

## 第二章

### 基本介紹及理論推導

#### 2.1 簡介

在本章的 2.2 中我們會介紹有限時域差分法(FDTD)，這是可以拿來在時域上模擬電磁問題的數值方法，也將會在第三章到第五章中模擬中使用。由於我們要分析的問題屬於遙控感測的領域，因此對於遙控感測的背景介紹也將在本章 2.3 中提到。2.4 中我們就電磁學上的時間回轉(Time-Reversal)理論作數學推導，並分析使用這個技術可能面對到有關解析度的問題。



#### 2.2 有限時域差分法(Finite Difference Time Domain)

有限時域差分法(FDTD)是由 Kane S. Yee 在 1966 年所提出的演算法[10]，在電磁學方面的研究上，FDTD 的使用相當廣泛，舉凡微波電路、電磁干擾(EMI)、天線、遙控感測模擬(Remote Sensing)、電磁波能量吸收模擬(SAR)都可以使用它來模擬。在電磁學上的 FDTD 應用，主要是架構在將馬克士威爾方程式(Maxwell' s equation) 寫成差分方程式，進而將所有不同方向的電場、磁場離散化，因此我們可以算出模擬空間內任一位置的電場值、磁場值。由於 FDTD 屬於時域上的分析，若要得到頻域上的響應則必須經過富立葉轉換(Fourier Transform) 的後處理。

##### 2.2.1 馬克士威爾方程式的離散化

由 Yee 所提出來的 FDTD 是針對有限的空間區域，將它劃分成許多的小區域，這些

小區域稱它做單胞(cell)，如圖 2.1 所示，每個單胞上都分佈著各個方向的電場、磁場，這些電場、磁場都來自將馬克士威爾方程式的微分形式離散化後得到的分佈，以下便由 (2.1) 式、(2.2) 式這兩個基本的旋度方程式開始分析[11]：

$$\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla \times \bar{H} \quad (2.2)$$

首先，將(2.1)式、(2.2)式兩個向量方程式化為(2.3)式~(2.8)式的六個純量方程式：

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

其中  $\varepsilon$  代表介電係數(permittivity)，而  $\mu$  代表導磁係數(permeability)。

而 Yee 所提出的單胞便是將空間全部離散化，空間的離散化便是將空間根據  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  來做切割，因此被切割到的格子點座標  $(x, y, z) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ ，則  $(i, j, k)$  便是此位置在 Yee 網格中的空間座標，時間的離散化則是將時間根據所選擇的  $\Delta t$  來切割，則  $t_n = n\Delta t$ ，因此以  $z$  方向電場  $E_z$  為例，當我們標示為  $E_{z,i,j,k}^n$  時，所代表的是在位置  $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$  時間  $n\Delta t$  時的  $z$  方向電場。有了上述的離散法則，接著便是將上述六個純量方程式以中央差分的方式離散化，以下說明如何將空間時間離散化的通式， $F$  表示的是任意的場量函數：

$$i. \quad x \text{ 方向微分的離散化, } \frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial x} = \frac{F_{i+1/2,j,k}^n - F_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x}$$

- ii. y 方向微分的離散化， $\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial y} = \frac{F_{i,j+1/2,k}^n - F_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y}$
- iii. z 方向微分的離散化， $\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial z} = \frac{F_{i,j,k+1/2}^n - F_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z}$
- iv. 時間 t 微分的離散化， $\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial t} = \frac{F_{i,j,k}^{n+1/2} - F_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t}$

經由以上的離散化步驟，我們發現無論在空間或時間的離散中，都會出現有半個空間間隔與半個時間間隔的情況，所以可以知道當我們將它應用到(2.3)式~(2.8)式中，我們會得到電場與磁場在空間配置上有半個空間間隔的差距，而在時間的運算順序上半個時間間隔的差距，以下是(2.3)式~(2.8)式經過完整離散化後的表示：

$$Hx_{i,j,k}^{n+1/2} = Hx_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} (Ey_{i,j,k}^n - Ey_{i,j,k-1}^n) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} (Ez_{i,j,k}^n - Ez_{i,j-1,k}^n) \quad (2.9)$$

$$Hy_{i,j,k}^{n+1/2} = Hy_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (Ez_{i,j,k}^n - Ez_{i-1,j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} (Ex_{i,j,k}^n - Ex_{i,j-1,k}^n) \quad (2.10)$$

$$Hz_{i,j,k}^{n+1/2} = Hz_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} (Ex_{i,j,k}^n - Ex_{i,j-1,k}^n) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (Ey_{i,j,k}^n - Ey_{i-1,j,k}^n) \quad (2.11)$$

$$Ex_{i,j,k}^{n+1} = Ex_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} (Hz_{i,j+1,k}^{n+1/2} - Hz_{i,j,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} (Hy_{i,j,k+1}^{n+1/2} - Hy_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (2.12)$$

$$Ey_{i,j,k}^{n+1} = Ey_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} (Hx_{i,j,k+1}^{n+1/2} - Hx_{i,j,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} (Hz_{i+1,j,k}^{n+1/2} - Hz_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (2.13)$$

$$Ez_{i,j,k}^{n+1} = Ez_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} (Hy_{i+1,j,k}^{n+1/2} - Hy_{i,j,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} (Hx_{i,j+1,k}^{n+1/2} - Hx_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (2.14)$$

其中，我們在切割空間網格時並沒有半個網格的切割，因此空間上半個間隔的位置都已被其鄰近的整數的網格座標  $(i, j, k)$  所重新表示，而時間上的半個間隔雖然仍保留其表示方式，但它實際代表的意思是電場與磁場的疊代運算是依序來進行的。

以上是完整的全波模擬，包含六個場值，而隨著應用在 2D 的模擬時，我們可以將完整的 Yee 模型化簡為 TE 和 TM 兩種 2D 的模型[12]，如圖 2.1 下方所示，TE 包含的是  $Ex$ 、 $Ey$ 、 $H_z$  三個場量，TM 包含的是  $H_x$ 、 $H_y$ 、 $E_z$  三個場量，這兩個 2D 模型由於其相對應原始 Yee 網格的切面是不同的，所以其 2D 的空間配置大小是有稍微不同的，TM 與 TE 的模擬都將會在本篇論文中使用到。

## 2.2.2 穩定條件

在 FDTD 的模擬當中，我們必須決定空間分割  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  以及時間分割  $\Delta t$ ，不當的設定會造成數值的發散，因此為了確保模擬的數值收斂以及準確性，有以下的準則可做參考，首先必需決定最小波長，通常我們會以激發波源的截止頻率相對應的十分之一波長或更小來當作空間分割  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ ，這樣的分割可以確保高頻的訊號不會因為一個波長中網格切割數目不夠而造成數值不準確。一旦空間分割決定，時間分割  $\Delta t$  就必須滿足 Courant criterion，即(2.15)式[11]，否則就會造成數值發散：

$$\Delta t \leq \frac{1}{v_{\max}} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1/2} \quad (2.15)$$

而  $v_{\max}$  代表的是模擬空間中可能發生的最快波速，一般都以光速  $c_0$  來代表。

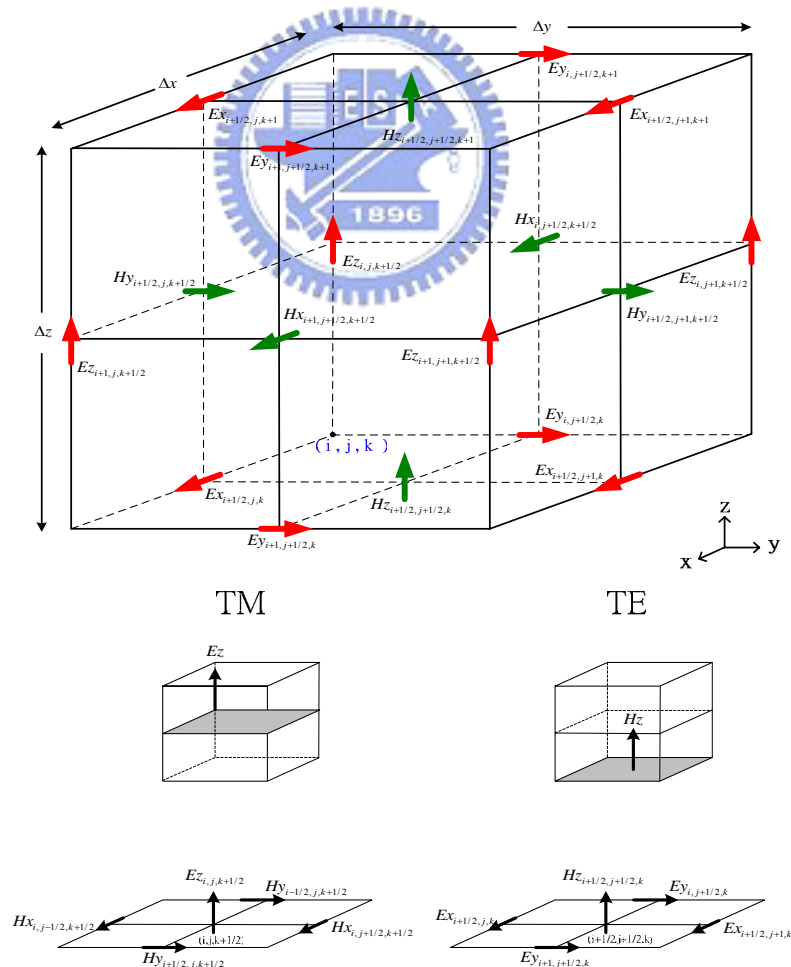


圖 2.1 Yee 網格與 TM、TE 場拆解

### 2.2.3 吸收邊界-完美吸收層(Perfectly Matched Layer)

當我們分析的問題是在一個開放的環境底下時，因為 FDTD 只能針對有限的空間來做網格的切割，因此在面對開放環境的條件時，我們會將模擬環境射設定在包含主要散射物體及激發波源的空間，而為了確保有開放空間的特性(及沒有反射波由邊界回來)，我們會使用吸收邊界來截斷電磁波，而近年來較常被拿來使用的是在 1994 年由 Berenger 所提出的完美吸收邊界(Perfectly Matched Layer)[13]，與以往 Mur 的吸收邊界[14]不同的是，PML 是藉由吸收邊界的厚度及導電係數  $\sigma$  的設定，來做物理上的吸收，而 Mur 的吸收邊界則是讓波在邊界上滿足特定的微分方程式，來達到數學上的吸收。在本篇論文中的模擬也都會使用 PML 來當作吸收邊界，以下便介紹 PML 的架構。

