

### 第三章 液晶盒厚度及扭轉角量測原理

#### 3.1、入射面液晶指向矢角為已知

在入射面液晶指向矢角度為已知的情況下，我們可以先將其對準至和偏光片平行的角度，利用旋轉液晶盒及檢光片或只旋轉檢光片來求得液晶盒的厚度及扭轉角。

##### 3.1.1、旋轉液晶盒及檢光片法

由 Jones Optical Propagation Matrix 可以得知一個只有扭變形變的液晶盒放置於偏光片 (polarizer) 和檢光片(analyzer)之間時，垂直入射光的反射率可以表示為：

$$\begin{aligned}
 R &= \{AT^T M^T MTP\} \\
 &= [\cos y_A \quad \sin y_A] \begin{bmatrix} \cos y_0 & -\sin y_0 \\ \sin y_0 & \cos y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{G \sin X}{2X} & -f \frac{\sin X}{X} \\ f \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{G \sin X}{2X} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{G \sin X}{2X} & f \frac{\sin X}{X} \\ -f \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{G \sin X}{2X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_0 & \sin y_0 \\ -\sin y_0 & \cos y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_P \\ \sin y_P \end{bmatrix} \\
 &= [\cos y_A \quad \sin y_A] \begin{bmatrix} t + iu & iw \\ iw & t - iu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_P \\ \sin y_P \end{bmatrix} \\
 t &= 1 - \frac{\Gamma^2 \sin^2 X}{2X^2} \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

$$u = -\frac{\Gamma}{X} \sin X (\cos X \cos 2y_0 - \frac{f}{X} \sin X \sin 2y_0) \tag{3.2}$$

$$w = -\frac{\Gamma}{X} \sin X (\cos X \sin 2y_0 + \frac{f}{X} \sin X \cos 2y_0) \quad (3.3)$$

$$t^2 + u^2 + w^2 = 1$$

$$X = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}} \right), \quad a = 2d \sin \theta$$

$$\Delta n = n_{eff} - n_0$$

$$\frac{1}{n_{eff}^2} = \frac{\cos^2 q}{n_o^2} + \frac{\sin^2 q}{n_e^2}$$

$q$  為 polar angle, tilt angle  $a = p / 2 - q$

如圖 3.1 所示， $\psi_0$  為入射面液晶指向矢與 X 軸的夾角， $\psi_P$  為偏光片的穿透軸與 X 軸的夾角， $\psi_A$  為檢光片的穿透軸與 X 軸的夾角， $\phi$  為下基板與上基板液晶指向矢的夾角，也就是液晶扭轉角度， $d$  為液晶厚度，tilt angle 定義為液晶盒的平均傾角。

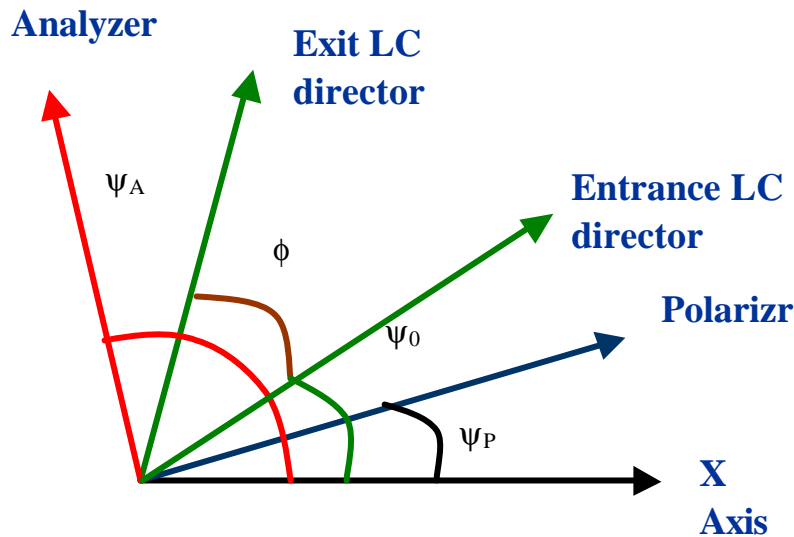


圖 3.1、偏光片與液晶盒相對應位置示意圖

因此，垂直入射光的反射率可以表示為：

$$R = \frac{1}{2} [1 + (\mathbf{a}_c \cos 2\mathbf{y}_P + \mathbf{a}_s \sin 2\mathbf{y}_P) \cos 2\mathbf{y}_A + (\mathbf{b}_c \cos 2\mathbf{y}_P + \mathbf{b}_s \sin 2\mathbf{y}_P) \sin 2\mathbf{y}_A] \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a}_c = 1 - 2w^2$$

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{b}_c = 2uw$$

$$\mathbf{b}_s = 1 - 2u^2$$

3.4 式中，若令  $\rho = 0$ ， $\gamma_A = \pi/2$ ；則反射率可以簡化成 3.5 式：

$$R = \left( \frac{\Gamma \sin X}{X} \right)^2 \left( \cos X \sin 2\mathbf{y}_0 + \frac{\mathbf{f}}{X} \sin X \cos 2\mathbf{y}_0 \right)^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{y}_0} = 0 \Rightarrow \mathbf{y}_{0min} = \frac{1}{2} \arctan \left( -\frac{X}{\mathbf{f} \tan X} \right) \quad (3.6)$$

