

## 第四章

# 分解時間回轉運算子(DORT)的分析與模擬

### 4.1 簡介

一般若要利用時間回轉(Time\_Reversal)的方式來判斷未知散射體位置，我們必須將每個收發機上的散射場在時間回轉後，於 Reverse process 時發射回空間中，進而由空間中發生聚焦的位置來判斷散射物體的位置，但若空間中包含了不只一個散射物體，則把散射場打回空間中的步驟並不會只得到一個聚焦位置，因此我們可以知道散射場中包含的資訊是所有散射物體一起合成的，至於個別散射物體的資訊可否從接收到的散射場中分離出來，這裡便提供了一個 DORT 的方法[27-29]，這是一個從法文來的名字，以英文來說是代表的是 Decomposition of Time-Reversal Operator，它是從時間回轉運算子(Time Reversal Operator)中，分析它的特徵值(eigen-value)、特徵向量(eigen-vector)，進而推斷空間中散射物體的數目，及位置，以下便逐步介紹這個方法。

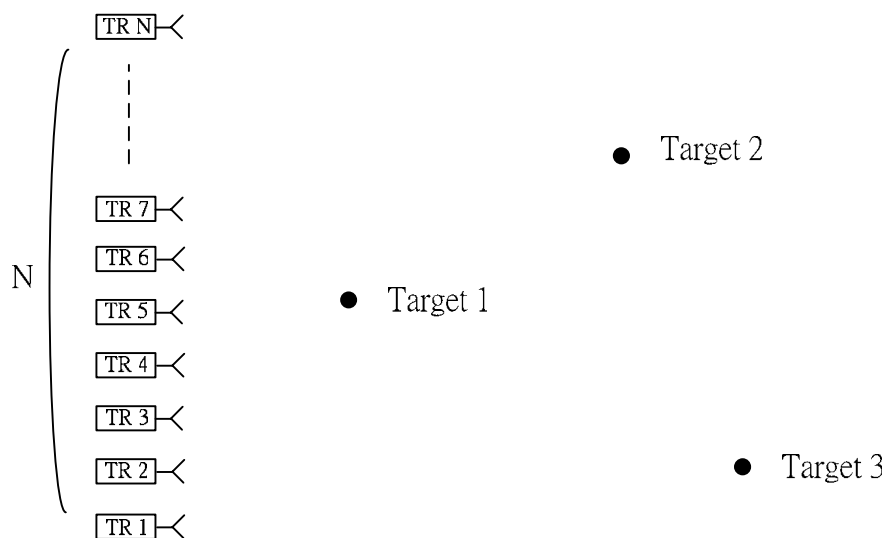


圖 4.1 DORT 實驗示意圖

## 4.2 分解時間回轉運算子(DORT)的數學推導

首先，我們考慮利用  $N$  個收發機來作未知物體的偵測，並且收發機間的脈衝響應為  $h_{ij}(t)$ ，第  $i$  個收發機發射的訊號表示成  $e_i(t)$ ，當  $N$  個收發機都同時打出訊號時，我們可以得到一個如 (4.1) 式的表示式，接著將 (4.1) 式針對作富立業轉換 (Fourier Transform)，得到 (4.2) 式，我們可以進一步再將它寫成矩陣的表示法，如 (4.3) 式，這時， $E$  代表的是發射訊號矩陣， $R$  代表的是接收訊號矩陣，而  $H$  代表的是將發射訊號轉變成接收訊號的轉移矩陣，並且大小是一個  $N \times N$  的方陣。

$$r_j(t) = \sum_{i=1}^N h_{ij}(t) \otimes e_i(t) \quad ; \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.1)$$

$$R_j(\omega) = \sum_{i=1}^N H_{ij}(\omega) E_i(\omega) \quad ; \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.2)$$

$$R(\omega) = H(\omega)E(\omega) \quad (4.3)$$

有了收發機與散射物體之間關係的轉移矩陣  $H$  之後，我們再重新由矩陣表示法的角度來看時間回轉 (Time-Reversal) 的整個實驗流程，實驗示意圖如圖 4.1 所示。在時間回轉實驗的第一個步驟：Forward process，假設我們在收發機上激發一  $E_0(\omega)$  的訊號，此時的  $E_0(\omega)$  是一向量，則我們會從收發機上收到  $R_0(\omega) = H(\omega)E_0(\omega)$  的訊號，再將接收到的訊號作時間回轉，而時間回轉在頻域上的響應即代表將訊號取共軛，因此  $R_0^*(\omega) = H^*(\omega)E_0^*(\omega)$ ，接著在時間回轉實驗的第二個步驟：Reverse process，我們必須將回轉後的訊號發射回空間中，我們將它表示成  $E_1^*(\omega) = R_0^*(\omega)$ ，而再次接收到的訊號便可以表示成 (4.4) 式，最後我們再作一次時間回轉的動作來將時間走向轉正，得到如 (4.5)：

$$R_1(\omega) = H(\omega)E_1^*(\omega) = H(\omega)H^*(\omega)E_0^*(\omega) \quad (4.4)$$

$$E_2(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)E_0(\omega) \quad (4.5)$$

由於收發機間的脈衝響應在理想狀態下是對稱的，即  $h_{ij}(t) = h_{ji}(t)$ ，所以  $H(\omega)$  是一對稱方陣，進而我們可以推得  $H^*(\omega)H(\omega)$  會是一厄米特 (Hermitian) 矩陣，其滿足的特

性是特徵值會是正值、特徵向量會彼此正交。同時， $H^*(\omega)H(\omega)$  代表的便是一般說的時間回轉運算子(Time Reversal Operator)。

由於散射場中包含了散射物體的資訊，因此實際上我們的 DORT 分析會根據上面的流程作一部份修改，前面討論的  $h_{ij}(t)$  是收發機間的脈衝響應，但由於散射物體的回波經常是很微弱的，因此我們若不將散射波獨立出來分析，很多散射場的資訊可能都會隱沒在大訊號當中，所以將散射場分離出來的動作，可以用(4.6)式來達到， $h_{total}(t)$  代表的是在包含散射物體時的脈衝響應， $h_{incident}(t)$  代表的是在不包含散射物體時的脈衝響應，若用  $h_{total}(t)$  或  $h_{incident}(t)$  來做脈衝響應的記錄，便是一般的 DORT 分析；但若用  $h_{scatter}(t)$  來分析脈衝響應，則我們稱它作散射場的脈衝響應，並重新表示為  $k_{ij}(t)$ ，其相對應的時間回轉運算子便是  $K^*(\omega)K(\omega)$ ，以下我們從物理上來解釋這個運算子的特徵值以及特徵向量代表的意義。