當我們考慮如圖 2.2 的情況，一個平面波垂直地由真空向介質傳播時，若要在真空與介質的界面處不造成反射，則真空中的波阻抗與介質中的波阻抗必須是相等的，(2.16) 式表示真空中的波阻抗與介質中的波阻抗，當它們相等時則會滿足(2.17)式。PML 便是利用這個特性來產生吸收邊界，當圖 2.2 的左側是我們的模擬空間而右側是吸收邊界時，波由真空打入介質時，由於阻抗匹配，並不會產生反射，再者，波進入介質之後，由於電導率  $\sigma$  與磁導率  $\sigma^*$  的存在，因此波會在介質中產生衰減，進而達到吸收的效果。

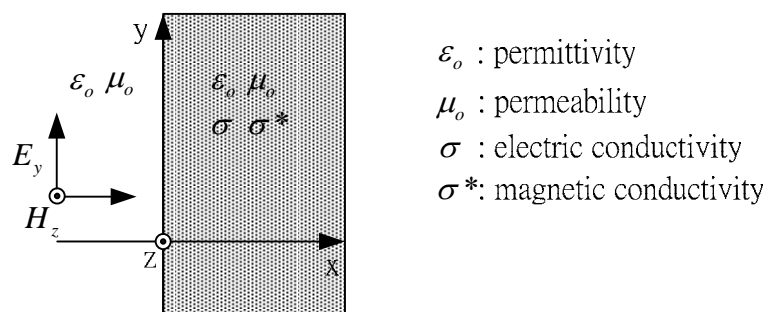


圖 2.2 平面波於真空-介質界面傳播示意圖[12]

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \quad ; \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_o + \frac{\sigma^*}{j\omega}}{\epsilon_o + \frac{\sigma}{j\omega}}} \quad (2.16)$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_o} = \frac{\sigma^*}{\mu_o} \quad (2.17)$$

雖然上面的情況可以讓波被吸收，但也侷限在垂直入射的情況才能成立，因此為了滿足從各個角度入射都能得到好的吸收效果，Berenger 提出了新的電導率  $\sigma$  與磁導率  $\sigma^*$  的概念，將它們分成  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_x^* \sigma_y^* \sigma_z^*$ ，以  $\sigma_x$  為例，它會針對電場中往正 x 軸方向與負 x 軸方向傳播的成份來做吸收，我們此處強調成份的意思是當波傾斜入射到吸收邊界時，一定可以拆解成平行成份與垂直成份，而垂直成份是我們要吸收的。雖然利用了這樣的方式來吸收，但實際上這樣的吸收材料是不存在的。

為了滿足不同成份的場量由不同方向的電導率  $\sigma$  與磁導率  $\sigma^*$  來吸收，Berenger 進而將所有的場量做分解，如(2.18)式~(2.23)式所示：

$$E_x = E_{xy} + E_{xz} \quad (2.18)$$

$$E_y = E_{yx} + E_{yz} \quad (2.19)$$

$$E_z = E_{zx} + E_{zy} \quad (2.20)$$

$$H_x = H_{xy} + H_{xz} \quad (2.21)$$

$$H_y = H_{yx} + H_{yz} \quad (2.22)$$

$$H_z = H_{zx} + H_{zy} \quad (2.23)$$

上述的分量滿足的方程式如(2.24)式~(2.35)式所示：

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.24)$$

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_o \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_o \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_o \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_o \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.29)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y * H_{xy} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z * H_{xz} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x * H_{yx} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.32)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z * H_{yz} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.33)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x * H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y * H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.35)$$

上述十二個分解後的方程式若以 FDTD 的型式來表示時，則如(2.36)式~(2.47)式所

示：

$$E_{xy}^n{}_{i+1/2,j,k} = CaEx * E_{xy}^{n-1}{}_{i+1/2,j,k} + CbEx * (H_z^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{n-1/2}{}_{i+1/2,j-1/2,k}) \quad (2.36)$$

$$E_{xz}^n{}_{i+1/2,j,k} = CaEz * E_{xz}^{n-1}{}_{i+1/2,j,k} - CbEz * (H_y^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k-1/2}) \quad (2.37)$$

$$E_{yz}^n{}_{i,j+1/2,k} = CaEz * E_{yz}^{n-1}{}_{i,j+1/2,k} + CbEz * (H_x^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k-1/2}) \quad (2.38)$$

$$E_{yx}^n{}_{i,j+1/2,k} = CaEx * E_{yx}^{n-1}{}_{i,j+1/2,k} - CbEx * (H_z^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{n-1/2}{}_{i-1/2,j+1/2,k}) \quad (2.39)$$

$$E_{zx}^n{}_{i,j,k+1/2} = CaEx * E_{zx}^{n-1}{}_{i,j,k+1/2} + CbEx * (H_y^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{n-1/2}{}_{i-1/2,j,k+1/2}) \quad (2.40)$$

$$E_{zy}^n{}_{i,j,k+1/2} = CaEy * E_{zy}^{n-1}{}_{i,j,k+1/2} - CbEy * (H_x^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{n-1/2}{}_{i,j-1/2,k+1/2}) \quad (2.41)$$

$$H_{xy}^{n+1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} = CaHy * H_{xy}^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} - CbHy * (E_z^n{}_{i,j+1,k+1/2} - E_z^n{}_{i,j,k+1/2}) \quad (2.42)$$

$$H_{xz}^{n+1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} = CaHz * H_{xz}^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} + CbHz * (E_y^n{}_{i,j+1/2,k+1} - E_y^n{}_{i,j+1/2,k}) \quad (2.43)$$



$$H_{yz}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} = CaHz * H_{yz}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} - CbHz * (E_x^n{}_{i+1/2,j,k+1} - E_x^n{}_{i+1/2,j,k}) \quad (2.44)$$

$$H_{yx}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} = CaHx * H_{yx}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} + CbHx * (E_z^n{}_{i+1,j,k+1/2} - E_z^n{}_{i,j,k+1/2}) \quad (2.45)$$

$$H_{zx}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} = CaHx * H_{zx}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} - CbHx * (E_y^n{}_{i+1,j+1/2,k} - E_y^n{}_{i,j+1/2,k}) \quad (2.46)$$

$$H_{zy}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} = CaHy * H_{zy}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} + CbHy * (E_x^n{}_{i+1/2,j+1,k} - E_x^n{}_{i+1/2,j,k}) \quad (2.47)$$

其中的係數分別是：

$$CaEi = \frac{1 - \frac{\sigma_i \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_i \Delta t}{2\epsilon_o}} \quad ; \quad CbEi = \frac{\frac{\Delta t}{\epsilon_o \Delta i}}{1 + \frac{\sigma_i \Delta t}{2\epsilon_o}} \quad i = x, y, z \quad (2.48)$$

$$CaHi = \frac{1 - \frac{\sigma_i^* \Delta t}{2\mu_o}}{1 + \frac{\sigma_i^* \Delta t}{2\mu_o}} \quad ; \quad CbHi = \frac{\frac{\Delta t}{\mu_o \Delta i}}{1 + \frac{\sigma_i^* \Delta t}{2\mu_o}} \quad i = x, y, z \quad (2.49)$$

圖 2.3 是 2D 的 PML 空間配置示意圖，其中 PML 只有在角落的地方如 A、B、C、D 處才有兩個方向的吸收，其餘的都是單方向的吸收。倘若只有一層的 PML 是不足以來作吸收的，所以需要多層的 PML 才能作有效的吸收，所以在滿足阻抗匹配的條件下，我們將 PML 設定成多層的結構，各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定都滿足與真空中的波阻抗匹配，但層與層間的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  是逐漸增加的，則波越往 PML 中傳，衰減地越快，關於 PML 的厚度及相對應各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定我們可以藉由決定一個最大的導電率  $\sigma_{max}$ ，再根據  $\sigma_{max}$  來分配各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$ ，關於  $\sigma_{max}$  的決定如(2.50)所示，其中 M 代表的是  $\sigma_{max}$  分配時的冪次，一般為 2~4，N 代表的是 PML 吸收層的厚度，一般為 4~16 層，R(0)代表的是預定的反射量大小， $c_o$  代表光速，而各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定，則必須滿足(2.51)式，而最邊緣處我們仍是用 PEC 層。由於 PML 厚度越厚對於記憶體暫存空間消耗越大，所以一般都取夠用即可，本篇論文的模擬都以 M=4，N=10，R(0)= $10^{-8}$  來設定 PML。



