

章節目錄

第一章 序論	1
第二章 基本原理	3
2.1 材料的光學特性描述	3
2.2 Stoke vector 與 Mueller matrix	4
2.3 橢圓延遲片	8
2.4 TN-LC 表示式	10
2.5 含方位角之 TN-LC 表示式	12
第三章 實驗步驟	13
3.1 校正偏極片與延遲片之夾角	13
3.2 延遲片量測技術原理	14
3.3 TN-LC 量測技術原理	17
3.4 TN-LC 液晶參數與橢圓參數之等效	19
第四章 實驗結果與討論	21
4.1 橢圓延遲片之量測結果	21
4.2 TN-LC 量測結果	22
4.3 TN-LC 液晶參數與橢圓參數之等效	24
第五章 結論	28
附錄	30
附錄一 推導式 (3_10)	30
附錄一 推導式 (3_17) 及 (3_18) 及 (3_19)	32
參考文獻	34

表目錄

表 1	光學特性的定義	5
表 2	常引用之偏極態	6
表 3	理想偏振矩陣模型	7
表 4	Quartz 之橢圓參數量測結果	21
表 5	TN-LC 之液晶參數量測結果	23
表 6	TN-LC 之橢圓參數量測結果	25

圖目錄

圖 2__1	橢圓偏極態示意圖	4
圖 2__2	扭轉型液晶的示意圖	10
圖 3__1	延遲片量測裝置圖	14
圖 4__1	TN-LC 之穿透光強度 $I(P,A)$ vs 析光角 A 分佈圖	22
圖 4__2	以液晶參數表示 TN-LC 之穿透光強度 $I(P,A)$ vs 析光角 A 分佈圖	26
圖 4__3	以橢圓參數表示 TN-LC 之穿透光強度 $I(P,A)$ vs 析光角 A 分佈圖	26+
圖 4__4	將圖 (4_2) 與圖 (4_3) 合併之對照圖	27

第一章 緒論

偏極光之研究，最早是始於丹麥科學家 Bartholinus 於 1669 年發現了光在方解石晶體中之雙折射現象。於 1690 年德國科學家 Huygens 發現光之偏振現象；1852 年，Stoke 利用四個參數 Stoke polarization parameters 來描述光的偏振態，即 Stoke vector；1940 年代初，Mueller 以 Stoke vector 為基礎發展一套數學，用以表示偏極光與偏極元件之關係，即為 Mueller matrix calculus；約在同時，Jones 發展出較簡單但無法同時涵蓋線偏與圓偏的運算法，即為 Jones matrix calculus。至此，偏光理論趨於成熟。

利用已知偏振態之偏極光入射至一待測物，經由量測找出偏振態變化，可計算出此待測物之光學性質，此方法稱為橢圓偏極術 (Ellipsometry)。本論文乃利用穿透式橢圓偏極術 (Transmission Ellipsometry)，進行實驗量測，而此法又稱偏光儀 (Polarimeter)。欲建立精確之偏光儀量測系統，則各種偏光元件之校正的工作變不可省略。本論文最主要之目的，就是在延遲片的性質上做探討。

一般市售的延遲片 (retarder) 多屬線性 (linear retarder)，並將製成的材料均視為線性雙折射材料 (linear birefringence)，如雲母及石英。本實驗室在 1991[1]年就開始發展一偏光儀以量測延遲片的光軸及其相位延遲，理論上雙折射晶體的光軸的位置不應隨量測環境而有所不同，但 1995 年洪振盛[2]發現石英 1/4 補波片在不同偏極態的入射光源下 (偏光角 $P= 45^\circ$ 及 -45°) 所量的光軸及相位均不相同，且遠超過量測誤差。經詳查文獻 [3]對石英的描述，雖然當入射角垂直於光軸，其原本具有的旋光特性依然有些許存在 (當入射光平行於光軸時，石英僅有旋光性，即圓性雙折射-circular birefringence)。1996 年林志佳[4]即開始將石英的旋光特性加以研究，他將所有的延遲片當成橢圓延遲片 (elliptical retarder)，並用三個亮度量法分別在各偏光角下量出雲母及石英 1/4 補波片的光軸及相位延遲，而所量結果一致，同時證明了石英的些許的旋光特性及量出了其橢圓率 (ellipticity angle)。

2001 年林肇廉[5]以一光彈調制式偏光儀量出了一扭轉向列型液晶 (TN-LC) [6]的扭

轉角及其相位延遲，又知 TN-LC 非純線性雙折射，故興起將其視為橢圓延遲片的研究動機。

首先應該感謝 Mathematica 套裝軟體的方便，使我可以在有限的時間內算出各物理模式下的亮度分布。本研究將 TN-LC 用以下兩種模式分析：

- (a) 小的橢球液晶分子由底部扭轉的物理模式：在這個模式中的物理參數分別為，扭角 (twisted angle) ϕ 、無扭轉時之相位延遲 (phase retardation) Γ 及匹配角 (rubbing angle) C ，習慣上我們會以 χ 來表示 Γ ，其關係為 $\chi = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$ 。
- (b) 橢圓延遲片：在這個模式中的物理參數為，光軸偏光角 θ ，橢圓率 ϵ 及相位延遲 Γ 。

林肇廉根據傳統的方式定 TN-LC 的匹配角，但同時量出扭角及相位延遲，本實驗則利用三亮度方式先定偏光片及析光片的偏光角，再將 TN-LC 放在偏光片及析光片間量出以上的各參數，即 ϕ 、 Γ 及匹配角 C ，為了證明所量出的確是匹配角，故意旋轉 TN-LC 一定角再量其匹配角發現其結果正如預期旋轉同定角。本研究除了可以同時量 TN-LC 的匹配角、 ϕ 及 Γ 外並量出其等效於橢圓延遲片上之光軸的位置、橢圓率及相位延遲，文章最後也會將此兩模式的相位延遲加以比較。

由於本研究藉助於 Mathematica 很多，故將此複雜的計算過程中常用的指令用例子陳述在文中並將詳細運算過程全部放在附錄中。

第二章 基本原理

2.1 材料的光學特性描述：

廣義的折射率可以表示為 $N = n - i \cdot k$ ，所以沿 z 方向傳播的光波穿透折射率為 N 的材料，其波方程計算如下：

$$\begin{aligned} E(z) &= E_0 e^{i(\omega t - k_0 \cdot N \cdot z)} \\ &= E_0 e^{i(\omega t - k_0(n - i \cdot k) \cdot z)} \\ &= E_0 e^{-k_0 \cdot k \cdot z} \cdot e^{i[\omega t - k_0 \cdot n \cdot z]} \end{aligned}$$

所以 $e^{-k_0 \cdot k \cdot z}$ 造成穿透光的電場振幅縮小，也就是材料的吸收特性，而 $e^{i[\omega t - k_0 \cdot n \cdot z]}$ 則表示相位的延遲。不同異向性材料（Anisotropic Material）對不同的偏極態有不同的吸收特性及相位延遲，根據其特徵態將其光學特性描述如表 1 所示。

表 1: 光學特性的定義

	簡稱	說明
Linear Dichroism	LD	物質對兩正交的線性偏極光有不同吸收特性，一般稱為線偏吸收特性。
Linear Birefringence	LB	線性偏極光在物質中行進，因感受不同的折射率造成速度不同，一般稱為線性延遲特性。
Circular Dichroism	CD	物質對兩正交的左、右旋圓偏極光有不同吸收特性，一般稱為圓偏吸收特性。
Circular Birefringence	CB	左、右旋圓偏極光在物質中行進，因感受不同的折射率造成速度不同，一般稱為旋光特性。
Elliptical Dichroism	ED	物質對兩正交的左、右旋橢圓偏極光有不同吸收特性，一般稱為橢圓偏吸收特性。
Elliptical Birefringence	EB	左、右旋橢圓偏極光在物質中行進，因感受不同的折射率造成速度不同，一般稱為橢圓延遲特性。 [7]

2.2 Stokes vector 與 Mueller matrix

2.2.1 Stokes vector

一般在光學的書中,總是以 Jones Vector 來表示光的偏極態,但在本論文中我們以 Stokes vector 來表示光的偏極態, 假設一偏極態之 Jones Vector 表示如下:

$$J(\text{Jones_Vector}) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

則其 Stokes vector 定義如下

$$S(\text{Stokes_Vector}) = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2_1)$$

$$S_0 = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \quad (2_2)$$

$$S_1 = \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle \quad (2_3)$$

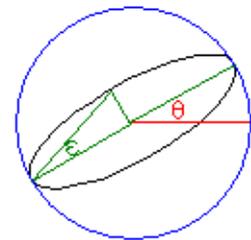
$$S_2 = \langle 2E_x E_y \cos \delta \rangle = \langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_y^* E_x \rangle \quad (2_4)$$

$$S_3 = \langle 2E_x E_y \sin \delta \rangle = i \left[\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_y^* E_x \rangle \right] \quad (2_5)$$