$$h_{scatter}(t) = h_{total}(t) - h_{incident}(t) \quad (4.6)$$

考慮(4.7)式，它代表的是激發  $E(\omega)$  時，單純散射場會供獻回收發機的訊號  $R(\omega)$  的矩陣表示式，在這個表示式中，入射場的供獻已被我們扣除了。接著，圖 4.2 代表的是我們用簡單的弧線來代表在收發機上激發的  $E_0(\omega)$  於時域上的時間先後順序，以下的分析都是將  $E_0(\omega)$  與經過完整的时间回轉程序後的訊號  $K^*(\omega)K(\omega)E_0(\omega)$  拿來作比較，圖 4.3 左右兩側代表的是在收發機上激發不同  $E_0$ 、 $E'_0$ ，經過完整的时间回轉程序後的波形比較，我們發現圖 3 中左側的訊號  $E_0$  與  $K^*KE_0$  的波形非常接近，這是因為原本  $E_0$  的分佈就是會讓訊號往散射物體 Target 1 位置處集中，因此所有的波都會集中在散射物體位置，然後再被它散射回來，因此得到了如此相似的分佈，但若收發機上的訊號分佈並非會往散射物體 Target 1 位置處集中，則可能情況便如圖 4.3 中右側所示， $E'_0$  與  $K^*KE'_0$  的波形差異很大。而圖 4.3 左側的中的  $E_0$  代表的其實就是時間回轉運算子  $K^*K$  的一個特徵向量，因此  $K^*KE_0$  才會保有與原本  $E_0$  一樣的分佈，而對於圖 4.3 右側我們也能將它解釋為因為  $E'_0$  並非  $K^*K$  的特徵向量，因此  $K^*KE'_0$  才無法保有與原本  $E'_0$  一樣的分

佈，同樣地，在多個散射物體時，我們也能用同樣的方法來分析它，這時很明顯地，特徵向量不會只有 1 個，而是會有和散射物體數目一樣多的特徵向量，如圖 4.4 左右兩側所示的  $V_1$ 、 $V_2$ ，分別代表時間回轉運算子中的兩個特徵向量，分別對應到散射物體 Target 1 及 Target 2。

$$R(\omega) = K(\omega)E(\omega) \quad (4.7)$$

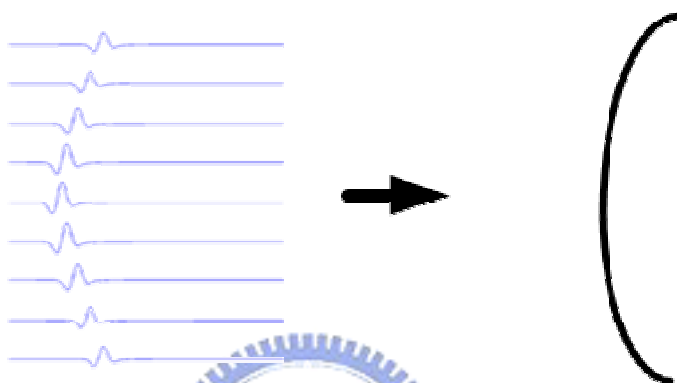


圖 4.2 用弧線表示不同時序的訊號在收發機上的分佈  $E_0$

有了以上的分析與解釋，我們可以瞭解當我們分析時間回轉運算子  $K^*K$  時，可以從顯著特徵值的數目來判斷空間中有多少個散射物體，而且每個特徵值對應到的特徵向量將造成特定的訊號分佈，這個訊號分佈便會如同圖 4.3 左側所示，自然地將波聚焦到散射物體的位置，從這裡我們又得到另一項 DORT 重要的優點，一旦我們分析得到了特徵向量的分佈，我們便可以用這個特徵向量來作散射物體位置的聚焦，而不需要像之前一樣，把 Forward process 中接收到的訊號回轉後再打回空間中，並且不同散射物體的資訊已經被分離到彼此正交的特徵向量中，我們可以根據需要個別分析它們，不再像以前一樣，都是作整體的探討。