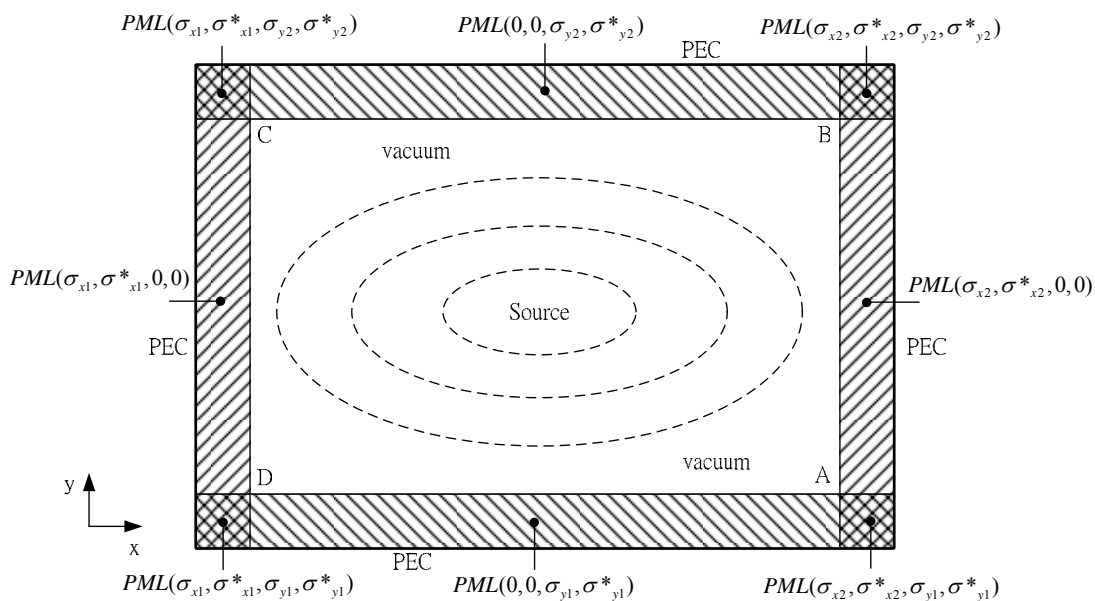


圖 2.3 二維空間中 PML 參數配置圖[13]

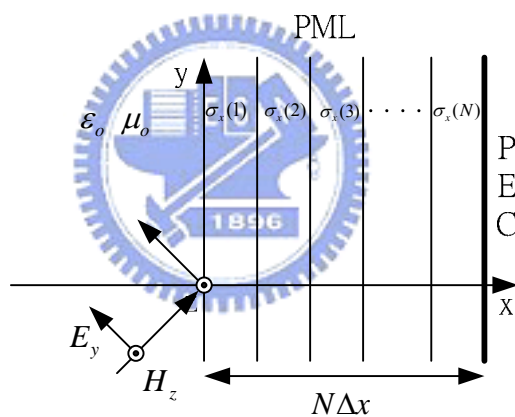


圖 2.4 PML 吸收層中的參數配置[12]

$$\sigma_{\max} = -\frac{(M+1)\epsilon_o c_o}{2N\Delta x} \ln |R(0)| \quad (2.50)$$

$$\sigma_i(n) = \sigma_{\max} \left(\frac{N-n}{N}\right)^M \quad ; \quad \sigma_i^*(n) = \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \sigma_i(n) \quad n = 1 \sim N \quad ; \quad i = x, y, z \quad (2.51)$$

## 2.2.4 波源分析

一般在 FDTD 中要將波源(Source)引入 FDTD 的計算時，有以下三種不同的型式：

- i. 硬性波源(Hard source)
- ii. 軟性波源(Soft source)
- iii. 穿透性波源(Transparent source)

以 2D 的 TM FDTD 模擬為例，若採用硬性波源的饋入，代表的即是強迫波源饋入點處的  $E_z$  場從頭到尾都必須滿足波源方程式，這個作法的優點是我們可以確保饋入到 FDTD 網格中的波形和我們給的波源方程式是相同的，但缺點是當反射波遇到波源點時，此時由於波源點仍必須滿足波源方程式，因此從反射波的觀點來看波源點就如同 PEC 一般，會造成多餘的反射。而軟性波源的饋入，則是在波源饋入點處的  $E_z$  場的疊代方程式後面加上波源方程式，我們可以發現，這個方法改善了硬性波源對於反射波而言是 PEC 的缺點，當波源完全饋入 FDTD 網格之後，波源點的  $E_z$  場疊代方程式仍滿足一般的疊代，所以反射波經過波源點時就不會再被反射了，但使用軟性波源時，就不再能保證波源點激發的  $E_z$  場會與波源方程式相同。除了以上兩種較常被拿使用的波源饋入方式，另外還有一種叫做穿透性波源的饋入[15]，它綜合了上述兩種波源饋入的優點，即饋入與給定的波源方程式相同的能量進入 FDTD 網格，此外，又保證當反射波遇到波源點時不會造成額外的反射，它採用的方式是以硬性波源的饋入方式在波源點激發一大小為 1 的脈衝(delta impulse)，記錄下每一時間步階時波源點四周磁場對波源點的貢獻，我們叫它作脈衝響應(impulse response)，接著我們要產生一修正方程式，由我們所要激發的波源與之前的脈衝響應彼此旋積(convolution)而得，而真正的模擬時，是使用軟性波源的饋入，但每一時間步階必須減掉一個與修正方程式相對應時間的修正項，因此我們可以預期饋入的的波形會與波源方程式相同，且不會造成多餘的反射，但是在 2D FDTD 的模擬時，由於修正項不易收斂到 0，而會維持在某一定值，所以在模擬經過一定的時間之後，容易造成數值的發散，並不理想，但在 3D FDTD 模擬時則不會有這個問題。綜合上述的優缺點，為了不要造成多餘的反射，以及作太多的數學修正，所以在本論文中的波源都採軟性波源的饋入方式，並且是利用電流源  $J$  來激發電場  $E$ ，如(2.52)式，其中若以 TM 2D 為例時， $J_z$  如(2.53)所示[12]。

$$\bar{E}^n = \frac{1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}} \bar{E}^{n-1} + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}} \nabla \times \bar{H}^{n-1/2} - \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}} \bar{J}^{n-1/2} \quad (2.52)$$

$$J_z^{n-1/2} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} I((n-1/2)\Delta t) \quad (2.53)$$

## 2.3 遙控感測(Remote Sensing)

遙控感測(Remote Sensing)，即在一定距離以外感受，探測(probing)和識別所需要研究的對象，廣義來說，凡是不直接接觸被探測的目標而能收集，記錄其訊息，並把它們轉換成我們以識別和分析的信號或圖像的技術，統稱為遙控感測。

### 2.3.1 微波影像 (Microwave Imaging)



微波影像是一個藉由儀器擷取微波能量並將這些能量大小轉換成影像的形式來呈現的一種技術。微波影像常用在未知物體的偵測與景物的拍攝，首先必須由發射機打出訊號來激發這些物體產生反射以及散射，而這些散射的能量我們會藉由架設接收機來將它們擷取下來，此時接收機的作用就如同照像機裡的透鏡，將光線成像在底片上。以下便針對光學影像與微波影像的相同處與差異處做介紹以及比較[16]。

光學影像與微波影像首先都需要有波源，光學影像的波源是太陽，微波影像的波源通常由我們自己架設的發射機，其次是造成散射或反射的平面或物體，最後是要有接收的儀器。以上是它們的相同處，雖然兩種技術很相似，但它們產生的影像其實有很大的不同，因為可見光的波長遠小於微波的波長，因此對於相同的表面(如地表)來做光學與微波影像接收時，光波由於波長短，所以它看到的是十分粗糙的表面，因此大部份的光波幾乎都被散射了，所以不管在任何方向都能看到被它散射的光，而微波由於波長較光波長，所以相同的表面在它看來是平坦許多，因此大部份的能量是被反射的，所以只有

特定的方向才能接收到被反射的能量。也由於可見光易於散射而且必須在有太陽的情況下才能進行光學攝影，這部份微波影像便較有它的優勢，以下便條列微波的特點：

- i. 不易受天候外在環境影響：一般的微波遙感屬於主動式，也就是說波源來自自己的發射機，不需外在的波源，不像光學影像屬於被動式，需靠太陽照射反射物才能獲得訊息。而且遇到黑夜或雲霧這類的水氣分子時，微波也具有較好的穿透力。
- ii. 對於介質物體的穿透能力較好：當電磁波打到介質物體時，會產生反射、散射、以及穿透的電磁波，對於不同材料的物體，有不同的穿透深度(depth of penetration)，而穿透深度可以由電磁波在介質中的衰減係數  $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$  來做估計，因此波長越長，穿透力越好，對於探測土壤、地質都很適合。
- iii. 提供更多的觀測特性以供判斷：由於微波的輻射與散射和傳播介質的介電特性及表面粗糙度有關，而且不同極化、不同波長、不同觀測位置都會產生不同的影響，利用這些特性，可以提供更多的資訊來區別待測物體。例如微波對於土壤偵測，在土壤富含水份與乾土時，會呈現不同的介質特性，這部份微波就容易分辨出它們的不同。

但微波影像也有它不足於光學影像的部份，我們便在表 2.1 做整理[17]：

表 2.1 光學影像與微波影像優缺點比較

	優點	缺點
光學影像	影像容易判讀 解析度高	需在陽光充足時使用 穿透性低 易受雲霧水氣干擾
微波影像	不易受天候影響 穿透力佳	1. 影像判讀較光學困難 2. 影像較易變形，處理複雜 3. 解析度較光學差

另一方面，由圖 2.5 我們可以再來看它們另一個不同點，光學影像的部份我們以照像機為例，成像於底片上的影像主要與相機鏡頭兩測的張角有關，它對於距離方向的變化不明顯，但微波影像不一樣，當我們由發射機打出脈衝時，不同距離的物體反射回來的時間是不相同的，打到椅子的波會先反射回來，而打到花的波則較慢回來，因此偵測距離變化是微波影像的特點，此外反射回來的波的接收則與接收機在橫向(cross-range)擺放的張角有關，接收機在橫向擺放的張角越大，得到的解析度會越好，而張角大小代表的便是這組接收機的微波孔徑(microwave aperture)，因此通常都會用相位陣列天線(phased array)來當接收機。