一個橢圓率 ε 之正橢圓偏極光的 Jones Vector 可表示為

$$\begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{pmatrix}$$

如圖 (2_1), 一個方位角改變之橢圓偏極光的 Jones Vector 可表示為



$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = R(-\theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varepsilon - j \sin \theta \sin \varepsilon \\ \sin \theta \cos \varepsilon + j \cos \theta \sin \varepsilon \end{pmatrix}$$

圖 (2_1) 橢圓偏極態示意圖

今將上式轉成 Stokes vector, 考慮一般的部分偏極光的偏光率 P, 則廣義的橢圓偏極光可用 Stokes vector 表示:

$$S = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ P \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

其中 I_0 : 光波的總亮度 (Intensity)
 P : 偏光率 (Degree of Polarization)
 θ : 橢圓偏極光的方位角 (Orientation angle)
 ε : 橢圓率 (Ellipticity Angle)

由圖 (2_1) 可看出，

當 $\theta = 0$ 時，此偏振光為一個線偏振態。

當 $\theta = \pi/4$ 時，此偏振光為一個圓偏振態。

當 θ 為任意值時，此偏振光皆可視為一個橢圓偏振態。

表 2: 常引用的偏極態

	Jones Vector	Stokes vector
橢圓偏極光	$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varepsilon - j \sin \theta \sin \varepsilon \\ \sin \theta \cos \varepsilon + j \cos \theta \sin \varepsilon \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}$
X 方向偏極光 $\theta = 0$ $\varepsilon = 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Y 方向偏極光 $\theta = 0$ $\varepsilon = \pi/2$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
左旋偏極光 $\theta = \pi/4$ $\varepsilon = -\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
右旋偏極光 $\theta = \pi/4$ $\varepsilon = \pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.2.2 Mueller matrix

利用 Stokes vector 作為偏極態的表示方式時，其偏光元件之數學表示式就必須以 Mueller matrix 表之，因此本節最主要的目的就是寫出 Jones matrix 與 Mueller matrix 兩者之間之關係。

若 Jones matrix 如下所示：

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

則 Mueller matrix 可以用以下的通式表示

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_{11} * J_{11} + J_{12} * J_{12} & J_{11} * J_{11} - J_{12} * J_{12} & J_{11} * J_{12} + J_{12} * J_{11} & i \begin{pmatrix} J_{11} * J_{12} - J_{12} * J_{11} \\ + J_{21} * J_{22} - J_{22} * J_{21} \end{pmatrix} \\ J_{11} * J_{11} + J_{12} * J_{12} & J_{11} * J_{11} - J_{12} * J_{12} & J_{12} * J_{11} + J_{11} * J_{12} & i \begin{pmatrix} J_{11} * J_{12} + J_{22} * J_{21} \\ - J_{21} * J_{22} - J_{12} * J_{11} \end{pmatrix} \\ J_{11} * J_{21} + J_{21} * J_{11} & J_{11} * J_{21} - J_{12} * J_{22} & J_{11} * J_{22} + J_{21} * J_{12} & i \begin{pmatrix} J_{11} * J_{22} + J_{21} * J_{12} \\ - J_{21} * J_{21} - J_{22} * J_{11} \end{pmatrix} \\ i \begin{pmatrix} J_{21} * J_{11} + J_{22} * J_{12} \\ - J_{11} * J_{21} - J_{12} * J_{22} \end{pmatrix} & i \begin{pmatrix} J_{21} * J_{11} + J_{12} * J_{22} \\ - J_{11} * J_{21} - J_{22} * J_{12} \end{pmatrix} & i \begin{pmatrix} J_{21} * J_{12} + J_{22} * J_{11} \\ - J_{11} * J_{22} - J_{12} * J_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} J_{22} * J_{11} + J_{12} * J_{22} \\ - J_{12} * J_{21} - J_{21} * J_{12} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

表 3: 理想偏振吸收的矩陣模型

種類	直角座標的 Jones matrix	左右旋座標的 Jones matrix	直角座標的 Mueller matrix
LD	$\begin{bmatrix} e^{-\frac{LD}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{LD}{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cosh \frac{LD}{2} & -\sinh \frac{LD}{2} \\ -\sinh \frac{LD}{2} & \cosh \frac{LD}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cosh LD & -\sinh LD & 0 & 0 \\ -\sinh LD & \cosh LD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
LB	$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{LB}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{LB}{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \frac{LB}{2} & -i \cdot \sin \frac{LB}{2} \\ -i \cdot \sin \frac{LB}{2} & \cos \frac{LB}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos LB & -\sin LB \\ 0 & 0 & \sin LB & \cos LB \end{bmatrix}$
CD	$\begin{bmatrix} \cosh \frac{CD}{2} & -i \cdot \sinh \frac{CD}{2} \\ i \cdot \sinh \frac{CD}{2} & \cosh \frac{CD}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-\frac{CD}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{CD}{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cosh CD & 0 & 0 & \sinh CD \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh CD & 0 & 0 & \cosh CD \end{bmatrix}$
CB	$\begin{bmatrix} \cos \frac{CB}{2} & \sin \frac{CB}{2} \\ -\sin \frac{CB}{2} & \cos \frac{CB}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{CB}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{CB}{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos CB & \sin CB & 0 \\ 0 & -\sin CB & \cos CB & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EB 為論文討論重點，其表示式將於 2.3 節討論之。

由表 3，我們可看出幾個 Mueller matrix 的優點，也是本實驗採用 Mueller matrix 的主要原因。

- (1) Jones matrix 會因座標不同，而有不同型式，但 Mueller matrix 的型式卻固定不變。
- (2) Mueller matrix 各個元素皆為實數，方便矩陣元素間乘積之運算。
- (3) 配合 Stokes vector 可方便地表示部分偏振態。
- (4) Mueller matrix 與 Stokes vector 乘積之後，其第一行第一列之值即為光強度值。

2.3 橢圓延遲片

首先我們先定義一個參數 $X = E_x / E_y$ 用以表示一個光源之偏極態。

若一光學元件其特徵偏極態 (X_{e1}, X_{e2}) 相互正交且對應之特徵值分別為 $(e^{i\delta/2}, e^{-i\delta/2})$ ，則稱此延遲片為橢圓延遲片[8]，而為此偏極態進入橢圓延遲片後造成的相位差。我們先以 Jones matrix 表之，

如圖 (2_1)，設橢圓延遲片特徵偏極態

$$\begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varepsilon - j \sin\theta \sin\varepsilon \\ \sin\theta \cos\varepsilon + j \cos\theta \sin\varepsilon \end{pmatrix},$$

則其正交向量為

$$\begin{pmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \cos\varepsilon + j \cos\theta \sin\varepsilon \\ \cos\theta \cos\varepsilon + j \sin\theta \sin\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } X = \frac{E_{x1}}{E_{y1}} = \frac{\tan\theta + j \tan\varepsilon}{1 - j \tan\theta \tan\varepsilon},$$

$$X^* = \frac{E_{x2}}{E_{y2}}$$

則此橢圓延遲片的表示式為

$$(1 - \phi XX^*)^{-1} \begin{pmatrix} e^{j\delta/2} + XX^* e^{-j\delta/2} & 2jX^* \sin \frac{\delta}{2} \\ 2jX \sin \frac{\delta}{2} & e^{-j\delta/2} + XX^* e^{j\delta/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + j \cos 2\varepsilon \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta & \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\varepsilon + j \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \\ -\sin \frac{\delta}{2} \sin 2\varepsilon + j \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\varepsilon \sin 2\theta & \cos \frac{\delta}{2} - j \cos 2\varepsilon \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

將 Jones matrix 轉成 Mueller matrix：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}$$