關於寬頻訊號在 DORT 上的應用，我們將會在接下來 DORT 的擬擬中再做討論。

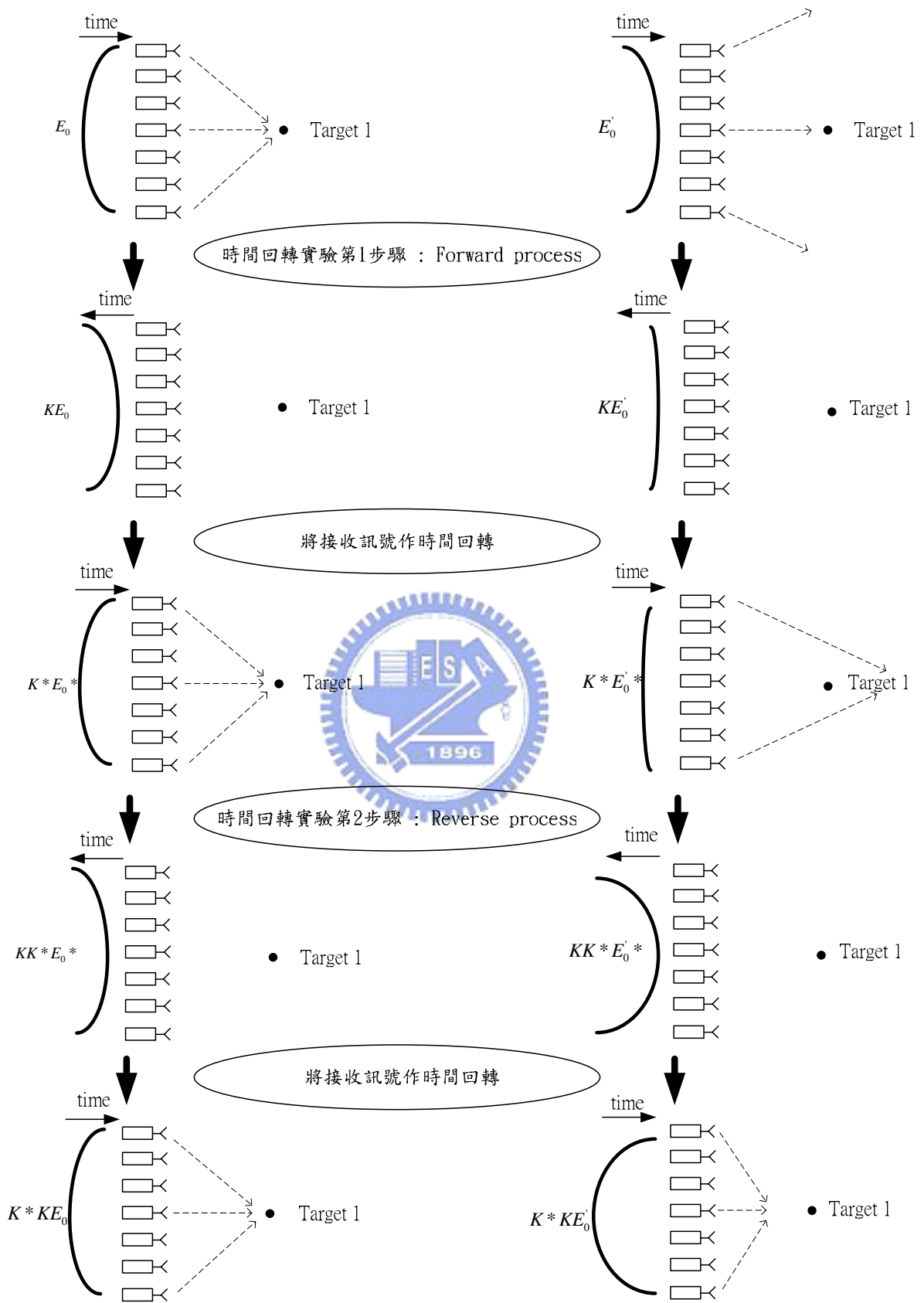


圖 4.3 激發訊號與經時間回轉流程後之訊號比較

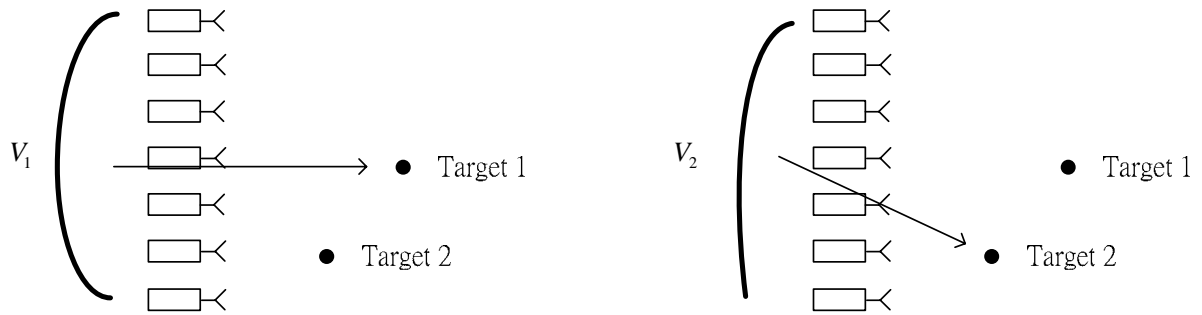


圖 4.4 兩個散射物體時的特徵向量分佈

### 4.3 分解時間回轉運算子(DORT)的模擬

我們同樣利用FDTD來作DORT的分析，首先必須由FDTD來產生散射場的脈衝響應矩陣  $K(\omega)$ ，由於  $K(\omega)$  的大小與收發機數目有關，假設收發機數目為15個，記錄當每一個收發機激發時，所有15個收發機接收到的訊號，完成之後變得到15x15的矩陣，這個步驟必須重複作兩次，第一次是作電場入射場( $E_{incident}$ )的紀錄，第二次是作電場全場( $E_{total}$ )的紀錄，接著是將全場扣掉入射場，則我們會得到15x15的散射場矩陣，但由於我們記錄的資料是時域上的電場值，因此散射場矩陣的每個元素都是t的函數，接著我們必須將每個元素都作富立業轉換(Fourier Transform)，完成之後我們便可以得到  $K(\omega)$ ，接下來便是計算出時間回轉運算子  $K^*(\omega)K(\omega)$ ，並分析其特徵值以及特徵向量，以下我們由由三個實驗來驗證DORT，4.3.1是一個未知物體的偵測，4.3.2是兩個未知物體的偵測，4.3.3是三個未知物體的偵測，三個未知物體的位置分別為(150, 250)、(250, 150)、(200, 200)，剛好與收發機的距離為近、中、遠的關係。以下的模擬都是在假設在真空中進行，如圖4.5(a)~圖4.5(c)所示，並且收發機數目皆為15個。

以下將展示的特徵值，我們不同以往的 DORT[28, 29]僅針對單一頻率作分析，我們決定將整個 UWB 波源包含的頻譜範圍都考慮進來，因此我們會看到特徵值對於頻率(f)的分佈曲線。至於得到一個寬頻的特徵值分佈後，DORT 的精神是每個特徵值會對應到一個特徵向量，特徵向量在這裡便是 15 個收發機上訊號的陣幅、相位分佈，如何得到一



個相對應的時域訊號來對特定的待測物位置聚焦，在這裡我們提供一個方法，以圖 4.7 的特徵值為例來說明，由於第 1 大的特徵值在 0~20GHz 的範圍內都有顯著的特徵值，因此我們決定用我們的 UWB 脈波當基底，乘上每個頻率點相對應的特徵向量，如(4.8) 式所示， $pul(f)$ 代表 UWB 脈波的富立業轉換， $ev_i(f)$  是代表特徵向量中第  $i$  個位置的值隨頻率的變化，最後再將  $s_i(f)$  作反富立業轉換得到第  $i$  個收發機上的時域訊號分佈，至於使用 UWB 脈波當基底的想法來自於不同頻率成份的特徵向量都是會向空間中有散射物體的位置聚焦的，但這些振幅與相位資訊必須載波在特定訊號上，從我們實驗角度來看，使用我們的測試訊號 UWB 脈波是最簡單又直接的，但我們強調，這個方法或許不是最正確的，但由於目前利用寬頻訊號作 DORT 的研究並不多，所以我們提出這樣的一種方式來產生時域訊號。

$$s_i(f) = pul(f) \cdot ev_i(f) \quad i=1 \sim 15 \quad (4.8)$$

$$s_i(t) = pul(t) \otimes ev_i(t) \quad i=1 \sim 15 \quad (4.9)$$



### 4.3.1 一個未知物體的 DORT 偵測

圖 4.6 是我們依序發射 UWB 脈波後，所有收發機接收到的散射場，幾乎所有的波形分佈都很相似，可以很快地看出來是來自同一位置的散射物體，接著作完 DORT 分析後，圖 4.7 是前 4 大特徵值的頻譜分佈，我們可以看到僅有一個顯著的特徵值發生，因此我們便判斷空間中應該只有一個散射物體，而利用我們在(4.8)式中提到的方法所求得的時域訊號如圖 4.8 所示，左上角代表的是與第 1 大特徵值有關的時域訊號，將它打回空間中便可得到如圖 4.9 的聚焦現象產生，其位置正好就是 Target 1 的位置。