3.4 式中，若令  $\rho = 0$ ， $\gamma_0 = 0$ ；則反射率可以簡化成 3.7 式：

$$R = \frac{1}{2} [1 + (\mathbf{a}_c \cos 2\mathbf{y}_A + \mathbf{b}_c \sin 2\mathbf{y}_A)] \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{y}_A} = 0 \Rightarrow \mathbf{y}_{Amin} = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\mathbf{f} X \Gamma^2 \sin 2X \sin^2 X}{X^4 - 2\Gamma^2 \mathbf{f}^2 \sin^4 X} \right) \quad (3.8)$$

3.6 式及 3.8 式分為為兩種反射率極小時， $\gamma_0$  及  $\rho$  所需符合的光學

條件，在 3.6 式中，若設扭轉角為 80 度，並以厚度為變數畫圖，則

可得如圖 3.2 所示之結果：

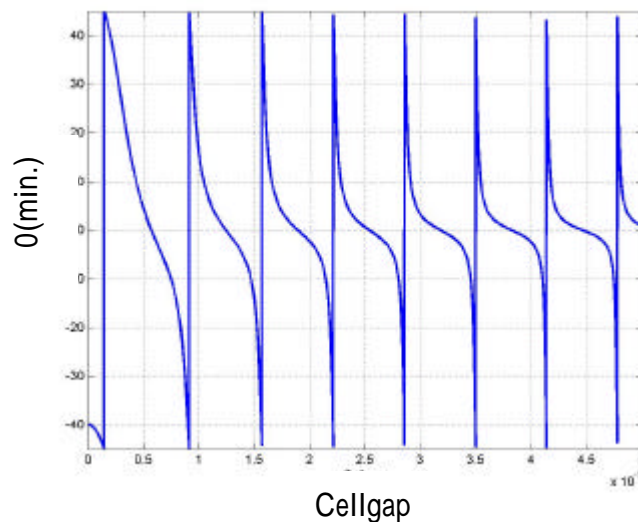


圖 3.2、不同厚度時所對應的  $R_{min}$

上圖可以發現在 3.6 式中，任何的厚度均會有相對應的  $\theta_{min}$ ，且相同  $\theta_{min}$  所對應的厚度差也在  $8 \mu m$  左右，這個厚度差足以讓我們識別那個才是正確的解。除此之外，在厚度小於  $5 \mu m$  時，其曲線近似一直線，因此我們可以評估其量測結果若有 1 度誤差時，對應的厚度誤差為  $0.07 \mu m$ 。

在 3.8 式中，若設扭轉角為 80 度，並以厚度為變數畫圖，則可得如圖 3.3 所示之結果：

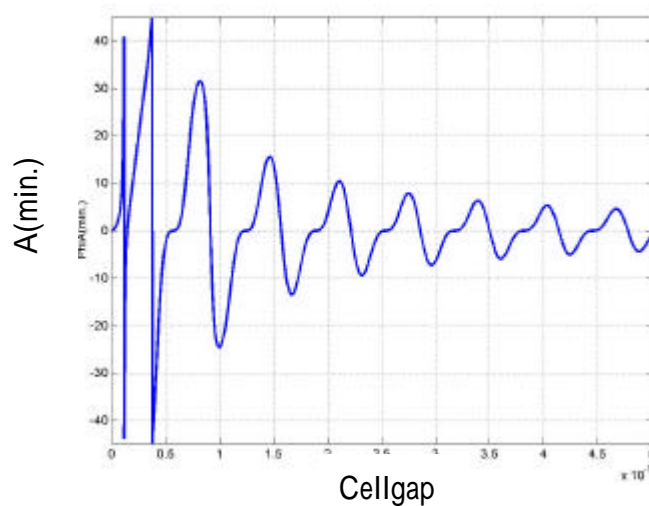


圖 3.3、不同厚度時所對應的  $\theta_{min}$

上圖可以發現當厚度愈來愈大時，其所對應的  $\theta_{min}$  的角度變化會愈來愈小，因此測得的厚度誤差也會愈來愈大，且在曲線的峰值附近，一個  $\theta_{min}$  會對應到兩個很接近的厚度解，因此我們並不容易去分辨那一個才是正確的解。另外，在厚度小於  $5 \mu m$  時，我們發現曲線也近似一線直線，因此我們可以評估其量測結果若有 1 度誤差時，對應的厚度誤差為  $0.038 \mu m$ 。

以固定偏光片位置進行量測時，偏光片被定義為參考軸，也就是圖 3.1 中的 X 軸。因此，只要找出在轉動液晶盒及檢光片時所相對應的反射率極小值時的位置，即可代回 3.6 式及 3.8 式求聯立解，求得厚度及扭轉角。圖 3.4 及 3.5 分別為 3.6 式及 3.8 式在厚度及扭轉角均為變數下得到之結果。