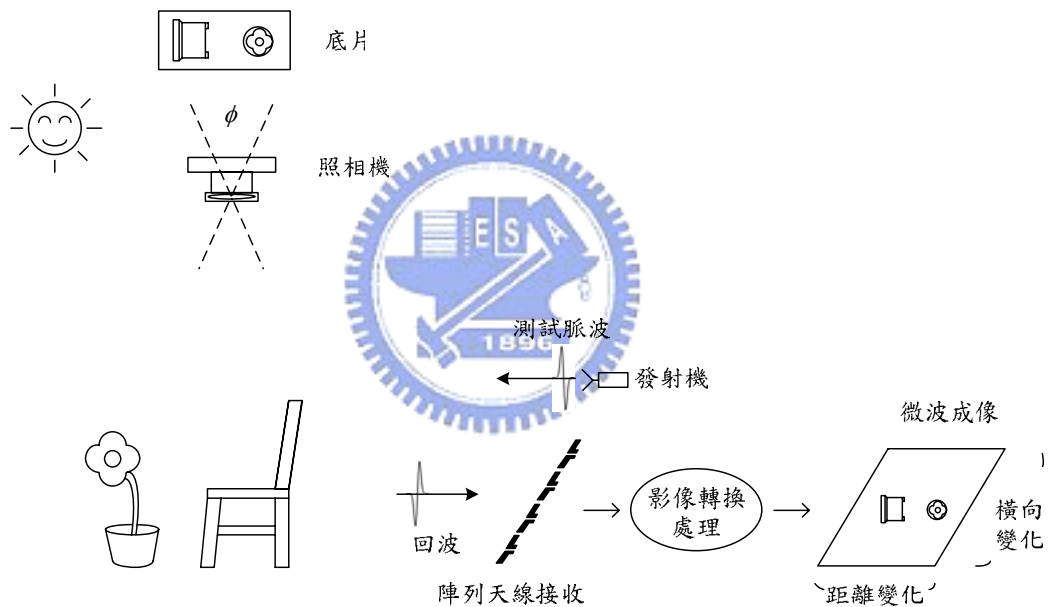


圖 2.5 光學影像與微波影像成像方式比較[16]

### 2.3.2 非破壞性檢測 (Nondestructive Detection)

非破壞性檢測主要是藉由架設發射機與接收機來對一個未知的範圍做偵測，由於一般的情況我們並不清處這個範圍內有什麼樣的物體存在，所以我們會藉由發射測試的訊號並將這個測試訊號打到散射物體後所散射的場由接收機接收下來，進而分析散射場的特性(如頻譜)來推測未知範圍內的散射物體位置與大小，因此這部份的研究包含了醫學

影像研究以及探地雷達研究…等等。

非破壞性檢測可以用微波(Microwave)或超聲波(Ultrasonic)來實現，而且各有其優缺點，微波容易穿透介質，且波速較快，因此檢測的反應時間是非常迅速的，但微波由於集膚深度(Skin depth)的原因無法穿透金屬，但這部份超聲波卻是可以的，除此之外，微波也有許多有用的特性可以拿來分析，如強度(Amplitude)分析、相位(Phase)分析，極化(Polarization)分析，這些特性對於散射物體的解析都是很有幫助的[18]。因此我們接著便介紹用微波來檢測物體時，探測訊號與散射物體大小的關係。

當我們用發射機打出探測訊號，此探測訊號打到未知的散射物體時會在它的表面以及內部產生感應電流  $J_i$ ，如圖 2.6 所示，而這些感應電流  $J_i$  會形成一個新的波源，因此若把一開始激發的探測訊號當做一次波源，則由散射所造成的感應電流  $J_i$  便是所謂的二次波源(secondary source)，感應電流的產生與波源引起散射物體的共振是有相關的，就如同我們在研究天線共振一樣，大尺寸的天線造成低頻共振，小尺寸的天線造成高頻共振，不同尺寸大小的散射物體會造成不同頻率的共振，當然物體的介質特性也會影響到共振頻率，但單就尺寸大小的觀點來看，若是你想偵測的物體是非常小的，便須要用很高頻的探測訊號來激發這個散射物體上的感應電流  $J_i$ ，否則從波的觀點來看，我們是不容易看到這個散射物體。

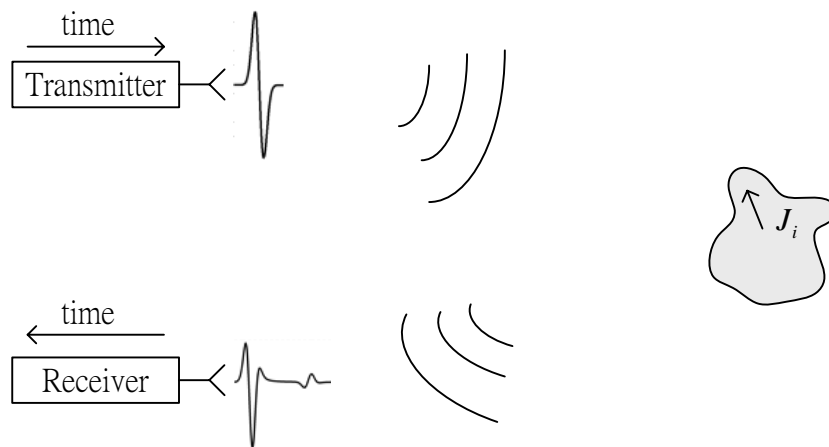


圖 2.6 發射波與散射波示意圖



這部份也說明了為什麼會用微波(Microwave)來作醫學影像(Medical imaging)、探地雷達(Ground penetrating radar)或其它遙控感測的研究，因為微波的頻段是由 300MHz 到 300GHz，這個頻段相對應的真空波長是由 1 公釐到 1 公尺，若是四分之一波長共振的觀點來看，也就是說散射物體的尺寸落在 0.25 公釐到 25 公分內時，是比較容易被偵測到，因此不管在醫學影像上(如腫瘤的偵測或腎結石的偵測)或探地雷達上(水管的偵測或地雷的偵測)，我們想要偵測的物體尺寸大都落在這個範圍內，所以微波很適合拿來偵測它們。

一般而言，小尺寸的東西要由高頻訊號來偵測，大尺寸的東西要由低頻訊號來偵測，但由於我們不知道未知範圍內有什麼物體、尺寸是多大，因此我們的訊號必須兼顧低頻部份與高頻部份，換句話說，我們需要的是利用一個寬頻(wideband)的探測訊號來做偵測，寬頻訊號的使用在雷達上是常被使用到，如原本是由軍方在使用的超寬頻雷達(Ultra-wideband radar)技術，近年來由於超寬頻 UWB 的優點越來越被重視[18]，這部份的研究也由原本僅使用在軍事上延伸到一般的通訊以及探地雷達與醫學影像上。所謂的超寬頻(ultra-wideband)訊號，它代表的是這個訊號的有效頻寬與中心頻率的比值大於 25% ( $BW/f_c > 25\%$ )，滿足這個條件時，我們都稱它作超寬頻。本篇論文中也是使用超寬頻訊號來作非破壞性檢測。

## 2.4 時間回轉(Time-Reversal)理論的公式推導

### 2.4.1 通道效應中脈衝響應的可逆性

在通訊系統的理論中，對於空間中兩個不同位置彼此間的關係，通常都使用通道效應來做描述。首先我們假定空間中的兩點  $\vec{r}_o$  與  $\vec{r}$  它們彼此存在一個時域(time-domain)上的脈衝響應(Impulse Response)關係  $h(t)$ ，對於一般的情況，我們假定這兩個位置間存在的通道(Channel)是無損耗的(lossless)，但對於脈衝響應的可逆性我們必須



要加以證明[19]，因此我們將脈衝響應分成兩部份，一個是傳輸模態(Transmit mode)  $h_i^t(\bar{r}_o, t)$  與接收模態(Receive mode)  $h_i^r(\bar{r}_o, t)$ ，如圖 2.7 所示。而上述兩個傳輸模態在 (2.54) 式及 (2.55) 式的地方有完整的表示式，其中的 Green function  $G(\bar{r}_o, t_o | \bar{r}, t)$  描述的是由  $\bar{r}_o$  位置  $t_o$  時刻發出的脈衝在  $\bar{r}$  位置  $t$  時刻所產生的場。而由 Green function 的互換性定理(Reciprocity theorem)，可以得到如 (2.56) 式的關係式。在滿足這個關係式的條件下，可以得到傳輸模態的  $h_i^t(\bar{r}_o, t)$  與接收模態的  $h_i^r(\bar{r}_o, t)$  是相等的，之後我們便可以將脈衝響應的表示式化簡為  $h_i(\bar{r}_o, t)$ 。

$$h_i^t(\bar{r}_o, t) = \oint_{Si} G(\bar{r}, t_o | \bar{r}_o, t) dr \quad (2.54)$$

$$h_i^r(\bar{r}_o, t) = \oint_{Si} G(\bar{r}_o, t_o | \bar{r}, t) dr \quad (2.55)$$

