、駕駛的力矩所產生的控制力量。
4. 防止底盤的轉動。
5. 在及小的負載變動範圍裡保持車輛和地面的接觸[7]。

懸吊裝置的性能對於車輛的移動在運動學中是主要注意的重點。然而此性能從車輪到底盤的傳達也反應在力量和力矩上。此外在設計的過程中花費、重量、包裝、空間、製作、組裝上的難易皆是考慮的重點。部分的車輛懸吊裝置可以拉起高度和前方、後方的車輪是

以一個非線性的系統呈現。介於車輛整體和車輪之間的懸吊裝置是製作線性阻尼器和彈力的要素，而輪胎則是線性沒有阻尼的彈簧。活動中的懸吊裝置是相當適合被精簡為半輛車的模型，可以防止不必要的錯綜複雜卻依然能顯現重要的懸吊裝置特性。主要是由單一的彈簧塊和兩個無阻尼的彈簧塊組成。有阻尼的彈簧塊可被認為是車子整體的主要部分，而兩塊無阻尼的彈簧塊則可被認為是前方和後方的車輪。典型的半車 2D 模型包含彈簧塊強度和起伏或垂直的形式經常被前方和後方無阻尼的彈簧塊所擴大。起伏可被認為是車子的上下擺動的線性動作，而高度也是車子主體可用角度測量的動作。有阻尼的彈簧塊是不受起伏和高度影響，就如同無阻尼的彈簧是不受垂直力量的彈力影響[8]。

## (二) Mathematical Model 數學模式

取代彈簧塊的方程式：

前輪：

$$Z_{sf} = Z - L_f * \sin \theta \quad (2-1)$$

後輪：

$$Z_{sr} = Z + L_r * \sin \theta \quad (2-2)$$

$Z_{sf}$  是借代前方車身， $Z_{sr}$  是借代後方車身， $Z$  是借代引力中心， $L_f$  是介於引力中心和前方車輪， $L_r$  是介於引力中心和後方車輪， $\theta$  是傾斜角度。相等力量在兩方車輪的數學方程式：

前輪：

$$F_f = -k_f (Z_{sf} - Z_{uf}) - B_f (\dot{Z}_{sf} - \dot{Z}_{uf}) \quad (2-3)$$

後輪：

$$F_r = -k_r (Z_{sr} - Z_{ur}) - B_r (\dot{Z}_{sr} - \dot{Z}_{ur}) \quad (2-4)$$

$k_f$  和  $k_r$  代表前方和後方的彈力係數， $B_f$  和  $B_r$  代表前方和後方的阻力係數。 $Z_{sf}$  和  $Z_{sr}$  是借代前方和後方的車輪。引用牛頓第二定律和靜力平衡當作線性取代，引力中心和車輛傾斜角度的起源。如此一來，移動方

程式就可以被確切的表達。

起伏的移動方程式〈包含在  $z$  方向的力量平衡〉:

$$m_s \ddot{Z} = k_f (Z_{uf} - Z_{sf}) + k_r (Z_{ur} - Z_{sr}) + B_f (\dot{Z}_{uf} - \dot{Z}_{sf}) + B_r (\dot{Z}_{ur} - \dot{Z}_{sr}) \quad (2-5)$$

高度的移動方程式〈包含位於  $\theta$  方向的力矩平衡〉:

$$J_y \ddot{\theta} = -F_f * L_f \cos \theta + F_r * L_r \cos \theta \quad (2-6)$$

以上的方程式可改寫為

$$\begin{aligned} \ddot{Z} = \frac{1}{m_s} [ & -(k_f + k_r)Z - (B_f + B_r)\dot{Z} + (L_f k_f - L_r k_r) \sin \theta + (L_f B_f - L_r B_r) \dot{\theta} \cos \theta + k_f Z_{uf} + B_f \dot{Z}_{uf} \\ & + k_r Z_{ur} + B_r \dot{Z}_{ur} ] \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = \frac{1}{J_y} [ & (L_f k_f - L_r k_r)Z \cos \theta + (L_f B_f - L_r B_r) \dot{Z} \cos \theta - (L_f^2 k_f + L_r^2 k_r) \cos \theta \sin \theta - (L_f^2 B_f + L_r^2 B_r) \dot{\theta} \cos^2 \theta \\ & - L_f k_f Z_{uf} \cos \theta - L_f B_f \dot{Z}_{uf} \cos \theta + L_r k_r Z_{ur} \cos \theta + L_r B_r \dot{Z}_{ur} \cos \theta ] \end{aligned} \quad (2-8)$$

再一次引用牛頓的第二定律，在前方和後方沒有彈力的車輪。移動方程式可以被確切的表達：

$$\text{前輪: } m_{uf} \ddot{Z}_{uf} = k_f (Z_{sf} - Z_{uf}) + B_f (\dot{Z}_{sf} - \dot{Z}_{uf}) + K_{tf} (Z_{rf} - Z_{uf}) \quad (2-9)$$

$$\text{後輪: } m_{ur} \ddot{Z}_{ur} = k_r (Z_{sr} - Z_{ur}) + B_r (\dot{Z}_{sr} - \dot{Z}_{ur}) + K_{tr} (Z_{rr} - Z_{ur}) \quad (2-10)$$

$K_{tf}$  和  $K_{tr}$  是前方和後方車輪的彈力係數。

以上的方程式可改寫為:

$$\ddot{Z}_{uf} = \frac{1}{m_{uf}} [k_f Z + B_f \dot{Z} - L_f k_f \sin \theta - L_f B_f \dot{\theta} \cos \theta - (k_f + K_{tf}) Z_{uf} - B_f \dot{Z}_{uf}] \quad (2-11)$$

$$\ddot{Z}_{ur} = \frac{1}{m_{ur}} [k_r Z + B_r \dot{Z} + L_r k_r \sin \theta + L_r B_r \dot{\theta} \cos \theta - (k_r + K_{tr}) Z_{ur} - B_r \dot{Z}_{ur}] \quad (2-12)$$

$K_{tf}$  和  $K_{tr}$  是前方和後方車輪的彈力係數。

以上的方程式可改寫為:

$$\ddot{Z}_{uf} = \frac{1}{m_{uf}} [k_f Z + B_f \dot{Z} - L_f k_f \sin \theta - L_f B_f \dot{\theta} \cos \theta - (k_f + K_{uf}) Z_{uf} - B_f \dot{Z}_{uf}] \quad (2-13)$$

$$\ddot{Z}_{ur} = \frac{1}{m_{ur}} [k_r Z + B_r \dot{Z} + L_r k_r \sin \theta + L_r B_r \dot{\theta} \cos \theta - (k_r + K_{ur}) Z_{ur} - B_r \dot{Z}_{ur}] \quad (2-14)$$

以下說明系統狀態可變量：

$x_1 = Z$  是車輛行駛時的高度， $x_2 = \dot{Z}$  是可負荷載重量速度， $x_3 = \theta$  是傾

斜角度， $x_4 = \dot{\theta}$  是角速度， $x_5 = Z_{sf} - Z_{uf}$  是前輪懸吊系統高度的移動，

$x_6 = \dot{Z}_{uf}$  是前輪之速度， $x_7 = Z_{sr} - Z_{ur}$  是後方車輪懸吊裝置高度的移動，

$x_8 = \dot{Z}_{ur}$  是後輪之速度。

對於半車懸掛裝置系統的相等情況和變化情形如下[11]：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_s} [-(B_f + B_r)x_2 + (L_f B_f - L_r B_r)x_4 \cos x_3 - k_f x_5 + B_f x_6 - k_r x_7 + B_r x_8] \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{J_y} [(L_f B_f - L_r B_r)x_2 \cos x_3 - (L_f^2 B_f + L_r^2 B_r)x_4 \cos^2 x_3 + (L_f k_f x_5 - L_f B_f x_6 - L_r k_r x_7 + L_r B_r x_8) \cos x_3] \\ \dot{x}_5 = x_2 - L_f x_4 \cos x_3 - x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{m_{uf}} [-K_{uf} x_1 + B_f x_2 + L_f K_{uf} \sin x_3 - L_f B_f \cos x_3 + (k_f + K_{uf})x_5 - B_f x_6 + K_{uf} Z_{uf}] \\ \dot{x}_7 = x_2 + L_r x_4 \cos x_3 - x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{1}{m_{ur}} [-K_{ur} x_1 + B_r x_2 - L_r K_{ur} \sin x_3 + L_r B_r \cos x_3 + (k_r + K_{ur})x_7 - B_r x_8 + K_{ur} Z_{ur}] \end{cases} \quad (2-15)$$

(三) 由  $x_3$  這個參數，推導出三個狀態模型

Model1: If  $x_3(t)$  is “about 0(rad)” ,

$$\text{Then } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & \frac{(aB_f - bB_r)}{m_s} & \frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(aB_f - bB_r)}{J_y} & 0 & \frac{-(a^2B_f + b^2B_r)}{J_y} & \frac{ak_f}{J_y} & \frac{-aB_f}{J_y} & \frac{-bk_r}{J_y} & \frac{-bk_r}{J_y} \\ 0 & 1 & 0 & -a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-aB_f}{m_{uf}} & \frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}}{m_{ur}} & \frac{bB_r}{m_{ur}} & 0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$



Modle2: If  $x_3(t)$  is “about  $-\frac{\pi}{2}$  or  $\frac{\pi}{2}$  (rad)” ,

Then  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & 0 & \frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}}{m_{uf}} & 0 & \frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}}{m_{ur}} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$



Module3: If  $x_3(t)$  is “about  $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$  (rad)”

Then  $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$

令  $\sin \theta = x_3 - \frac{x_3^3}{6}$  ,  $\cos \theta = 1 - \frac{x_3^2}{2}$  。取 Taylor series 前兩項作近似，忽

略高次項，因為只考慮系統的微量變化。

$$A_3 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & \frac{(aB_f - bB_r)(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_s} \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \frac{(aB_f - bB_r)(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{(bk_r x_7 - ak_f x_5)x_3}{J_y} & \frac{-(a^2 B_f + b^2 B_r)(1 - x_3^2 + \frac{x_3^4}{4})}{J_y} \\
0 & 1 & 0 & -a(1 - \frac{x_3^2}{2}) \\
\frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}(x_3 - \frac{x_3^3}{6})}{m_{uf}} & \frac{-aB_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_{uf}} \\
0 & 1 & 0 & b(1 - \frac{x_3^2}{2}) \\
\frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}(x_3 - \frac{x_3^3}{6})}{m_{ur}} & \frac{bB_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_{ur}} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{ak_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-aB_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-bk_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-bk_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
\frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}}
\end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

由於系統模型為非線性，所以我們利用線性化將此模型轉為線性。

1. 令方程式(2-15)=0

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x_2 = 0 \\ f_2 = -(B_f + B_r)x_2 + (aB_f - bB_r)x_4(1 - \frac{x_3^2}{2}) - k_f x_5 + B_f x_6 - k_r x_7 + B_r x_8 = 0 \\ f_3 = x_4 = 0 \\ f_4 = (aB_f - bB_r)x_2(1 - \frac{x_3^2}{2}) - (a^2 B_f - b^2 B_r)x_4(1 - \frac{x_3^2}{2}) + (ak_f x_5 - bB_f x_6 - bk_r x_7 + bB_r x_8)(1 - \frac{x_3^2}{2}) = 0 \\ f_5 = x_2 - ax_4(1 - \frac{x_3^2}{2}) - x_6 = 0 \\ f_6 = -K_{uf}x_1 + B_f x_2 + aK_{uf}(x_3 - \frac{x_3^3}{6}) - aB_f x_4(1 - \frac{x_3^2}{2}) + (k_f + K_{uf})x_5 - B_f x_6 + K_{uf}Z_{rf} = 0 \\ f_7 = x_2 + bx_4(1 - \frac{x_3^2}{2}) - x_8 = 0 \\ f_8 = -K_{ur}x_1 + B_r x_2 - bK_{ur}(x_3 - \frac{x_3^3}{6}) + bB_r x_4(1 - \frac{x_3^2}{2}) + (k_r + K_{ur})x_7 - B_r x_8 + K_{ur}Z_{rr} = 0 \end{array} \right.$$

## 2. 得到平衡點

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})}{2}$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = \sqrt{2}$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = \frac{-K_{uf}[\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})]}{2(k_f + K_{uf})}$$
$$x_6 = 0$$
$$x_7 = \frac{K_{uf}[\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})]}{2(k_f + K_{uf})}$$
$$x_8 = 0$$

此平衡點的  $x_1 \sim x_8$  的物理意義即是系統狀態的定義。

$x_1 = Z$  是車輛行駛時的高度， $x_2 = \dot{Z}$  是可負荷載重量速度， $x_3 = \theta$  是傾斜角度， $x_4 = \dot{\theta}$  是角速度， $x_5 = Z_{sf} - Z_{uf}$  是前輪懸吊系統高度的移動， $x_6 = \dot{Z}_{uf}$  是前輪之速度， $x_7 = Z_{sr} - Z_{ur}$  是後方車輪懸吊裝置高度的移動， $x_8 = \dot{Z}_{ur}$  是後輪之速度。

將  $Z_{rf}$  和  $Z_{rr}$  代入後，可得平衡點。此平衡點即是當時系統狀態下使得系統保持穩定的點。

3. 代入  $A_3$  中，可得線性化模型。不過模型中含有  $Z_{rf}$  和  $Z_{rr}$  兩個變數，

此時再利用灰色預測 GM(1, 1) 模型預測出下一時間的值。

# 第三章 灰色理論與架構

## 第一節 灰色系統理論簡介

在控制理論中常常用顏色的深淺來形容系統信息的多少。比如說黑箱 (block box) 就是表示對系統內部的結構，參數，特徵等信息一無所知，只能從系統外部的表象來研究這類系統。反之，一個系統的內部特性全部已知，便稱這類系統為白色系統 (white system)。因此常用黑來表示信息缺乏；白來表示信息完全；而灰則表示系統部分信息已知、部分未知、信息不完全。由於黑白灰是相對的，一定的認知層次而言，因而具有相對性。有關白色系統、黑色系統及灰色系統分別定義如下[13]：



### (一) 白色系統

指相對於一定的認知層次，對於系統所有的信息都已確知的系統，稱為白色系統。例如：國小某班級導師，對於班上學生姓名、家裡電話、身高、體重等，都是已知，所以此班級對於導師而言，是一白色系統。

### (二) 黑色系統

指相對於一定的認知層次，對於系統中所有的信息都是未知的，只能知道這類系統外在的輸入、輸出關係。因此，稱此系統為黑色系統。例如：在宇宙銀河系以外的星球，雖然知道它們的存在，但卻不知道它們實際上的重量、體積、密度、組成元素及與地球的距離；也不知道這些星球是恆星還是行星，像這樣的系統便稱它是一個黑色系統。

### (三) 灰色系統

指相對於一定的認知層次，關於系統的內部的部份信息已知、部分未知。即系統的信息不完全，則稱此類的系統為灰色系統。例如：人體是一個系統，在人體中有一部分外在的參數：如身高、體重及年齡等是已知的；也有一些內部參數：如血壓、脈搏及體溫等也是已知的。然而有許多關於人體的信息未知的：如人體究竟有多少穴位？每個穴位各有什麼樣的功能？穴位的生物、化學及物理性質等，都是未知且不確定的，便稱這樣的系統為灰色系統。其他如物理系統或機械系統，大部分都屬於灰色系統[14]。

## 第二節 灰色系統理論之產生背景

灰色系統理論的產生背景，和控制理論的發展過程有著密切的關係。故欲瞭解灰色系統理論的產生背景，必須了解整個控制理論的發展背景，茲將控制理論的發展過程簡述如下：

從十六、十七世紀工業革命以來，機械替代了人類手工生產，於是整個生產過程進入了機械化。隨著電器工業的蓬勃發展，於是生產機械化便進入了生產自動化。十九世紀馬克斯維爾和維什尼格拉特斯提出關於控制與回饋系統理論後，啟開了系統時代大門。1948年美國數學家申農(Shennong)提出了信息論(Cybernetics)，由於這些理論的創立與發展，改變了人類的思維和生活方式，從控制理論的發展而言，大致可分為三個階段：

### (一) 經典控制理論階段(1950年代末)

在經典控制理論時期，主要研究的內容為單輸入、單輸出(SISO)及一些簡單線性自動調節系統、其主要分析的方法是採用頻率響應法(Frequency Response Method)和根軌跡法(Root Locus Method)而採用的數學模型為轉移函數(Transfer Function) 對於非線性系

統的分析則採用相位平面法 (Phase Plane Method) 和描述函數法 (Describing Function Method)

## (二) 現代控制理論階段 (1950 年代末到 1970 年代初)

在現代控制理論時期主要研究的對象為多輸入、多輸出 (MIMO) 之多變量複雜系統，其主要的分析方法是狀態空間分析法 (State Space Method)。而採用的數學模型為狀態方程 (State Equation)。由於依據狀態方程所設計的控制系統很容易由電腦程式計算來實現，使得現代控制理論的應用範圍得已逐漸地擴大。

## (三) 大系統理論階段 (1970 年代初期~)

所謂大系統是指系統規模龐大、子系統多、結構複雜、多功能多目標及影響因素眾多系統，一個多輸入、多輸出、多干擾、多變量、多參數的系統，其具有分散性、信息不完全性、不確定性等特點。由於許多大系統的信息並不完全，很難以傳統的數學方法建立系統之精準數學模型，其所作的控制效果也很差，對於只掌握系統部分信息之控制問題，中國大陸華中理工大學鄧聚龍教授 1982 年在北荷蘭出版公司的“系統與控制通訊”雜誌上正式發表了一篇論文“Control Problems of Grey System” [15]從而創立出灰色系統理論。由於過去對於灰箱 (Grey Box) 問題都把它當作黑箱問題來處理，因此常常浪費了灰箱中白色部分的信息，而鄧聚龍教授則主張要充分利用灰色系統中的白色信息來解決控制上的問題，並且利用灰參數、灰方程及灰矩陣來描述灰色系統的行為特徵，一般來說灰色系統為下述狀況：

1. 元素 (參數) 訊息不完全
2. 結構訊息不完全
3. 因素關係訊息不完全
4. 系統運行的訊息不完全

此外灰色系統又可因是否具有物理原型，而區分為本徵性灰色系統與非本徵性灰色系統：

1. **本徵性灰色系統**：系統本身沒有物理模型，我們對於此類系統的因素與因素間的關係無法確定，或是不完全明瞭，如因素關聯密切的人口成長趨勢問題、經濟系統等。
2. **非本徵性灰色系統**：系統本身具有一定的物理模型，對於此類的系統我們較容易掌握各因素關係互動的影響。

### 第三節 灰色系統的基本概念

**預測和預測模型的定義：**

我們認為通過現實與未來的關係去分析未來，通過已發生事件與將發生事件的橋樑去推斷將發生的事件，通過已知數據與未知數據間的模型去計算未知數據……。。等等便是預測。因此，預測模型實質上是可以歸納出幾個特性：

1. 連結現實與未來的關係
2. 作為已發生事件與將發生事件的橋樑
3. 溝通已知數據與未知數據的表達

**此外作為一個預測模型，至少應滿足下述要求：**

1. 含有顯性或隱性時間的關係
2. 具有外延性
3. 結果具有可實證性：預測結果具有可實證性，是指預測的數據（最理想的情況）與未來發生的情況完全吻合，即使達不到此種要求，至少也不應脫離實際太遠。
4. 計算數據或模型具有預檢驗性：預檢驗性是指預測的時刻未到來之前，可以通過某些方法、手段及概念等等，對預測模型及數據的可信度進行檢驗。由於灰色預測模型所需的最少數據是四個，