其中

(2_6)

$$\begin{aligned}m_{22} &= \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} (\cos^2 2\varepsilon \cos 4\theta - \sin^2 2\varepsilon) \\m_{23} &= \sin \delta \sin 2\varepsilon + \cos^2 2\varepsilon \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\theta \\m_{24} &= -\cos 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\varepsilon + \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \sin \delta \\m_{32} &= -\sin \delta \sin 2\varepsilon + \cos^2 2\varepsilon \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\theta \\m_{33} &= \cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\delta}{2} (\cos^2 2\varepsilon \cos 4\theta + \sin^2 2\varepsilon) \\m_{34} &= -\cos 2\varepsilon \cos 2\theta \sin \delta - \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\varepsilon \sin 2\theta \\m_{42} &= -\cos 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\varepsilon - \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \sin \delta \\m_{43} &= \cos 2\varepsilon \cos 2\theta \sin \delta - \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\varepsilon \sin 2\theta \\m_{44} &= \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cos 4\varepsilon \sin^2 \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

為驗證 (2_6) 之正確性，將 分別以 0 及 $\text{Pi}/4$ 代入，看看是否可得一般線性延遲片與旋轉器之表示式。

由 (2_6) 中，將 (,) 以 (0,0) 代入，可得

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$$

(2_7)

此即為線性延遲片之 Mueller Matrix 表示式。

由 (2_6) 中，將 (,) 以 ($\text{Pi}/4,0$) 代入，可得

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2_8)

由此結果不難發現，此即為旋轉器之 Mueller Matrix 表示式。

2-4 TN-LC 表示式

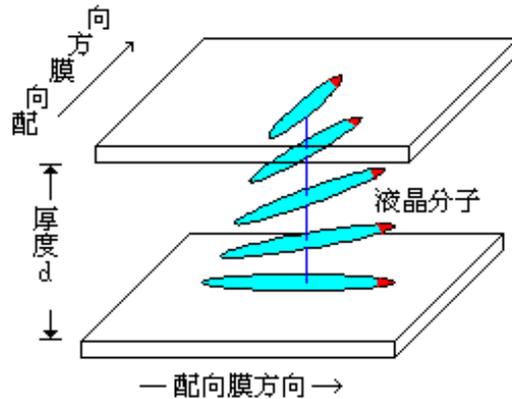


圖 2_2 扭轉向列型液晶的示意圖。

圖 2_2 表示扭轉向列型液晶的簡圖，上下的兩個玻璃鍍上具有導向作用的配向膜，而接近這層配向膜的液晶分子就會平行排列，所以如果讓上下兩片玻璃基本的導向方向有夾角，就會使液晶指向成了距離的函數而有扭轉，根據 Yeh 對於扭轉相列型液晶（TN-LC）的計算，是以多層的 LB 結構疊加而成，首先，需定義幾個 TN-LC 的參數如下：

設 ϕ 為入射面與出射面間的指向角度差， α 為液晶分子指向角度的變化斜率， d 為該液晶樣品的總厚度。

$$\phi = \alpha \cdot d$$

而 Γ 為該液晶樣品無扭轉行為時的總相位變化，且 $n = (n_e - n_o)$ ， λ 表示入射光的波長。

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n \cdot d \quad (2_9)$$

考慮多層 LB 的結合，每層的相位延遲為 $\frac{\Gamma}{N}$ ，而每一層的指向角度為 ρ 、 2ρ 、

3ρ 、 $(N-1) \cdot \rho$ ，且 $\rho = \frac{\phi}{N}$ ，則總合的 TN-LC 模型可以如下式 M 所示：

$$M = W_N \cdot W_{N-1} \cdots W_3 \cdot W_2 \cdot W_1 = \prod_{m=1}^N W_m = \prod_{m=1}^N R(-m\rho) \cdot W_0 \cdot R(m\rho) \quad (2_{10})$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2N} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2N} \end{bmatrix} \quad (2_{11})$$

因為 $R(\phi_1) \cdot R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2)$ ，所以 M 可以簡化如下：

$$M = R(-\phi) \cdot \left[W_0 \cdot R\left(\frac{\phi}{N}\right) \right]^N = R(-\phi) \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{N} \cdot e^{-i\Gamma/2N} & \sin \phi \cdot e^{-i\Gamma/2N} \\ -\sin \phi \cdot e^{i\Gamma/2N} & \cos \frac{\phi}{N} \cdot e^{-i\Gamma/2N} \end{bmatrix}^N \quad (2_{12})$$

根據 Chebyshev ' s identity for unimodular matrices ,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \frac{A \sin mZ - \sin(m-1)Z}{\sin Z} & B \frac{\sin mZ}{\sin Z} \\ C \frac{\sin mZ}{\sin Z} & \frac{D \sin mZ - \sin(m-1)Z}{\sin Z} \end{bmatrix}$$

$$Z = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(A + D) \right]$$

當 N 趨近無窮大 , 則式 (2_12) 可以表示如下 :

$$M = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \chi - i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} & \phi \frac{\sin \chi}{\chi} \\ -\phi \frac{\sin \chi}{\chi} & \cos \chi + i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \chi = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (2_{13})$$

2-5 含方位角之 TN-LC 表示式推導

當真正進行量測時，並無法真正確定規範第一層液晶分子位置的配向膜方向與實驗室水平座標是否平行，所以必須增加一參數匹配角 (rubbing angle) c 表示兩者之間的夾角，並將最後的矩陣以 M_{rot} 表之。

$$\begin{aligned}
 M_{rot} &= \prod_{m=1}^N R(-m\rho - c) \cdot W_0 \cdot R(m\rho + c) \\
 &= R(-c - \phi) \cdot [W_0 \cdot R(\frac{\phi}{N})]^N \cdot R(c) \\
 &= R(-c)R(-\phi) \cdot [W_0 \cdot R(\frac{\phi}{N})]^N \cdot R(c) \\
 &= R(-c) \cdot M \cdot R(c)
 \end{aligned} \tag{2_14}$$

(2_14) 式是顯示了一個很重要的結果，那就是當 TN-LC 配向膜與實驗室水平座標不平行時，我們僅需將其視為一個被旋轉的偏光元件。

為方便計算起見，僅將 M 轉成 Mueller Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi \left(1 - \frac{2\phi^2 \sin^2 \chi}{\chi^2} \right) + \frac{\phi \sin 2\phi \sin 2\chi}{\chi} & -\cos 2\chi \sin 2\phi + \frac{\phi \cos 2\phi \sin 2\chi}{\chi} & \frac{\gamma\phi \cos 2\phi \sin^2 \chi}{\chi^2} - \frac{r \sin 2\phi \sin 2\chi}{2\chi} \\ 0 & \sin 2\phi \left(1 - \frac{2\phi^2 \sin^2 \chi}{\chi^2} \right) - \frac{\phi \cos 2\phi \sin 2\chi}{\chi} & \cos 2\chi \cos 2\phi + \frac{\phi \sin 2\phi \sin 2\chi}{\chi} & \frac{\gamma\phi \sin 2\phi \sin^2 \chi}{\chi^2} - \frac{r \cos 2\phi \sin 2\chi}{2\chi} \\ 0 & \frac{\gamma\phi \sin^2 \chi}{\chi^2} & -\frac{\gamma \sin 2\chi}{2\chi} & 1 - \frac{\gamma^2 \sin^2 \chi}{2\chi^2} \end{pmatrix} \tag{2_15}$$

其中

$$R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2c & \sin 2c & 0 \\ 0 & -\sin 2c & \cos 2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

為驗證 (2_15) 推導式之正確性，將於 3-3 TN-LC 量測技術原理中，將 (2_15) 帶入 (3_9) 中，再由 (3_10) 與 Yeh[8] 的結果作一個比較。

第三章實驗步驟

3-1 校正偏光片與析光片之夾角

為了降低系統誤差，首先我們必須確保的是偏極片及檢光片的相對座標是相同的，令檢光片的零度 ($a=0$) 為系統的 X 軸，只要量出偏極片與檢光片的偏差角就可以完成校正。考慮通過偏極片的雷射光為線性偏極光，且與 x 軸夾角 p ，檢光片與 X 軸夾角 a 。

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ \cos 2a & \cos^2 2a & \sin 2a \cos 2a & 0 \\ \sin 2a & \cos 2a \sin 2a & \sin^2 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2p \\ \sin 2p \\ 0 \end{pmatrix}$$

光偵測器量得光強度值可由 Stoke vector 的第一項 S_0 表之

$$S_0 = f(a) = 2 \cos^2(a - p)$$

因

$$2f(0) - f(\pi/3) - f(2\pi/3) = \frac{3}{2} I_0 \cos(2p)$$

$$f(\pi/3) - f(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_0 \sin(2p)$$

$$\text{則 } p = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}[f(\pi/3) - f(2\pi/3)]}{2f(0) - f(\pi/3) - f(2\pi/3)} \right\} \quad (3_1)$$