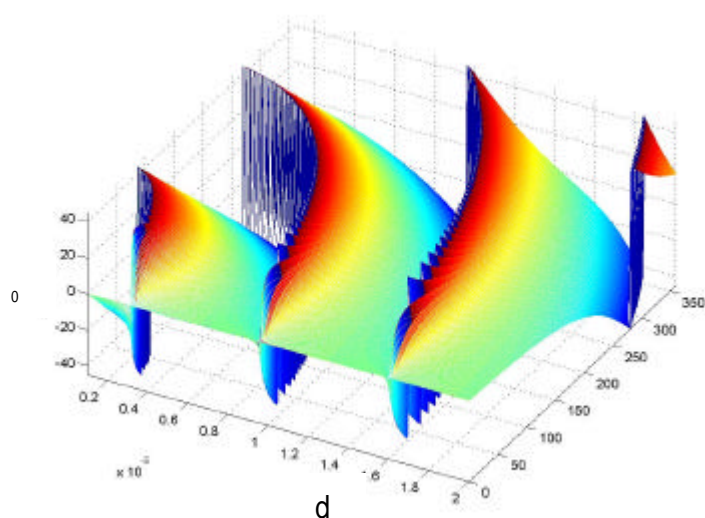


圖 3.4、不同厚度及扭轉角下的  $\theta_{\min}$

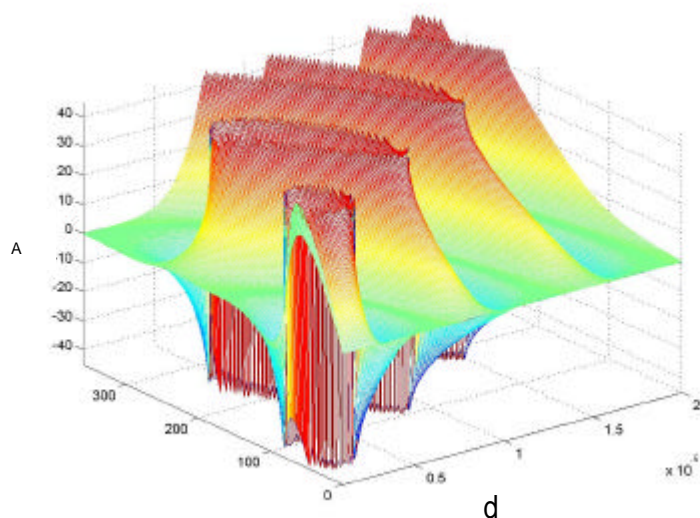


圖 3.5、不同厚度及扭轉角下的  $A_{\min}$

在圖 3.4 中，我們可以發現無論任何的厚度及扭轉角，均會有相對應的  $\theta_{\min}$ ，但在圖 3.5 中，當扭轉角很小時，不同厚度所相應的  $\theta_{\min}$  變化非常小，因此，當利用 3.6 式及 3.8 式求厚度及扭轉角的聯立解時，此種方法並不適用。

為了使液晶扭轉角度與厚度能同時量測以及正確量測，依不同量測條件來設計適當的量測方法是極其重要。在量測的過程中，反射率不但會隨液晶盒以及檢偏鏡的位置而改變，不同相位延遲 (phase retardation) 的液晶盒其光學特性也不同，因此以  $nd/\lambda$ 、 $\theta_0$ 、 $A$  與反射率的光學關係，探討不同量測條件下所對應的適當量測步驟，以 80 度之扭轉型線狀液晶盒為例， $nd/\lambda = 0.65$ 、 $0.85$  及  $0.95$  1.15 時，可以得到如圖 3.6 所示之結果。

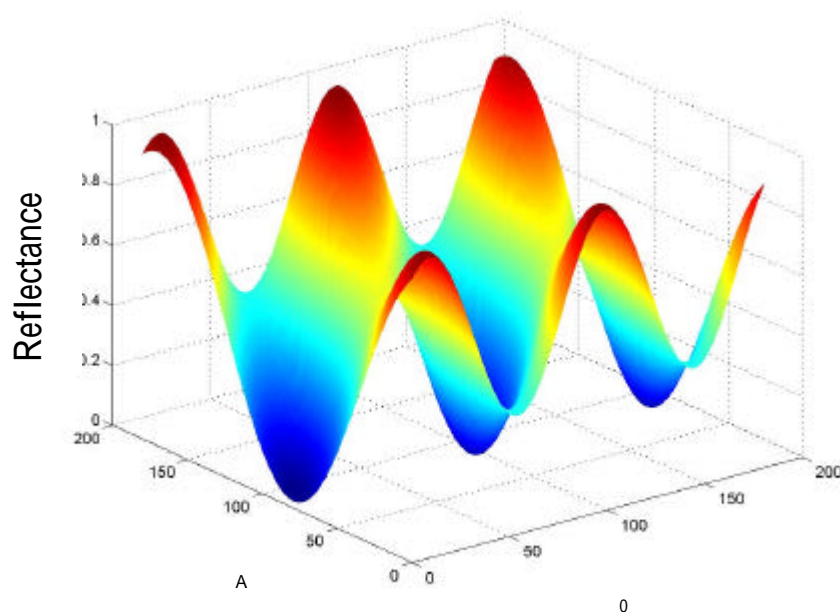


圖 3.6、反射率與液晶盒位置及檢光片夾角關係圖 ( $nd/\lambda = 0.7$ )

當  $nd/\lambda = 1.15 \sim 1.25$  時，可以得到近似如圖 3.7 所示之結果；當  $nd/\lambda = 0.85 \sim 0.95$  時，可以得到近似如圖 3.8 所示之結果（由於  $nd/\lambda$  與反射率的光學關係有週期性，因此我們只取  $nd/\lambda = 0.65 \sim 1.25$  區間討論其特性）。