$$G(\bar{r}_o, t_o | \bar{r}, t) = G(\bar{r}, t_o | \bar{r}_o, t) \quad (2.56)$$

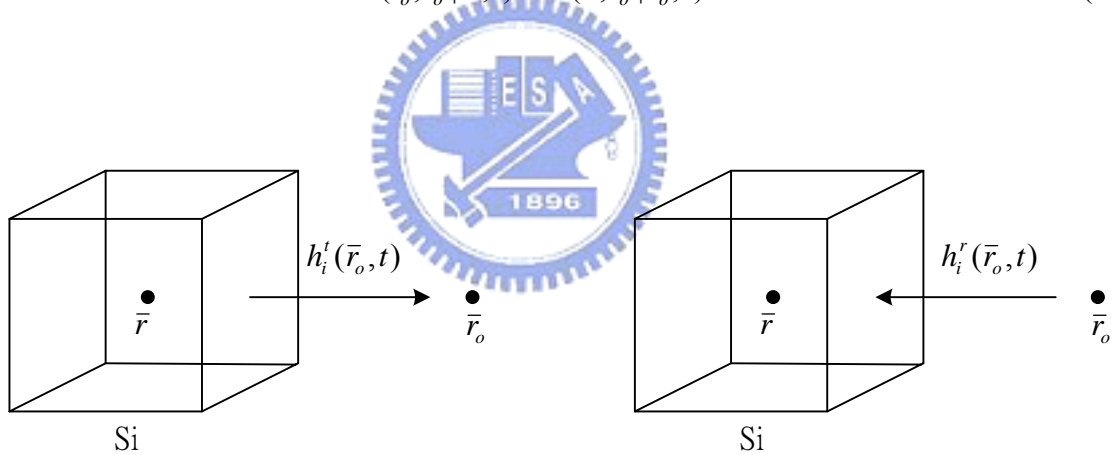


圖 2.7 傳輸模態與接收模態的脈衝響應

#### 2.4.2 時間回轉(Time-Reversal)實驗的流程

無論是時間回轉的模擬或實驗都可以區分為兩個主要的步驟，第一個步驟是從發射機(Transmitter)打出一測試訊號並由所架設的收發機(Transducer)將它接收下來，我們在接下來的章節中都稱它為 Forward process。接著要先對每個收發機上的接收訊號根據時間軸來反轉，再來第二個步驟便是將這些反轉後的訊號同時由收發機打回空間

中，接下來的章節中都稱它為 Reverse process，最後便是觀測發射機附近聚焦的情況。  
 圖 2.7、圖 2.8 便是上述兩個步驟的示意圖。

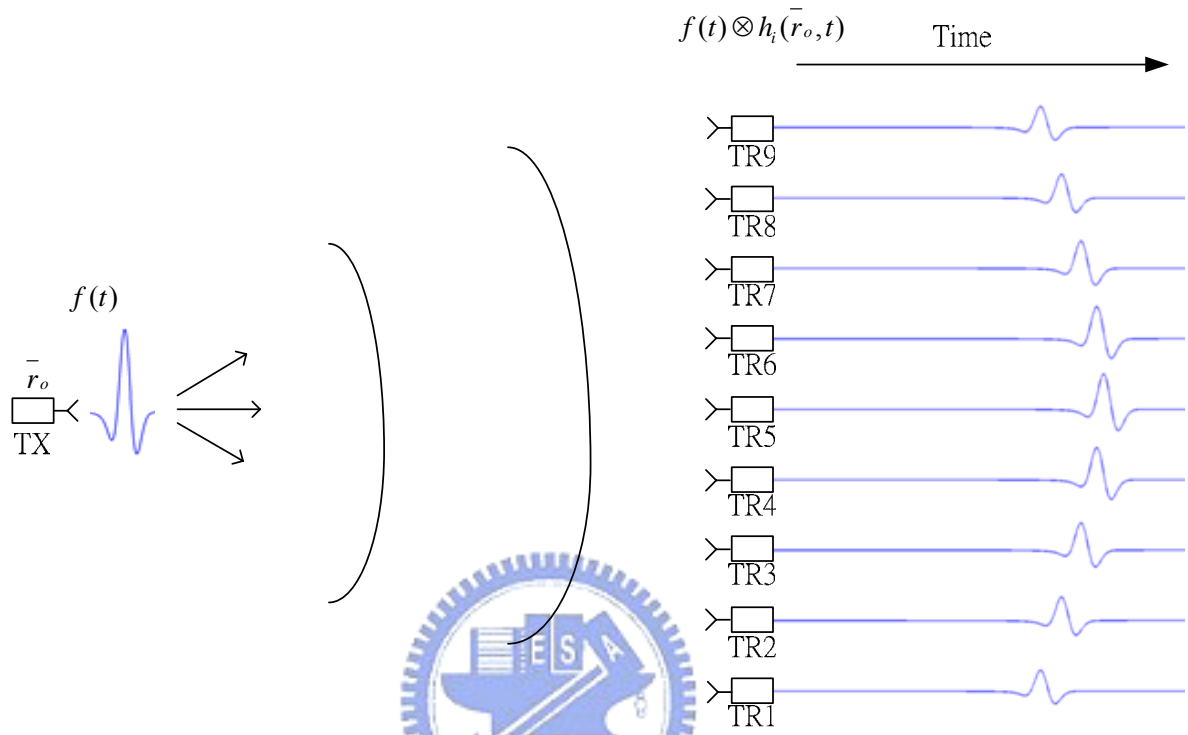


圖 2.8 時間回轉程序的 Forward process

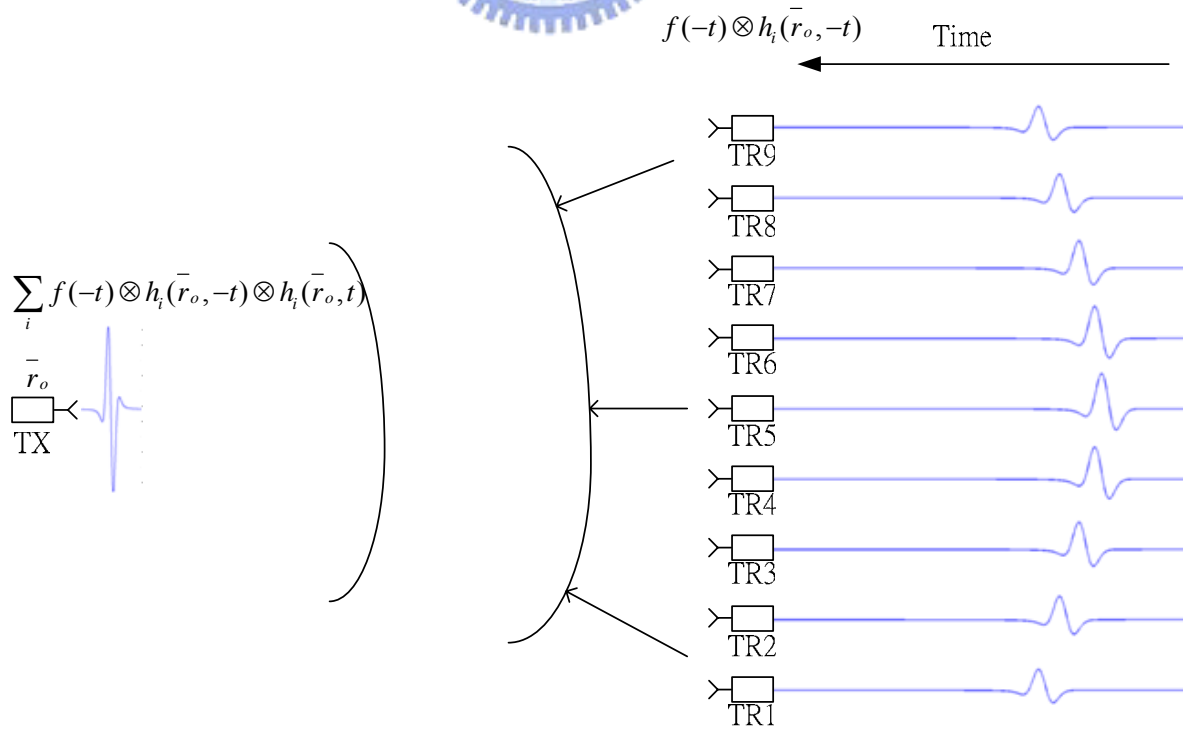


圖 2.9 時間回轉程序的 Reverse process

### 2.4.3 波動方程式中時間的可逆性

首先，我們由基本的(2.57)式~(2.60)式四個馬克士威方程式以及(2.61)式的關係式推得(2.62)式及(2.63)式兩個主要的電場 $\bar{E}$ 與磁場 $\bar{H}$ 的波動方程式：

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2.57)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \quad (2.58)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2.59)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.60)$$

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad ; \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad ; \quad \bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \bar{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{B} \\ \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} &= -\mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \\ \xrightarrow{\text{charge free}} \nabla^2 \bar{E} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \bar{H}) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{D} + \nabla \times \bar{J} \\ \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} &= -\mu \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \\ \xrightarrow{\text{No magnetic charge}} \nabla^2 \bar{H} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

當我們考慮在無損耗環境之下的波動方程式時，則為(2.64)式及(2.65)式：

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.64)$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.65)$$

假設 $\bar{E}(\vec{r}, t) = \bar{E}_0 e^{i\omega t}$ 與 $\bar{H}(\vec{r}, t) = \bar{H}_0 e^{i\omega t}$ 是分別滿足(2.64)式及(2.65)式的解，其必然滿足

(2.66)式及(2.67)式，則當我們考慮將時間回轉後的電場 $\bar{E}(\bar{r}, -t) = \bar{E}_o e^{-i\omega t}$ 與磁場 $\bar{H}(\bar{r}, -t) = \bar{H}_o e^{-i\omega t}$ 代回(2.64)式及(2.65)式作驗證時，我們可以發現它同樣會滿足(2.66)式及(2.67)式，所以，很明顯地，時間回轉後的函數 $\bar{E}(\bar{r}, -t)$ 與 $\bar{H}(\bar{r}, -t)$ 是可以自然地滿足無損耗的波動方程式。

$$\nabla^2 \bar{E}_o + \omega^2 \mu \epsilon \bar{E}_o = 0 \quad (2.66)$$

$$\nabla^2 \bar{H}_o + \omega^2 \mu \epsilon \bar{H}_o = 0 \quad (2.67)$$

上述的討論是以直觀的方式來看待時間回轉後的函數會自然滿足波動方程式的現象，以下我們將就利用一任意位置的波源 $f(\bar{r}_o, t)$ 以及環繞波源的數個收發機來分析在電磁學上時間回轉(Time-Reversal)的聚焦現象。