3-2 延遲片量測技術原理

3-2-1 線性延遲片量測技術原理

如圖 (3_1) 所示，設入射光偏光角 p 垂直入射樣品 M ，由光偵測器量得光強度。其光學 Muller matrix 表示如下

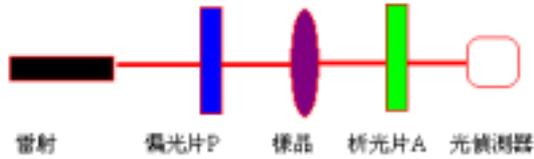


圖 (3_1) 延遲片量測裝置圖

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ \cos 2a & \cos^2 2a & \sin 2a \cos 2a & 0 \\ \sin 2a & \cos 2a \sin 2a & \sin^2 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2p \\ \sin 2p \\ 0 \end{pmatrix}$$

光偵測器量得光強度值可由 Stoke vector 的第一項 S_0 表之

$$S_0 = f(a) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos 2(a - p) \cos^2 \frac{\delta}{2} + \cos 2(a + p - 2\theta) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right] \quad (3_2)$$

可得

$$I_0 = \frac{1}{3} [f(0) + f(\pi/3) + f(2\pi/3)]$$

令

$$Ia = [2f(0) - f(\pi/3) - f(2\pi/3)] / (3I_0)$$

$$Ib = [f(\pi/3) - f(2\pi/3)] / (\sqrt{3}I_0)$$

則

$$\tan(2\theta) = (\cos 2p - Ia) / (Ib - \sin 2p) \quad (3_3)$$

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = (Ia \sin 2p - Ib \cos 2p) / \sin 4(p - \theta) \quad (3_4)$$

由 (3_3)、(3_4) 可得線性延遲片之兩個重要參數 ()、()

3-2-2 橢圓延遲片量測技術原理

如圖 (3_1) 所示，設入射光偏光角 p 垂直入射樣品 M ，式 (2_6)，最後經析光片旋轉不同角度 a 後，由光偵測器量得光強度。其光學 Muller matrix 表示如下

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ \cos 2a & \cos^2 2a & \sin 2a \cos 2a & 0 \\ \sin 2a & \cos 2a \sin 2a & \sin^2 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2p \\ \sin 2p \\ 0 \end{pmatrix}$$

光偵測器量得光強度值可由 Stoke vector 的第一項 S_0 表之

$$S_0 = I(a, p) = \frac{I_0}{2} \{1 + \cos 2(a - p) \cdot [\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \sin^2(\frac{\phi}{2}) \sin^2 2\varepsilon] + \cos 2(a + p) \cos^2 2\varepsilon \cos 4\theta \sin^2(\frac{\phi}{2}) - \sin 2(a - p) \sin \phi \sin 2\varepsilon + \cos^2 2\varepsilon \sin 2(a + p) \sin^2(\frac{\phi}{2}) \sin 4\theta\} \quad (3_5)$$

實驗時，選定一任意偏光角 p 後，分別量取析光角 $a=0$ 、 $\pi/3$ 、 $2\pi/3$ 時之光強度值 $I(0, p)$ 、 $I(\pi/3, p)$ 與 $I(2\pi/3, p)$ 。之後再轉動偏光角 45 度，使 $p=p+\pi/4$ ，然後分別量取析光角 $a=0$ 、 $\pi/3$ 、 $2\pi/3$ 時之光強度值 $I(0, p+\pi/4)$ 、 $I(\pi/3, p+\pi/4)$ 與 $I(2\pi/3, p+\pi/4)$

將以上量得之六組光強度值，做以下參數轉換

$$I_0' = I(0, p) + I(\pi/3, p) + I(2\pi/3, p) = \frac{3}{2} I_0$$

$$I_0'' = I(0, p + \pi/4) + I(\pi/3, p + \pi/4) + I(2\pi/3, p + \pi/4) = \frac{3}{2} I_0$$

令

$$Ia_1 = [2I(0, p) - I(\pi/3, p) - I(2\pi/3, p)] / I_0'$$

$$Ia_2 = [2I(0, p + \pi/4) - I(\pi/3, p + \pi/4) - I(2\pi/3, p + \pi/4)] / I_0''$$

$$Ib_1 = \sqrt{3}[I(\pi/3, p) - I(2\pi/3, p)] / I_0'$$

$$Ib_2 = \sqrt{3}[I(\pi/3, p + \pi/4) - I(2\pi/3, p + \pi/4)] / I_0''$$

則可得下列關係

$$\tan(4\theta - 2p) = (Ia_2 + Ib_1)/(Ia_1 - Ib_2) \quad (3_6)$$

$$\cos \delta = [(Ia_1 \sin 2\theta - Ib_1 \cos 2\theta) \sin 2(p - \theta) + (Ia_2 \sin 2\theta - Ib_2 \cos 2\theta) \cos 2(p - \theta)]/(-3) \quad (3_7)$$

$$\sin \delta \sin 2\varepsilon = [(Ia_1 \sin 2\theta - Ib_1 \cos 2\theta) \cos 2(p - \theta) - (Ia_2 \sin 2\theta - Ib_2 \cos 2\theta) \sin 2(p - \theta)]/(-3) \quad (3_8)$$

因為 p 為實驗前預設好之已知角度，故由 (3_6) 可知延遲片之方位角；將 (p, \quad) 代入 (3_7) 可得；將 (p, \quad, \quad) 代入 (3_8) 可得。

3-3 TN-LC 量測技術原理

如圖 (3_1) 所示，設入射光偏光角 p 垂直入射樣品 M ，式 (2_15)，最後經析光片旋轉不同角度 a 後，由光偵測器量得光強度。其光學 Muller matrix 表示如下

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ \cos 2a & \cos^2 2a & \sin 2a \cos 2a & 0 \\ \sin 2a & \cos 2a \sin 2a & \sin^2 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2c & -\sin 2c & 0 \\ 0 & \sin 2c & \cos 2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2c & \sin 2c & 0 \\ 0 & -\sin 2c & \cos 2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2p \\ \sin 2p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3_9)$$

光偵測器量得光強度值可由 Stoke vector 的第一項 S_0 表之，

$$S_0 = I(a, p) = \frac{I_0}{2} \left\{ 1 + \cos 2(c - p) \cos 2(a - c - \phi) - \cos 2\chi \sin 2(c - p) \sin 2(a - c - \phi) \right. \\ \left. - \frac{2\phi^2 \cos 2(c - p) \cos 2(a - c - \phi) \sin^2 \chi}{\phi} + \frac{\phi \sin 2(a - p - \phi) \sin 2\chi}{\chi} \right\} \quad (3_{10})$$

此式之計算極為複雜，故使用 Mathematica 軟體進行數學運算，其操作方式簡介詳見附錄。為進一步證實 (3_10) 之正確性，令 (3_10) 中， $I_0 = 1$ ， $c = 0$ ， $p = \Phi_{ent}$ ， $a = \Phi_{exit}$ ，可得

$$S_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \Phi_{ent} \cos 2(\phi - \Phi_{exit}) + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \chi) \sin 2\Phi_{ent} \sin 2(-\phi + \Phi_{exit}) \\ - \frac{\phi^2 \cos 2\Phi_{ent} \cos(-\phi + \Phi_{exit}) \sin^2 \chi}{\chi^2} - \frac{\phi \sin 2\chi \sin 2(-\phi - \Phi_{ent} + \Phi_{exit})}{2\chi} \\ = \cos^2(\phi + \Phi_{ent} - \Phi_{exit}) + \sin^2 \chi \sin 2\Phi_{ent} \sin 2(\phi - \Phi_{exit}) \\ - \frac{\phi^2 \cos 2\Phi_{ent} \cos(\phi - \Phi_{exit}) \sin^2 \chi}{\chi^2} + \frac{\phi \sin 2\chi \sin 2(\phi + \Phi_{ent} - \Phi_{exit})}{2\chi}$$

而此表示式亦與 Yeh 所推導之結果相同，並由其結果推得如下之量測方法[9]：

當 $\Phi_{exit} + \Phi_{ent} = a + p = \phi$ 時，可得穿透光亮度最大值。

由此結論所示，我們必須利用目視尋找亮度最大值發生之角度，所推得之結果可能造

成人為誤差機會大增。而本論文改利用特殊角 (0°-60°-120°) 亮度值方式，計算求得所需之對應參數，以減少人為誤差。實驗方式敘述如下：

實驗時，選定一偏光角 p 後，分別量取析光角 $a=0, \pi/3, 2\pi/3$ 時之光強度值 $I(0, p)$ 、 $I(\pi/3, p)$ 與 $I(2\pi/3, p)$ 。之後再轉動偏光角 45 度，使 $p=p+\pi/4$ ，然後分別量取析光角 $a=0, \pi/3, 2\pi/3$ 時之光強度值 $I(0, p+\pi/4)$ 、 $I(\pi/3, p+\pi/4)$ 與 $I(2\pi/3, p+\pi/4)$