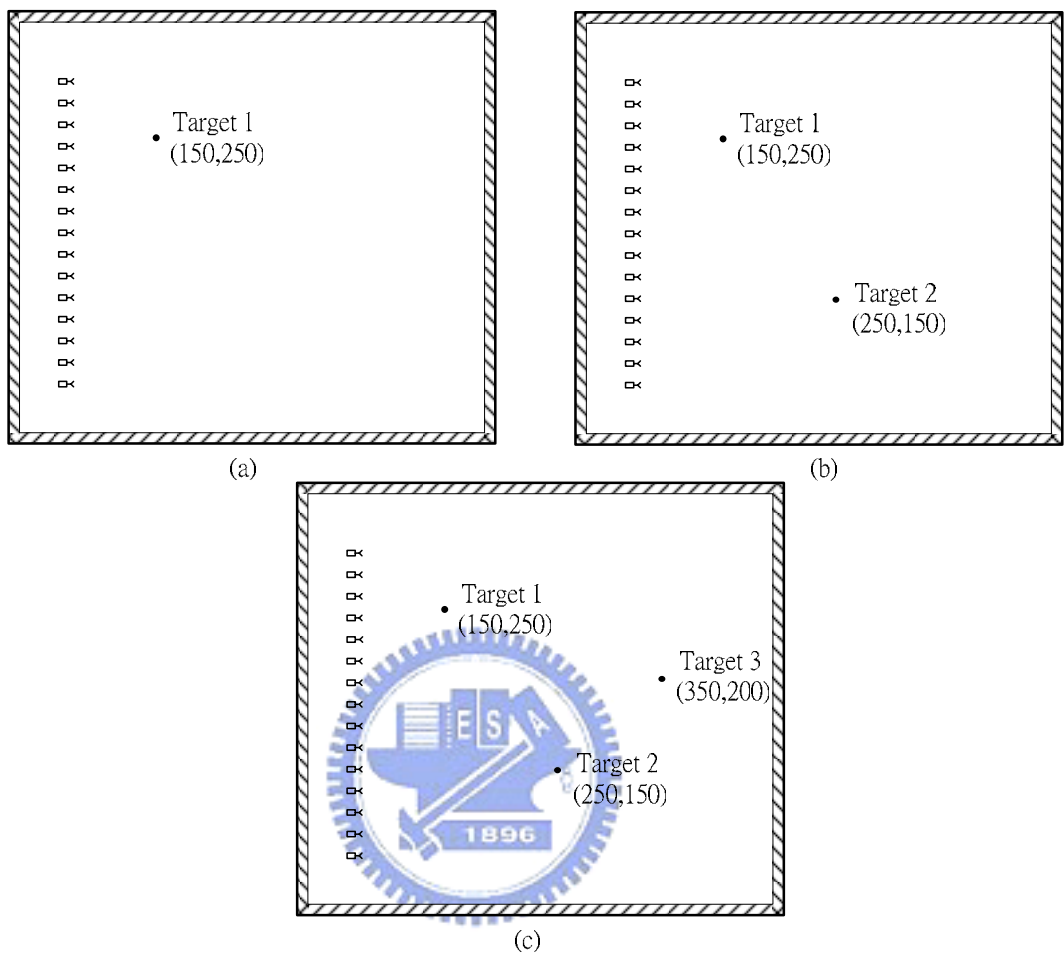


圖 4.5 DORT 模擬空間配置圖 (a) 一個未知物體的 DORT 偵測 (b) 兩個未知物體的 DORT 偵測 (c) 三個未知物體的 DORT 偵測



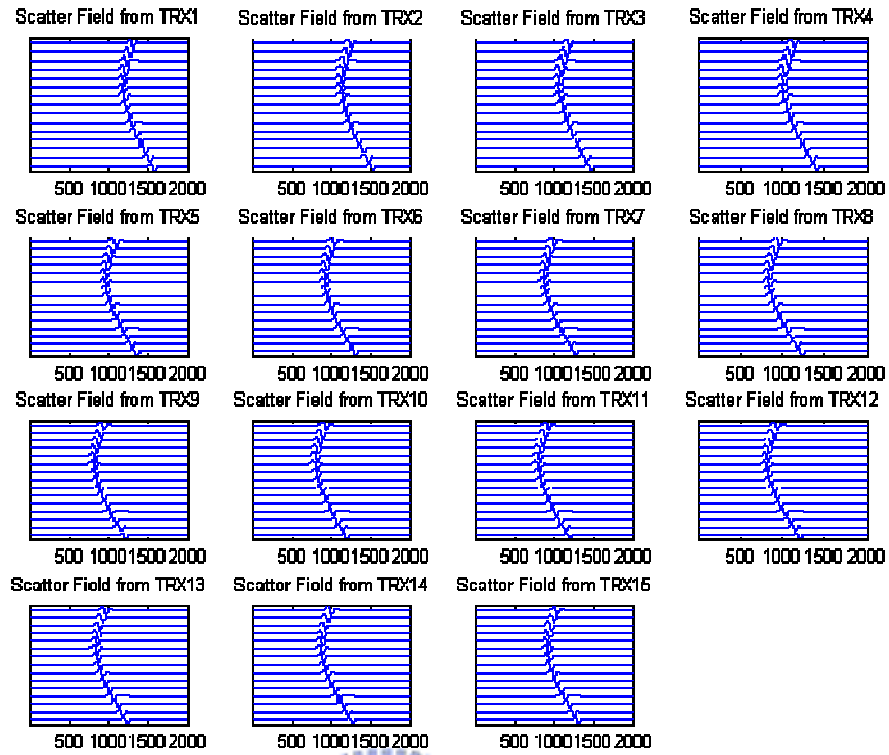


圖 4.6 一個未知物體的 DORT 偵測時所有的時域散射場

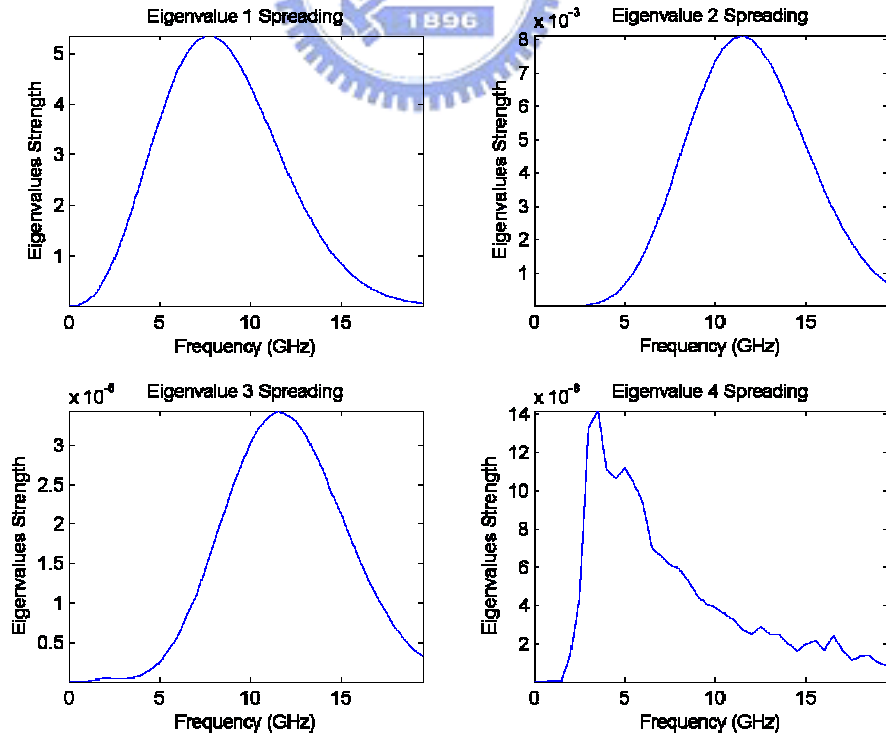


圖 4.7 一個未知物體的 DORT 偵測時特徵值隨頻率的分佈圖

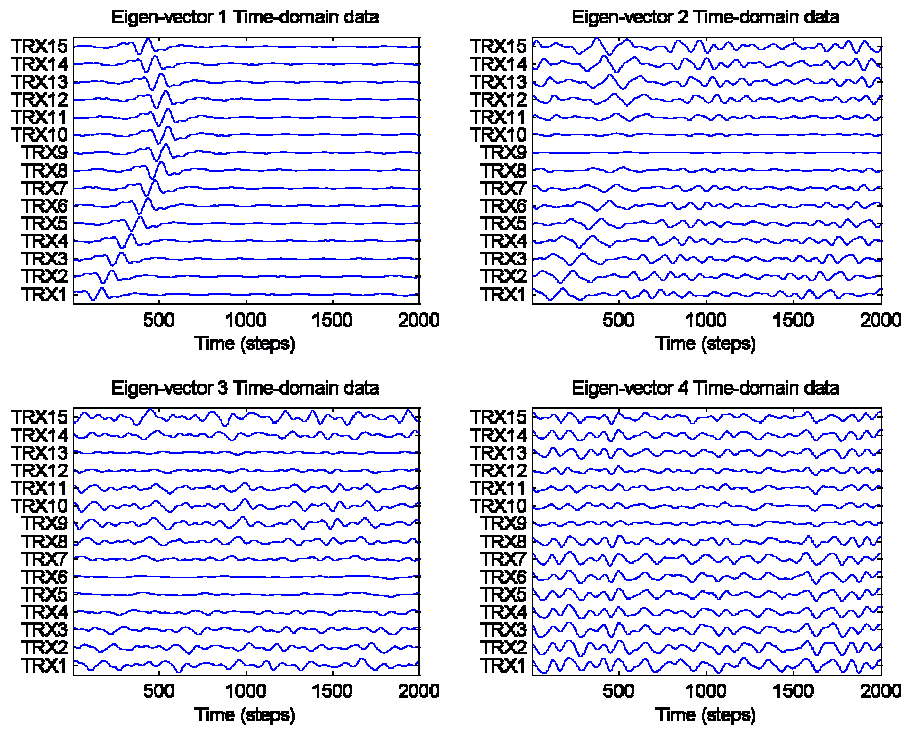


圖 4.8 一個未知物體的 DORT 偵測時由特徵向量得到的時域訊號