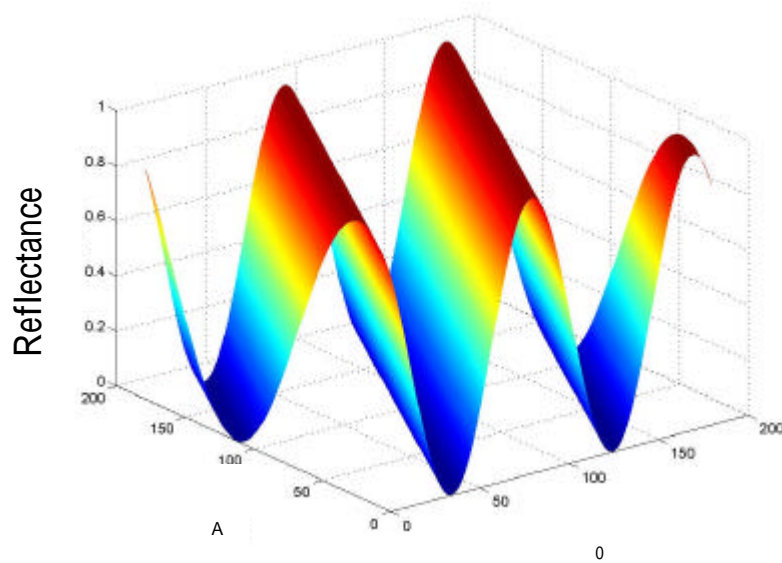


圖 3.7、反射率與液晶盒位置及檢光片夾角關係圖（ $nd/\lambda = 1.2$ ）

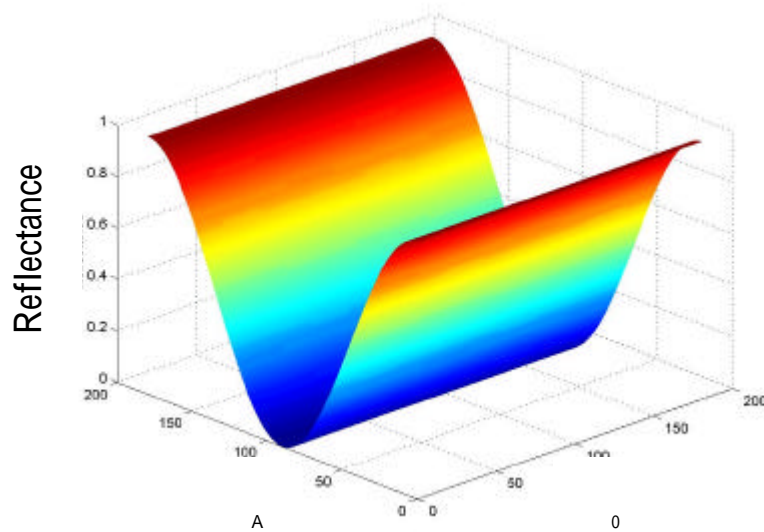


圖 3.8、反射率與液晶盒位置及檢光片夾角關係圖（ $nd/\lambda = 0.9$ ）

由於 3.6 式及 3.8 式中，為了要得到  $\theta_{min}$  及  $\theta_{Amin}$ ，我們分別利用轉動液晶盒及檢光片兩步驟，由圖 3.6 及 3.7 中，我們發現無論轉動液晶盒或檢光片，均可以得到相對應的反射率變化，因此當  $nd/$  落在此區間時，此方法均可適用，但如果  $nd/$  落在圖 3.8 區間內時，在圖中我們可以發現當  $\theta_A$  固定時，轉動液晶盒後得到的反射率不會有變化，因此在這條件下，利用旋轉液晶樣品及檢光片的方法無法得到厚度及扭轉角，分析其原因，我們發現在  $nd/$  落在圖 3.8 區間內時，剛好符合 Gooch-Tarry 's first minimum condition，也就是說  $X = \frac{\pi}{2}$ ，此時液晶的光學矩陣會變成單位矩陣，因此只要  $X$  落在  $\frac{\pi}{2}$  附近，都會出現如圖 3.8 所示之結果，一個簡單又可行的方法就是換光源，例如若以 632.8nm 的雷射為光源而得到圖 3.8 的結果，若我們換成以 550nm 的雷射為光源，就可以得到如圖 3.9 所示之結果，因此前述之方法也就可以適用了。

$$M = \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{G \sin X}{2X} & f \frac{\sin X}{X} \\ -f \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{G \sin X}{2X} \end{bmatrix}$$

若令  $X = n\pi$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



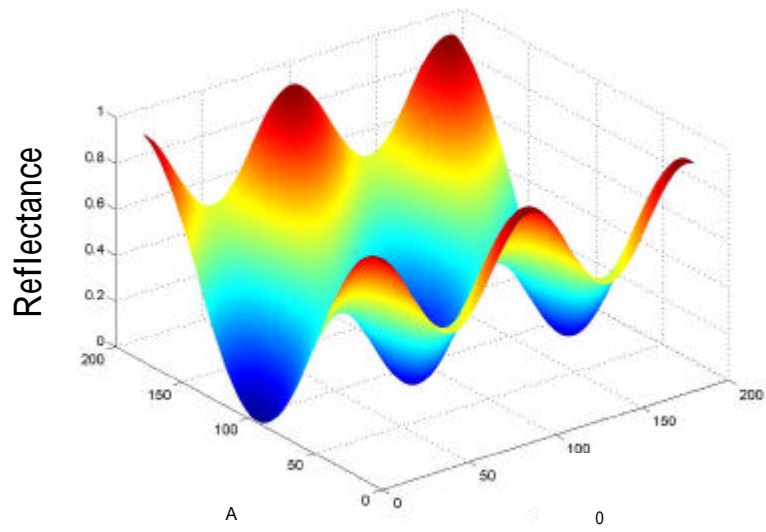


圖 3.9、反射率與液晶盒位置及檢光片夾角關係圖  
( 由 632.8nm 改成 550nm )