將以上量得之六組光強度值，做以下參數轉換

$$I_0' = I(0, p) + I(\pi/3, p) + I(2\pi/3, p) = \frac{3}{2} I_0 \quad (3_11)$$

$$I_0'' = I(0, p + \pi/4) + I(\pi/3, p + \pi/4) + I(2\pi/3, p + \pi/4) = \frac{3}{2} I_0 \quad (3_12)$$

$$Ia_1 = [2I(0, p) - I(\pi/3, p) - I(2\pi/3, p)] / I_0' \quad (3_13)$$

$$Ia_2 = [2I(0, p + \pi/4) - I(\pi/3, p + \pi/4) - I(2\pi/3, p + \pi/4)] / I_0'' \quad (3_14)$$

$$Ib_1 = \sqrt{3}[I(\pi/3, p) - I(2\pi/3, p)] / I_0' \quad (3_15)$$

$$Ib_2 = \sqrt{3}[I(\pi/3, p + \pi/4) - I(2\pi/3, p + \pi/4)] / I_0'' \quad (3_16)$$

則可得下列關係 (計算式詳見附錄)

$$\tan(4c - 2p + 2\phi) = (Ia_2 + Ib_1) / (Ia_1 - Ib_2) \quad (3_17)$$

$$-3\cos 2\chi = [Ia_1 \sin 2(c + \phi) - Ib_1 \cos 2(c + \phi)] \sin 2(p - c) + [Ia_2 \sin 2(c + \phi) - Ib_2 \cos 2(c + \phi)] \cos 2(p - c) \quad (3_18)$$

$$\frac{3\phi \sin 2\chi}{\chi} = [Ia_1 \sin 2(c + \phi) - Ib_1 \cos 2(c + \phi)] \cos 2(p - c) - [Ia_2 \sin 2(c + \phi) - Ib_2 \cos 2(c + \phi)] \sin 2(p - c) \quad (3_19)$$

由上面三式可知，單知道 p 為何是不夠的，但因為有已知三個方程式可解三個未知數；由 (3_17)、(3_18) 可得 $c = c$ 及 $\phi = \phi$ ，帶入 (3_19)，經求解可得 c 值，則其他參數 (χ, ϕ) 可得。依照此關係，對 $n \cdot d = 408 \text{ nm}$ (for $\lambda = 632.8 \text{ nm}$) 之 TN-LC 做了量測。

3-4 TN-LC 液晶參數與橢圓參數之等效

本論文對了解液晶物理結構上的貢獻並不大，但我們更有興趣的是，如何將液晶等效視為一般橢圓延遲片；因此，根據 Yeh 的液晶表示式，由 TN-LC 之液晶參數反推 TN-LC 之橢圓參數。

在量測橢圓延遲片與 TN-LC 時，都是利用相同實驗架構與步驟求得六組光強度值，找出對應參數 Ia_1 、 Ia_2 、 Ib_1 、 Ib_2 ，再依據不同樣品求不同對應參數。若要量測橢圓延遲片之參數（ c 、 ϕ 、 χ ），就將量橢圓延遲片時之 Ia_1 、 Ia_2 、 Ib_1 、 Ib_2 代入 (3_9)、(3_10)、(3_11) 中；欲求 TN-LC 其對應之液晶參數（ C 、 θ_{LC} 、 δ_{LC} ），則將量 TN-LC 時之 Ia_1 、 Ia_2 、 Ib_1 、 Ib_2 代入 (3_17)、(3_18)、(3_19)。

但現為求得 TN-LC 對應之橢圓參數（ c 、 ϕ 、 χ ），我們將量 TN-LC 時之 Ia_1 、 Ia_2 、 Ib_1 、 Ib_2 代入 (3_9)、(3_10)、(3_11) 中

由 (3_9) 知

$$\theta_{LC} = \frac{1}{4} \{ \tan^{-1} [(Ia_2 + Ib_1)/(Ia_1 - Ib_2)] + 2p \}$$

將 (3_17) 代入

$$\begin{aligned} \theta_{LC} &= \frac{1}{4} \{ \tan^{-1} [\tan(4c - 2p + 2\phi)] + 2p \} \\ &= \frac{1}{4} \{ 4c - 2p + 2\phi + 2p \} \\ &= c + \frac{\phi}{2} \end{aligned} \tag{3_20}$$

由 (3_20) 可看出，等效光軸並不等於匹配角而被旋轉了。假設 $c=0$ ，對 TN-LC 而言，其等效光軸約為 ± 45 度。將 (3_20) 分別代入 (3_10)、(3_11)

$$\begin{aligned} -3 \cos \delta_{LC} &= (Ia_1 \sin 2\theta_{LC} - Ib_1 \cos 2\theta_{LC}) \sin 2(p - \theta_{LC}) + (Ia_2 \sin 2\theta_{LC} - Ib_2 \cos 2\theta_{LC}) \cos 2(p - \theta_{LC}) \\ &= [Ia_1 \sin 2(c + \frac{\phi}{2}) - Ib_1 \cos 2(c + \frac{\phi}{2})] \sin 2(p - (c + \frac{\phi}{2})) \\ &\quad + [Ia_2 \sin 2(c + \frac{\phi}{2}) - Ib_2 \cos 2(c + \frac{\phi}{2})] \cos 2(p - (c + \frac{\phi}{2})) \\ &= -3 \cos^2 \phi \cos 2\chi + 3 \sin^2 \phi - \frac{6\phi^2 \sin^2 \phi \sin^2 \chi}{\chi^2} - \frac{3\phi \sin 2\phi \sin 2\chi}{\chi} \end{aligned} \tag{3_21}$$

$$\begin{aligned}
3 \sin \delta_{LC} \sin 2\varepsilon_{LC} &= (Ia_1 \sin 2\theta_{LC} - Ib_1 \cos 2\theta_{LC}) \cos 2(p - \theta_{LC}) - (Ia_2 \sin 2\theta_{LC} - Ib_2 \cos 2\theta_{LC}) \sin 2(p - \theta_{LC}) \\
&= [Ia_1 \sin 2(c + \frac{\phi}{2}) - Ib_1 \cos 2(c + \frac{\phi}{2})] \cos 2(p - (c + \frac{\phi}{2})) \\
&\quad - [Ia_2 \sin 2(c + \frac{\phi}{2}) - Ib_2 \cos 2(c + \frac{\phi}{2})] \sin 2(p - (c + \frac{\phi}{2})) \\
&= -\frac{3 \sin 2\phi \cos 2\chi}{2} - \frac{3 \sin 2\phi}{2} + \frac{3\phi^2 \sin 2\phi \sin^2 \chi}{\chi^2} + \frac{3\phi \cos 2\phi \sin 2\chi}{\chi} \quad (3_22)
\end{aligned}$$

由 (3_20)、(3_21)、(3_22) 可看出，只要知道 TN-LC 之液晶參數 (C 、 ϕ 、 χ)，就可反推等效橢圓參數 (δ_{LC} 、 ε_{LC} 、 θ_{LC})。由 (3_21)、(3_22) 得知， δ_{LC} 與 ε_{LC} 不隨入射光之偏極態及光軸位置而變，這結果與一般橢圓延遲片的結果相同；即，一旦延遲片製成之後，其橢圓參數就不該隨入射光偏極態與其擺置之光軸方位角而變。我們將在 4-3 節，針對同一 TN-LC 同時以液晶參數與等效橢圓參數作理論值與實驗值之比較圖，證實 (3_20)、(3_21)、(3_22) 的等效式合理的。

第四章 實驗結果與討論

4-1 橢圓延遲片量測結果

	P	視為橢圓延遲片			視為線性延遲片	
		(不動)				
第一組	120.22	-0.14	81.43	2.06	0.74	84.93
第二組	135.34	-0.14	81.33	1.95	0.41	81.64
第三組	150.33	-0.14	81.24	2.03	-1.07	80.28
標準差			0.094	0.057	0.96	2.39
平均值			81.33	2.01	0.03	82.28

單位為 Degree

由上述結果發現，

- (1) 如果將 QUARTZ 視為線性延遲片，則 P 由 120 度轉到 150 度時，對應出之光軸變化了 1.8 度，光程差變化了 4.7 度，而理想之延遲片光軸與光程差應該固定，不該隨入射光之偏極態而變。
- (2) 當我們引入之橢圓偏光參數 後發現，光程差被固定了，其橢圓參數 約為 2 度。