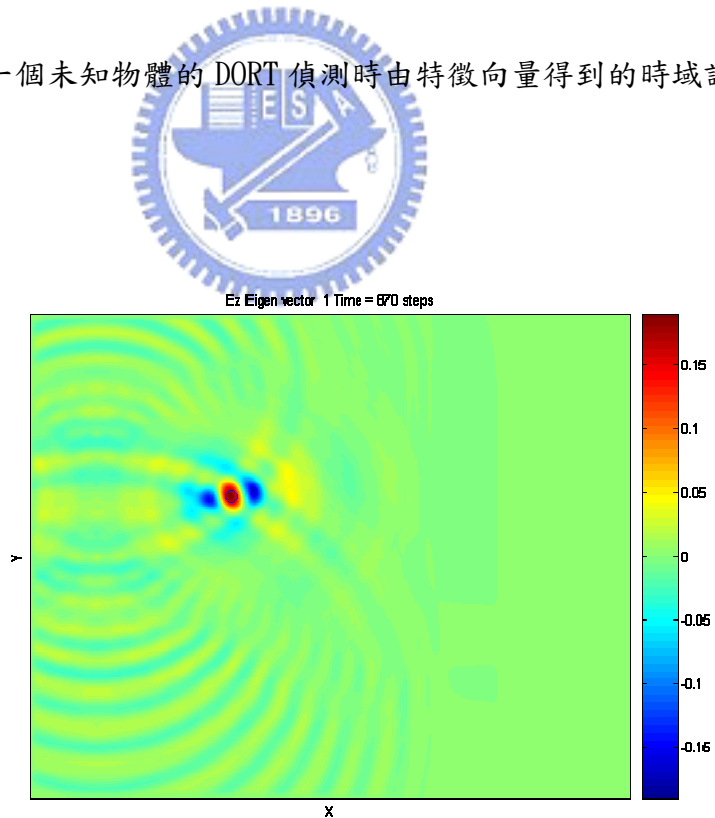


圖 4.9 一個未知物體的 DORT 偵測時的 Target 1 聚焦

### 4.3.2 兩個未知物體的 DORT 偵測

圖 4.10 是我們依序發射 UWB 脈波後，所有收發機接收到的散射場，我們可以看到兩條明顯的回波弧線，可以很快地看出來是來自不同位置的散射物體，接著作完 DORT 分析後，圖 4.11 是前 4 大特徵值的頻譜分佈，我們可以看到有 2 個顯著的特徵值發生，因此我們便判斷空間中應該會有兩個散射物體，同樣地利用(4.8)式中提到的方法求得的時域訊號如圖 4.12 所示，左上角代表的是與第一大特徵值有關的時域訊號，右上角代表的是與第二大特徵值有關的時域訊號，將它們打回空間中便可得到如圖 4.13 的聚焦現象產生。