#### 2.4.4 時間回轉在空腔中的理論推導

時間回轉(Time-Reversal)的分析要求解在波動方程式中必須保持 $t \Rightarrow -t$ 時仍然成立，但從完整的波動方程式(2.62)式及(2.63)式來看，當有損耗的情況發生時，即時間的一階微分項不等於0時，則無法保證時間回轉後的解能滿足波動方程式，但在微弱的損耗情況下時( $\sigma$ 很小)，我們可以把時間回轉後的解看成近似滿足波動方程式。以下的推導同樣是針對無損耗的傳播介質來作分析。

首先，考慮空間中有一點波源 $f(\bar{r}_o, t_o)$ ，則我們必須求解的 Poisson 方程式如(2.68)所示，如同在靜電學中針對這類問題的求解，我們必須先將問題化簡為求解 Green function 的問題。

$$(\nabla^2 - c^{-2} \partial_{tt}) \Psi(\bar{r}, t) = -4\pi f(\bar{r}, t) \quad (2.68)$$

因此，先將包含時間項的波動方程式化簡，我們採取的方式是將包含時間諧振項的

$\Psi(\vec{r}, t)$  與  $f(\vec{r}, t)$  用反富立業轉換(Inverse Fourier Transform)的形式表示，如(2.69)

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.69)$$

式及(2.70)式所示，同樣地，我們也能將  $\Psi(\vec{r}, \omega)$  與  $f(\vec{r}, \omega)$  用富立業轉換(Fourier Transform)的形式表示，如(2.71)式及(2.72)式所示：

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.70)$$

$$\Psi(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.71)$$

$$f(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.72)$$

將(2.69)式及(2.70)式兩式代回(2.68)式時，我們可以將方程式化為一非齊次的 Helmholtz equation，如(2.73)式所示，

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\vec{r}, \omega) = -4\pi f(\vec{r}, \omega) \quad ; \quad k = \omega/c \quad (2.73)$$

(2.73)式是一橢圓偏微分方程式，若我們把  $k$  定為 0 時，則是一般我們在靜電學中求解的 Poisson 方程式。我們先假定這一類非齊次的 Helmholtz equation 在滿足特定  $k$  值時的 Green function 為  $G_k(\vec{r}, \vec{r}_o)$ ，則 Green function 滿足的方程式如(2.74)所示：

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\vec{r}, \vec{r}_o) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \quad (2.74)$$

當我們針對球座標系統(Spherical coordinate)來求解(2.74)式，我們考慮的環境是在開放環境(Open region)中，即沒有邊界的情況。由於在這個座標系中，所有的位置都有球對稱的特性，即  $\partial/\partial\theta = \partial/\partial\phi = 0$ ，也就是  $G_k(\vec{r}, \vec{r}_o)$  只和  $\bar{R} = \vec{r} - \vec{r}_o$  有關，所以可以再進一步地將(2.74)式化簡為(2.75)式，其中，除了  $R=0$  ( $R = |\bar{R}|$ )的位置以外，都將會滿足(2.76)式的 Homogeneous equation，因此，除了  $R=0$  以外位置的解都可以表示成(2.77)式的形式，其中脈衝函數  $\delta(R)$  僅在  $R \rightarrow 0$  才有影響，在這個極限的條件下  $kR \ll 1$ ，(2.75)式變化簡為一 Poisson equation，並且可以用靜電學的方式來求解，因此  $kR \rightarrow 0$  時合理的 Green function 的正規化表示式如(2.78)[20]，綜合以上分析，Green

function  $G_k(R)$  的通解可以表示成(2.79)式，且必須滿足  $A+B=1$ ，但如何選擇  $A$  和  $B$  值才是正確決定  $G_k(R)$ ，這就和時間上的邊界條件(boundary condition in time)有關，舉例來說，當一點波源僅在  $t=0$  之後才開始作用時，使用  $AG_k^{(+)}(R)$  來表示一個向外輻射的球面波便是一個合理的選擇，因此(2.79)式從另一個角度來看時，第一項  $AG_k^{(+)}(R)$  代表的便是一個發散的球面波，而第二項  $BG_k^{(-)}(R)$  代表的便是一個收斂的球面波。為了更完整瞭解  $G_k^{(\pm)}$  在時間上的特性，接著我們便考慮包含時間項的 Green function，其滿足的方程式如(2.81)式所示。

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 G_k = -\delta(R) \quad (2.75)$$

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 (RG_k) = 0 \quad (2.76)$$

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \quad (2.77)$$

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R} \quad (2.78)$$

$$G_k(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R) \quad (2.79)$$

$$G_k^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad (2.80)$$

$$(\nabla^2 - c^{-2} \partial_{tt}) G^{(\pm)}(\vec{r}, t; \vec{r}_o, t_o) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \delta(t - t_o) \quad (2.81)$$

由於波源的激發時間為  $t_o$  因此當我們使用富立葉轉換處理(2.69)式時，最後表示成如(2.73)式時將會多出一  $e^{i\omega t_o}$  項，且原本的  $G_k^{(\pm)}$  也變為  $G_k^{(\pm)} e^{i\omega t_o}$ ，最後時域上的 Green function 表示式則如(2.82)式，其中  $\tau = t - t_o$  代表觀測者與波源的相對時間， $R$  代表觀測者與波源的相對距離，同時，若在非色散(Non-dispersion)介質中傳播，且波數  $k = \omega/c$  時，我們可以用 delta 函數來表示(2.82)式，如(2.83)式，若不以相對時間  $\tau$  以及相對距離  $R$  來表示，則如同(2.84)式，此時我們從時間的觀點來解釋  $G^{(\pm)}$ ， $G^{(+)}$  代表的便是一個延遲的(retarded) Green function，而  $G^{(-)}$  代表的便是一個超前的

(advanced) Green function，從因果關係來看， $G^{(+)}$  在位置  $\vec{r}$  時間  $t$  的響應，來自位置  $\vec{r}_o$  時間  $t_o$  ( $t_o < t$ ) 的波源，因此在傳遞時間上，會有一延遲時間  $|\vec{r} - \vec{r}_o|/c$ ，相對地， $G^{(-)}$  描述的便是波源激發之前  $t < t_o$  的響應，同樣地，在此處我們選擇用發散波來描述  $G^{(+)}$  的效應，用收斂波來描述  $G^{(-)}$  的效應，這樣有助於我們理解時間回轉(Time-Reversal)的聚焦現象。

$$G_k^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.82)$$

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \quad (2.83)$$

$$G^{(\pm)}(\vec{r}, t; \vec{r}_o, t_o) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_o|} \delta\left(t_o - \left[t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}_o|}{c}\right]\right) \quad (2.84)$$

我們已完整描述了(2.81)式以及其相對應的解  $G^{(\pm)}$ ，並作了物理上的解釋，接著，我們便回到(2.68)式，考慮任意波源函數  $f(\vec{r}_o, t_o)$ ，此時由於有了 Green function 的基礎，我們可以很容易地解出  $\Psi(\vec{r}, t; \vec{r}_o, t_o)$ ，如(2.85)所示，我們現在可以從這個式子回頭來看時間回轉(Time-Reversal)實驗的兩個步驟，在 Forward process 中，從發射機打出  $f(\vec{r}_o, t_o)$  的訊號，被收發機接到的關係式現在可以用一延遲的 Green function 形式來表示，如(2.86)所示，而當我們考慮 Reverse process 時，我們必須由收發機打回時間回轉後的訊號，這時我們可能面對到的問題是當這些由收發機在 Forward process 中接收到的訊號，重新發射時，可能會在空間中傳播超過它們的 Forward process 中的延遲時間(retarded time)，超過延遲時間的響應，已不符合因果關係，因此我們必須將同時考慮發射機周遭的收斂波與發散波的現象，因此在下一節中，我們針對時間回轉(Time-Reversal)的聚焦現象深入討論。



$$\Psi(\vec{r}, t; \vec{r}_o, t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\nu} G^{(\pm)}(\vec{r}, t; \vec{r}_o, t_o) f(\vec{r}_o, t_o) d^3 \vec{r}_o dt_o \quad (2.85)$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{\nu} \frac{[f(\vec{r}_o, t_o)]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}_o|} d^3 \vec{r}_o \quad (2.86)$$