因此當數據多於四個時，可以用滾動建模的方式，預測後面的數據以檢驗可信度。

5. 具有全訊息性：所謂的全訊息性是指模型應該包括未來事件的全部訊息，或者說從現有的條件出發，至少可以認為它是包含的全部的訊息[16]。

在上述的條件中，其中 1、2、3 及 5 亦稱為預測模型的基本條件。而對模型類型的分類而言，一般作為預測的模型有兩類：一類稱為行為模型，另一類稱為因子模型。所謂行為模型是用系統行為數據建立的模型；這類模型一般認為是全訊息性的。而所謂的因子模型，是使用影響系統主行為的因子數列建立的模型，一般而言是不具有全訊息性的，但是在需要強調某些因子的作用時也可以採用因子模型進行預測。

綜合而言，灰色理論主要是針對系統模型之不明確性及資訊之不完整性之下，進行關於系統的關聯分析 (relational analysis) 及模型建構 (model construction)，並藉著預測 (prediction) 及決策 (decision making) 的方法來探討及了解系統的情況。並能對事物的“不確定性 (not certainty)”；“多變量輸入 (multi-input)”；“離散的數據 (discrete data)”；“數據的不完整性 (not enough)”做有效的處理。研究的項目可以歸納下列幾項：

### (一) 灰色生成 (Grey Generating)

灰色生成即為補充訊息之數據處理，這是一種就數找數的規律方法，利用此種方式，在一些雜亂無章的數據中，設法將其被掩蓋的規律及特徵浮現出來。換句話說，我們可以利用灰色生成的方式降低數據中的隨機性，並提昇其規律性。在灰色理論中常用的生成方法有：

1. 灰色關聯生成：將數據依實際情況在不失真之下所作的數據處理。

2. 累加生成：將數據依次累加。
3. 逆累加生成：累加生成的逆運算。
4. 插值生成：利用現有之數據及數學方法建立其間所缺失的數據。

## (二) 灰色關聯分析 (Grey Relational Analysis)

這是在灰色系統理論中分析離散序列間相關程度的一種測度方法。傳統上的統計迴歸是處理變數與變數之間關係的一種常用數學方法，對統計迴歸而言，有下列幾種限制：

1. 變數與變數之間是必須存在著相互影響的關係。
2. 要求大量的數據。
3. 數據的分佈必須為典型的。
4. 變化因素不能太多。

因此在某些場合中可能無法很容易的求出答案。而灰關聯分析具有少數數據及多因素分析的，剛好可以彌補統計迴歸上的缺點。

## (三) 灰色建模 (Grey Model Construction)

這是利用生成過的數據建立一組灰差分方程與灰擬微分方程之模式。稱為灰色建模，一般可以分成下列幾種：

1.  $GM(1, 1)$ ：表示一階微分，而輸入變數為一個，一般作預測用。
2.  $GM(1, N)$ ：表示一階微分，而輸入變數為  $N$  個，一般作多變量關聯分析用。
3.  $GM(0, N)$ ：這是  $GM(1, N)$  的特例，表示零階微分，而輸入變數則為  $N$  個，一般作多變量關聯分析用。

## (四) 灰色預測 (Grey Prediction)

灰色預測是以  $GM(1, 1)$  模型為基礎對現有的數據所進行的預測方法，實際上則是找出某一數列中間各個元素之未來動態狀況，主要的優點為所需的數據不用太多及數學基礎相當簡單。

## (五) 灰色決策 (Grey Decision Making)

對某一事件，因為考慮的對策不同而有不同效果，為了解決此一

問題，將對策和 GM 模型結合所作的決策稱為灰色決策。

#### (六) 灰色控制 (Grey Control)

在傳統的控制上，一般是利用輸出及輸入間的數據，做成轉移函數，再求出所需的增益值，或者利用狀態空間法求出輸入和輸出之間的動態關係。而灰色控制則是通過系統行為數據，尋求行為發展的規律，以預測未來的行為。當預測值得到後，將此一預測值回授至系統，進行系統控制的一種法則。

### 第四節 灰色理論，機率統計及模糊理論的差異性

#### (一) 依本質內涵而言：

機率統計：由無限多及無限規律的數據情況下所造成的不確定狀態。

模糊理論：由認知上的不足夠所造成的不確定狀態。

灰色理論：由少數數據的情況下所造成的不確定狀態。

#### (二) 以所依據的數學基礎而言

機率統計：利用康托集 (Cantor set)，只有 0 與 1 的集合，元素的特徵值只具有，是 (1) 及非 (0) 的特性。

模糊理論：利用模糊集 (Fuzzy set)，處於 0 至 1 之間的集合，元素的特徵值可以取 0 到 1 之間的任意值。

灰色理論：利用朦朧集 (Hazy set)，在一確定的命題下，利用不斷補充內部資訊的方式，將不明確的狀態逐漸的變成明確，包含了康托集的  $[0, 1]$  及模糊集的 0 至 1 的兩種特性。

#### (三) 以所使用的數學運算方式而言

機率統計：利用統計 (statistics) 的運算方式。

模糊理論：利用模糊推論 (inference) 中取大 ( $\vee$ : Maximum) 及取小 ( $\wedge$ : Minimum) 的運算方式。

灰色理論：利用灰生成及灰關聯的運算方式。

#### (四) 以所需要的數據多寡而言

機率統計：由於是解決多數據大樣本之不確定，因此需要龐大的數據。

模糊理論：由於是解決人類的認知，因此數據為憑經驗給定。

灰色理論：由於是解決少數據小樣本之不確定，因此只需要四個數據即可。

#### (五) 以所需要的數據分布而言

機率統計：由於是多數據，因此需要典型的分佈 (typical distribution)，例如離散式的二項分佈，連續型的常態分佈等等。

模糊理論：由於是認知，因此利用歸屬函數 (membership function) 作數據分佈。

灰色理論：由於是少數據，因此不可能構成分佈狀態，所以可以為任意分佈。

#### (六) 以所需要完成的目標而言

機率統計：由於目標為歷史的統計規律，因此完成的目標為現實及非現實的規律。

模糊理論：由於是使用語意認知，完成的目標為認知的表達。

灰色理論：由於現實的少數據環境，完成的目標為現實的規律狀況。

綜合以上的比較，將結果列於下表中：

表 3-1 機率統計, 模糊理論, 灰色理論三項比較

比較之項目及差異性	機率統計	模糊理論	灰色理論
1. 本質內涵	大樣本且不確定	認知上不確定	小樣本且不確定
2. 數學基礎	康托集	模糊集	灰朦朧集
3. 數學運算方式	統計方法	取邊界值	生成方法
4. 數據多寡	多數據狀態	經驗數據狀態	少數據狀態

5。數據分佈	典型的分佈	函數的分佈	任意的分佈
6。完成的目標	歷史的統計規律	認知的表達	現實的規律

## 第五節 灰色生成

灰色生成是灰色系統理論最基礎的部分，其想法是以運算處理方式找出原始的數據資料的規律性。而在做灰色生成之前，決定原始數據的擷取方式亦是很重要的。其方式約可分成三種[17]：

### (一) 擷取完整數據：

擷取外界所有輸出資訊作為灰色生成之需要。此種方式之特點是對整體輸出做擷取，能夠掌握系統之完整資訊，不致因遺漏某筆重要數據而有錯誤。但其卻不適用於動態的系統之中，同時其運算量也可能因數據太多而變得龐大，因此一般較少使用。

### (二) 擷取部分數據：

相對於完整數據的擷取，此種方式每次只擷取部分的外界輸出資訊作為灰色生成之需要。此種方式之特點是將整體輸出做了片段分割，每次僅取部分，可降低其整體運算量，同時亦能夠配合動態系統之需求，達成短期預測之目的。但其缺點是無法掌握連續的系統特性。

### (三) 擷取最新數據：

此方式乃是修正部分擷取的缺點，隨著系統輸出變化而更新其每次擷取之數據，雖然仍維持部分擷取，但每次所取得的數據都是最新的，而且擷取的數據數目也是固定的，除此之外，此種方式同時也能兼具掌握系統之連續資訊的特性。假設有一  $n$  筆數據的數列，在時間  $k$  時，得到一擷取數列為：

$$y^{(0)} = \{y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(k-1), y^{(0)}(k)\}$$

則當時間為  $k+1$  時，擷取後的數列應更新成：

$$y^{(0)} = \{y^{(0)}(2), y^{(0)}(3), \dots, y^{(0)}(k), y^{(0)}(k+1)\}$$

此種將前次擷取當中最舊的一筆數據捨棄，補進最新一筆數據之新陳代謝的擷取方式是較符合實際控制需求的方式。

決定原始數據的擷取方式之後，緊接著便是開始進行灰色生成的步驟。在灰色生成的方式上，一般分成累加生成、反累加生成、插值生成、均值生成…等數種，以下將依序作說明。

(一) 累加生成 (Accumulated Generation Operation, AGO):

將原始數列內的各個數據依序累加，以形成新數列內的數據，此新數列被稱之為「生成數列」。假設有一原始數列為：

$$y^{(0)} = \{y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n)\}$$

其中  $n$  為原始數據之個數，但為了符合灰色建模之需要，必須限制  $n \geq 4$ 。此時，累加生成之生成數列表示成：

$$y^{(1)} = \left\{ \sum_{k=1}^1 y^{(0)}(k), \sum_{k=1}^2 y^{(0)}(k), \dots, \sum_{k=1}^n y^{(0)}(k) \right\} = \left\{ \sum_{m=1}^k y^{(0)}(m), k = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (3-1)$$

或是  $y^{(1)} = \{y^{(1)}(k), k = 1, 2, \dots, n\}$

其中  $y^{(1)}$  表示經過一次累加生成運算後所產生的資料。我們可從圖中發現累加生成運算可將原始序列的規律性顯現出來，而產生一個規律的生成序列。若作  $r$  次累加生成則可表示成：

$$y^{(r)} = \left\{ \sum_{m=1}^k y^{(r-1)}(m), k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

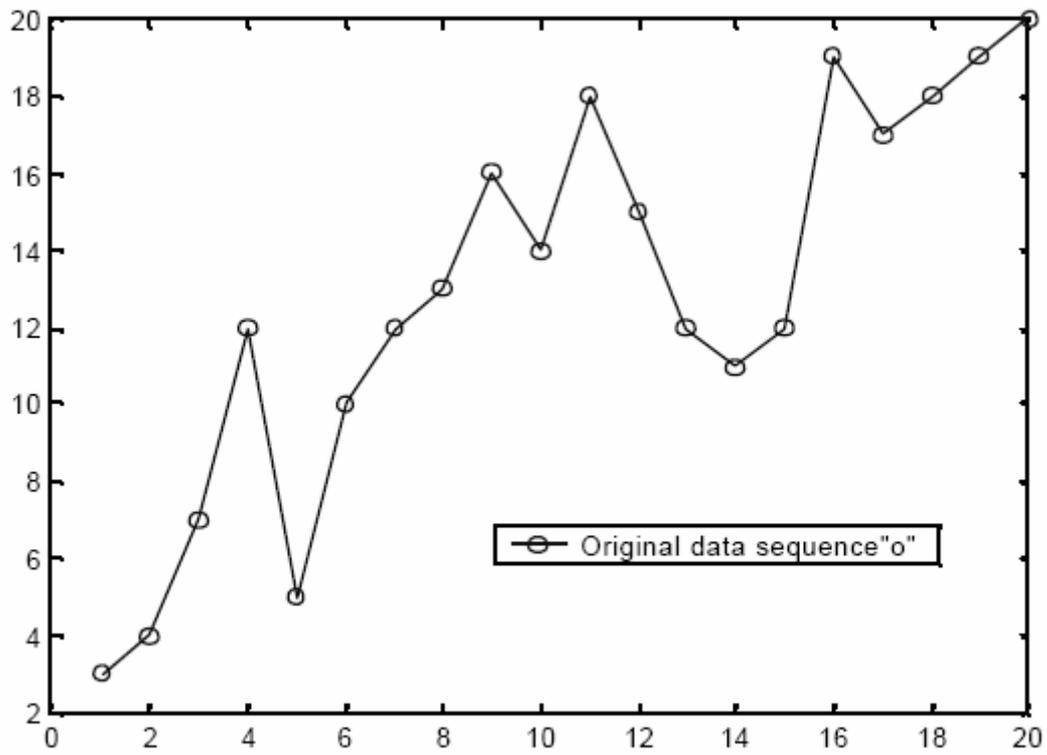


圖 3- 1 原始數列

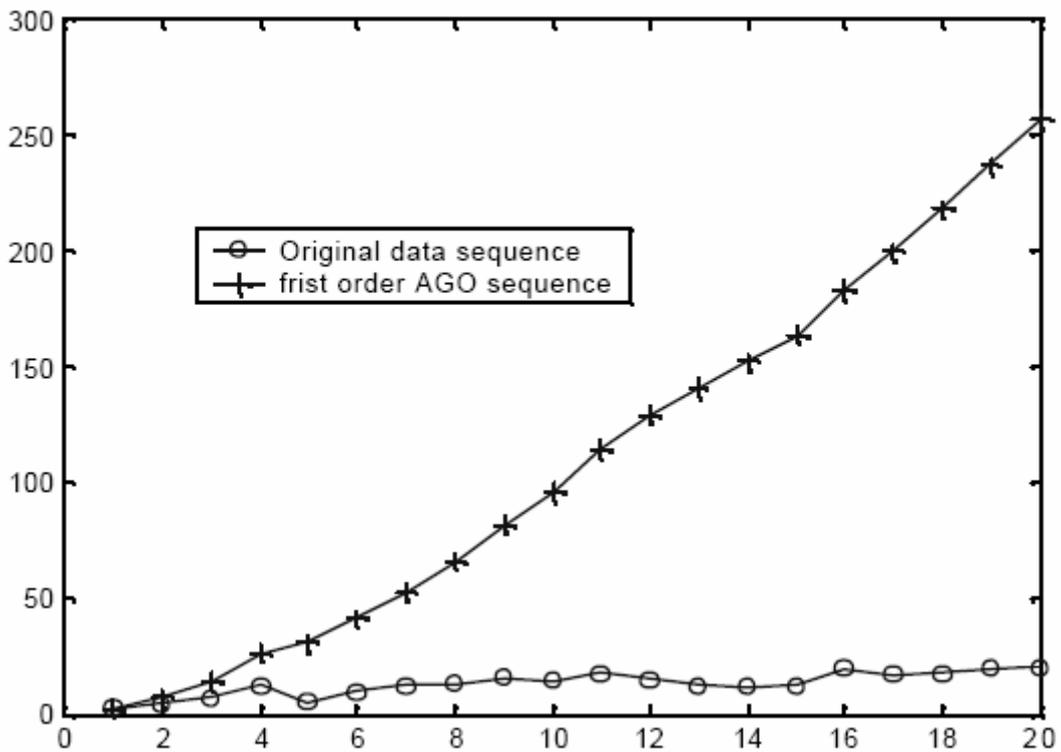


圖 3- 2 一次累加生成

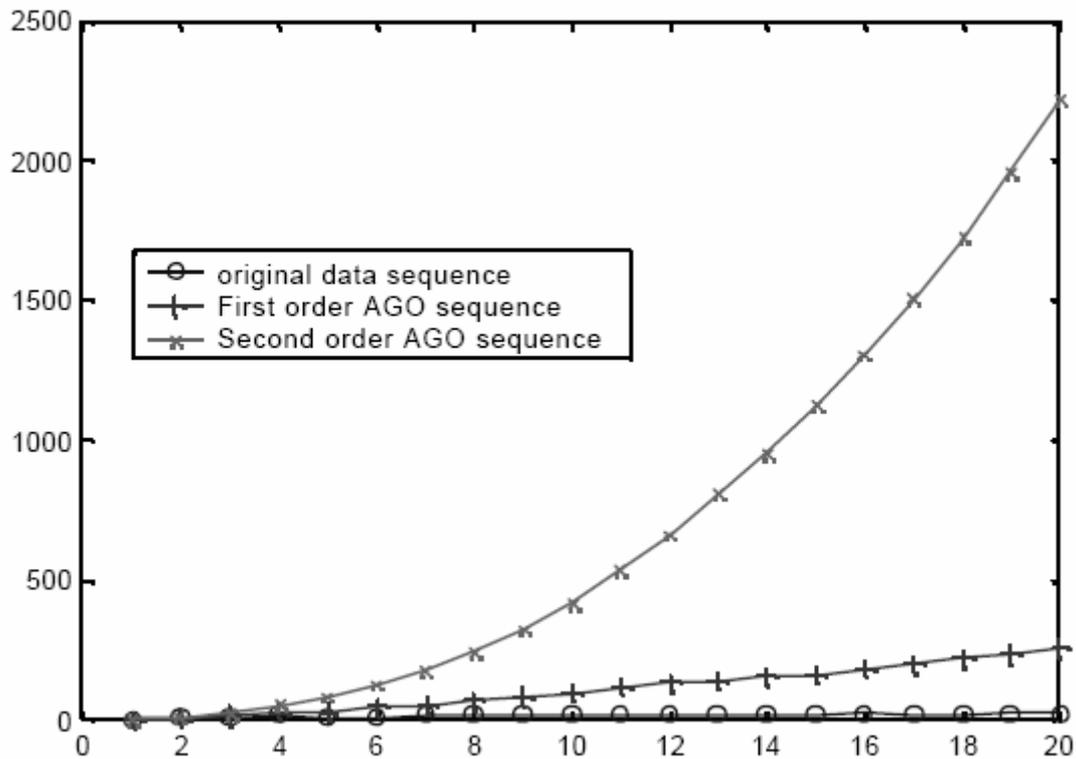


圖 3-3 二次累加生成

(二) 反累加生成 (Inverse Accumulated Generation Operation; IAGO): 為累加生成的逆運算, 亦即將原始數列內各個數據依序累減, 以形成新數列內的數據, 其目的是驗證灰色建模後所得之新數據的精確度。其基本關係式可表示為:

$$y^{(0)}(k) = y^{(1)}(k) - y^{(1)}(k-1), k = 2, \dots, n \quad (3-2)$$

上式中, 由於  $y^{(0)}(1) = y^{(1)}(1)$ , 因此  $k$  介於 2 至  $n$  之間。

(三) 插值生成 (Interpolating Generation Operation):

此生成方式主要是運用在非等間距的數據、或欲替代不適當之數據時, 其數學表示式為:

$$\phi(k) = \eta y(k-1) + (1-\eta)y(k+1) \quad (3-3)$$

其中  $\phi(k)$  為生成之數據,  $\eta$  為生成係數,  $0 \leq \eta < 1$ ,  $x(k-1)$  和  $x(k+1)$  為前後鄰值。

#### (四) 均值生成 (Mean Value Generating Operation):

當插值生成之生成係數  $\eta = \frac{1}{2}$  時，即稱為均值生成。

$$\phi(k) = 0.5\{y(k-1) + y(k+1)\} \quad (3-4)$$

其實若仔細觀察上述，由於當初在資料擷取之時，其沒有對資料作篩選，因此所有原始數據資料可能包含正值及負值，而一但累加生成新數列，這些值將會相互抵消，無法產生累加遞增之趨勢，進而影響灰色建模的效果。所以，為了避免此種情形之發生，可以在資料擷取時，即限定輸入數據必須為正值之條件。而此種做法雖然可以立即解決問題，但是卻也會造成無法處理負值之窘境。因此，較為適當的方式是使用映射生成 (Mapping Generating Operation, MGO)，其表示式為：

$$y_m^{(0)}(k) = \text{sigm}(y^{(0)}(k)), k = 1, 2, \dots, n \quad (3-5)$$

$$\text{sigm}(y) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x - e_{m1}}{e_{m2}}}} \quad (3-6)$$



其中  $y_m^{(0)}(k)$  為生成之數據， $\text{sigm}(y)$  為 S 函數值 (Sigmoid Function)， $e_{m1}$  和  $e_{m2}$  為常數，且  $e_{m2} \neq 0$ 。利用映射生成來產生新數列，將可以使原先正負值混雜的數據，映射成全為正值的數據，同時不會遺漏任何重要的資料，因此是對於外界數據資料不明確定系統，最佳的解決方案。當然，在驗證灰色建模之後的新數據時，亦同樣需要作反映射生成 (Inverse Mapping Generating Operation, IMG0) 的步驟，才能得到相對應之值。而此表示式如下：

$$y^{(0)}(k) = e_{m1} + e_{m2} * \ln\left(\frac{1 - y_m^{(0)}(k)}{y_m^{(0)}(k)}\right), k = 1, 2, \dots, n \quad (3-7)$$