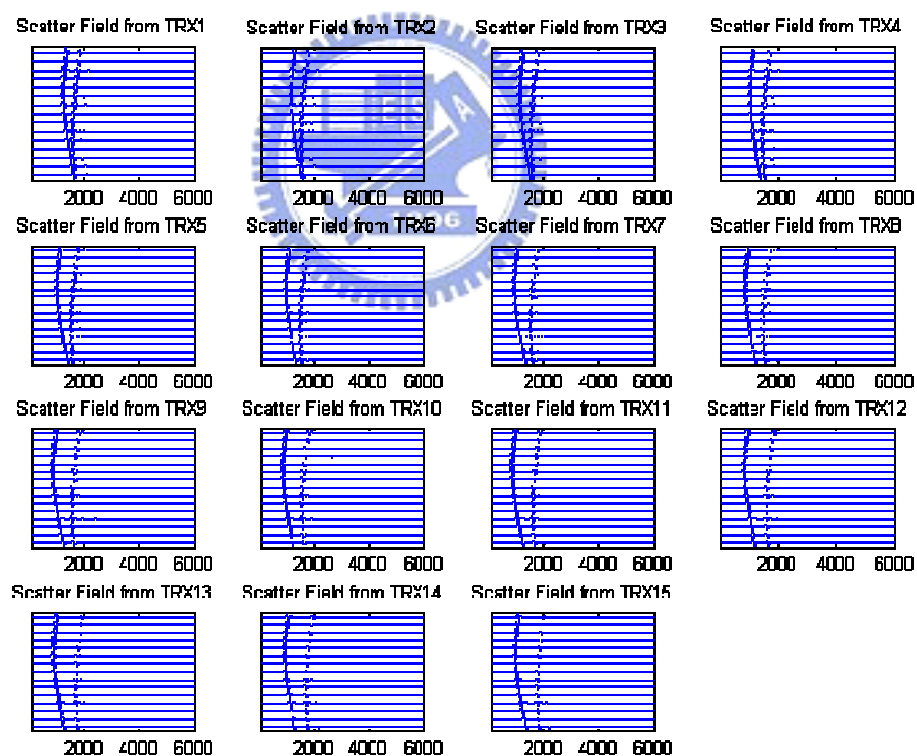


圖 4.10 兩個未知物體的 DORT 偵測時所有的時域散射場

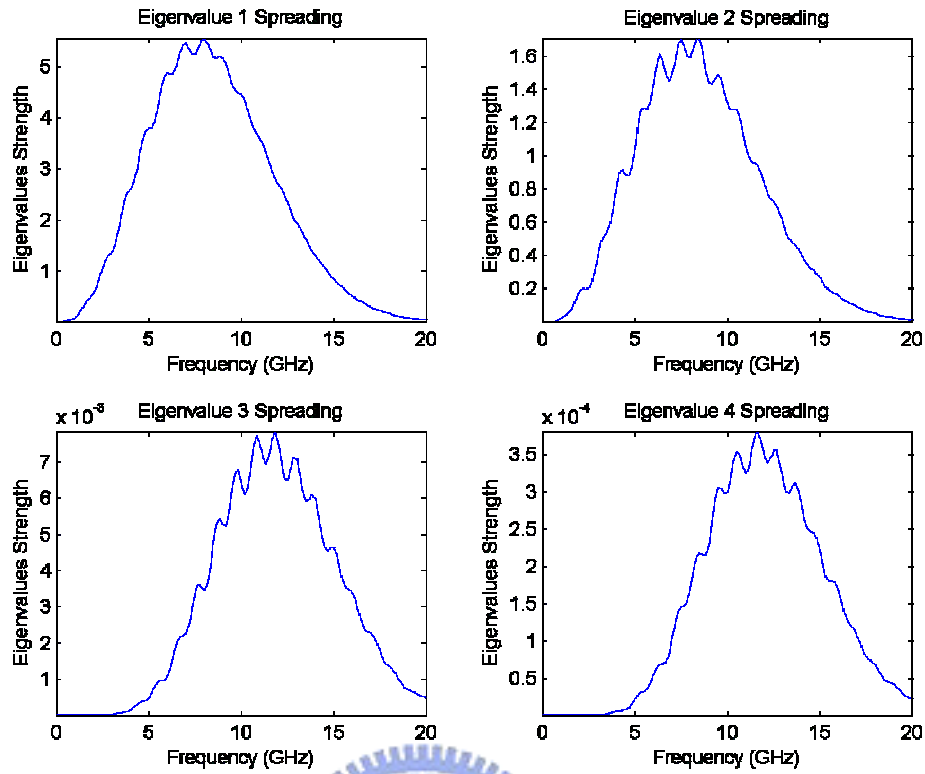


圖 4.11 兩個未知物體的 DORT 偵測時特徵值隨頻率的分佈圖

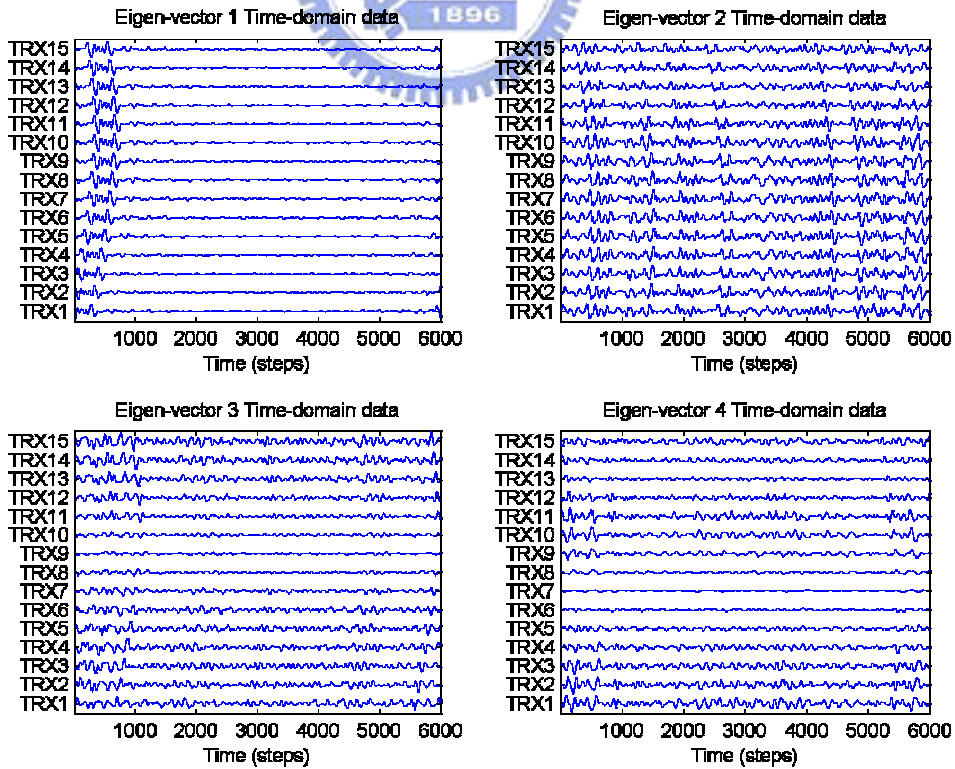


圖 4.12 兩個未知物體的 DORT 偵測時由特徵向量得到的時域訊號

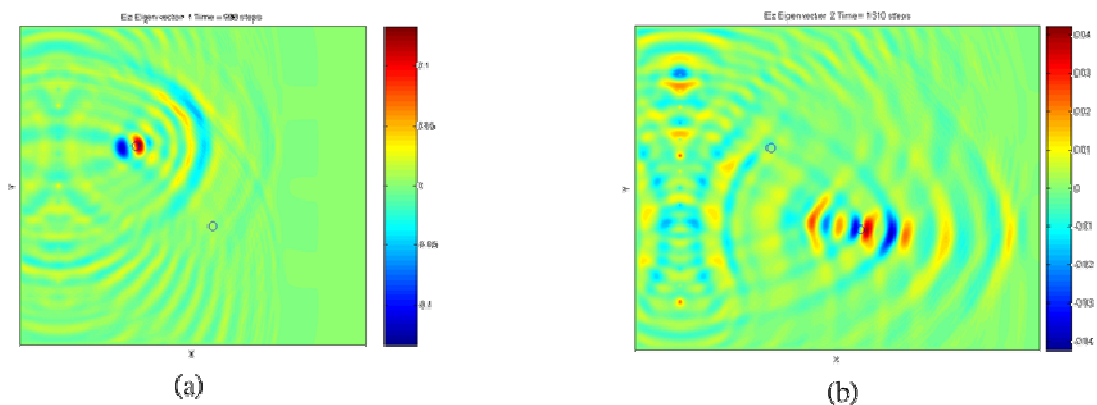


圖 4.13 兩個未知物體的 DORT 偵測時聚焦圖 (a) 第一大特徵向量對應到的聚焦 (b) 第二大特徵向量對應到的聚焦

### 4.3.3 三個未知物體的 DORT 偵測

圖 4.14 是我們依序發射 UWB 脈波後，所有收發機接收到的散射場，我們可以看到三條回波弧線，可以判斷可能是來自三個不同位置的散射物體，接著作完 DORT 分析後，圖 4.15 是前 4 大特徵值的頻譜分佈，我們可以看到有 3 個顯著的特徵值發生，因此我們便判斷空間中應該會有三個散射物體，至於頻譜上凹凸不平的情況則是來自散射物體間的多次散射，造成了一些鏈波訊號，進而影響了頻譜。而利用我們前面描述的方法所求得的時域訊號如圖 4.16 所示，左上角代表的是與第一大特徵值有關的時域訊號，右上角代表的是與第二大特徵值有關的時域訊號，左下角代表的是與第三大特徵值有關的時域訊號，將它們打回空間中便可得到如圖 4.17 中的聚焦現象產生。