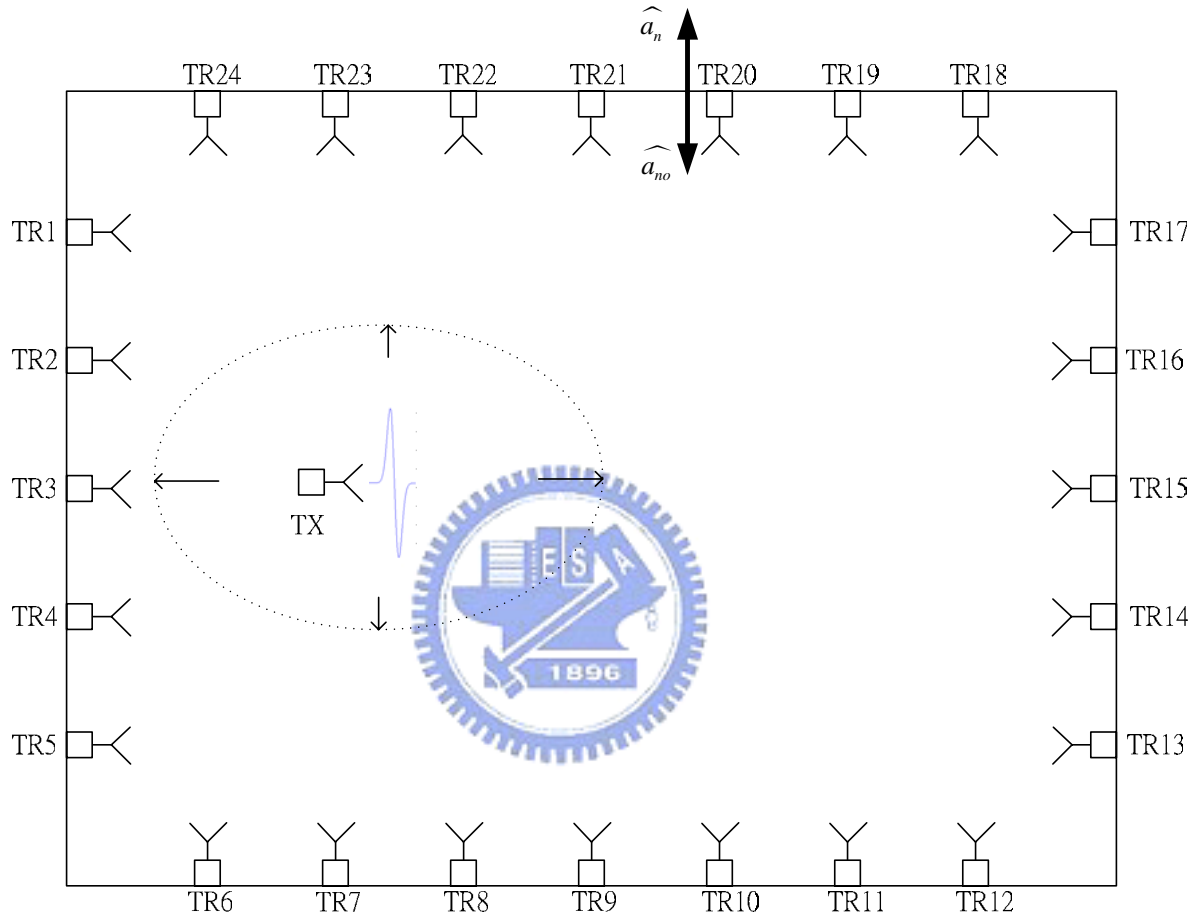


圖 2.10 時間回轉空腔示意圖

### 2.4.5 時間回轉在空腔中的聚焦

以下我們將針對空腔(cavity)中的聚焦現象來探討，這裡所謂的空腔指的是我們用足夠的收發機將發射機包圍住，如圖 2.10 所示，但我們仍假定這是一個開放的環境(open region)，其中的介質也是均勻的(homogeneous)。此外，由於我們在收發機處並不可能永無止盡地接收訊號，我們只會接收某一段時間，之後就必須對這段時間的訊號作時間

回轉，因此我們必須引入一權衡函數  $W(t)$ ，如(2.87)式，所以在 Forward process 時，空腔中收發機上的訊號可以表示成  $\Psi_i(\vec{r}, t)W(t)$ ， $i$  代表的是不同的收發機，當完成了 Forward process 中在收發機上記錄訊號的動作，接著我們就必須將這些訊號作時間回轉，由於引入了權衡函數  $W(t)$ ，所以不再是  $t \Rightarrow -t$ ，而是  $t \Rightarrow T-t$ ， $T$  代表的是在 Forward process 中記錄訊號的時間長度。此外，為了讓整個推導較具體化，我們將採用電荷密度  $\rho$  以及電流密度  $\vec{J}$  來當作激發源。

$$W(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } 0 \leq t \leq T \\ 0 & , \text{ if } \text{ot} \end{cases} \quad (2.87)$$

首先，仍然先考慮 Forward process，由於我們現在使用電荷密度  $\rho$  以及電流密度  $\vec{J}$  來當作激發源，因此(2.88)式以及(2.89)式代表的分別是收發機上相對應的電位  $\Phi(\vec{r}, t)$  以及向量磁位  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ，它們滿足的無損耗波動方程式如(2.90)式以及(2.91)式，至於權衡函數  $W(t)$  的引入留待 Reverse process 時考量。

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v d^3\vec{r}_o \frac{1}{R} [\rho(\vec{r}_o, t_o)]_{ret} \quad (2.88)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v d^3\vec{r}_o \frac{1}{R} [\vec{J}(\vec{r}_o, t_o)]_{ret} \quad (2.89)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_o \quad , \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_o| \quad , \quad \hat{R} = \vec{R} / R$$

$$\nabla^2 \Phi - c^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 \quad (2.90)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - c^{-2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.91)$$

有了電位  $\Phi(\vec{r}, t)$  以及向量磁位  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ，我們可以由(2.92)式以及(2.93)式求得相對應的  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  及  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ，如(2.94)式及(2.95)式：

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.92)$$

$$\vec{B} = -\nabla \times \vec{A} \quad (2.93)$$

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_v d^3\bar{r}_o \frac{1}{R} [-\nabla_o \rho - c^{-2} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}]_{ret} \quad (2.94)$$

$$\bar{B}(\bar{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_v d^3\bar{r}_o \frac{1}{R} [\nabla_o \times \bar{J}]_{ret} \quad (2.95)$$

(2.94)式及(2.95)式代表的便是在 Forward process 中收發機上觀測到的電場  $\bar{E}(\bar{r}, t)$  及磁通量密度  $\bar{B}(\bar{r}, t)$ ，接下來我們推導的便是 Reverse process 中由收發機聚焦回發射機附近時其相對應的電場表示，我們將這個步驟中的電場表示為  $\bar{E}_r(\bar{r}, t)$ 。

以下我們提供兩種方式來求解  $\bar{E}_r(\bar{r}, t)$ ，第一種方式是由收發機上等效波源的方式來求解，由於 Reverse process 中我們把收發機打出的訊號視為波源，並且我們是從波動方程式來求解問題，所以我們必須得到收發機上等效的電荷密度變化以及電流密度變化，因此我們假設 Forward process 中收發機上接收到的電場、磁場會產生相對應的面電荷以及面電流，同時考慮權衡函數  $W(t)$  時，我們將它表示如(2.96)及(2.97)，其中  $\hat{a}_n$  代表在收發機位置由發射機所在空間向空腔外指的單位法向量，見圖 2.10：

$$\rho_s(\bar{r}_o, t) = \hat{a}_n \cdot (\epsilon_o \bar{E}(\bar{r}_o, T-t)) W(T-t) \quad (2.96)$$

$$\bar{J}_s(\bar{r}_o, t) = \hat{a}_n \times \left( \frac{\bar{B}(\bar{r}_o, T-t)}{\mu_o} \right) W(T-t) \quad (2.97)$$

滿足 Reverse process 中電位  $\Phi_{tr}(\bar{r}, t)$  以及的  $\bar{A}_{tr}(\bar{r}, t)$  的波動方程式則是(2.98)式及(2.99)式，如同在(2.88)式及(2.89)式，我們可以將  $\Phi_{tr}(\bar{r}, t)$  以及  $\bar{A}_{tr}(\bar{r}, t)$  表示成(2.100)式及(2.101)式：

$$\nabla^2 \Phi_{tr} - c^{-2} \frac{\partial^2 \Phi_{tr}}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_o \quad (2.98)$$

$$\nabla^2 \bar{A}_{tr} - c^{-2} \frac{\partial^2 \bar{A}_{tr}}{\partial t^2} = -\mu_o \bar{J} \quad (2.99)$$

$$\rho(\bar{r}_o, t) = \rho_s(\bar{r}_o, t) \delta(\bar{r}_o)$$

$$\bar{J}(\bar{r}_o, t) = \bar{J}_s(\bar{r}_o, t) \delta(\bar{r}_o)$$

$$\Phi_{tr}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iint d^2\vec{r}_o \frac{1}{R} [\rho_s(\vec{r}_o, t)]_{ret} \quad (2.100)$$

$$\bar{A}_{tr}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint d^2\vec{r}_o \frac{1}{R} [\bar{J}_s(\vec{r}_o, t)]_{ret} \quad (2.101)$$

$$\bar{E}_{tr} = -\nabla\Phi_{tr} - \frac{\partial\bar{A}_{tr}}{\partial t} \quad (2.102)$$

同樣地，我們可以用(2.92)式的方式來得到 $\bar{E}_{tr}(\vec{r}, t)$ ，如(2.102)式所示。此外，第二種求解 $\bar{E}_{tr}(\vec{r}, t)$ 方法是引入克希荷夫(Kirchhoff)公式來求解[20]，克希荷夫公式是利用 Green 定理來表示一封閉體積內的純量場(可以是電場或磁場的任意分量)，在這裡的推導我們將把它表示成完整的向量形式來求解 $\bar{E}_{tr}(\vec{r}, t)$ ，(2.103)式便是 $\bar{E}_{tr}(\vec{r}, t)$ 的克希荷夫表示式，此處 $\hat{a}_{no}$ 的方向與 $\hat{a}_n$ 正好相反，代表在收發機位置由空腔外向發射機所在空間指的單位法向量，由於是封閉面積分，利用散度定理(Divergence theorem)我們可以將 $\bar{E}_{tr}(\vec{r}, t)$ 轉換為體積分的表示式，如(2.104)式，(2.103)式及(2.104)式中的 $\bar{E}_o(\vec{r}_o, t_o)$ 都包含了權衡函數 $W(t)$ ，如(2.105)式所示：

$$\begin{aligned} \bar{E}_{tr}(\vec{r}, t) = & \oint_s d^2\vec{r}_o \hat{a}_{no} \cdot \nabla_o \bar{E}_o(\vec{r}_o, t) \otimes G(\vec{r}, \vec{r}_o, t) \\ & - \bar{E}_o(\vec{r}_o, t) \otimes (\hat{a}_{no} \cdot \nabla_o G(\vec{r}, \vec{r}_o, t)) \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{tr}(\vec{r}, t) = & \int_v d^3\vec{r}_o \nabla_o^2 \bar{E}_o(\vec{r}_o, t) \otimes G(\vec{r}, \vec{r}_o, t) \\ & - \bar{E}_o(\vec{r}_o, t) \otimes \nabla_o^2 G(\vec{r}, \vec{r}_o, t) \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\bar{E}_o(\vec{r}_o, t) = \bar{E}(\vec{r}_o, T-t)W(T-t) \quad (2.105)$$