### 3.1.2、旋轉檢光片法

由於在 3.1.1 節中，我們在求解厚度及扭轉角時必須轉動液晶盒，而在實驗中轉動液晶盒時，雷射光照在液晶盒上的光點會有些許的偏移，因此會造成實驗結果有誤差出現，在本節中，我們將介紹另一種可同時量測液晶厚度及扭轉角，但卻不用旋轉液晶盒的方法。

將 3.4 式重列如下：

$$R = \frac{1}{2} [1 + (\mathbf{a}_c \cos 2\mathbf{y}_p + \mathbf{a}_s \sin 2\mathbf{y}_p) \cos 2\mathbf{y}_A + (\mathbf{b}_c \cos 2\mathbf{y}_p + \mathbf{b}_s \sin 2\mathbf{y}_p) \sin 2\mathbf{y}_A]$$

$$\text{令 } \mathbf{y}_p = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{2} [1 + \mathbf{a}_c \cos 2\mathbf{y}_A + \mathbf{b}_c \sin 2\mathbf{y}_A]$$

$$\text{令 } \mathbf{y}_p = \frac{\mathbf{p}}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{2} [1 + \mathbf{a}_s \cos 2\mathbf{y}_A + \mathbf{b}_s \sin 2\mathbf{y}_A]$$

我們觀察到其結果為一直流成份和兩個弦波的組合，因此我們可以利用展開成傅立葉級數的方法將反射率的各個成份分解出來，假設在  $\mathbf{p}=0$  的情況下所測得的反射光強度為

$$I = I_0 (1 + \mathbf{a}_c \cos 2\mathbf{y}_A + \mathbf{b}_c \sin 2\mathbf{y}_A) \quad (3.9)$$

$$I_0 = \frac{1}{\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} I d\mathbf{y}_A \quad (3.10)$$

$$\mathbf{a}_c = \frac{1}{\mathbf{p}I_0} \int_0^{\mathbf{p}} I \cos 2\mathbf{y}_A d\mathbf{y}_A \quad (3.11)$$

$$\mathbf{b}_c = \frac{1}{\mathbf{p}I_0} \int_0^{\mathbf{p}} I \sin 2\mathbf{y}_A d\mathbf{y}_A \quad (3.12)$$

$$w = \sqrt{\frac{1 - \mathbf{a}_c}{2}} = -\frac{\Gamma}{X} \sin X (\cos X \sin 2\mathbf{y}_0 + \frac{\mathbf{f}}{X} \sin X \cos 2\mathbf{y}_0) \quad (3.13)$$

$$u = \frac{\mathbf{b}_c}{2w} = -\frac{\Gamma}{X} \sin X (\cos X \cos 2\mathbf{y}_0 - \frac{\mathbf{f}}{X} \sin X \sin 2\mathbf{y}_0) \quad (3.14)$$

$$t = 1 - w^2 - u^2 = 1 - \frac{\Gamma^2 \sin^2 X}{2X^2} \quad (3.15)$$

因此我們只要轉動檢光片，即可得到 3.13、3.14 及 3.15 三式，可惜的是三條方程式只有二個是獨立的，因此我們只能用它來求二個變數，在求厚度及扭轉角時，入射面液晶指向矢的角度仍然必須知道。但由於在 3.15 式中，其關係式與  $\theta_0$  無關，因此在求解時，可以減低因入射面液晶指向矢角度沒有對準而差生的誤差，我們也可以直接利用 3.15 式，在扭轉角為已知的情況下，可以不必考慮入射面液晶指向矢的角度而得精確的厚度解。

另外，我們也可以 3.9 式重寫如下：

$$\begin{aligned} I &= I_0(1 + \mathbf{a}_c \cos 2\mathbf{y}_A + \mathbf{b}_c \sin 2\mathbf{y}_A) \\ &= I_0[1 + R_c \cos(2\mathbf{y}_A - \mathbf{q})] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$R_c = \sqrt{\mathbf{a}_c^2 + \mathbf{b}_c^2}$$

$$\mathbf{q} = \tan^{-1}\left(\frac{\mathbf{b}_c}{\mathbf{a}_c}\right)$$

$$I_0 = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}$$

$$R_c = \frac{I_{\max}}{I_0} - 1$$

$$\mathbf{a}_c = \sqrt{\frac{R_c^2}{1 + \tan \mathbf{q}}} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{a}_c \tan \mathbf{q} \quad (3.18)$$