4-2 TN-LC 量測結果

(一) 將液晶配向膜以任意角度放入後 (令 $C=C_0$) , 再分別以 $P = -3^\circ$ 、 0° 、 3° 進行量測

	P (Degree)	C (Degree)	(Degree)	(Degree)	n *d (A)
第一組	-2.87	14.47	-90.93	146.62	4043
第二組	0.06	14.49	-91.02	146.9	4053
第三組	3.00	14.36	-91.08	147.16	4063
標準差		0.078	0.074	0.27	10.04
平均值		14.44	-91.02	146.89	4053

圖 (4_1) 為穿透光強度 $I(P, A)$ vs 析光角 A 之圖形, 由於此量測必須分別取 $P=P_0$ 及 $P=P_0 + \pi/4$ 時之強度, 故以深色線表 $I(P_0)$ 及以淺色線表 $I(P_0 + \pi/4)$ 之理論值, 並以黑點表示實驗值

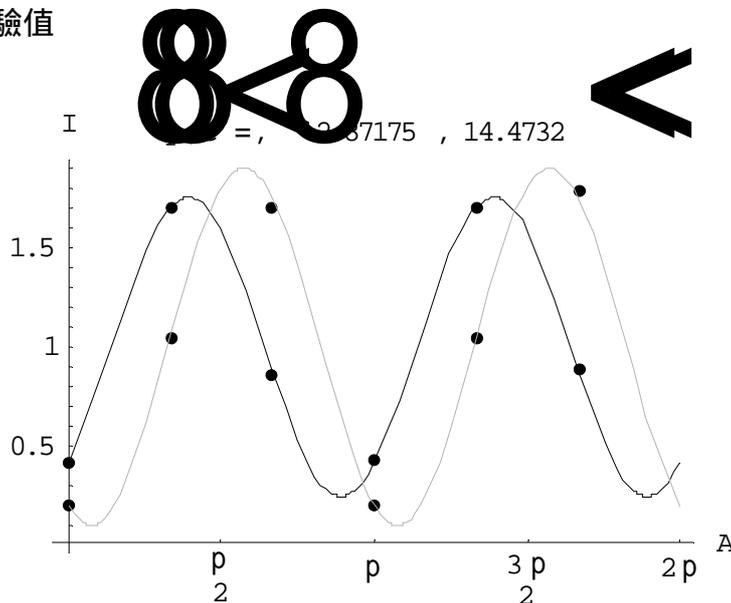


圖 (4_1) TN-LC 之穿透光強度 $I(P, A)$ vs 析光角 A 分佈圖

(二) 承 (一) , 將液晶配向膜方向再轉三度 ($C=C_0+3$) , 再分別以 $P = -3^\circ$ 、 0° 、 3° 進行量測

	P	C			n *d
第四組	-2.87	17.28	-90.69	146.30	4035
第五組	0.06	17.42	-90.79	146.57	4045
第六組	3.00	17.44	-90.85	146.84	4055
標準差		0.089	0.077	0.267	9.83
平均值		17.38	-90.78	146.57	4045

(三) 承 (二) , 將液晶配向膜方向再轉三度 ($C=C_0+6$) , 再分別以 $P = -3^\circ$ 、 0° 、 3° 進行量測

	P	C			n *d
第七組	-2.87	20.14	-90.49	146.07	4031
第八組	0.060	20.28	-90.54	146.29	4039
第九組	3.00	20.42	-90.64	146.56	4049
標準差		0.14	0.079	0.25	8.96
平均值		20.28	-90.56	146.31	4039

將上面九組結果重新列表

	P	C			n *d
第一組	-2.87	14.47	-90.93	146.62	4043
第二組	0.06	14.49	-91.02	146.90	4053
第三組	3.00	14.35	-91.08	147.16	4063
第四組	-2.87	17.28	-90.69	146.30	4035
第五組	0.06	17.42	-90.79	146.57	4045
第六組	3.00	17.44	-90.85	146.84	4055
第七組	-2.87	20.14	-90.49	146.07	4031
第八組	0.06	20.28	-90.54	146.29	4039
第九組	3.00	20.42	-90.64	146.56	4049
標準差			0.20	0.34	10.25
平均值			-90.78	146.59	4046

由表可知 ,

(1) 我們以不同線性偏極態光入射至 TN-LC , 所求出之液晶參數 (C 、 θ 、 $n*d$) 皆為定值。即使旋轉了 TN-LC 的方位角 C , 再換不同線性偏極態光入射至 TN-LC , 所求出之液晶參數 (θ 、 θ 、 $n*d$) 仍為定值。這表示液晶參數 (θ 、 θ 、 $n*d$) 不隨量測外在控制變因而異 , 故此量測方式是可行的。

(2) 本量測中 , θ 為 90° ; 若 θ 為 270° 或其他值 (STN) , 因其表示式雷同 , 相信同樣的方法 , 亦可求得其液晶參數。

4-3 TN-LC 液晶參數與橢圓參數之等效

4-3-1 將 TN-LC 視為橢圓延遲片之對應實驗值

(一) 將液晶配向膜以任意角度放入後 (令 $C=C_0$) , 再分別以 $P = -3^\circ, 0^\circ, 3^\circ$ 進行量測

		視為液晶之量測結果				視為橢圓延遲片之量測結果		
	P	C			n *d			
第一組	-2.87	14.47	-90.93	146.62	4043	-30.99	137.54	-30.31
第二組	0.06	14.48	-91.02	146.9	4053	-31.02	137.34	-30.031
第三組	3.00	14.34	-91.08	147.16	4063	-31.19	137.16	-29.73
標準差		0.078	0.074	0.27	10.04	0.11	0.19	0.29
平均值		14.46	-91.01	146.89	4053	-31.07	137.34	-30.02

(二) 承 (一) , 將液晶配向膜方向再轉三度 ($C=C_0+3$) , 再分別以 $P = -3^\circ, 0^\circ, 3^\circ$ 進行量測

		視為液晶之量測結果				視為橢圓延遲片之量測結果		
	P	C			n *d			
第四組	-2.87	17.28	-90.69	146.30	4035	-28.07	137.46	-30.02
第五組	0.06	17.42	-90.79	146.57	4045	-27.97	137.33	-29.85
第六組	3.00	17.44	-90.85	146.84	4055	-27.98	137.094	-29.48
標準差		0.089	0.077	0.26	9.83	0.052	0.185	0.27
平均值		17.38	-90.78	146.57	4045	-28.01	137.30	-29.79

(三) 承 (二) , 將液晶配向膜方向再轉三度 ($C=C_0+6$) , 再分別以 $P = -3^\circ, 0^\circ, 3^\circ$ 進行量測

		視為液晶之量測結果				視為橢圓延遲片之量測結果		
	P	C			n *d			
第七組	-2.87	20.14	-90.49	146.07	4031	-25.10	137.46	-29.81
第八組	0.06	20.28	-90.54	146.29	4039	-24.99	137.26	-29.53
第九組	3.00	20.42	-90.64	146.56	4049	-24.90	137.10	-29.32
標準差		0.14	0.079	0.25	8.95	0.10	0.18	0.24
平均值		20.28	-90.56	146.31	4039	-25.00	137.27	-29.55

(四) 將上述九組數據之結果，取平均值及標準差

		視為液晶之量測結果				視為橢圓延遲片之量測結果		
	P	C			n *d			
第一組	-2.87	14.47	-90.93	146.62	4043	-30.99	137.54	-30.31
第二組	0.06	14.48	-91.02	146.9	4053	-31.02	137.34	-30.031
第三組	3.00	14.34	-91.08	147.16	4063	-31.19	137.16	-29.73
第四組	-2.87	17.28	-90.69	146.30	4035	-28.07	137.46	-30.02
第五組	0.06	17.42	-90.79	146.57	4045	-27.97	137.33	-29.85
第六組	3.00	17.44	-90.85	146.84	4055	-27.98	137.094	-29.48
第七組	-2.87	20.14	-90.49	146.07	4031	-25.10	137.46	-29.81
第八組	0.06	20.28	-90.54	146.29	4039	-24.99	137.26	-29.53
第九組	3.00	20.42	-90.64	146.56	4049	-24.90	137.10	-29.32
標準差			0.20	0.34	10.2		0.16	0.31
平均值			-90.79	146.58	4046		137.30	-29.79