(2.104)式中仍未處理的部份有 $\nabla_o^2 \bar{E}_o(\vec{r}_o, t)$ 以及 $\nabla_o^2 G(\vec{r}, \vec{r}_o, t)$ ，以下便針對這兩項來分析，首先對於 $\nabla_o^2 \bar{E}_o(\vec{r}_o, t)$ 項，我們假定 $\bar{E}(\vec{r}_o, T-t)$ 仍滿足 wave equation，即(2.106)式，但由於我們在接收時有截斷超過時間T的訊號，因此在(2.106)的 $\partial_{tt}$ 項處會產生時間上 delta 函數，我們將 $\partial_{tt}$ 項的貢獻表示在(2.107)，其中的 delta 函數項的貢獻 $\bar{a}(\vec{r}_o)$ 以及 $\bar{b}(\vec{r}_o)$ 表示在(2.108)及(2.109)式：

$$(\nabla_o^2 - c^2 \partial_{tt}) \bar{E}(\bar{r}_o, T-t) = -\frac{1}{\epsilon_o} (-\nabla_o \rho(T-t) - c^2 \frac{\partial \bar{J}(T-t)}{\partial t}) \quad (2.106)$$

$$\partial_{tt} \bar{E}_o(\bar{r}_o, t) = W(T-t) \partial_{tt} \bar{E}(\bar{r}_o, T-t) + \bar{a}(\bar{r}_o) \delta'(t) - \bar{b}(\bar{r}_o) \delta(t) \quad (2.107)$$

$$\bar{a}(\bar{r}_o) = \bar{E}(\bar{r}_o, t) \Big|_{t=T} \quad (2.108)$$

$$\bar{b}(\bar{r}_o) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}(\bar{r}_o, t) \Big|_{t=T} \quad (2.109)$$

接著我們便把  $\nabla_o^2 \bar{E}_o(\bar{r}_o, t)$  的完整表示式在(2.110)中推導：

$$\begin{aligned} \nabla_o^2 \bar{E}_o(\bar{r}_o, t) &= \nabla_o^2 (W(T-t) \bar{E}(\bar{r}_o, T-t)) = W(T-t) \nabla_o^2 \bar{E}(\bar{r}_o, T-t) \\ &= W(T-t) (\nabla_o^2 - c^2 \partial_{tt}) \bar{E}(\bar{r}_o, T-t) + c^2 \partial_{tt} \bar{E}_o(\bar{r}_o, T-t) \\ &= W(T-t) \left[ -\frac{1}{\epsilon_o} (-\nabla_o \rho(T-t) - c^2 \frac{\partial \bar{J}(T-t)}{\partial t}) \right] \\ &\quad + c^2 W(T-t) \partial_{tt} \bar{E}(\bar{r}_o, T-t) + c^2 \bar{a}(\bar{r}_o) \delta'(t) - c^2 \bar{b}(\bar{r}_o) \delta(t) \end{aligned} \quad (2.110)$$

針對  $\nabla_o^2 G(\bar{r}, \bar{r}_o, t)$  項，我們可以用(2.111)式來替代：

$$\begin{aligned} \nabla_o^2 G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) - c^2 \partial_{tt} G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) &= -\delta(t) \delta(\bar{r} - \bar{r}_o) \\ \Rightarrow \nabla_o^2 G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) &= c^2 \partial_{tt} G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) - \delta(t) \delta(\bar{r} - \bar{r}_o) \end{aligned} \quad (2.111)$$

有了  $\nabla_o^2 \bar{E}_o(\bar{r}_o, t)$  以及  $\nabla_o^2 G(\bar{r}, \bar{r}_o, t)$  的表示式，接著我們再考慮(2.112)式：

$$\begin{aligned} \Omega(\bar{r}, \bar{r}_o, t) &= \nabla_o^2 \bar{E}_o(\bar{r}_o, t) \otimes G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) - \bar{E}_o(\bar{r}_o, t) \otimes \nabla_o^2 G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) \\ &= c^2 W(T-t) \partial_{tt} \bar{E}(\bar{r}_o, T-t) \otimes G(\bar{r}, \bar{r}_o, t) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi |\bar{r} - \bar{r}_o|} \left[ c^2 \bar{a}(\bar{r}_o) \delta'(t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}_o|}{c}) - c^2 \bar{b}(\bar{r}_o) \delta(t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}_o|}{c}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4\pi \epsilon_o |\bar{r} - \bar{r}_o|} W(T-t + \frac{|\bar{r} - \bar{r}_o|}{c}) \left[ \nabla_o \rho(T-t + \frac{|\bar{r} - \bar{r}_o|}{c}) + c^2 \frac{\partial \bar{J}(T-t + \frac{|\bar{r} - \bar{r}_o|}{c})}{\partial t} \right] \\ &\quad - \bar{E}_o(\bar{r}_o, T-t) \otimes c^2 G \partial_{tt}(\bar{r}, \bar{r}_o, t) \\ &\quad + \bar{E}_o(\bar{r}_o, T-t) \end{aligned} \quad (2.112)$$

(2.112)式中的第一列及第四列可以互相消去，而第四列可以用(2.94)式代入，因此完整的 $\bar{E}_{tr}(\bar{r},t)$ 便可以表示如(2.113)式：

$$\begin{aligned} \bar{E}_{tr}(\bar{r},t) = & \int_{\nu} d^3\bar{r}_o \frac{1}{4\pi\epsilon_o|\bar{r}-\bar{r}_o|} W(T-t+\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) \left[ \nabla_o\rho(T-t+\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) + c^{-2} \frac{\partial\bar{J}(T-t+\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c})}{\partial t} \right] \\ & - \int_{\nu} d^3\bar{r}_o \frac{1}{4\pi\epsilon_o|\bar{r}-\bar{r}_o|} W(T-t) \left[ \nabla_o\rho(T-t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) + c^{-2} \frac{\partial\bar{J}(T-t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c})}{\partial t} \right] \\ & + \int_{\nu} d^3\bar{r}_o \frac{1}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_o|} \left[ c^{-2}\bar{a}(\bar{r}_o)\delta'(t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) - c^{-2}\bar{b}(\bar{r}_o)\delta(t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) \right] \end{aligned} \quad (2.113)$$

當我們考慮在選則一適當的 T 時，即 Forward process 中所有訊號都被收發機完整接收的情況下，則 $\bar{E}_{tr}(\bar{r},t)$ 可化簡為(2.114)式，若考慮利用(2.115)式再將(2.114)式化簡，則我們可以從(2.116)式中得到 Reverse process 在聚焦時的物理解釋， $K(\bar{r},t)$ 的第 1 項及第 2 項代表了 $\bar{E}_{tr}(\bar{r},t)$ 代表了球面波收斂及發散的成份，因此從這裡我們也可以推測在作 Reverse process 時，在發射機附近的電場會包含收斂及發散的成份，可能無法作完美的聚焦，或從另一個觀點來看，將(2.115)式作富立業轉換得到(2.117)式，(2.116)式作富立業轉換得到(2.118)式，從(2.117)式便可以看出 $|\bar{r}-\bar{r}_o|=\lambda/2$ 時， $K(\bar{r},t)$ 項會消失，可以視為聚焦時解析度的極限。

$$\begin{aligned} \bar{E}_{tr}(\bar{r},t) = & \int_{\nu} d^3\bar{r}_o \frac{1}{4\pi\epsilon_o|\bar{r}-\bar{r}_o|} \left[ \nabla_o\rho(T-t+\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) + c^{-2} \frac{\partial\bar{J}(T-t+\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c})}{\partial t} \right] \\ & - \int_{\nu} d^3\bar{r}_o \frac{1}{4\pi\epsilon_o|\bar{r}-\bar{r}_o|} \left[ \nabla_o\rho(T-t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}) + c^{-2} \frac{\partial\bar{J}(T-t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c})}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$K(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_o|} \delta\left(t + \frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}\right) - \frac{1}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_o|} \delta\left(t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}_o|}{c}\right) \quad (2.115)$$

$$\bar{E}_{tr}(\bar{r}, t) = \int_v d^3\bar{r}_o \left[ \nabla_o \rho(T-t) + c^{-2} \frac{\partial \bar{J}(T-t)}{\partial t} \right] \otimes K(\bar{r}, t) \quad (2.116)$$

$$K(\bar{r}, \omega) = \frac{1}{2j\pi} \frac{\sin(\omega|\bar{r}-\bar{r}_o|/c)}{|\bar{r}-\bar{r}_o|} = \frac{1}{j\lambda} \frac{\sin(k|\bar{r}-\bar{r}_o|)}{k|\bar{r}-\bar{r}_o|} \quad (2.117)$$

$$\bar{E}_{tr}(\bar{r}, \omega) = \int_v d^3\bar{r}_o \left[ \nabla_o \rho(\omega) + c^{-2} \frac{\partial \bar{J}(\omega)}{\partial t} \right]^* K(\bar{r}, \omega) e^{j\omega T} \quad (2.118)$$

以上推導的參考文獻[19-23]。