不過，如果是在某些原始數據範圍較小的情況下，將原始數據直接加上常數 C，形成新的數列，同樣能簡單地解決此問題。

$$y_m^{(0)}(k) = y^{(0)}(k) + C, k = 1, 2, \dots, n \quad (3-8)$$

## 第六節 灰色 GM(1,1)模型

### (一) GM(1,1)模型分析

在灰色系統理論中，灰模型以 GM 表示。而其中又以 GM (1, 1) 模型最常用來進行灰預測計算。因此，本文同樣使用 GM (1, 1) 模型。灰預測器方程式推導如下：

假設  $y^{(0)}$  為一非負值之原始資料數列  $y^{(0)} = \{ y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n) \}$   $n \geq 4$ ;

對此數列進行累加生成運算 (AGO) 後，我們可得一階累加生成數列

(1st - order AGO) 如下：

$$y^{(1)}(k) = AGO * y^{(0)} = \sum_m^k y^{(0)}(m) \quad (3-9)$$

根據  $y^{(1)}$  數列，對其各相鄰數據進行平均運算 (Mean Operation)，我們可以定義一數列  $Z^{(1)}$

$$Z^{(1)}(k) = MEAN * y^{(1)} = \frac{1}{2}[y^{(1)}(k) + y^{(1)}(k-1)] \quad (3-10)$$

由之前的式子，我們知道

$$y^{(0)}(k) = y^{(1)}(k) - y^{(1)}(k-1)$$

下列微分方程式

$$y' + ay = u_g \quad (3-11)$$

又稱為白微分方程式，而方程式

$$y^{(0)}(k) + a * Z^{(1)}(k) = u_g \quad (3-12)$$

稱為 GM (1, 1) 的灰微分方程式其中  $a$  與  $u_g$  分別為灰色系統之發展參數與灰色輸入。我們假設：

$$A = [a \quad u_g]^T \quad \text{亦即} \quad A = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & \dots & -Z^{(1)}(n) \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \text{ 且 } Y_N = [y^{(0)}(2) \dots y^{(0)}(n)]^T$$

考量白微分方程式的解，可求得通解為

$$y^{(1)}(k) = [y^{(1)}(1) - \frac{u_g}{a}] * \exp[-a(k-1)] + \frac{u_g}{a}$$

相對應的灰微分方程式解為

$$\hat{y}^{(1)}(n+p) = [y^{(1)}(1) - \frac{u_g}{a}] * \exp[-a(n+p-1)] + \frac{u_g}{a}$$

其中，具有上標  $\wedge$  符號之值代表預測值。再利用原始數列構建 GM(1, 1) 模型，可對系統行為進行預測。

$$\text{方程式： } \hat{y}^{(0)} = IAGO * GM(1,1) * AGO * y^{(0)} \quad (3-13)$$

即為灰模型之預測值。

根據上述灰色建模的過程中，我們假設其輸入之資料必需為一非負之數列，然而系統之響應可能為一負值。因此，我們必須將負值的數列映射至正值的數列之中，亦即需對傳統的灰色預測器進行修正。本文採用Huang (1994) 所提之數據映射運算法，其運算方法為映像生成運算 (Mapping Generating Operation 簡稱MGO) 與逆映像生成運算 (Inverse Mapping Generating Operation 簡稱IMGO)，其運算如下：

$$y_m^{(0)} = MGO * y^{(0)} = b^{ry_x^{(0)}} \quad (3-14)$$

其中 b 與 r 為正值之常數。同理，逆映像生成運算 (IMGO) 可定義如下：

$$y^{(0)} = IMGO * y_m^{(0)} = \frac{1}{r} \log y_m^{(0)} \quad (3-15)$$

因此，灰色預測器之運算可修正如下：

$$\hat{y}^{(0)} = IMGO * IAGO * GM(1,1) * AGO * MGO * y^{(0)} \quad (3-16)$$

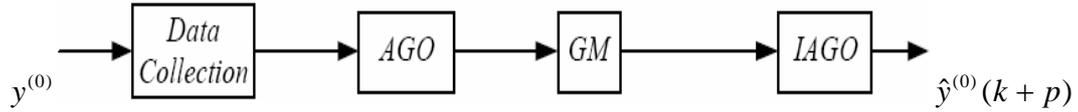


圖 3- 4 灰色建模架構

## (二) GM (1, 1) 模型誤差分析

### 1. GM (1, 1) 模型的誤差

由誤差的理論中，GM (1, 1) 模型的誤差定義為[18]：

$$e(k) = \left| \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)} \right| * 100\% \quad (3-17)$$

其中， $y^{(0)}(k)$  為真實值， $\hat{y}^{(0)}(k)$  為預測值

### 2. 影響 GM (1, 1) 模型誤差的因素

由之前的說明很明顯可以得知，影響 GM (1, 1) 模型誤差的因素為背景值  $Z^{(1)}(k)$ ，在原始的 GM (1, 1) 模型中， $Z^{(1)}(k)$  的定義為：

$$Z^{(1)}(k) = \alpha_k y^{(1)}(k) + (1 - \alpha_k) y^{(1)}(k-1) = \alpha_k y^{(0)}(k) + y^{(1)}(k-1), k = 2, 3, 4$$

而前節的計算則是取  $\alpha = 0.5$  的化簡式，因此  $\alpha$  值的大小會影響到建模的誤差。此節利用  $\alpha$  值的改變以降低誤差值的大小，首先根據  $\alpha$  的數值做一分析，是否能在  $[0, 1]$  之間尋得一個  $\alpha$  值，而使誤差為最小值。

由灰色預測的特性，以四點做分析，步驟如下所示：

利用誤差公式可得：

$$\hat{e}(k) = \left| y^{(0)}(k) - y^{(0)}(1)e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}e^{-a(k-1)} + y^{(0)}(1)e^{-a(k-2)} - \frac{b}{a}e^{-a(k-1)} \right|, k = 2, 3, 4$$

對  $\alpha$  微分可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}(k)}{d\alpha} &= 0 + (k-1)y^{(0)}(1)e^{-a(k-1)} \frac{da}{d\alpha} + \frac{1}{a^2}be^{-a(k-1)} \frac{da}{d\alpha} \\ &+ \frac{1}{a}e^{-a(k-1)} \frac{db}{d\alpha} - (k-2)y^{(0)}(1)e^{-a(k-2)} \frac{da}{d\alpha} + \frac{1}{a^2}be^{-a(k-2)} \frac{da}{d\alpha} \\ &- \frac{1}{a}e^{-a(k-2)} \frac{db}{d\alpha} - (k-2) \frac{b}{a}e^{-a(k-2)} \frac{da}{d\alpha} = 0 \end{aligned}$$

再解出  $\alpha$  之數值即可。

### 3. 利用級比降低誤差

由灰色理論中得知級比的定義為：

$$\sigma^{(0)} = \frac{y^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k-1)}, \quad (3-18)$$

原始序列下而數值的大小對建立預測系統的序列而言，應該落在  $(0.135, 7.389)$  之間，如果數值在此一區間之外，都不可能建立具有實用價值的預測模型。因此  $(0.135, 7.389)$  被稱為級比的容區，由此可知利用級比的變化可以將誤差降低。

根據級比的公式，在一次生成後  $\sigma^{(1)} = \frac{y^{(1)}(k)}{y^{(1)}(k-1)}$ ， $k=2, 3, 4, \dots$   
 $n \in \mathbb{N}$ ，仔細觀察此一方程式，會發現級比的定義是鄰近兩項的後項比上前項的數值，此一數值為表示斜率的變化，因此定義一個新的級比為：

$$\hat{\sigma}^{(1)} = \frac{y^{(1)}(k) - y^{(1)}(k-1)}{y^{(1)}(n) - y^{(1)}(1)}, \quad k=2, 3, 4, \dots, n \in \mathbb{N} \quad (3-19)$$

而此方程式則稱為全體變化的趨勢和個別變化的趨勢之比，稱為 (bang-bang class ratio)，主要的是利用方程式中  $\alpha$  的跳動做誤差的降低分析。起自目前，由於序列的數值有遞增，遞減及跳動三大類，因此並無一定的規則可遵循，現以微積分的觀念，以  $\alpha$  值在兩端點與中間值的變化，以降低預測誤差。

#### (三) GM (1, 1) 滾動模型

GM (1, 1) 滾動模型是利用同一序列前面幾個數據（通常以第四點開始）建立 GM (1, 1) 模型後，再預測下一個數據（第五點數據）的值後，再向後移一點（第五點），同樣的建立 GM (1, 1) 模型，依

此類推的做到原始數據的最後一點為止，主要是檢驗 GM (1, 1) 模型的精度，此一方式稱為滾動檢驗 (rolling check)。

分析步驟為：

令原始序列：

$$y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), y^{(0)}(3), \dots, y^{(0)}(n)), n \geq 4$$

取其部份原始序列，稱為子序列：

$$y^{(0)}(i;k) = (y^{(0)}(i), y^{(0)}(i+1), y^{(0)}(i+2), \dots, y^{(0)}(k))$$

當  $i=1$  時，亦即：

$$y^{(0)}(1;k) = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), y^{(0)}(3), \dots, y^{(0)}(k))$$

上式稱為正規子序列，此時我們利用  $y^{(0)}(i;k)$  建立 GM(1, 1) 模型，然後利用影子方程得到  $\hat{y}^{(1)}(k+1)$  項之後，再利用 (IAGO) 還原做誤差分析。

在灰色理論中滾動檢驗所使用的符號定義為：

$$GM_p \hat{M} * AGO : y^{(0)}(i;k) \rightarrow (a, b)$$

$$GM_m \hat{M} * AGO : y^{(0)}(i;k) \rightarrow y^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = b$$

$$IAGO * GM \hat{M} * AGO : y^{(0)}(i;k) \rightarrow \hat{y}^{(0)}(k+1)$$

當  $i=1, k=4, 5, 6, \dots, n-1$  時，利用傳統的誤差公式得到誤差的大小為：

$$e(k+1) = \left| \frac{y^{(0)}(k+1) - \hat{y}^{(0)}(k+1)}{y^{(0)}(k+1)} \right| * 100\%, k+1 \leq n \quad (3-20)$$

此時稱  $e(k+1)$  為 GM (1, 1) 在 (k+1) 處的預測檢驗誤差值。

而 GM (1, 1) 的滾動檢驗誤差則定義為：

$$e = \frac{1}{n-4} \sum_{k=4}^{n-1} e(k+1)\% \quad (3-21)$$

由上式可以得到 GM (1, 1) 的滾動檢驗精度為：

$$\varepsilon = (1 - e)\% \quad (3-22)$$

故所謂灰色預測之預測方式是利用此刻所擁有的數據資料建立灰色模型，並以此模型計算現有數據的預測值，然後將原始數據與預測數據使用各種誤差檢驗方式，分析此灰色預測模型之精確性，了解此模型是否已達到準確預測之效果。而如果未達到檢驗標準，則修正擷取數據的方式，重新建立符合的模型，直到所得之精確度符合要求，該灰色預測模型便可以用來作為此系統預測未來趨勢的典範，能夠對系統作預先控制的策略，達到預測之目的。

而殘差與精度檢驗標準上，一般認為數列中之所有數據的殘差大小在 10% 之內、或精度大於 90% 時，則此灰色模型是可以被接受的，亦即是對未來作預測的。



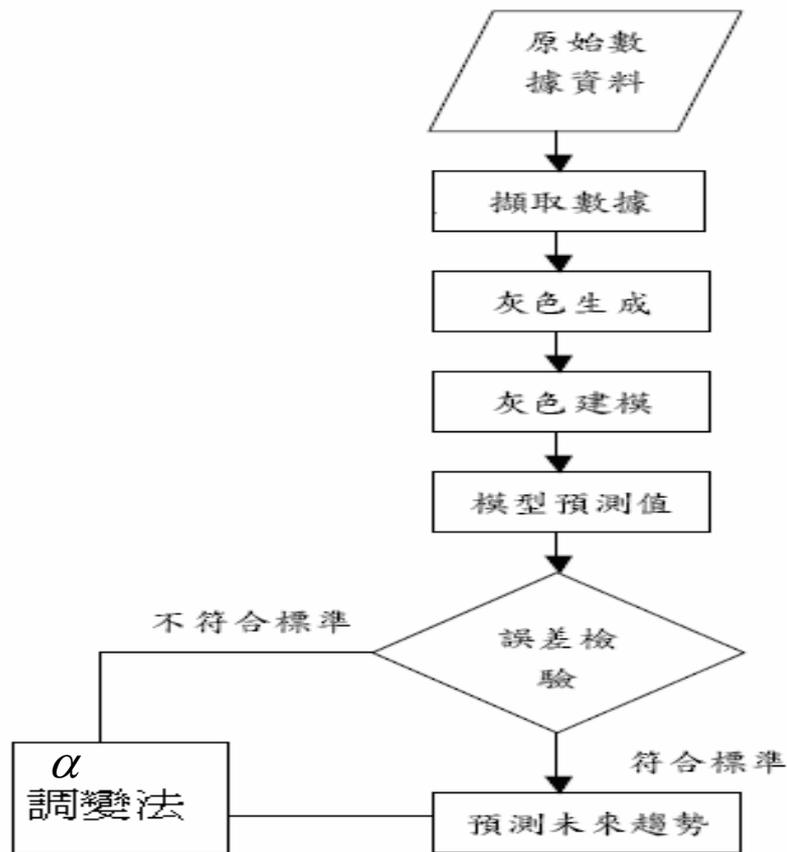


圖 3-5 灰色預測流程圖

#### (四) 灰色預測器的特性

在 1986 年中國大陸學者，陳颯提出了灰色預測控制器（Grey Prediction Controller；GPC）來控制未知的系統之後，灰色預測控制器的應用便開始快速的發展。其主要是針對傳統控制的缺點來加以改進，傳統控制的策略主要是根據系統過去的狀態或行為來決定一個適當的控制訊號，藉以控制系統的下一個行為，這樣的控制型態是屬於“事後控制”的形式。因此，這種控制策略往往要等到系統發生錯誤之後，控制器才能根據所發生的情況再決策如何控制以修正其行為，所以這樣的控制策略無法事先防範系統出錯，而且相對的其適應性（Adaptability）也不會很強。因此，決策機構（Decision Mechanism）若有方法可以得知系統未來的狀態或行為時，其將可以事先來決定一個適當的控制訊號來事先防範系統可能出錯情形，並且會有很好的適應性。因此，灰色系統理論自然的被導入於控制系統之

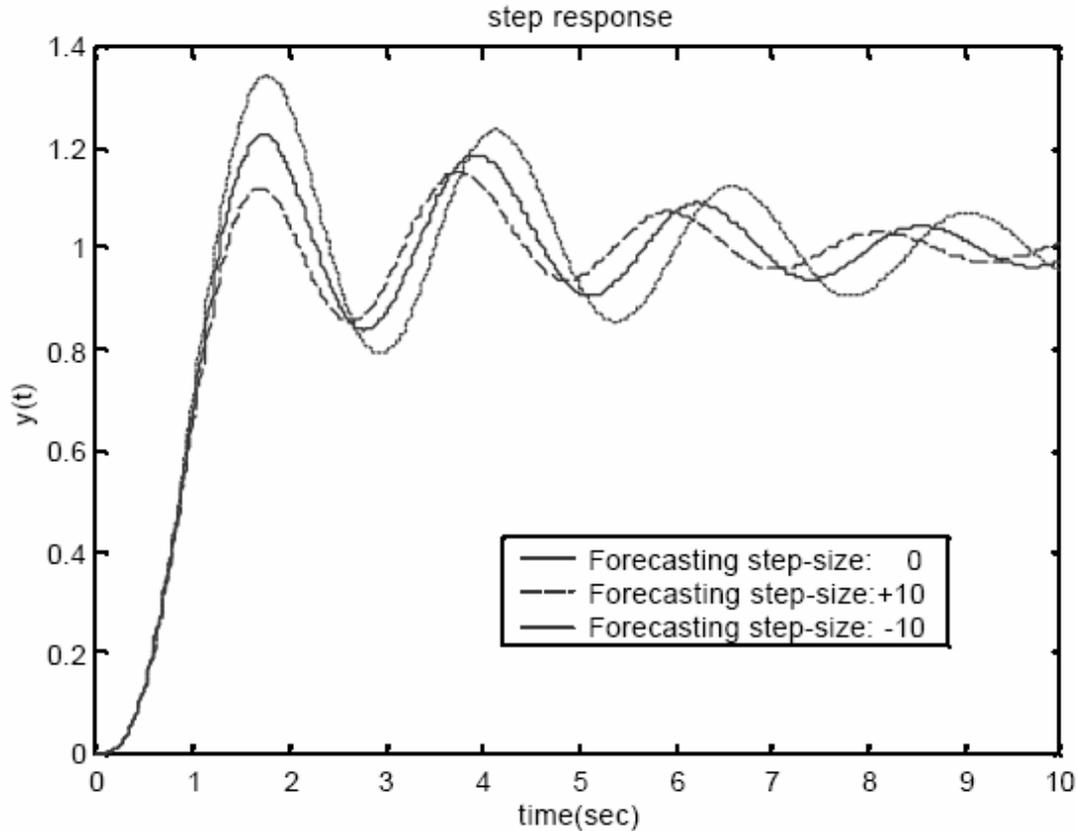


圖 3- 6 不同步距的步階響應

設計中，其藉著灰色預測器來預測系統未來的行為或狀態。進一步根據系統未來的行為而能事先決定較適當的控制，以達到防範於未然的效果，這樣的控制型態是屬於“事先控制”的形式。

一般而言，其灰色預測器均使用具有固定步距的灰色預測器。此系統主要是預測受控體的行為並將其預測值和設定值相比，我們便可以得到預測的誤差訊號( $\hat{e}$ )，而此誤差訊號經由控制器的決策後可得到控制訊號，由此可知影響控制訊號的便是預測值了，而控制此預測值就是此預測器的預測步距。所以，不同的預測步距便有不同的預測值以致於有不同的控制訊號。若我們考慮系統為一三階系統，並且給予三種不同的預測步距分別為 10、0 和 -10，則我們便可以分別得到系統模擬響應圖，如圖 3-6 所示。

表 3-1 不同預測步距對系統響應的影響

預測步距 系統	正的預測步距	負的預測步距
響應速度	變慢	變快
上升時間	變長	變短
最大超越量	變小	變大
適合的響應區段	快接近設定點時	離設定點仍遠時

#### 不同預測步距的系統響應：

我們可以得知當預測步距為 10 時，預測器便會往趨勢的方向做預測，這樣表示預測值比目前的值較大，使得預測的誤差訊號變得較小。因此，控制訊號變小，使系統的響應變慢，便能預防系統的失控有助於最大超越量變小；若預測步距為 0 時，預測器所得之預測值會和目前的值相同，這表示和系統不加灰色預測器而直接回授 (Feedback) 的效果是相同的；當預測步距為 -10 時，預測器便會往系統反趨勢的方向做預測，這表示預測值比目前的值較小，使得預測的誤差訊號變得較大。因此，控制訊號變大，使得系統響應變快，則系統的上升時間變短。我們可以得到下列的結論，若我們使用正的預測步距做預測控制時，則系統的超越量已有改善，但上升時間也相對增加；若我們使用負的預測步距做預測控制時，我們可以發現系統的上升時間會變小，但最大超越量也相對的變大。因此，不同的預測步距對系統響應便有不同的影響，其影響效果如下表所示。以上是針對誤差值來設定預測步距的大小與正負關係，而忽略誤差變動量對系統的影響。