這是一個令人興奮的結果，我們以不同線性偏極態光入射至 TN-LC，並將其視為一般橢圓偏極片進行實驗，所求出之橢圓參數（ α ， β ）皆為定值。即使旋轉了 TN-LC 的方位角 C，再換不同線性偏極態光入射至 TN-LC，所求出之橢圓參數（ α ， β ）仍為定值。這表示 TN-LC 橢圓參數（ α ， β ）不隨量測外在控制變因而異，故將液晶視為橢圓延遲片應該是可行的。

4-3-2 TN-LC 之橢圓參數實驗值與理論值之比較

上節的實驗結果顯示 TN-LC 之橢圓參數為定值，這似乎暗示 TN-LC 可以以橢圓延遲片等效之，但卻未表示由液晶參數實驗值反推回的等效橢圓參數值會與橢圓參數實驗值相同。故本節利用 (3_20)、(3_21)、(3_22) 的關係式，將實驗值與理論值作進一步之比較。

第一組為例，其液晶參數之實驗值為 $(C, \delta, \gamma) = (14.47^\circ, -90.93^\circ, 146.62^\circ)$

作 $I(P, A)$ vs A 之圖形，由於此量測必須分別取 $P=P_0$ 及 $P=P_0 + \lambda/4$ 時之強度，故以深色線表 $I(P_0)$ 及以淺色線表 $I(P_0 + \lambda/4)$ 之理論值，並以黑點表示實驗值

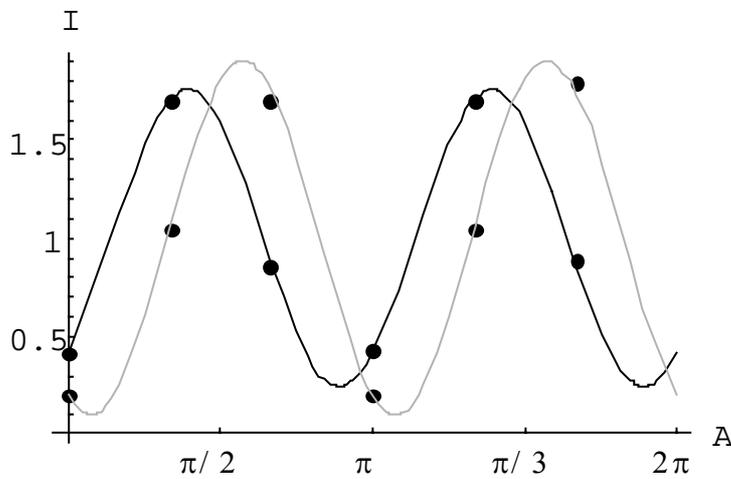


圖 (4_2) 以液晶參數表示 TN-LC 之穿透光強度 $I(P, A)$ vs 析光角 A 分佈圖

其橢圓參數實驗值 $(C, \delta, \gamma) = (-30.993, 137.539, -30.312)$

作 $I(P, A)$ vs A 之圖形，由於此量測必須分別取 $P=P_0$ 及 $P=P_0 + \lambda/4$ 時之強度，故以深色表 $I(P_0)$ 及以淺色線表 $I(P_0 + \lambda/4)$ 之理論值，並以黑點表示實驗值

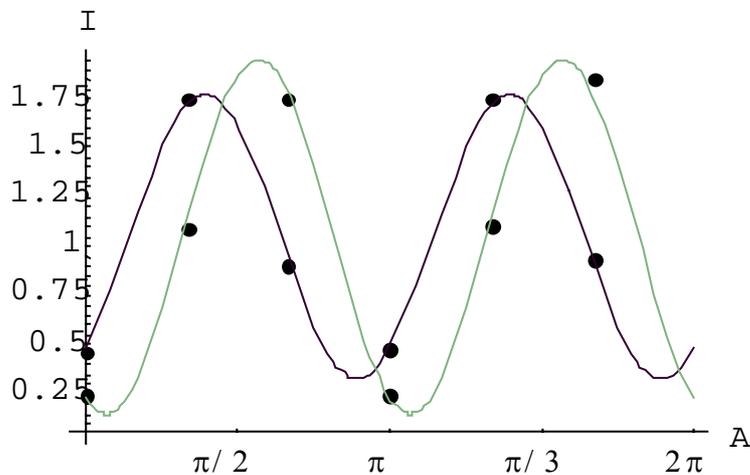


圖 (4_3) 以橢圓參數表示 TN-LC 之穿透光強度 $I(P, A)$ vs 析光角 A 分佈圖

由圖 (4_2) 與圖 (4_3) 我們發現，同一液晶可用兩種不同的參數表示，可得相同之結果。為方便對照，我們將圖 (4_2) 與圖 (4_3) 合併成圖 (4_4) 後發現，兩圖形果如預期的重合。

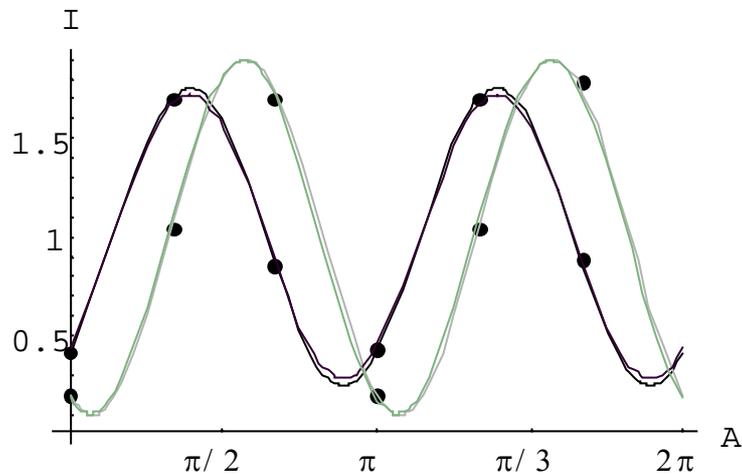


圖 (4_4) 將圖 (4_2) 與圖 (4_3) 合併之對照圖

由圖 (4_4) 發現，液晶可等效為一個橢圓延遲片之假設應該沒錯，只差更進一步之數值比較。由 (3_20)、(3_21)、(3_22) 知，由已知液晶參數 (C_1 、 C_2) 可反推 (α_{LC} 、 β_{LC} 、 γ_{LC})。

今將液晶參數 (C_1 、 C_2) = (14.47°、-90.93°、146.62°)

代入 (3_20)、(3_21)、(3_22) 得其對應

$$(\alpha_{LC}, \beta_{LC}, \gamma_{LC}) = (-30.995^\circ, 138.51^\circ, -31.25^\circ)$$

此值與表中實驗值

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-30.993^\circ, 137.539^\circ, -30.312^\circ)$$

雷同。

從理論上來看，(α_{LC} 、 β_{LC} 、 γ_{LC}) 應該完全與 (α 、 β 、 γ) 相等，但由本實驗可看出有將 α_{LC} 與 β_{LC} 各將近有 1 度之誤差。這可能是實驗上系統的誤差造成，但更 **可能** 是因為我們並沒仔細考慮液晶製程上之誤差。因為在 Yeh 的推導式中，認為此液晶分子是無預傾角且均勻的旋轉，是故，我們所量得之液晶參數 (C_1 、 C_2) 僅能用來表示完美的 TN-LC 液晶盒。

換言之，由此誤差出發，我們在更改液晶表示式後，或許可反推預傾角等參數，但此不是本論文所探討之重點。

第五章 結論

當我們將 QUARTZ 1/4 WAVE PLATE 視為線性延遲片時，在不同偏極態的入射光穿透下，我們發現其方位角與相位差隨入射光偏極態而變。當我們改將其視為橢圓延遲片，則其方位角與相位差不隨入射光偏極態而變，而成定值。這使我們非常確定，石英是個具光學活性之材質。

QUARTZ WAVE PLATE		視為橢圓延遲片			視為線性延遲片	
	P	(不動)			'	'
第一組	120.22	-0.14	81.43	2.06	0.74	84.93
第二組	135.34	-0.14	81.33	1.95	0.41	81.64
第三組	150.33	-0.14	81.24	2.03	-1.07	80.28
標準差			0.094	0.057	0.96	2.39
平均值			81.34	2.01	0.03	82.28

至於 TN-LC 之量測結果方面，我們做如下九組實驗中，我們換了不同偏極態的光源入射，也改變液晶擺設時之匹配角，所量得之參數均可得一致之結果。這除了證明本論文確實可提供一個有效的 TN-LC 量測方式外，也在證明 TN-LC 除可用液晶參數表示其光學性質，也可用橢圓參數表示其光學性質。我們也相信，此量測方式將可應用在 STN-LC 之量測上。