為量到反射光強度最大時的角度再乘以 2，如圖 3.9 所示。R 和  
 得到後，就可以求出  $\alpha$  及  $\beta$  及 t、u 及 w。

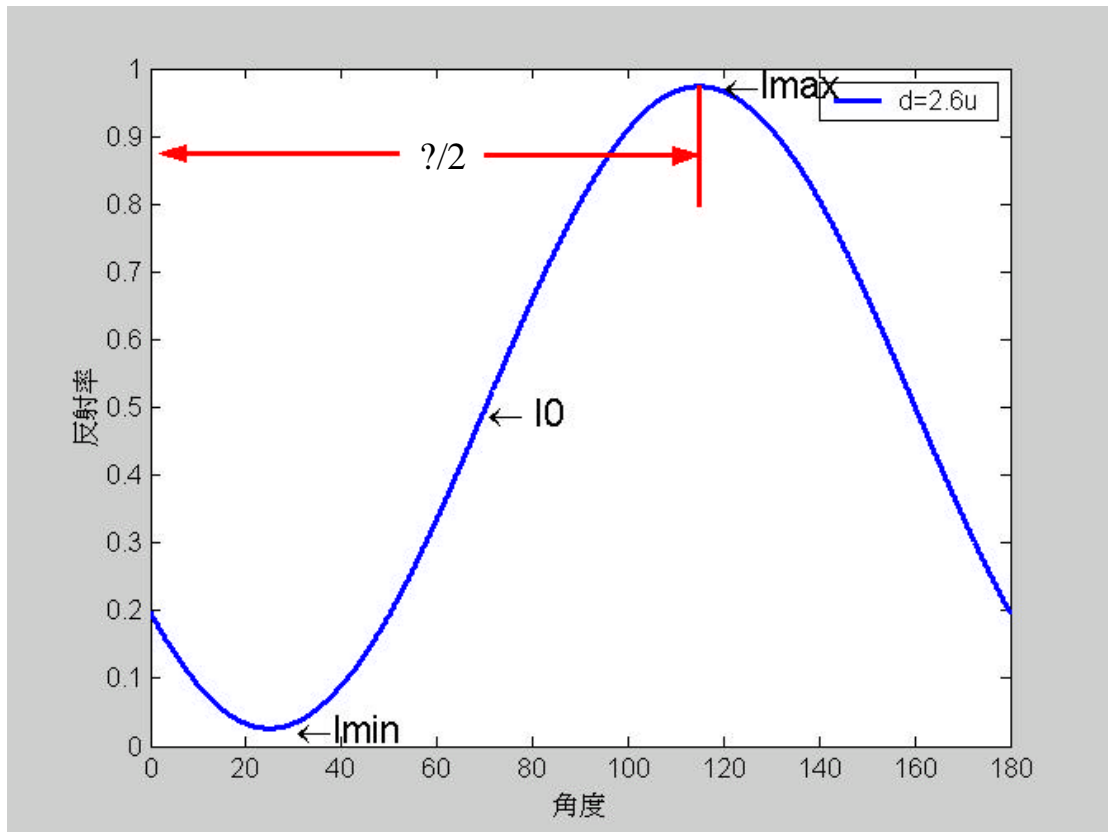


圖 3.9、旋轉檢光片時的反射率對角度圖

### 3.2、入射面液晶指向矢角度為未知

當入射面液晶指向矢的角度為未知時，我們可以嘗試著找尋它和其他變數的關係式，如此將可利用此關係式代入 3.1 節所述的方法求解液晶盒的厚度及扭轉角，我們將介紹三種找尋入射液晶指向矢角度的方法。

#### 3.2.1、加電壓及旋轉液晶盒

在crossed polarizer下，令 $y_p = 0$

$$R = \left(\frac{\Gamma}{X} \sin X\right)^2 \left(\cos X \sin 2y_0 + \frac{f}{X} \sin X \cos 2y_0\right)^2$$

其中， $X = \sqrt{f^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$ ，若令 $\frac{\Gamma^2}{4} \ll f$  則  $X \cong f$

$$R = \left(\frac{\Gamma}{f} \sin f\right)^2 \sin^2(f + 2y_0)$$

$$R = R_{\max} \Rightarrow y_0 = \frac{mp}{4} - \frac{f}{2} \dots\dots\dots(3.19)$$

$$R = R_{\min} \Rightarrow y_0 = \frac{np}{2} - \frac{f}{2} \dots\dots\dots(3.20)$$

但液晶指向矢必須滿足

1. 扭轉角必須為線性地旋轉。
2. 液晶盒每一層的 phase retardation 必須一致。

圖 3.10 為我們使用 1D\_Dimos 模擬軟體模擬不同電壓下指向矢分佈的結果，電壓由 0 伏特加至 4.6 伏特，在圖中可以觀察到當所施加的電壓愈高時，扭轉角偏離線性的角度就愈大。且兩側的液晶指向矢