# 第四章 利用根軌跡設計 PID 控制器

## 第一節 PID 控制器

### (一) PID 控制器簡介

PID 控制器在工業界是使用最多的控制器，因為 PID 控制器構造簡單，且性能強健，也提供了不錯的穩態誤差，並同時獲得適當的相對穩定度與阻尼特性，所以目前的工業控制上 PID 控制器依然是主要應用的控制器。但是對於控制器的參數調整是既麻煩又費時的事情，在 off-line 尚且可以利用數據來調整控制器的數據，但對於 on-line 要找出參數最佳值是很困難的。這不僅僅是控制器本身有比例、積分、微分三項作用交互影響，同時在調整時也受到系統動態及干擾的影響，所以很多工廠的控制應用上，控制器的參數調整一直是令人困擾的問題[21]。

### (二) PID 控制器架構

PID 控制器可用下列公式來表示：

$$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{D_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + D_d \frac{de(t)}{dt}] \quad (4-1)$$

在上式中  $u$  為輸入量， $e$  為誤差，而其中  $K$  為控制器的增益， $D_i$  為積分時間， $D_d$  為微分時間，所謂 PID 控制器，為結合三個控制動作的控制器，P I D 即比例控制、積分控制、微分控制，以下分別說明 P I D 三種控制功能：

#### 1. 比例控制(Proportion control)

比例控制唯一可調增益之元件，由增益的改變可調整個系統的穩態誤差及相對穩定度，當增益變大時可降低穩態誤差，但會破壞相對穩定度；當增益變小時，可增加相對穩定度，但也會增加穩態誤差。

#### 2. 積分控制(Integral control)

積分控制可消除穩態誤差，並有利於雜訊的抑制，但也可能會使

得系統不穩定或者暫態響應性能變的比較差，與比例控制相結合即為 PI 控制器，具有改善穩態誤差與雜訊抑制的特性。

### 3. 微分控制(Derivative control)

微分控制可改善系統的阻尼特性及暫態響應，並能增加相對穩定度，但不利於高頻雜訊干擾，且無法改善穩態誤差，如與比例控制相結合即為 PD 控制器，其具有改善相對穩定度與暫態響應的特性[22]。

一般來說，使用 PID 控制器可以消除 PI 控制器及 PD 控制器上的缺點，會使得系統的響應更快、更穩定，且可消除穩態誤差，但相對的會使系統更複雜。



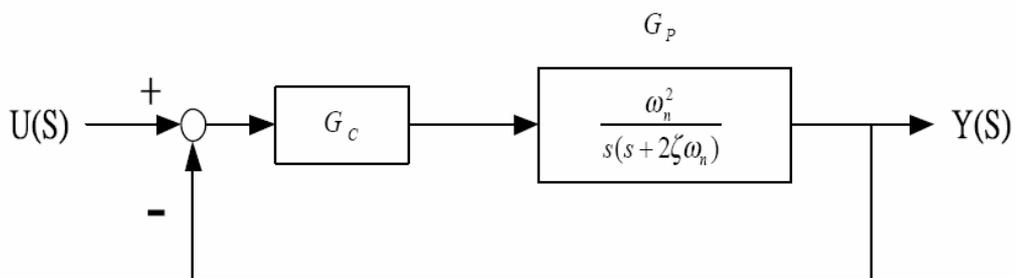
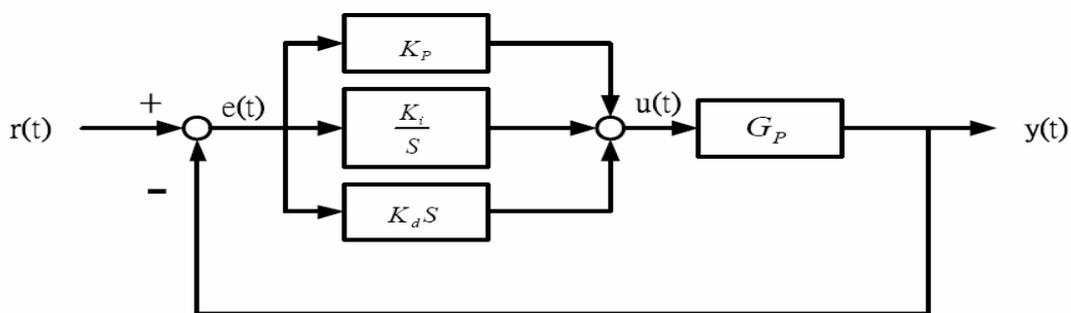
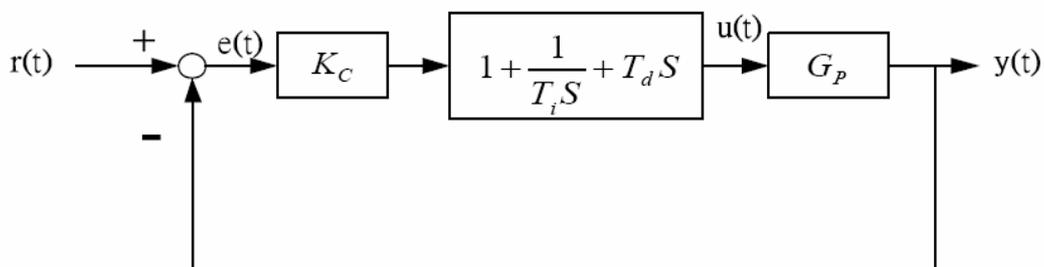


圖4- 1 標準二階系統方塊圖



(a)

圖 4- 2 (a) 傳統PID 控制器方塊圖



(b)

圖4- 3 (b) 傳統PID 控制器方塊圖

### (三) PD 控制器

PD 控制器的轉移函數為  $G_c(s) = K_p + K_D s$ ，因此系統開路轉移函數為

$$G(s) = G_c(s) * G_p(s) = \frac{\omega_n^2 (K_p + K_D s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (4-2)$$

### 1. 由 s-domain 觀點看 PD 控制器

PD 控制器相當於在開路系統加入一個非零的零點，從根軌跡的定性中可得知，加入零點可使根軌跡有往左移的趨勢。因此，PD 控制器可以改善閉迴路系統的相對穩定度。

### 2. 由 frequency-domain 觀點看 PD 控制器

PD 控制器的頻域轉移函數為  $G_c(j\omega) = K_p + j\omega K_D$ ，所以頻率越高  $|G_c(j\omega)|$  的大小值愈大，所以 PD 控制器在頻域上是一個高通濾波器，若系統出現高頻雜訊或干擾，就有可能被 PD 控制器放大，所以 PD 控制器將不利於雜訊的抑制，而影響系統的控制性能。

### 3. 由 time-domain 觀點看 PD 控制器

由於 PD 控制器是一個高通濾波器，設計後開路系統的頻寬會增加，因此閉迴路的頻寬也會增加，頻寬的增加導致響應速度因而改善。所以除了可以改善過高的最大超越量外，亦能適當的增進響應速度，PD 控制器也可以提供良好的阻尼，改善系統時域的暫態響應，但對穩態響應並無改善作用 [23]。

## (四) PI 控制器

PI 控制器的轉移函數為  $G_c(s) = K_p + K_I * \frac{1}{s}$ ，因此系統開路轉移函數為， $G(s) = G_c(s) * G_p(s) = \frac{w_n^2 (K_p s + K_D)}{s^2 (s + 2\varepsilon w_n)}$  (4-3)

### 1. 由 s-domain 觀點看 PI 控制器

PI 控制器相當於在開路系統加入一個零點  $s = -\frac{K_I}{K_p}$  以及一個極點  $s=0$ ，從根軌跡的定性中可得知，由於加入的極點比加入的零點靠近虛軸，因此極點的影響較大，因此系統的相對穩定度將會消失，甚至可能使系統不穩定。

## 2. 由 frequency-domain 觀點看 PI 控制器

PI 控制器的頻域轉移函數為  $G_c(j\omega) = K_p + \frac{K_I}{j\omega}$ ，PI 與 PD 相反，在高頻時  $|G_c(j\omega)|$  的大小值反而變小，所以 PI 控制器在頻域上是一個低通濾波器，進入控制器的高頻雜訊容易被濾掉，系統有抑制雜訊的作用。

## 3. 由 time-domain (時域) 觀點看 PI 控制器

由於加入一個  $s=0$  的極點，所以開迴路轉移函數的型式 (type)，增加一次，因此，在穩態響應中，穩態誤差  $e_{ss}$  可被改善，但積分動作可以使上升時間減小。

### (五) PID 控制器設計

設計 PID 控制器需決定三個參數，分別為：比例增益 ( $K_p$ )、積分時間常數 ( $K_I$ )、微分時間常數 ( $K_D$ )，而在傳統工業上，工程師在調整 PID 控制器參數時大都採用嘗試錯誤 (trial and error) 程序，也就是設計之工程師必須依經驗法則來調整 PID 控制器參數，但往往三個參數間會存在著交互影響的現象，所以在應用上較令人困擾。

到目前為止，已發展出相當多的調整參數方法來設計 PID 控制器，其中最常使用的為 Niegler-Nichols 調整公式，而為了減少使用傳統方式來調整參數，又陸續出現了許多方法來改善傳統方式的複雜性，例如：遺傳基因演算法、模糊控制邏輯、模式識別等。其中模擬控制與自調式模糊控制，為最受國內研究者偏重，因為模糊控制器具有融合人工智慧與處理受控體不確定 (uncertainty) 之優點，但其控制法則、歸屬函數、論域等參數，需使用嘗試錯誤法，經驗法則來慢慢完成，所以幾乎所有的控制法則都存在著利與弊，最重要該如何

表 4-1 PID 參數性能指標對照表

$K_P$  ,  $K_I$  ,  $K_D$  參數對性能指標對照表

	上升時間 $t_r$	最大超越量 $M_o$	安定時間 $t_s$	穩態誤差 $e_{ss}$
$K_P$	減小	增大	改變不大	減小
$K_I$	減小	增大	增大	消除
$K_D$	改變不大	減小	減小	改變不大

針對不同的系統，找出適合的控制法則，如此才可將欲控系統做最佳化控制[24]。

#### (六) 開路轉移函數加入極點或零點對根軌跡的影響

在此篇論文中，我利用根軌跡法去設計 PID 控制器，所以在此敘述加入極零點對根軌跡的影響，此會間接影響設計 PID 控制器[25]。一般而言，開路轉移函數加入極點後，原根軌跡有往右移的現象。加入極點的討論：

1. 根軌跡右移的結果，會降低閉迴路系統的相對穩定度，也許有可能使閉迴路系統變成不穩定。
2. 開路轉移函數加入的極點數越多，根軌跡會越往右移，亦即閉迴路相對穩定度會越差。
3. 開路轉移函數加入的極點越靠近虛軸，則根軌跡也會越往右移，閉迴路相對穩定度也會越差。
4. 若加入一個原點上的極點(即  $1/s$ )，則相當於積分控制，這將使系統相對穩定度變的最差。但如此卻使開路系統的类型(type)增加一，若此閉迴路系統仍維持穩定，則將可改善閉迴路系統的穩態誤差。

一般而言，開路轉移函數加入零點後，原根軌跡有往右移的現象  
加入零點的討論：

1. 根軌跡左移的結果，會增加閉迴路系統的相對穩定度。
2. 開路轉移函數加入的零點數越多，根軌跡會越往左移，亦即閉迴路相對穩定度會越好。
3. 開路轉移函數加入的零點越靠近虛軸，則根軌跡也會越往左移，閉迴路相對穩定度也會越好。
4. 若加入一個原點上的零點(即  $s$ )，則相當於微分控制，這將使系統相對穩定度變的最好。但如此卻使開路系統的形式(type)減少一，則將可能破壞閉迴路系統的穩態誤差。



## 第五章 實驗結果模擬與分析

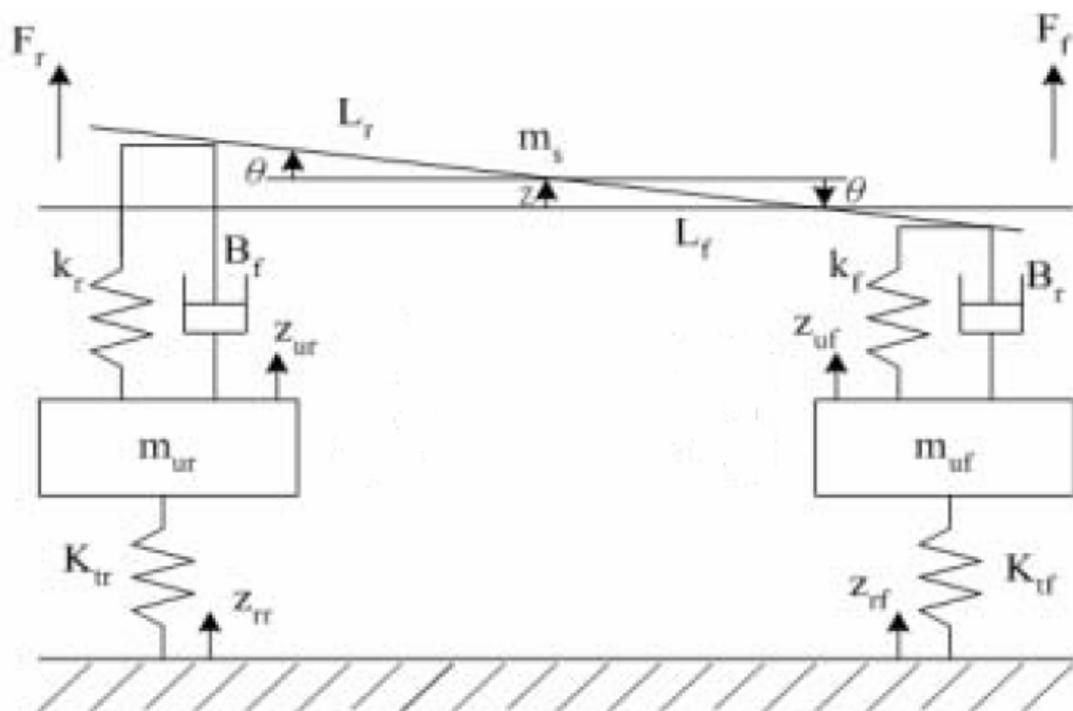


圖5-1 半車懸吊系統模型

### 第一節 模擬實際路徑

本章整理了半車懸吊系統在兩種不同的路面下，經由預測及加入PID控制器後的實驗數據，並比較其不同特性。

#### 路面模型

此兩種路面為自行設計，希望能真正的模擬實際路面狀況。

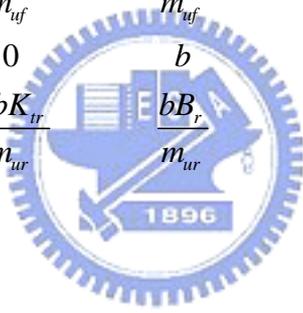
**Case1:**是設計成一段極為顛簸路面，最高可達十五公分最低負十五公分，想得知在此路面下，灰PID控制器是否還是能發揮其作用，將舒適度提高。

**Case2:**是設計成一段較為平滑的路面，最高達一公分最低負一公分，想得知在此路面下，灰PID控制器是否能在路面恢復平穩時，使得車身恢復穩定狀態。

## 車子模型

Model 一: If  $x_3(t)$  is “about 0(rad)” ,

Then  $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & \frac{(aB_f - bB_r)}{m_s} & \frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(aB_f - bB_r)}{J_y} & 0 & \frac{-(a^2 B_f + b^2 B_r)}{J_y} & \frac{ak_f}{J_y} & \frac{-aB_f}{J_y} & \frac{-bk_r}{J_y} & \frac{-bk_r}{J_y} \\ 0 & 1 & 0 & -a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-aB_f}{m_{uf}} & \frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}}{m_{ur}} & \frac{bB_r}{m_{ur}} & 0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}} \end{pmatrix}$$


$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

Model 2: If  $x_3(t)$  is “about  $-\frac{\pi}{2}$  or  $\frac{\pi}{2}$  (rad)” ,

Then  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & 0 & \frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}}{m_{uf}} & 0 & \frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}}{m_{ur}} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$



Model  $\Xi$ : If  $x_3(t)$  is “about  $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$  (rad)”

Then  $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & \frac{(aB_f - bB_r)(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(aB_f - bB_r)(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{(bk_r x_7 - ak_f x_5)x_3}{J_y} & \frac{-(a^2 B_f + b^2 B_r)(1 - x_3^2 + \frac{x_3^4}{4})}{J_y} \\ 0 & 1 & 0 & -a(1 - \frac{x_3^2}{2}) \\ \frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}(x_3 - \frac{x_3^3}{6})}{m_{uf}} & \frac{-aB_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_{uf}} \\ 0 & 1 & 0 & b(1 - \frac{x_3^2}{2}) \\ \frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}(x_3 - \frac{x_3^3}{6})}{m_{ur}} & \frac{bB_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_{ur}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ak_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-aB_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-bk_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-bk_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

### 控制器模型

控制器採用 PID 控制器，利用根軌跡法去設計。而所設計的 PID 控制器則是用來改善  $Z_{rf}$ (前輪對地面的上升或下降高度)對  $x_1$ (車體中心上升或下降高度)的影響。

### 車子模擬參數

此為車子的模擬參數，下面所得到的實驗數據都是用此參數所得：

$$m_s = 600\text{kg} \quad m_{uf} = m_{ur} = 60\text{kg} \quad J_y = 800\text{kg}/m^2 \quad a = L_f = 1.52\text{m} \quad b = L_r = 1.48\text{m}$$

$$k_f = k_r = 15000\text{N}/m \quad B_f = B_r = 1000\text{N}/m \quad K_{tf} = K_{tr} = 190000\text{N}/m$$

## 第二節 模型一模擬

Model 一: If  $x_3(t)$  is “about 0(rad)” ,

$$\text{Then } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

將  $A_1$  ,  $B_1$  代入車子模擬參數後可得

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0.0333 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.025 & 0 & -4.692 & 25.88 & -1.725 & -25.5 & 1.7 \\ 0 & 1 & 0 & -1.38 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3333 & 16.67 & 4600 & -23 & 3583 & -16.67 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.36 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3333 & 16.67 & -4533 & 22.67 & 0 & 0 & 3583 & -16.67 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3333 \end{bmatrix}$$