TN-LC		視為液晶之量測結果				視為橢圓延遲片之量測結果		
	P	C			n *d			
第一組	-2.87	14.47	-90.93	146.62	4043	-30.99	137.54	-30.31
第二組	0.06	14.48	-91.02	146.9	4053	-31.02	137.34	-30.031
第三組	3.00	14.34	-91.08	147.16	4063	-31.19	137.16	-29.73
第四組	-2.87	17.28	-90.69	146.30	4035	-28.07	137.46	-30.02
第五組	0.06	17.42	-90.79	146.57	4045	-27.97	137.33	-29.85
第六組	3.00	17.44	-90.85	146.84	4055	-27.98	137.094	-29.48
第七組	-2.87	20.14	-90.49	146.07	4031	-25.10	137.46	-29.81
第八組	0.06	20.28	-90.54	146.29	4039	-24.99	137.26	-29.53
第九組	3.00	20.42	-90.64	146.56	4049	-24.90	137.10	-29.32
標準差			0.208	0.341	10.25		0.163	0.311
平均值			-90.78	146.59	4046		137.30	-29.79

為驗證 TN-LC 可視為橢圓延遲片的正確性，我們以第一組為例，由 Yeh 之液晶表示式中之液晶參數 (C、 θ 、 ϕ) = (14.47°、-90.93°、146.62°)，反推其橢圓參數 (θ_{LC} 、 ϕ_{LC} 、 γ_{LC}) = (-30.995°、138.51°、-31.25°)，我們發現此值與實驗之橢圓參數 ()，

,) = (-30.993°, 137.539°, -30.312°) 雷同，所以大體上來看，TN-LC 應可視為橢圓延遲片。

但仔細查看發現，(θ_{LC} , ϕ_{LC}) 與 (,) 間卻有各將近 1 度之誤差。這除了可能是實驗上系統的誤差造成，但更 **可能**是因為我們並沒仔細考慮液晶製程上之誤差。因為在 Yeh 的推導中，認為液晶是無預傾角且均勻的旋轉，是故，我們所量得之液晶參數 (C、) 僅能用來表示完美的 TN-LC 液晶盒。

換言之，由此誤差出發，我們在更改液晶表示式後，或許可反推預傾角等參數，但此不是本論文所探討之重點。在對液晶的量測實驗中，發現其準確度較一般市售補波片差，其可能的原因是，液晶不如一般晶體的三維有序，且配向膜與預傾角等邊界效應亦在本實驗中忽略；再則是因為液晶層的厚度均勻性也較晶體差，且當每個光學元件轉動時，都無法精準地確定光源打在元件同一點上，所以也造成無法避免之誤差。

最後，希望能在未來能將 TN-LC 通電，找出個參數與電壓之間之關聯，配合偏極片進而發展一個可任意調變之補波片。如果材料來源允許的話，亦希望利用此技術繼續針對其他液晶或生化材料做進一步量測。而這一切如能配合 PEM 達到即時量測，應用上的價值就會更大。

附錄

本附錄主要目的在於依步驟解說，如何利用 Mathematica 這套數學軟體來解說本論文所用到的主要數學式推導，以下所用之符號皆為該軟體的制式模式，例： $\text{Sin}[C]$ 即為常見之 $\sin c$ ， $\text{Sin}[C]^2$ 即為常見之 $\sin^2 c$ 。

將 Mathematica 這套軟體啟動後，進入 File 之選項，並開啟 Palettes 裏之 AlgebraicManipulation 面板（如右圖）。在此面板內將會有計算時，所需之計算工具，例： $\text{FullSimplify}[]$ 、 $\text{Expand}[]$ 這些工具將有效簡化數學式之計算。



幾個基本指令附帶說明：

- (一) 運算：方程式或計算式列好後欲進行運算，則將游標移至該式，然後按 Shift + Enter。
- (二) 矩陣輸入：在兩個小括號中，按 Ctrl + ，則可增加行數，按 Ctrl + Enter 則可增加列數。兩個矩陣要進行相乘，中加必須加 “.”，即 Del 鍵
- (三) 所有已定義之方程式開頭大寫，後方以中括號引入參數，如 $\text{Sin}[c]$ ；所有乘積所需用之括號皆為小括號。
- (四) 每個未知函數之使用方法，皆可由 help 查詢到範例。

附錄 1 推導式 (3_10)

首先將式 (3_9) 重寫如下

$$\text{MatrixForm} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \cdot \begin{matrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (\text{附}_1)$$

執行 (附_1) 式，可得矩陣第一項， $S_0 =$

(附_2)

式 (附_2) 太過複雜，直接選取後按 FullSimplify[] 也無法得到好結果，故需先半人工簡化。因此先將針對黑粗體部分個別選取後按 FullSimplify[] 簡化

(附_3)

選取 (附_3) 按 Expand[]，再依式子的對稱性重新手工排列

(附_4)

觀察 (附_4) 發現，整個式子除了 1 之外，分成數個數學型式類似之部分，針對這些部分分別作簡化，結果即為所求

(附_5)

附錄2 推導式 (3_17)、(3_18)、(3_19)

由 (3_10) 將 Ia1 右側展開 (選取後按 Expand[])

$$I_{a1} = \frac{2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 4 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 2 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + f \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right)}{c^2 + c^2}$$

因對稱性，依序以每三個為一組，逐一進行簡化 (選取後按 FullSimplify[])

$$I_{a1} = \frac{3 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 6 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 2 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + f \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right)}{c^2 + c^2} \quad (\text{附}_6)$$

同理可得 Ia2、Ib1、Ib2

$$I_{a2} = \frac{3 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 6 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 2 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + f \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right)}{c^2 + c^2} \quad (\text{附}_7)$$

$$I_{b1} = \frac{-3 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 6 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 2 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + f \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right)}{c^2 + c^2} \quad (\text{附}_8)$$

$$I_{b2} = \frac{3 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 6 f^2 \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 2 f^2 \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) + f \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right)}{c^2 + c^2} \quad (\text{附}_9)$$

根據 (3_17) 之定義，將 (附_6) ~ (附_9) 代入，並分別將分子及分母展開

$$k_{a2} = \frac{3 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 6 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 2 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + f \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right)}{c^2 + c^2}$$

$$k_{b1} = \frac{-3 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} + f \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \left(\frac{c^2}{3} - f \right) + 6 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + 2 f^2 \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{p}{3} \right) + f \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{p}{3} \right)}{c^2 + c^2}$$

分別對分子分母簡化

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2}$$

選取上式等號右邊進行簡化得

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} \quad (\text{附}_{10})$$

根據 (3_18) 之定義，

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2}$$

將 (附_6) ~ (附_9) 代入

$$\frac{-3 \cos^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 3f \cos^2 \theta}{c} = \frac{3f \cos^2 \theta}{c}$$

針對前四項及後四項分別簡化，得

$$-3 \cos^2 \theta$$

即

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2}$$

根據 (3_19) 之定義，

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2}$$

將 (附_6) ~ (附_9) 代入

$$\frac{3 \cos^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 3f \cos^2 \theta}{c} = \frac{3f \cos^2 \theta}{c}$$

針對前四項及後四項分別簡化，得

$$0 + \frac{3f \sin^2 \theta}{c}$$

即

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - c^2}{c^2}$$

參考文獻

- [1] Y.F.Chao and W.F.Hsieh, " Charge-Coupled Device Polarimetry and its measurement of the Stoke vector of light transmitted by a polymer plate " ,Applied Optics, Vol.30,No.28,1991,pp.4012-4013
- [2] 洪振盛, " 利用偏光儀量測補波片之方位角及其相位延遲 " ,國立交通大學光電工程研究所碩士論文,1995.
- [3] J.F.Nye, " Physical Properties of Crystals " ,Oxford,1957,pp.260-274
- [4] 林志佳, " 石英式補波片旋光性之影響 " ,國立交通大學光電工程研究所碩士論文,1996.
- [5] 林肇廉, " 光彈調變式偏光儀對線偏及圓偏之測量 " ,國立交通大學光電工程研究所碩士論文,2001.
- [6] Pochi Yeh and Claire Gu, " Optics of Liquid Crystal Displays " , 1999, pp. 120-121.
- [7] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, " Ellipsometry And Polarized Light " , 1980, pp.98.
- [8] Pochi Yeh and Claire Gu, " Optics of Liquid Crystal Displays " , 1999, pp. 129-130.