傾角變化很劇烈。

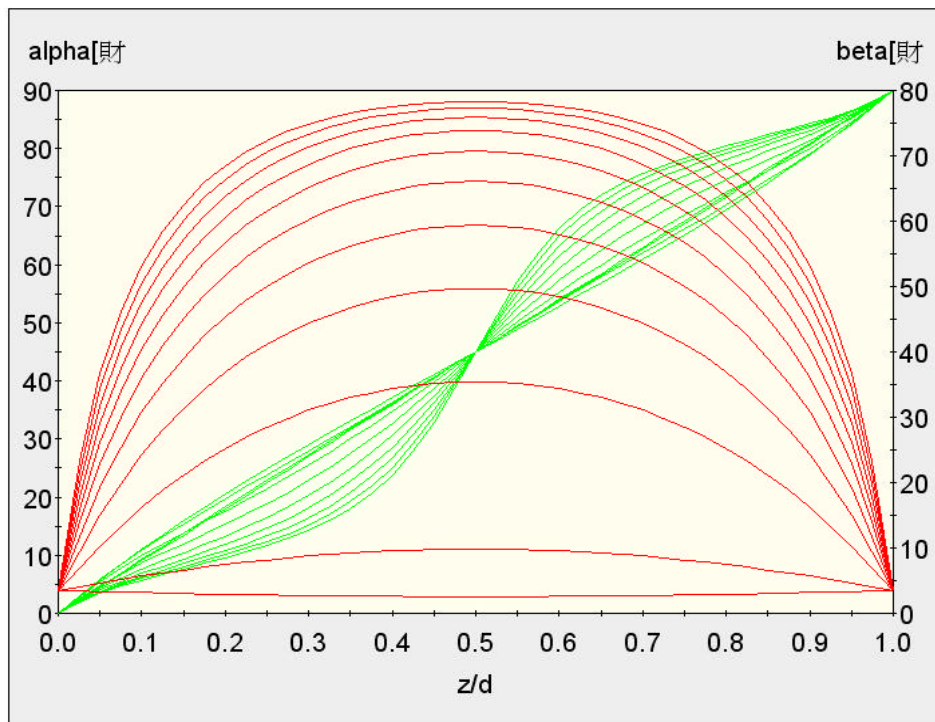


圖 3.10、1D\_Dimos 模擬不同電壓下指向矢分佈的結果

雖然公式的前提已經不存在了，但仍可得到近似的結果，因此我們必須評估誤差的大小。因此我們應用 2X2 Jones Matrix 的原理並自己寫程式來計算各個電壓下旋轉液晶盒的光反射率，並找尋反射率為最低時的角度，得到如圖 3.11 所示之結果。

圖中不同曲線代表不同條件下所模擬出來的結果，所有的曲線在高電壓時都會有接近 3.20 式的結果，但都會有一小於 0.5 度的誤差，且當扭轉角愈小或厚度愈大時，曲線上升斜率就愈小，代表著愈加更高的電壓才可以達到近似的結果，當電壓愈高時，反射光強度就愈弱，實驗量測到數據的誤差也愈大。

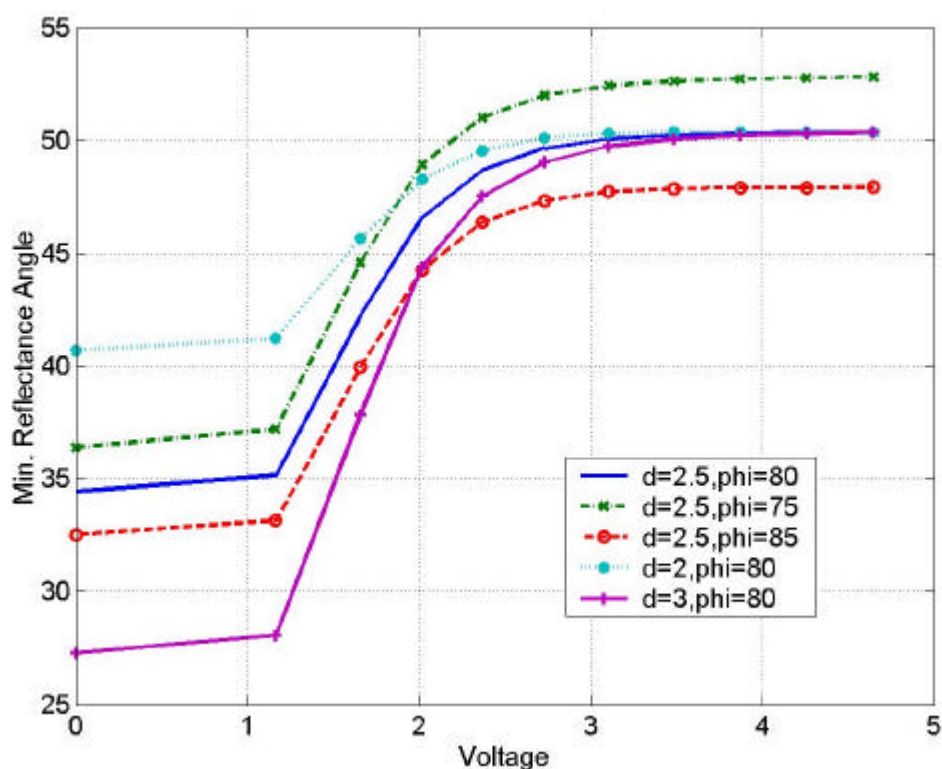


圖 3.11、不同電壓時對應反射率最低時的液晶盒角度

當所使用的液晶為  $80^\circ\text{MTN}$  時，由 3.20 式當  $n=1$  時，可以計算出當加高電壓時，反射率最小時的液晶盒角度應為  $50^\circ$ ，但由圖中可以觀察到在高電壓時，反射率最小時的液晶盒角度已經偏離了為  $50^\circ$ ，但偏離的角度小於  $0.4^\circ$  以內，且由於在高電壓時，反射率會很小，實驗上幾乎無法判斷正確的反射率值，圖中當電壓為 3.0 伏時，3.20 式的誤差已經在  $\pm 0.1$  度以內了，因此實驗上我們取在這電壓時所得到的值。