此時，利用根軌跡法設計出 PID 控制器。

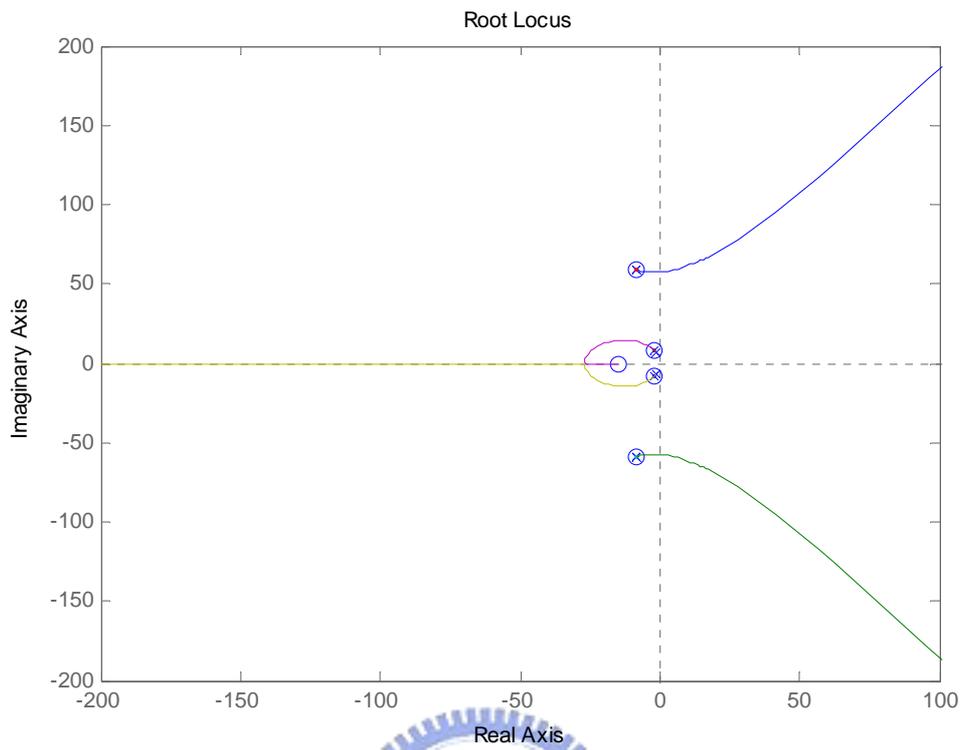


圖 5- 2 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡

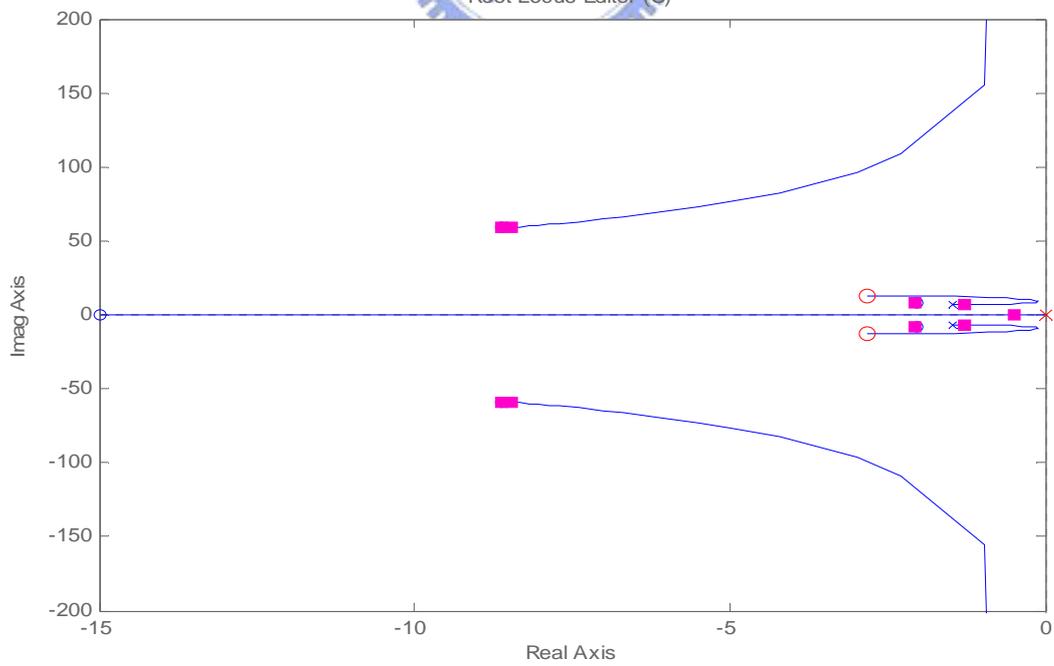


圖 5- 3 加 PID 控制器後 Zrf 對 X1 的根軌跡  $PID=(1+0.031s+(0.074s)^2)/s$

### 第三節 模型二模擬

Model 二: If  $x_3(t)$  is “about  $-\frac{\pi}{2}$  or  $\frac{\pi}{2}$  (rad)” ,

Then  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

將  $A_2$  ,  $B_2$  代入車子模擬參數後可得

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3333 & 16.67 & 4600 & 0 & 3583 & -16.67 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3333 & 16.67 & -4533 & 0 & 0 & 0 & 3583 & -16.67 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3333 \end{bmatrix}$$



此時，利用根軌跡法設計出 PID 控制器。

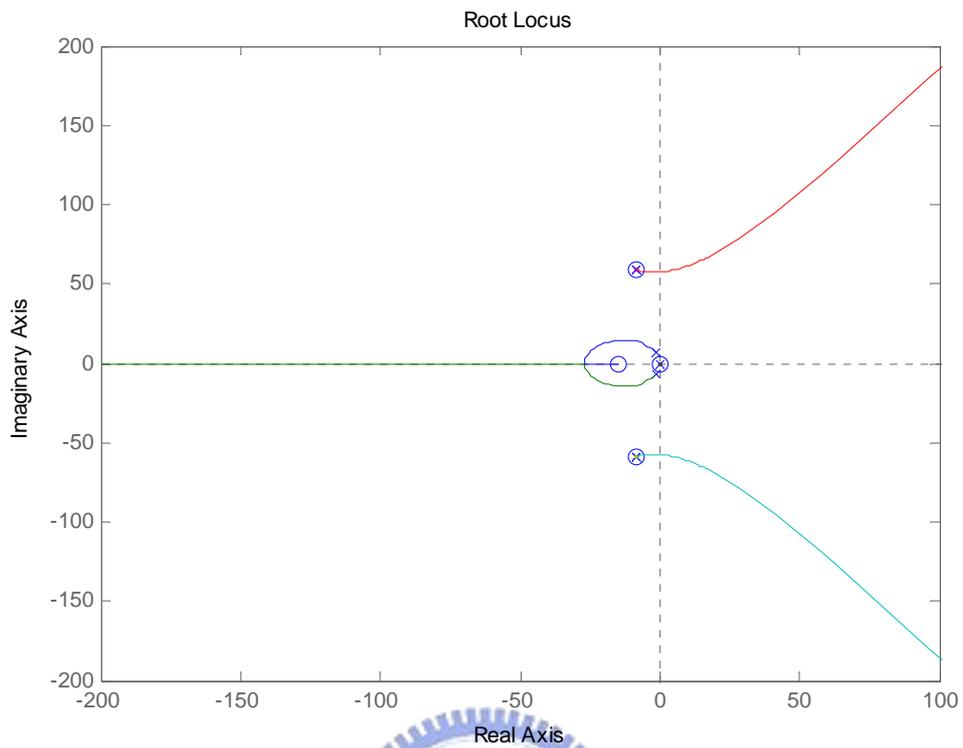


圖 5- 4 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡

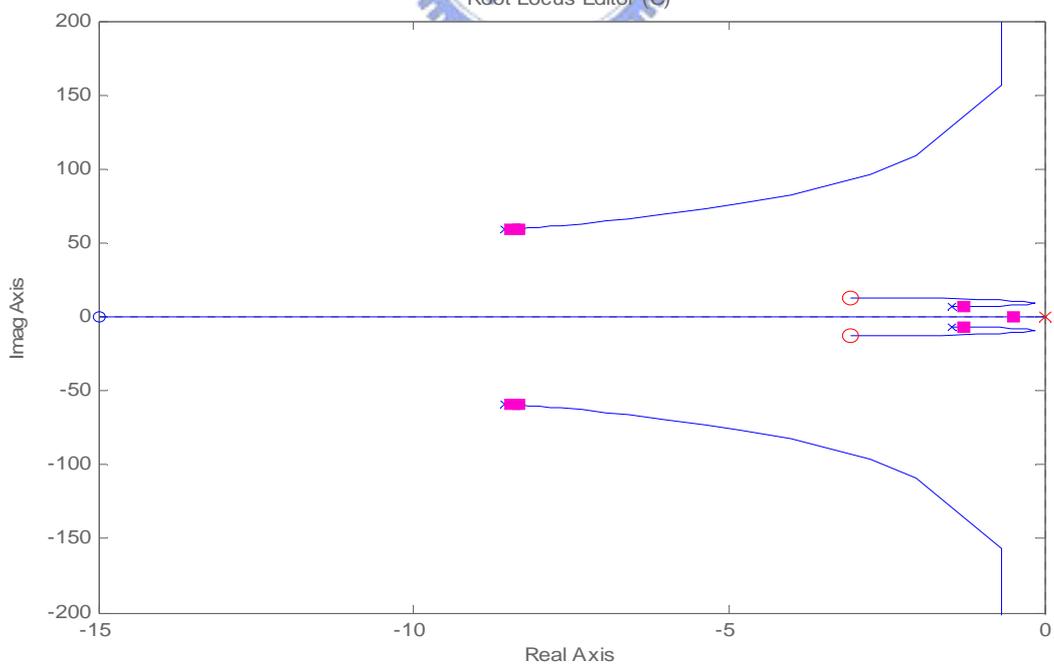


圖 5- 5 加 PID 控制器後 Zrf 對 X1 的根軌跡  $PID=(1+0.034s+(0.074s)^2)/s$

## 第四節 模型三模擬

Model 三: If  $x_3(t)$  is “about  $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$  (rad)”

Then  $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_f + B_r)}{m_s} & 0 & \frac{(aB_f - bB_r)(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(aB_f - bB_r)(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{(bk_r x_7 - ak_f x_5)x_3}{J_y} & \frac{-(a^2 B_f + b^2 B_r)(1 - x_3^2 + \frac{x_3^4}{4})}{J_y} \\ 0 & 1 & 0 & -a(1 - \frac{x_3^2}{2}) \\ \frac{-K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{B_f}{m_{uf}} & \frac{aK_{tf}(x_3 - \frac{x_3^3}{6})}{m_{uf}} & \frac{-aB_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_{uf}} \\ 0 & 1 & 0 & b(1 - \frac{x_3^2}{2}) \\ \frac{-K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{B_r}{m_{ur}} & \frac{-bK_{tr}(x_3 - \frac{x_3^3}{6})}{m_{ur}} & \frac{bB_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{m_{ur}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_f}{m_s} & \frac{B_f}{m_s} & \frac{-k_r}{m_s} & \frac{B_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ak_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-aB_f(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-bk_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} & \frac{-bk_r(1 - \frac{x_3^2}{2})}{J_y} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k_f + K_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-B_f}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{k_r + K_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-B_r}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{tf}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

因為模型三為預測模型和模型一模型二不同, 所以特別將計算與預測步驟整理於下一節。



## 第五節 計算模型三預測資料

步驟設計：

1. 先給定初值四筆資料，利用 GM(1, 1)模型得出預測值。
2. 預測出的值要是殘差在 10%以內可接受，超過的話用  $\alpha$  調變方式去降低誤差量。
3. 得到預測值即為  $Z_{rf}$ ，代入平衡點方程式中，可以得到當時的平衡點。
4. 將平衡點代入模型中，可以得到所預測的模型。
5. 有了預測模型後，再求出最適合的 PID 控制器。

Case1:

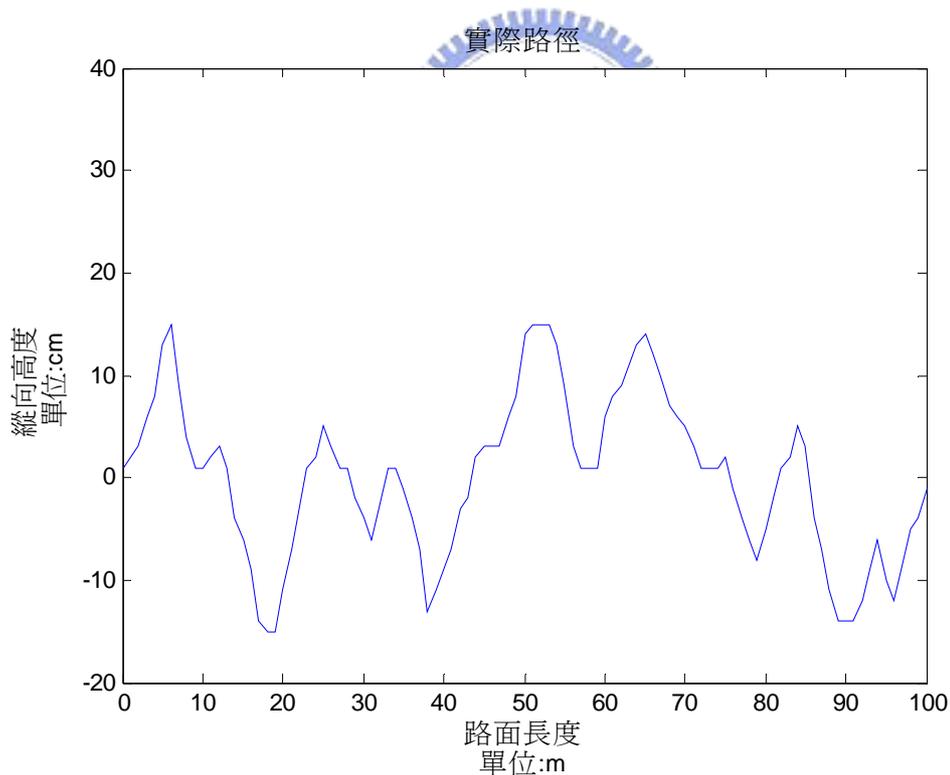


圖 5- 6 case1 模擬實際路徑圖

(一) 第一筆資料

Zrf

初值 1 2 3 6

演算過程：

1. 均值生成：

(2, 4.5, 9)

2. B 矩陣：

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4.5 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

3. BtB 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 105.25 & -15.5 \\ -15.5 & 3 \end{bmatrix}$$

Inverse of BtB 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 0.0397 & 0.2053 \\ 0.2053 & 1.3940 \end{bmatrix}$$



4. 模型精度： a = -0.5827814570    b = 0.6556291391

---

	$\hat{x}_0(k)$	$x_0(k)$	$e(k)\%$
k = 1	1.0000		
k = 2	1.6809	2.0000	15.9549
k = 3	3.0105	3.0000	-0.3506
k = 4	5.3919	6.0000	10.1353

---

k = 5    9.6569    平均殘差 = 8.8136 %

---

殘差 < 10% 可接受

所以  $Z_{rf}$  預測值取 9.6569

將預測值代入平衡點中可得

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})}{2} = 3.8473$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = \frac{-K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = -3.5658$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = \frac{K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = 3.5658$$

$$x_8 = 0$$

將平衡點代入模型三中可得預測模型

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 567.315 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3166.667 & 16.667 & 4537.026 & 0 & 3416.667 & -16.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3166.667 & 16.667 & -4417.631 & 0 & 0 & 0 & 3416.667 & -16.667 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3166.67 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3166.67 \end{bmatrix}$$

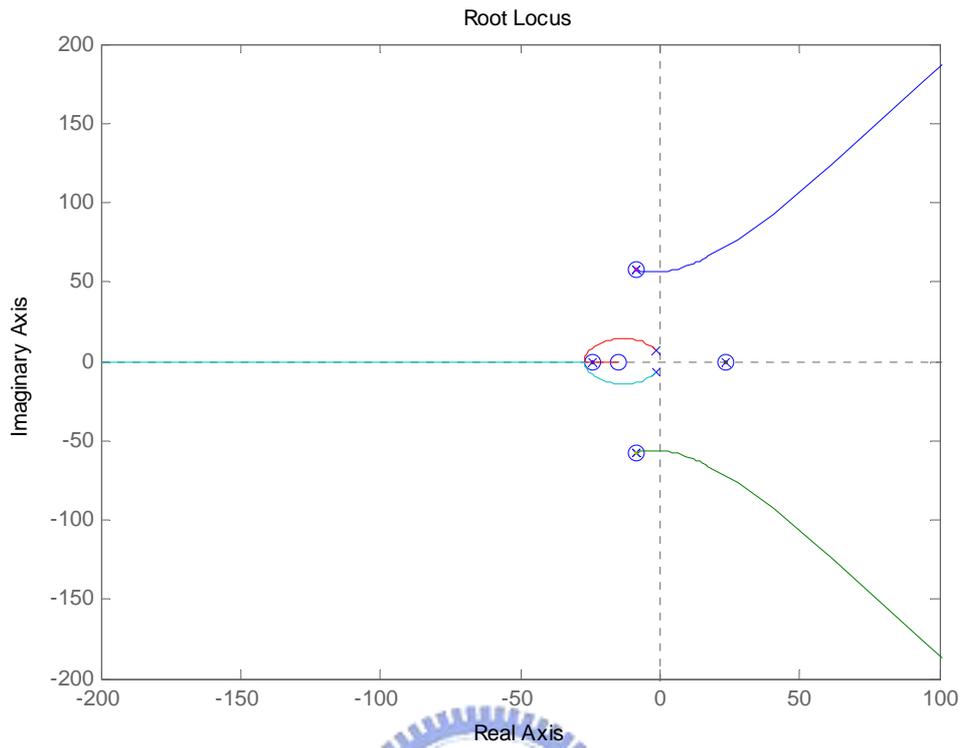


圖 5- 7 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡

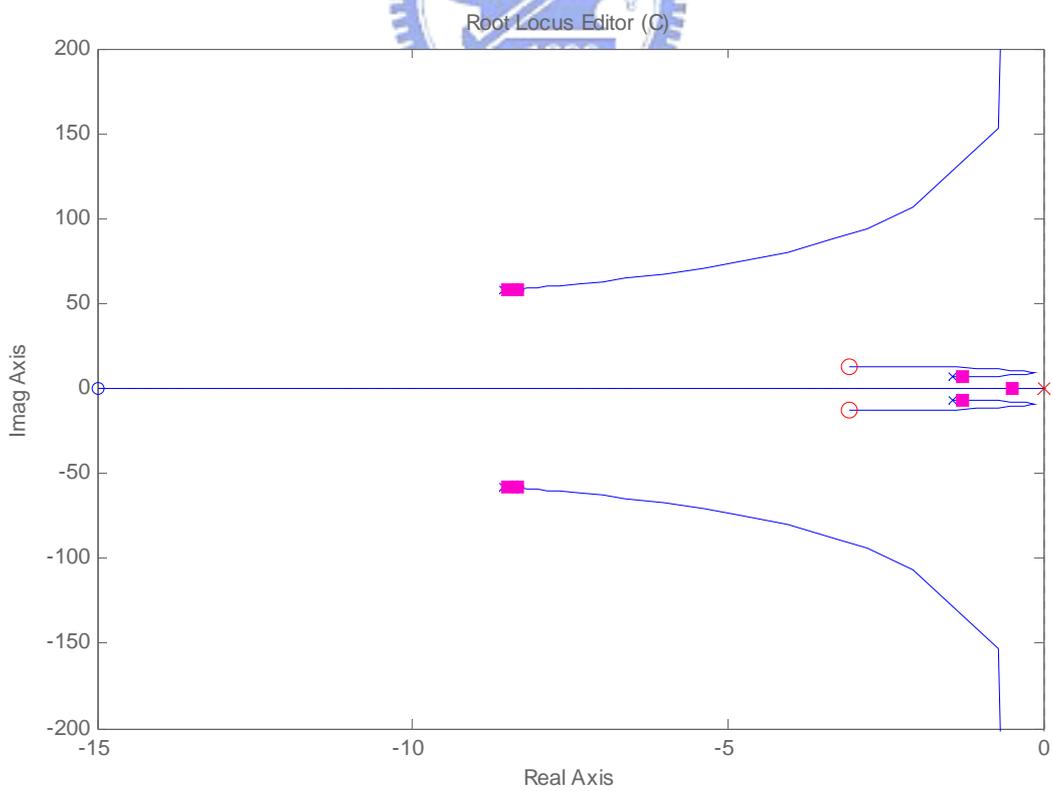


圖 5- 8 加 PID 控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡  $PID=(1+0.046s+(0.086s)^2)/s$

(二) 第二筆資料

Zrf

初值 2 3 6 8

演算過程：

1. 均值生成：

(3.5, 8, 15)

2. B 矩陣：

$$\begin{bmatrix} -3.5 & 1 \\ -8 & 1 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

3. BtB 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 301.25 & -26.5 \\ -26.5 & 3 \end{bmatrix}$$



Inverse of BtB 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 0.0149 & 0.1315 \\ 0.1315 & 1.4950 \end{bmatrix}$$

模型精度 : a = -0.4218362283    b = 1.9404466501

---

	$\hat{x}_0(k)$	$x_0(k)$	$e(k)\%$
k = 1	2.0000		
k = 2	3.4634	3.0000	-15.4469
k = 3	5.2809	6.0000	11.9856
k = 4	8.0520	8.0000	-0.6505