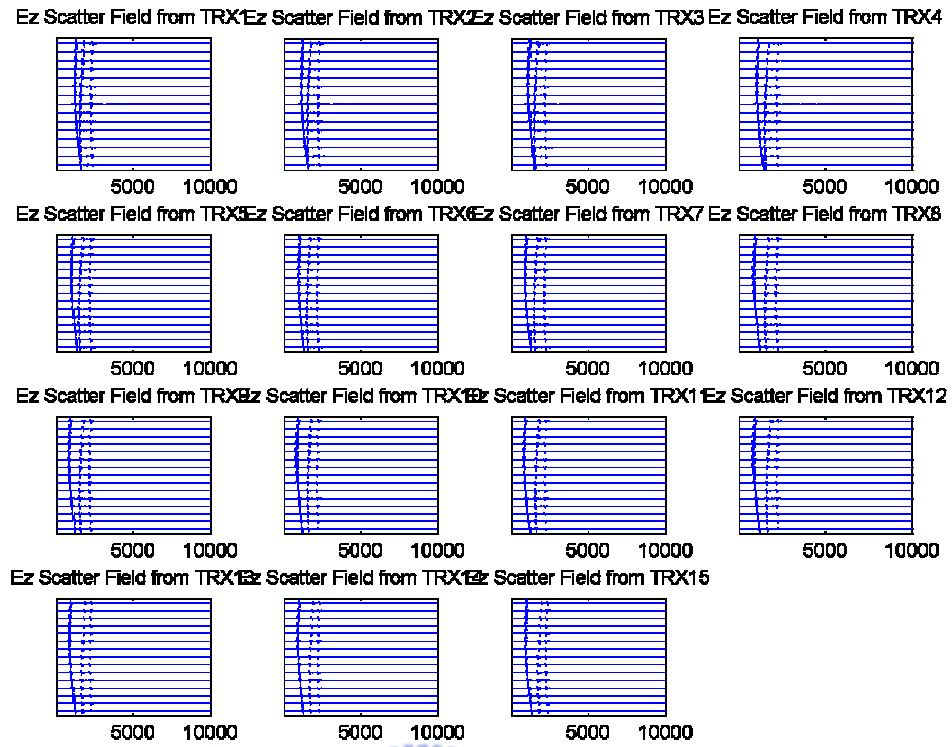


圖 4.14 三個未知物體的 DORT 偵測時所有的時域散射場

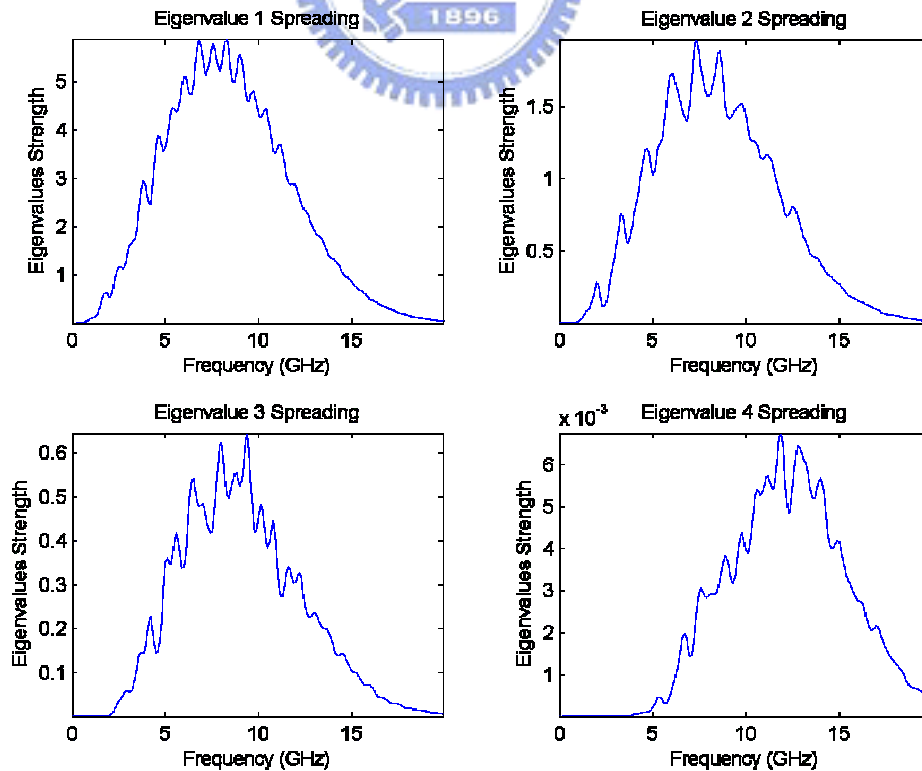


圖 4.15 三個未知物體的 DORT 偵測時特徵值隨頻率的分佈圖



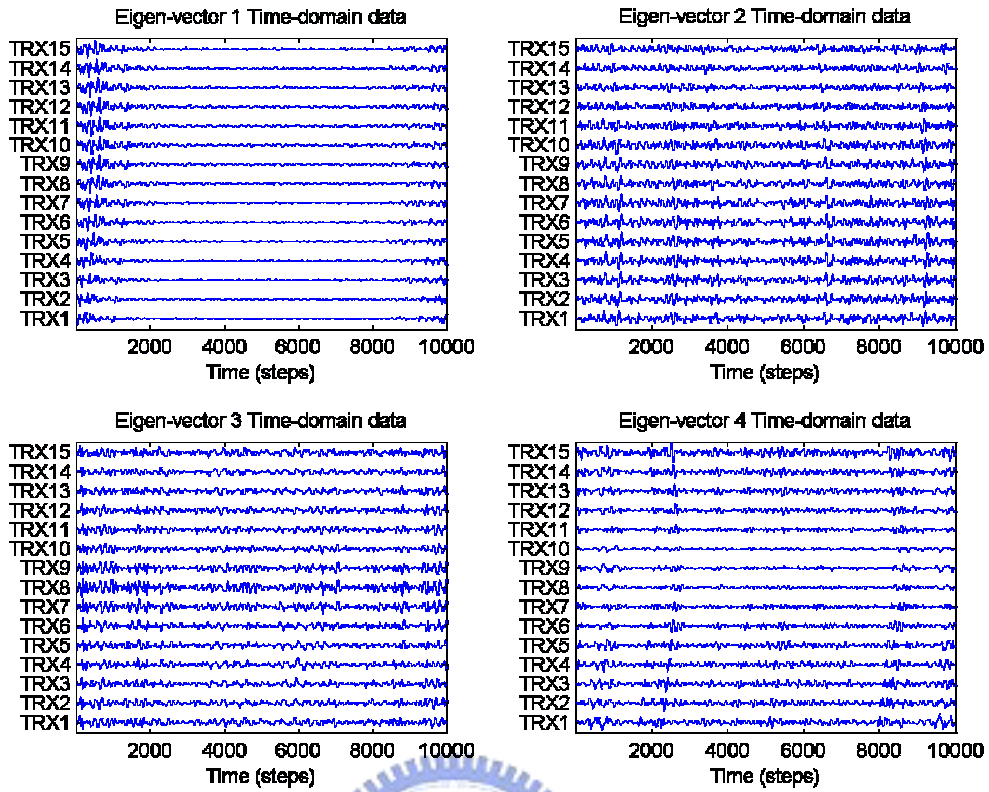


圖 4.16 三個未知物體的 DORT 偵測時由特徵向量得到的時域訊號

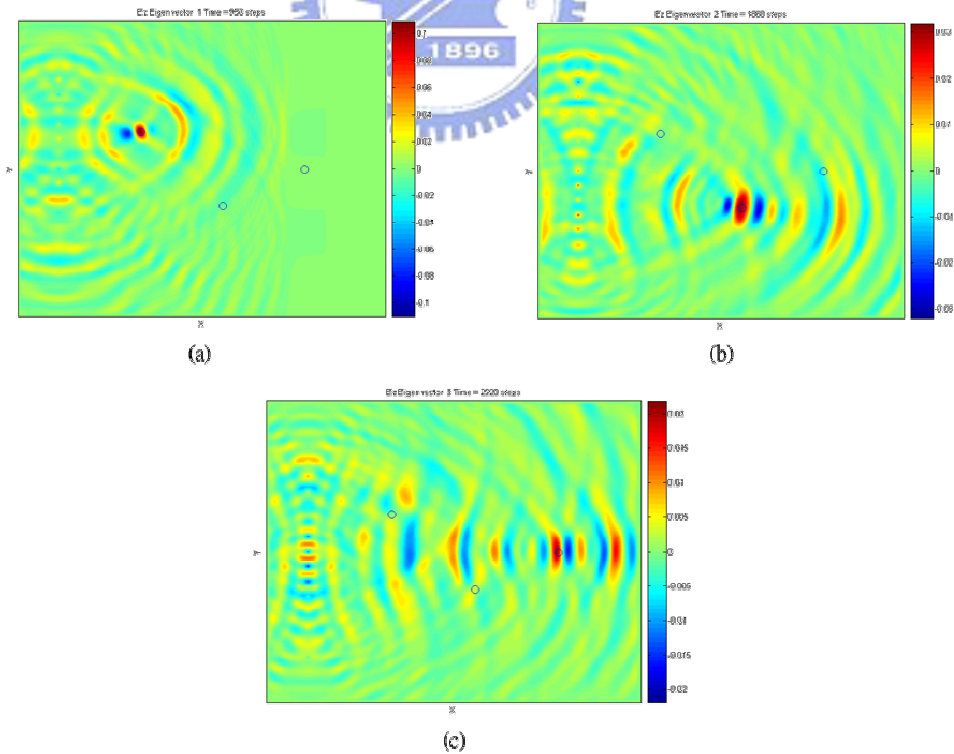


圖 4.17 三個未知物體的 DORT 偵測時聚焦圖 (a) 第一大特徵向量對應到的聚焦(b) 第二大特徵向量對應到的聚焦(c) 第三大特徵向量對應到的聚焦

## 4.4 結論

以上的三個實驗我們可以看到從 DORT 來分析空間中有多少個散射物體是很方便的，但當偵測物增加時，由於多重散射會影響頻譜的分佈變成凹凸不平的形狀，但並不影響特徵值大小的判讀，至於我們提出的利用 UWB 脈波與特徵向量來生時域訊號的方法，似乎只在一個物體時能得到漂亮的時域波形(圖 4.8 左上角)，至於多個物體時，用這個方法產生出來的時域訊號便越來越混亂亂，如圖 4.12、圖 4.16 所示，但是目前為止的三個實驗裡，由寬頻特徵向量產生的時域波形它都確實傳播到散射物體所在位置，如圖 4.17 所示，因此我們相信只要再稍微修改時域波形的產生方式，應該可以得到更好的聚焦效果。因此改善我們所提出的(4.8)式及(4.9)式，進而讓產生的時域訊號僅發生一次明顯的聚焦，便是未來 DORT 研究的重點。