當找到 3.20 式的關係式後，就可將其代入 3.13、3.14 及 3.15 式求出厚度、扭轉角及入射面液晶指向矢的角度。

### 3.2.2、加電壓及旋轉 Half Wave-Plate

令  $\gamma_p=0$  ,  $\gamma_A=\pi/2$  , 旋轉 Half-Wave Plate , 反射率可以表示為

$$\begin{aligned}
 R &= |AHT^T M^T MTHP|^2 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\gamma_H & \sin 2\gamma_H \\ \sin 2\gamma_H & -\cos 2\gamma_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma_0 & -\sin \gamma_0 \\ \sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{G \sin X}{2X} & -f \frac{\sin X}{X} \\ f \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{G \sin X}{2X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{G \sin X}{2X} & f \frac{\sin X}{X} \\ -f \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{G \sin X}{2X} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_0 & \sin \gamma_0 \\ -\sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\gamma_H & \sin 2\gamma_H \\ \sin 2\gamma_H & -\cos 2\gamma_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \left( \frac{\Gamma \sin X}{X} \right)^2 \left[ \cos X \sin(4\gamma_H - 2\gamma_0) - \frac{f}{X} \sin X \cos(4\gamma_H - 2\gamma_0) \right]^2 \\
 \text{若使 } \frac{\Gamma^2}{4} \ll f \text{ 則 } X \cong f \Rightarrow R &= \left( \frac{\Gamma \sin f}{f} \right)^2 \sin^2(4\gamma_H - 2\gamma_0 - f)
 \end{aligned}$$

其中  $\gamma_H$  為 Half-Wave Plate 與參考軸的夾角，如圖 3.12 所示。

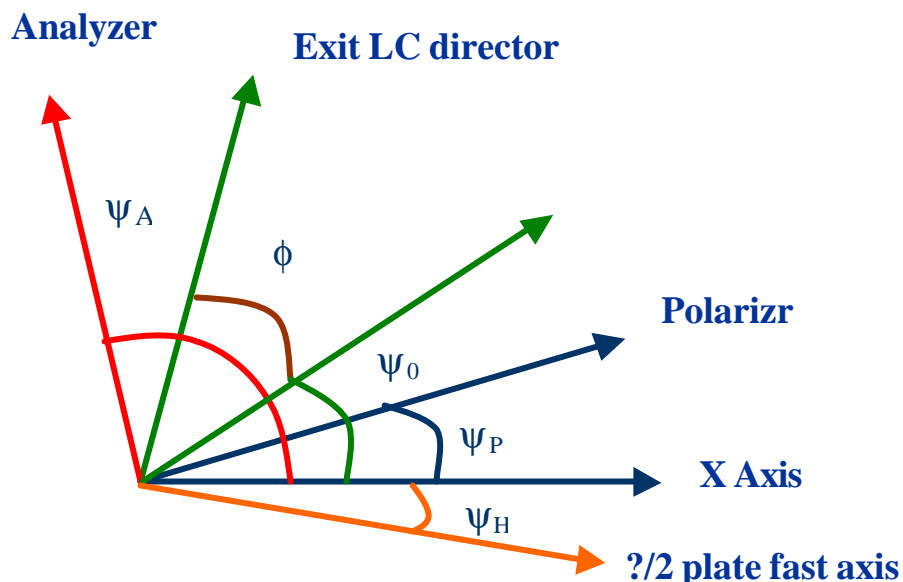


圖 3.12、Half-Wave Plate 等與參考軸相對位置示意圖

將 Half-Wave Plate 以固定頻率旋轉，則可以利用讀取鎖相放大器



(Lock-In Amplifier)的 值， 和入射面液晶指向矢角有如下的關係：

$$q = 4y_0 + 2f \dots \dots \dots (3.21)$$

當找到 3.21 式的關係式後，就可將其代入 3.13、3.14 及 3.15 式求出厚度、扭轉角及入射面液晶指向矢的角度。

### 3.2.2、雙波長法

令兩個不同波長的雷射光源波長為  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$

$$\Gamma_1 = \frac{2p}{I_1} \Delta n_1 d$$

$$\Gamma_2 = \frac{2p}{I_2} \Delta n_2 d$$

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{I_2 \Delta n_1}{I_1 \Delta n_2} \dots\dots\dots(3.22)$$

利用 3.1 前中旋轉偏光片法得到  $t$ 、 $u$  及  $w$  的關係式，並令

$$t_1 = 1 - \frac{\Gamma_1^2 \sin^2 X_1}{2X_1^2} \dots\dots\dots(3.23)$$

$$t_2 = 1 - \frac{\Gamma_2^2 \sin^2 X_2}{2X_2^2} \dots\dots\dots(3.24)$$

$$X_1 = \sqrt{f^2 + \frac{\Gamma_1^2}{4}} \quad ; \quad X_2 = \sqrt{f^2 + \frac{\Gamma_2^2}{4}}$$

將 3.22 式代入 3.23 及 3.24 式中，即可求出厚度及扭轉角。若將得到的結果再代入 3.13 或 3.14 式中，即可求出入射面液晶指向矢的方位角。