---

$$k = 5 \quad 12.2774$$

$$\text{平均殘差} = 9.3610 \%$$

殘差 < 10% 可接受

所以 Zrf 預測值取 12.2774

預測值代入平衡點中可得

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})}{2} = 4.6576$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = \frac{-K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = -4.3166$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = \frac{K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = 4.3166$$

平衡點代入模型三中可得預測模型

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 686.777 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3166.667 & 16.667 & 4537.026 & 0 & 3416.667 & -16.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3166.667 & 16.667 & -4417.631 & 0 & 0 & 0 & 3416.667 & -16.667 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3166.67 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3166.67 \end{bmatrix}$$

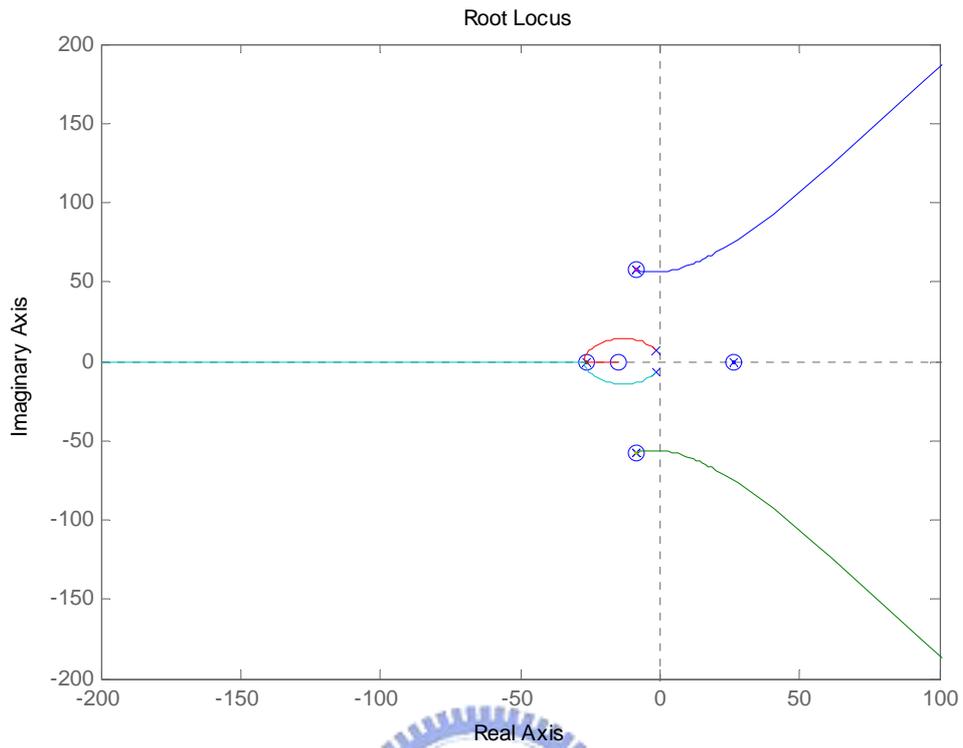


圖 5- 9 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖

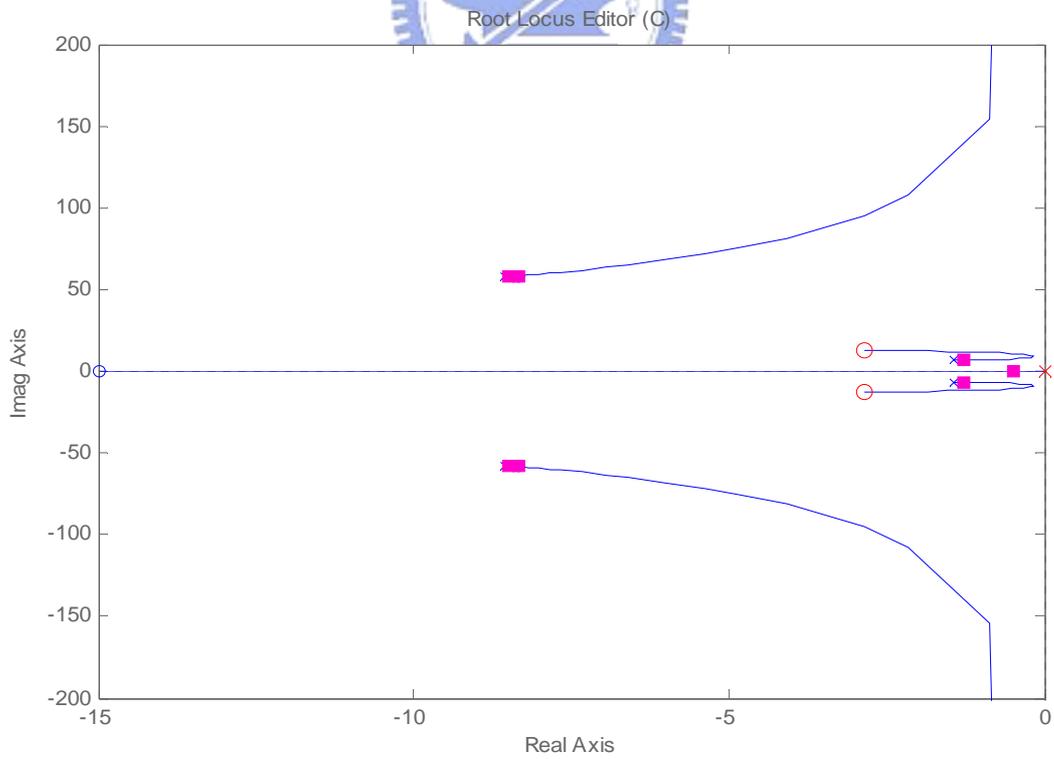


圖 5- 10 加 PID 控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖  $PID=(1+0.034s+(0.077s)^2)/s$

(三) 第五筆資料

Zrf

初值 8 13 15 9

演算過程：

1. 均值生成：

(14.5, 28.5, 40.5)

2. B 矩陣：

$$\begin{bmatrix} -14.5 & 1 \\ -28.5 & 1 \\ -40.5 & 1 \end{bmatrix}$$

3. BtB 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 2662.75 & -83.5 \\ -83.5 & 3 \end{bmatrix}$$



Inverse of BtB 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 0.003 & 0.0822 \\ 0.0822 & 2.6208 \end{bmatrix}$$

模型精度 : a = 0.1456692913    b = 16.3877952756

---

	$\hat{x}_0(k)$	$x_0(k)$	$e(k)\%$
k = 1	8.0000		
k = 2	14.1657	13.0000	-8.9665
k = 3	12.2454	15.0000	18.3640
k = 4	10.5855	9.0000	-17.6162

---

$k = 5$     9.1505                      平均殘差 = 14.9822 %

殘差>10% 不可接受，故使用  $\alpha$  調變方法。

Input Data										
P	L	M	N							
8	13	15	9							
Execute										
Clear										
Items	a	b	Ave-err %	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
optimal $\alpha, \beta, \gamma$	0.2334	17.9596	11.5461	0.5556	0.0045	0.0045	14.353	11.3657	9.0002	7.12699269469
$\alpha = \beta = \gamma = 0.5$	0.1457	16.3878	14.9822	0.5	0.5	0.5	14.1656	12.2454	10.5855	9.15053051841

所以  $Z_{rf}$  預測值取: 7.127

預測值代入平衡點中可得

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})}{2} = -2.9177$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = \frac{-K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = 2.7042$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = \frac{K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = -2.7042$$

$$x_8 = 0$$

平衡點代入模型三中可得預測模型

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -430.229 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3166.667 & 16.667 & 4537.026 & 0 & 3416.667 & -16.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3166.667 & 16.667 & -4417.631 & 0 & 0 & 0 & 3416.667 & -16.667 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3166.67 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3166.67 \end{bmatrix}$$

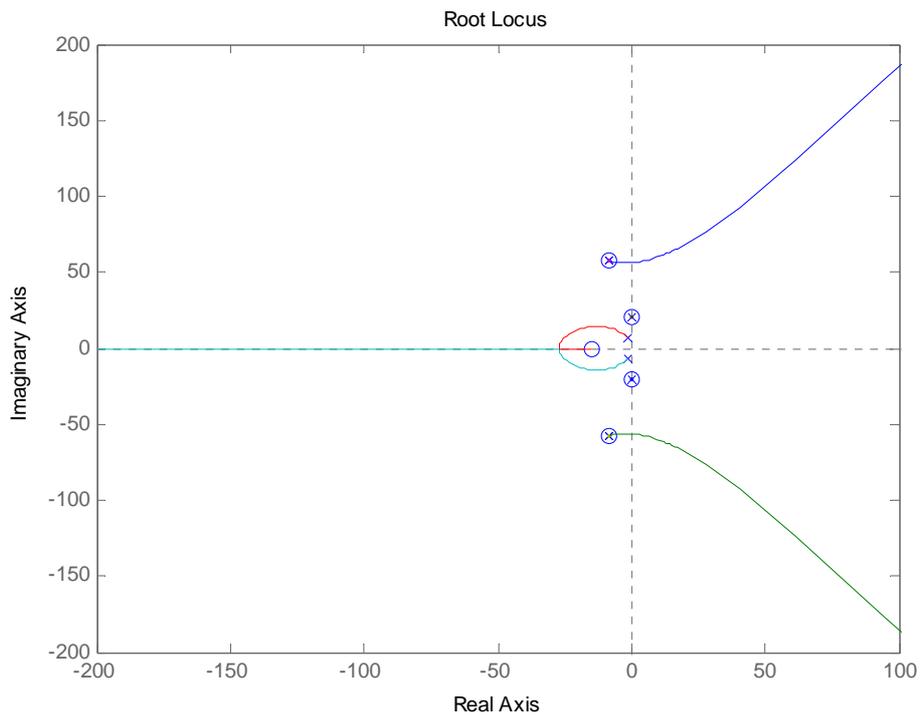


圖 5- 11 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖

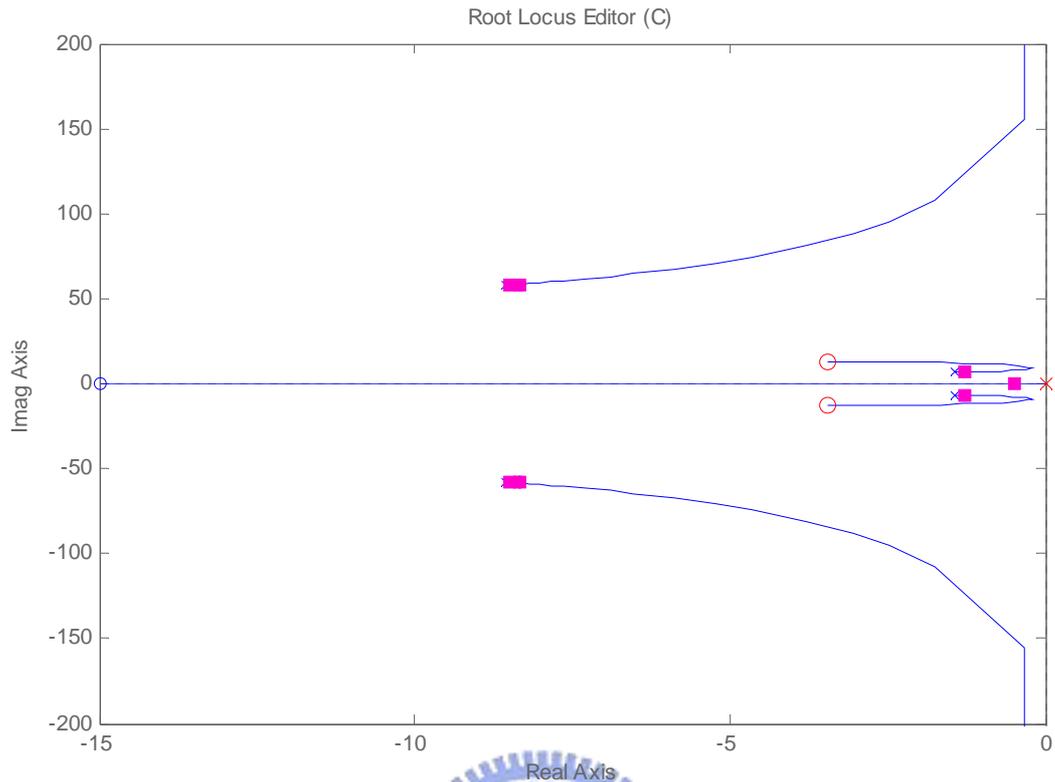


圖 5- 12 加 PID 控制器時  $Z_{rf}$  對  $X1$  的根軌跡  $PID=(1+0.037s+(0.074s)^2)/s$

以上是 Case1 路徑中的三筆資料，其餘各筆資料作法相同，不在此多加描述。計算這些資料時，如遇到  $Z_{rf}=0$ ，則使用模型一；如遇到  $Z_{rf}$  極大或極小時(表示前後輪相差高度已超過車體長度時)，則使用模型二。其餘皆使用模型三，而模型三則由預測得知。

得到每筆資料後，利用 MATLAB[20]將各筆資料整合後，得到下列結果。

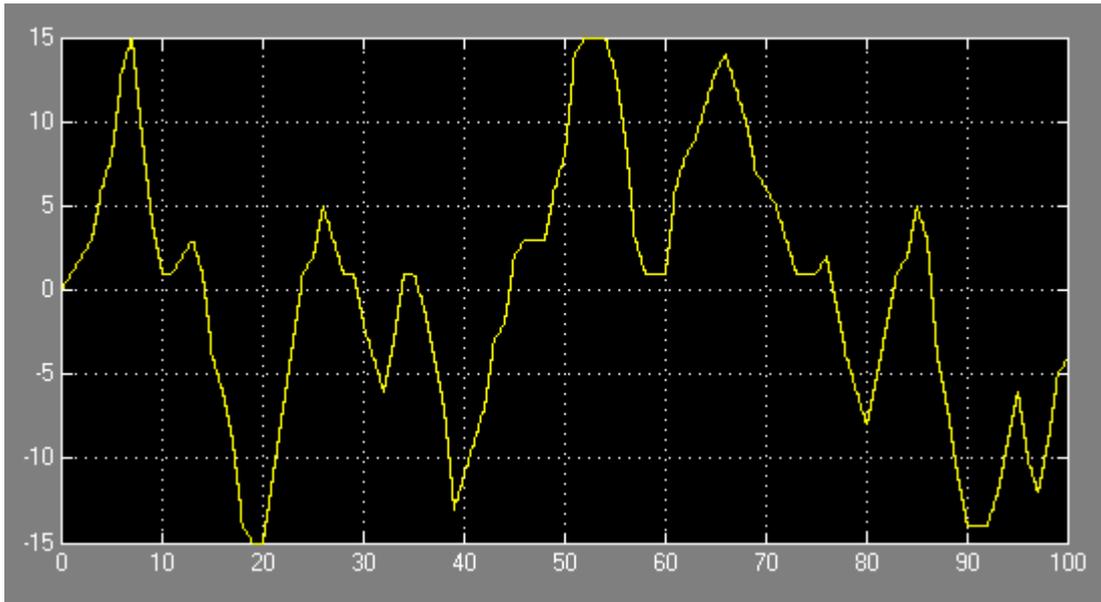


圖 5- 13 實際路徑

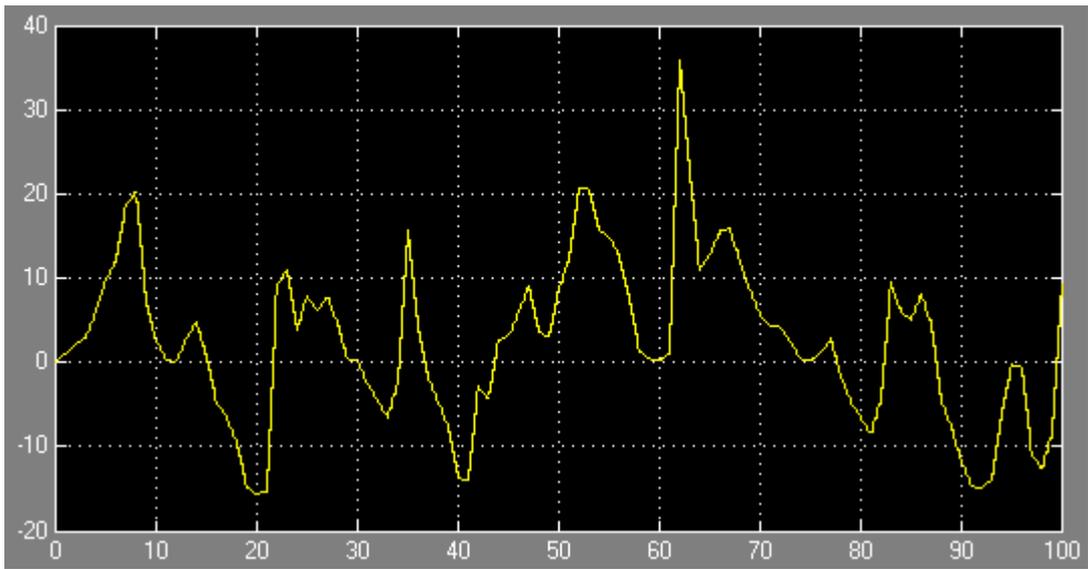


圖 5- 14 預測路徑

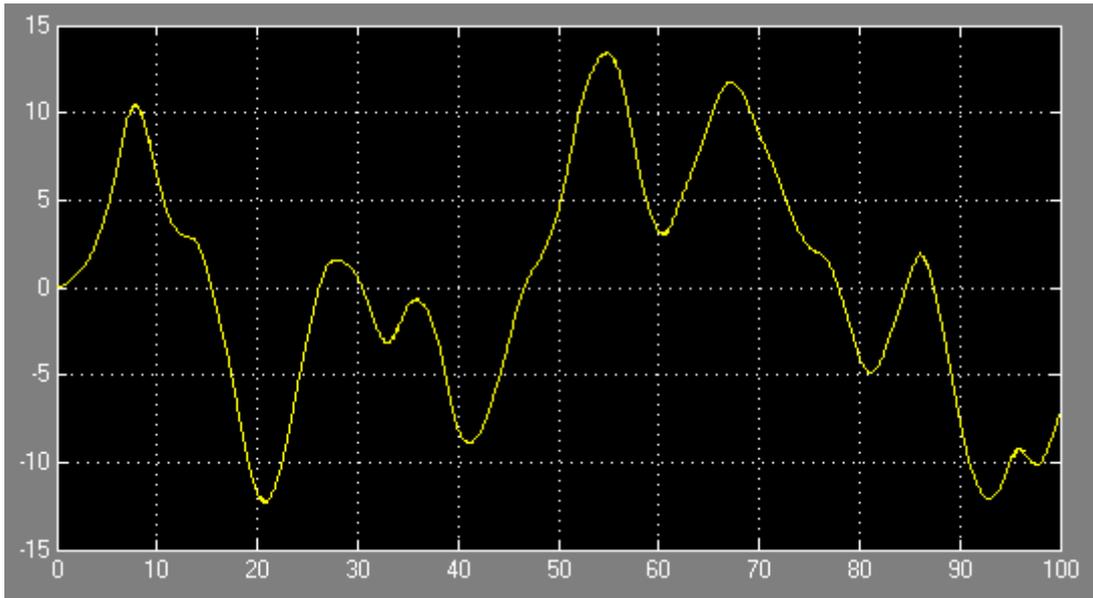


圖 5- 15 車子不加控制器時的振幅

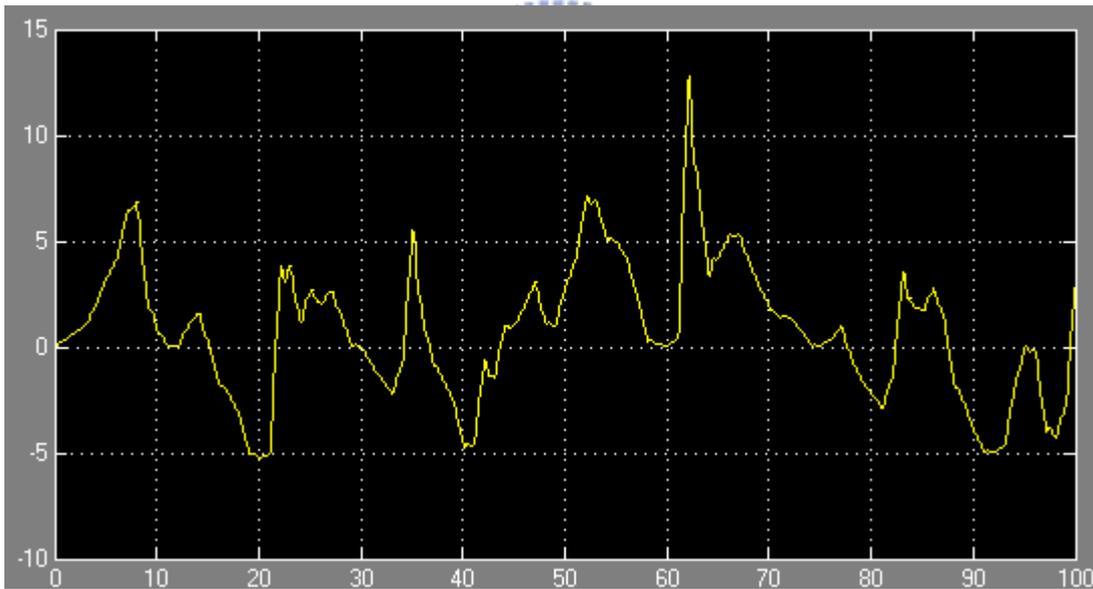


圖 5- 16 車子加控制器時的振幅

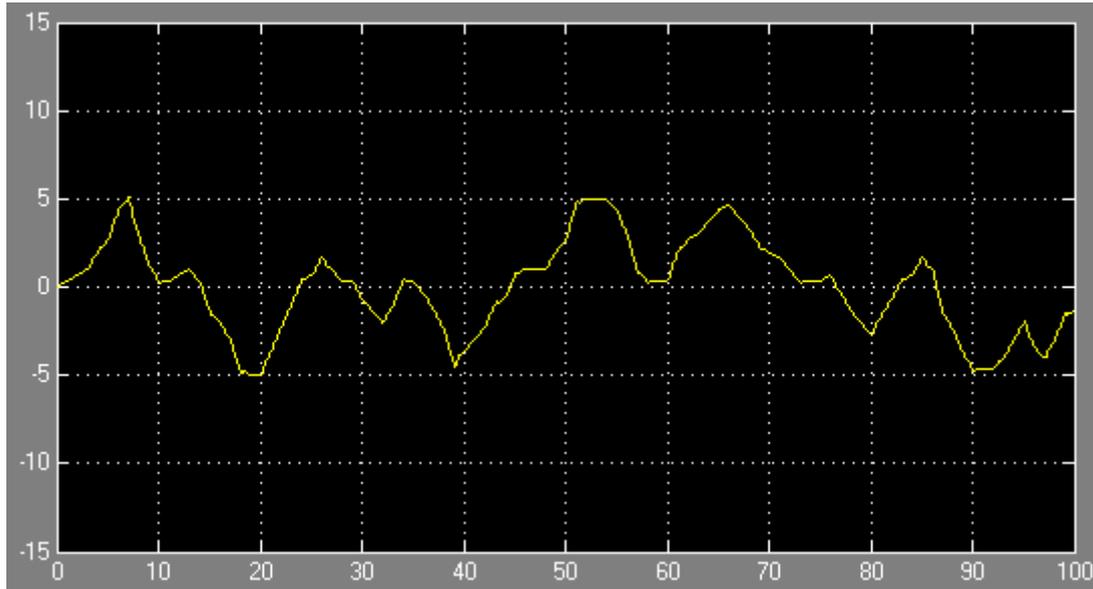


圖 5- 17 車子在預測下加控制器後的振幅

圖 5-13~14 縱軸為路面高度(單位:cm) , 橫軸為路面長度(單位:m)

圖 5-15~17 縱軸為  $x_1$  高度(單位:cm) , 橫軸為路面長度(單位:m)

### Case1 討論:

1. 灰色預測在實際上是找出某一數列中間各個元素之未來動態狀況，預測出的數據方向是由擷取數列所決定，所以會有預測數據與原始數據變化方向不同的時候。
2. 一般而言，非線性系統的分析與控制是非常困難的。對於非線性系統的分析，常用的方法是根據系統的操作點或平衡點做非線性系統的線性化。假設非線性系統的工作動態是在操作點附近做微量的變化，則可將此微量變化的動態行為視為線性系統的動態行為，如此一來，線性系統的控制理論(包括現代控制學理論或古典控制學理論)即可用來設計控制器，以控制此微量變化的非線性系統。
3. 當車子不加控制器時的平均振幅是正 6.8cm 與負 7.7cm，當車子在預測下加控制器時的平均振幅是正 2.2cm 與負 2.6cm。由 Burton Douglas Chart 的舒適度評價可得當車子不加控制器時是在感受不愉快的區域之內，而當車子在預測下加控制器時是在可感受區域內。所以可以知道在預測後可以得到較佳的舒適度。

### Case1 結論:

由圖中可看出灰PID控制器成功的降低了車子的振幅，可得知灰色預測器在顛簸的路面下，依然有不錯的預測能力。這樣即可使PID控制器先行運作，得到較好的舒適度。



Case2:

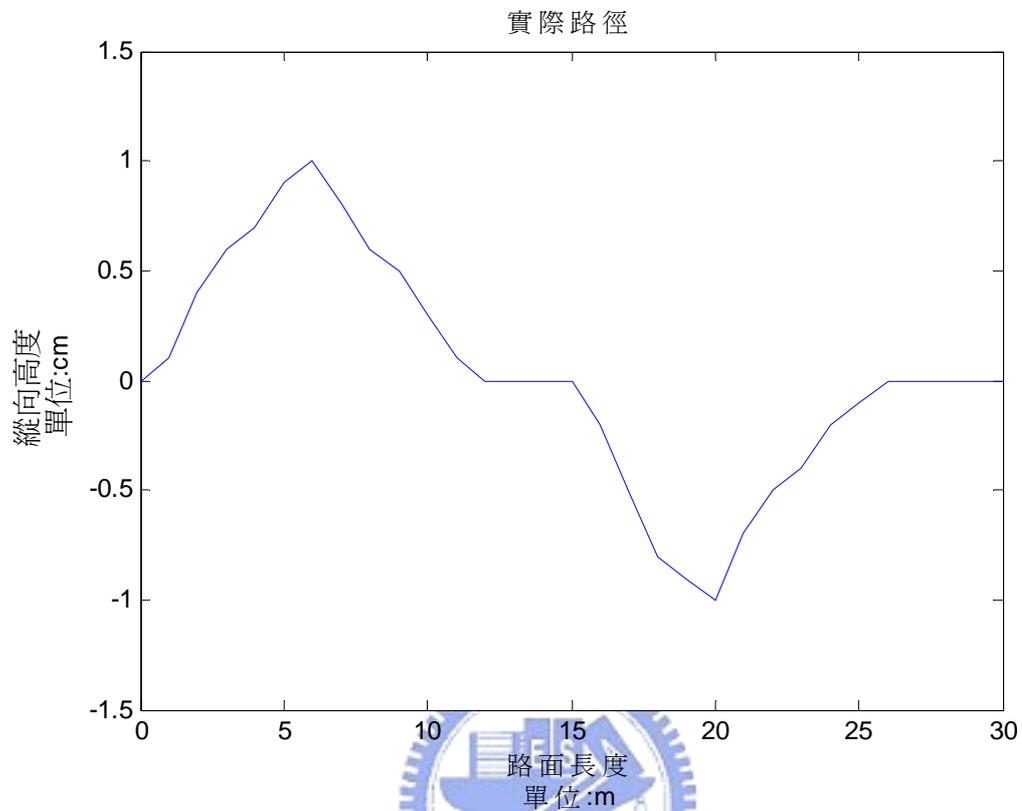


圖 5-18 case2 模擬實際路徑

步驟同 Case1

(一) 第一筆資料

Zrf

初值 0.1 0.4 0.6 0.7

1. 均值生成：

(0.3, 0.8, 1.45)

2. B 矩陣：

$$\begin{bmatrix} -0.3 & 1 \\ -0.8 & 1 \\ -1.45 & 1 \end{bmatrix}$$

3. BtB 矩陣 :

$$\begin{bmatrix} 2.8325 & -2.55 \\ -2.55 & 3 \end{bmatrix}$$

Inverse of BtB 矩陣 :

$$\begin{bmatrix} 1.5038 & 1.2782 \\ 1.2782 & 1.4198 \end{bmatrix}$$

模型精度 : a = -0.2556390977    b = 0.3493734336

	$\hat{x}^0(k)$	$x^0(k)$	$e(k)\%$
k = 1	0.1000		
k = 2	0.4272	0.4000	-6.8051
k = 3	0.5517	0.6000	8.0560
k = 4	0.7124	0.7000	-1.7652
k = 5	0.9199		

平均殘差 = 5.5421 %

所以 Zrf 預測值取 0.9199

將預測值代入平衡點中可得

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})}{2} = -1.9505$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = \frac{-K_{rf}[\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})]}{2(k_f + K_{rf})} = 1.8078$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = \frac{K_{rf}[\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})]}{2(k_f + K_{rf})} = -1.8078$$

$$x_8 = 0$$

將平衡點代入模型三中可得預測模型

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -287.616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3166.667 & 16.667 & 4537.026 & 0 & 3416.667 & -16.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3166.667 & 16.667 & -4417.631 & 0 & 0 & 0 & 3416.667 & -16.667 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3166.67 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3166.67 \end{bmatrix}$$

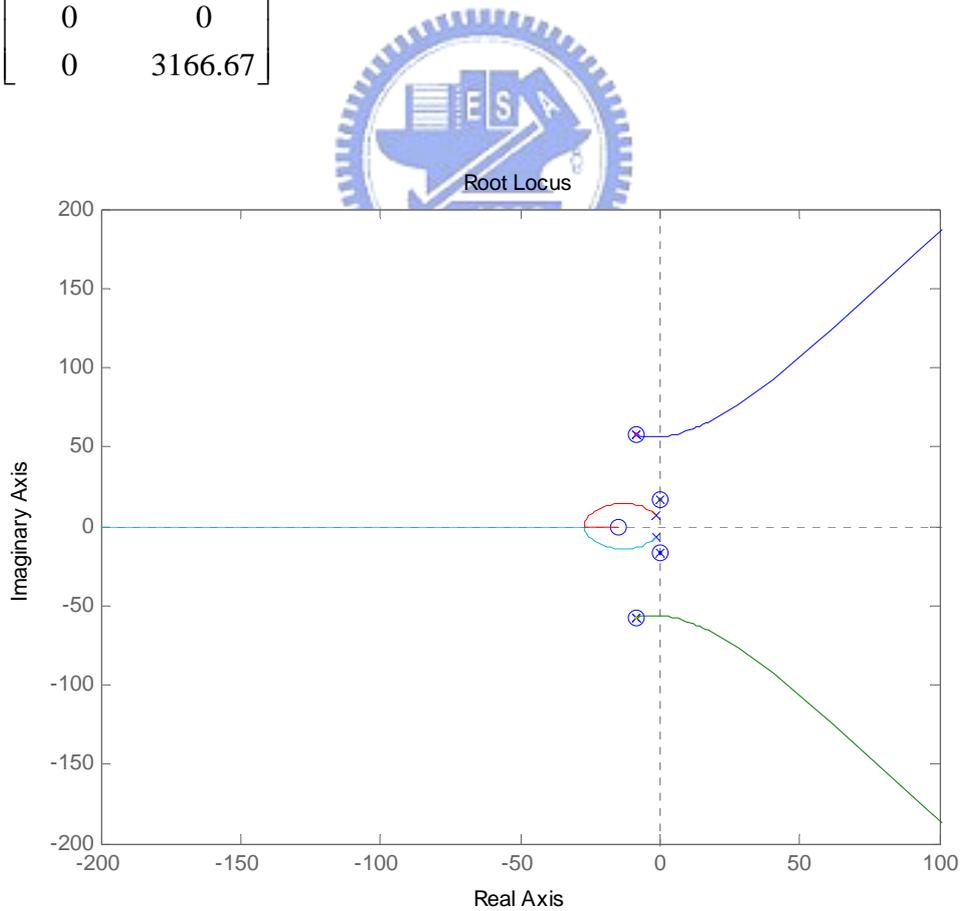


圖 5- 19 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖

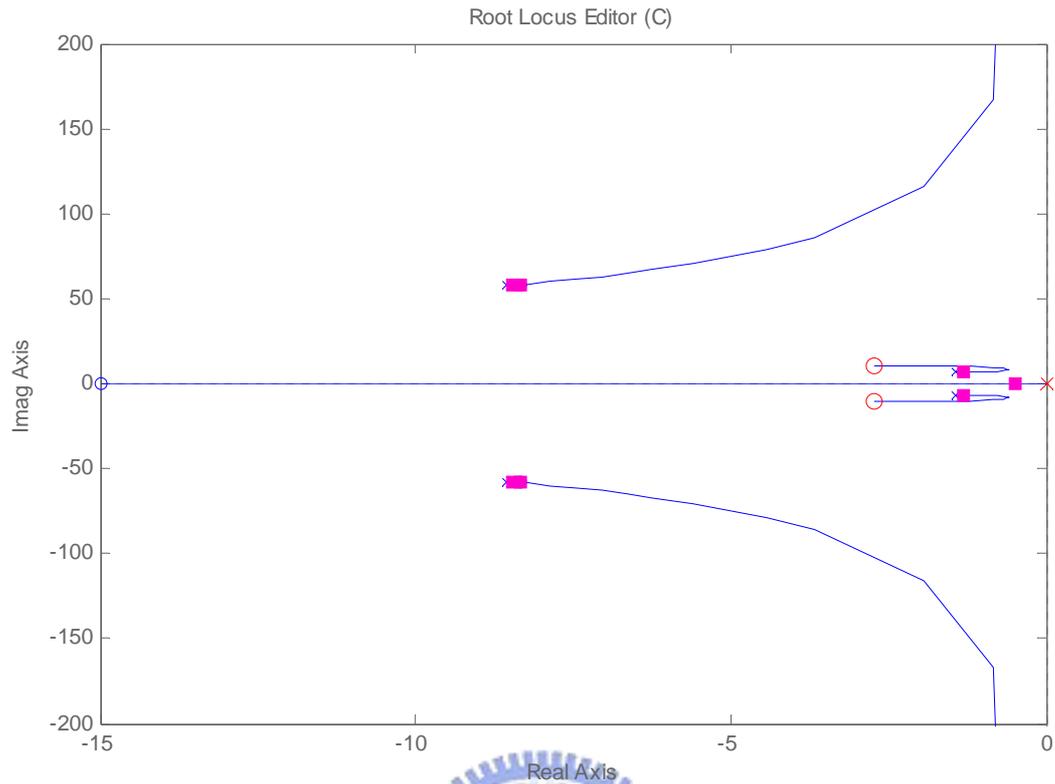


圖 5- 20 加 PID 控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖  $PID=(1+0.044s+(0.09s)^2)/s$

## (二) 第十筆資料

Zrf

初值: -0.8 -0.9 -1 -0.7 0.3 0.2 0.1 0.4

1. 均值生成 :

(0.4, 0.55, 0.8)

2. B 矩陣 :

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ -0.55 & 1 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

3. BtB 矩陣 :

$$\begin{bmatrix} 1.1025 & -1.75 \\ -1.75 & 3 \end{bmatrix}$$

Inverse of BtB 矩陣 :

$$\begin{bmatrix} 12.2449 & 7.1429 \\ 7.1429 & 4.5 \end{bmatrix}$$

模型精度 :  $a = -0.5714285714$      $b = -0.1000000000$

	$\hat{x}^0(k)$	$x^0(k)$	$e(k)\%$
k = 1	0.3000		
k = 2	0.0963	0.2000	51.8253
k = 3	0.1706	0.1000	-70.6150
k = 4	0.3021	0.4000	24.4690

k = 5    0.5350    平均殘差 = 48.9698 %

Input Data

P: 0.3    L: 0.2    M: 0.1    N: 0.4

Execute    Clear

tems	a	b	Ave-err %	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\hat{x}^2$	$\hat{x}^3$	$\hat{x}^4$	$\hat{x}^5$
optimal $\alpha, \beta, \gamma$	-1.043	-0.2928	37.1454	0.5409	0.0355	0.0045	0.0353	0.1	0.2839	0.80580635074
$\alpha = \beta = \gamma = 0.5$	-0.5713	-0.0999	48.9697	0.5	0.5	0.5	0.0963	0.1706	0.3021	0.53499881101

所以 Zrf 的預測值取-0.2942

將預測值代入平衡點中可得

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr})}{2} = 0.9331$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = \frac{-K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = -0.8648$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = \frac{K_f \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2}(a-b) + (Z_{rf} - Z_{rr}) \right]}{2(k_f + K_f)} = 0.8648$$

$$x_8 = 0$$

將平衡點代入模型三中可得預測模型

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0 & 0 & -25 & 1.667 & -25 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 137.585 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3166.667 & 16.667 & 4537.026 & 0 & 3416.667 & -16.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3166.667 & 16.667 & -4417.631 & 0 & 0 & 0 & 3416.667 & -16.667 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3166.67 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3166.67 \end{bmatrix}$$

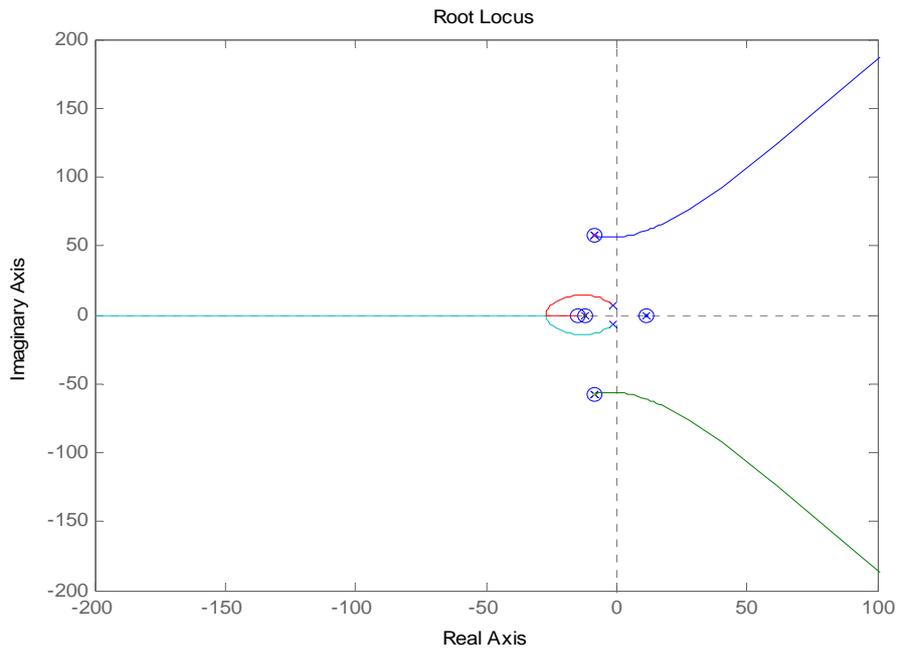


圖 5- 21 沒加控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖

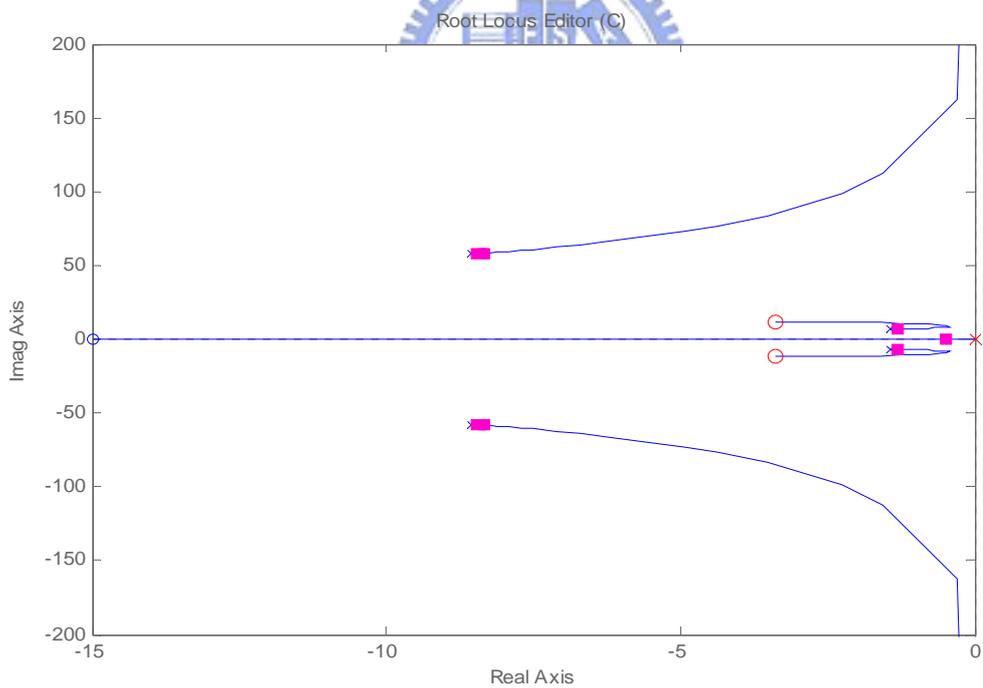


圖 5- 22 加 PID 控制器時 Zrf 對 X1 的根軌跡圖  $PID=(1+0.044s+(0.081s)^2)/s$

以上是 Case2 路徑中的二筆資料，其餘各筆資料作法相同，不在此多加描述。計算這些資料時，如遇到  $Zrf=0$ ，則使用模型一；如遇

到  $Z_{rf}$  極大或極小時(表示前後輪相差高度已超過車體長度時),則使用模型二。其餘皆使用模型三,而模型三則由預測得知。

得到每筆資料後,利用 MATLAB[20]將各筆資料整合後,得到下列結果。

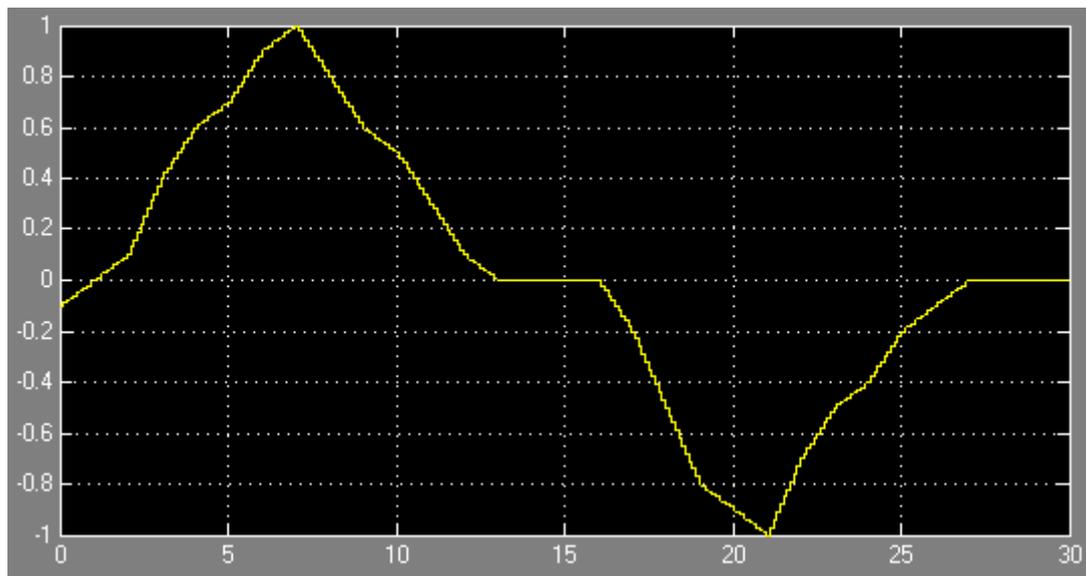


圖 5- 23 實際路徑

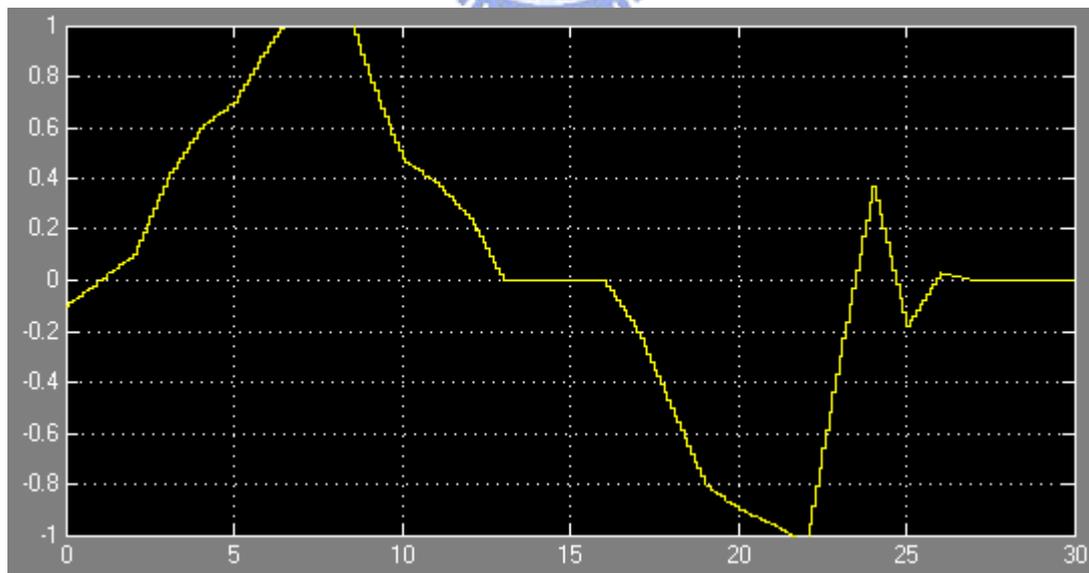


圖 5- 24 預測路徑

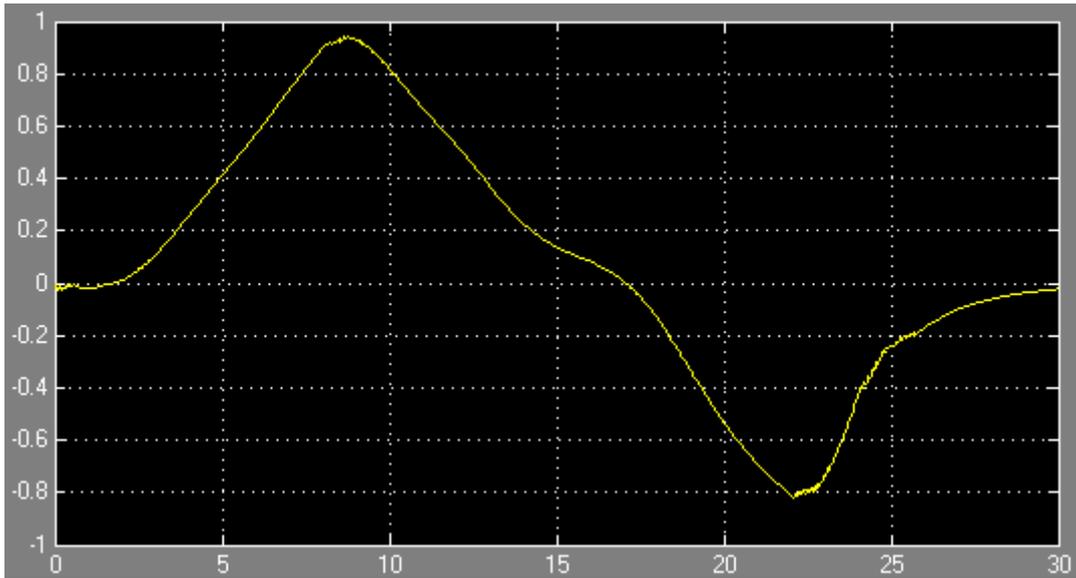


圖 5- 25 車子不加控制器時的振幅

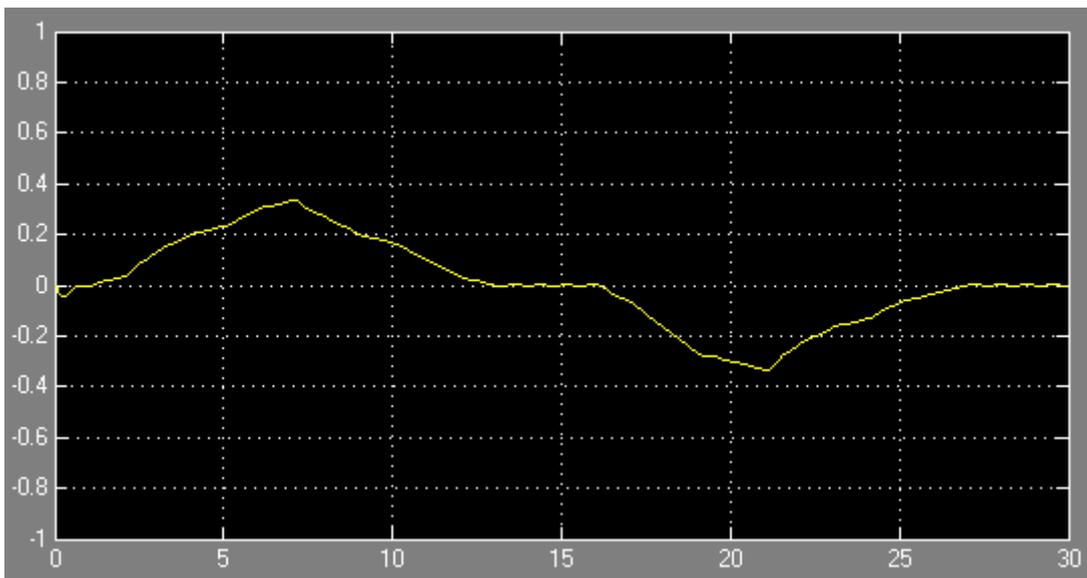


圖 5- 26 車子加控制器時的振幅

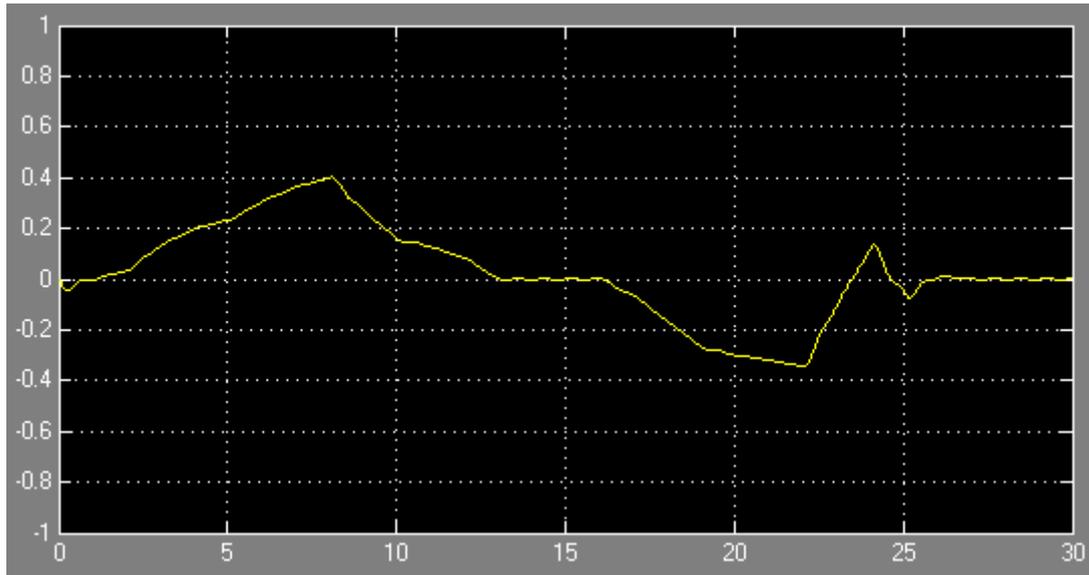


圖 5- 27 車子在預測下加控制器後的振幅

圖 5-23~24 縱軸為路面高度(單位:cm) , 橫軸為路面長度(單位:m)

圖 5-25~27 縱軸為  $x_1$  高度(單位:cm) , 橫軸為路面長度(單位:m)

### Case2 討論:

1. Case2 數據預測的方向討論與 Case1 相同，預測出的數據方向都是由擷取數列所決定。
2. Case2 所用的系統和 Case1 都是非線性系統，一樣都是利用系統的操作點或平衡點做非線性系統的線性化。可將此微量變化的動態行為視為線性系統的動態行為。所以亦可利用線性系統的控制理論來設計控制器，以控制此微量變化的非線性系統。
3. 當車子不加控制器時的平均振幅是正 0.55cm 與負 0.45cm，當車子在預測下加控制器時的平均振幅是正 0.17cm 與負 0.14cm。由 Burton Douglas Chart 的舒適度評價可得當車子不加控制器時是在可感受的區域之內，而當車子在預測下加控制器時是在幾乎感受不到的區域內。所以可以知道在預測後可以得到較佳的舒適度。

## Case2 結論:

由圖中可看出灰 PID 控制器成功的降低了車子的振幅，也可使得車子在振動後可以回到平穩狀態下。所以可得知灰色預測器在任意的路面下，依然有不錯的預測能力。這樣即可使 PID 控制器先行運作，得到較好的舒適度。



## 第六章 結論與未來展望

本文設計了一種新的控制器，並成功的應用在半車懸吊系統上，稱為灰PID控制器。將灰預測器加在可變模型的前方可先行預估模型的形式，再馬上加以PID控制，這樣即可使灰PID控制器優先運作。經模擬結果證明能夠成功的降低車身振幅。表 6-1 為三種PID控制方法的比較。

表 6-1 三種PID控制方法的比較

	傳統PID控制	模糊PID控制	灰色PID控制
實用性	高	高	高
精確度	高	中	低
複雜程度	低	高	中
發展性	低	中	高
運行速度	中	慢	快

由表 6-1 可看出灰色PID控制器有其優越的地方。不過有些地方是此控制器的缺點，應用時，可以先判斷系統類型，再決定使用何種控制器。

本論文中，我們尚有些值得再繼續研究的地方，可以分為下列來敘述：

(1)在PID控制器的地方，我們可以採用強健控制器，來增強控制結構的性能，能使懸吊系統在穩定性方面更具有強健性。

(2)可以再加上模糊理論等方法，使得GM(1,1)預測器所預測的值可以更有彈性的去選用。

(3)由於Grey PID控制器是一個即時且簡單的控制器，所以很適合運用在即時系統和其他控制系統上。

## 參考文獻

- [1] M. Appleyard and P.E Wellstead, "Active Suspension : Some Background" IEE Proc,-control Theory Appl., Vol.142, No.2, pp.123-128, March 1995.
- [2] A. Turti, S. Roukieh, E. Dayre "Three Control Approaches for the Design of Car Semi-Active Suspension (Optimal Control, Variable Structure Control, Fuzzy Control)" 32<sup>nd</sup> IEEE CDC, San Antonio, Texas, Vol.109,pp.104-110,Dec.1993.
- [3] John C. Dixon, "The Shock Absorber Handbook", ISBN: 0-7680-0050-5, S.A.E Inc. 1999.
- [4] F.J Meister, "Sensitivity of Human Beings to Vibration", Forschung (V.D.I Berlin), Vol.198D,pp.161-175,May-June, 1935.
- [5] T.D. Gillespie, "Fundamentals of Vehicle Dynamics,"Society of Automotive Engineers, Inc.,Vol.33,no.10,pp.1781-1817,1992.
- [6] R. Krtolica and D. Hrovat, "Optimal Active Suspension Control Based on a Half-Car Model," Proceeding of the 29<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, pp2238-2243, Dec 1990.
- [7] R. Krtolica and D. Hrovat, "Optimal Active Suspension Control Based on a Half-Car Model: Analytical Solution ," IEEE Transactions on Automatic Control, vol.37, No.4, pp.528-532, Apr 1992.
- [8] J. Campos, L. Davis, F. L. Lewis, S. Ikenaga, S. Scully, and M. Evans, "Active Suspension Control of Ground Vehicle Heave and Pitch Motions," Proceedings of the 7<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, pp.222-233, Haifa Israel, June 1999.
- [9] D. Karnopp, "Active Damping in Road Vehicle Suspension Systems," Vehicle System Dynamics,Vol.41, no.12, pp.291-316, 1983.
- [10] C. J. Huang and J. S. Lin, "Nonlinear control design of half-car active suspensions," Proceedings of the 2002 Chinese Automatic Control Conference, Tainan, Taiwan, R.O.C., pp.643-648, March 2002.
- [11] C.J. Huang and J.S. Lin, "Nonlinear active suspension design for half-car models," Proceedings of the 2002 International Conference on Control and Automation, Xiamen, P.R. China, pp.1436-1440, June 2002.
- [12] T.D. Gillespie, "Fundamentals of Vehicle Dynamics," Society of Automotive Engineers, Inc. Warrendale, PA., pp.45-59,1992.
- [13] Jyh-Horng Chou, Shinn-Horng Chen, Feng-Zhi Lee, "Grey-Fuzzy Control for Active Suspension Design," Proceedings of the 1997 American Control Conference, Albuquerque, NM , pp.714-718,June1997

- [14] J.D. Robson, "Road Surface Description and Vehicle Response," *Int.J. of Vehicle Design*. Vol.1,no.1,pp.179-192,1979.
- [15] R.C. Redfield, "Performance of Low-Bandwidth Semi-Active Damping Concept for Suspension Control," *Vehicle System Dynamics*,Vol.20,pp.17-35,1991.
- [16] J.Deng, "Grey System Control," Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1985.(in Chinese).
- [17] Y.P. Huang, and C.C. Hung, "Determination of the Preferred Fuzzy Variables and Application to the Prediction Control by the Grey Modeling," *Second National Conference on Fuzzy Theory And Application*, pp.406-410.1994.
- [18] 溫坤禮 黃宜豐 陳繁雄 李元秉 連志峰 賴家瑞著, "灰預測原理與應用" 全華科技圖書股份有限公司 91年9月.
- [19] 原田 宏著 林慶銘編譯, "最新汽車控制技術" 全華科技圖書股份有限公司 87年8月.
- [20] 余克維著, "控制系統分析與設計使用 Matlab" 新文京開發出版有限公司 92年1月.
- [21] 周鵬程著, "線性與非線性控制設計" 全華科技圖書股份有限公司 89年6月.
- [22] G.A. Bendrikov and K.F. Teodorichik, "The laws of root migration for third and fourth power linear algebraic equations as the free terms changes continuously," *Automat. Remote Control*, Vol.16,No.3,pp.531-538,1995.
- [23] G.A. Bendrikov and K.F. Teodorichik, "The theory of derivative control in third order linear systems," *Automat. Remote Control*, pp.516-517, May 1957.
- [24] G.A. Bendrikov and K.F. Teodorichik, "The analytic theory of constructing root loci," *Automat. Remote Control*, pp.340-344, March 1959.
- [25] G.A. Bendrikov and K.F. Teodorichik, "The methods of plotting root paths of linear systems and for qualitative determination of path type," *Proc. of IFAC Congress*, Vol.1, pp.8-12, 1960.