

第一章 序論

1.1 引言

傳統光學元件是以幾何光學理論為基礎，加工技術主要為研磨、拋光，所製作的光學元件尺寸較大，約厘米等級，元件的主要特性為折射及反射，體積大、重量重，因而較難進行元件的微小化。

以光波繞射理論為基礎、微米尺寸大小、重量輕的繞射光學元件，可以開發出傳統光學元件所不具有的功能的元件，諸如：多焦點、波陣面的整形、特定空間強度分佈...等。且伴隨著加工技術的進步及多樣化，諸如：鑽石研磨加工(Diamond turning)、光束直寫技術(beam writing)、半導體的微影技術(VLSI Lithography)、微射出成形(micro-jet printing)...等，使其具備系統微小化、輕型化、積體化及大量複製的發展優勢，其目前的發展趨勢主要有下面幾個方面：

- (1)在傳統的光學元件上加入繞射光學元件，製作繞折射複合元件，可減少元件數目，提高其光學性能。
- (2)微型元件及微光學陣列的開發。
- (3)和其他科技領域相結合，諸如微機械、微電子領域相結合，拓展應用的範疇。

1.2 關於本論文

光纖通訊系統中的多工分波系統，是在一根光纖中，同時傳送多個不同的光載波信號的通信系統，可以使光纖通信的容量成倍數增加，提高使用的效益。應用於多工分波系統的放大器摻鉕放大器（Erbium-Doped Fiber Amplifier, EDFA）成功商用化之後，解決了多工分波後每個頻段訊號降低的缺點，多工分波技術逐漸被人們所注意。隨著多工分波技術的逐漸提升，可以將光源分出越來越多個頻道，目前光通訊界常用的高密度多工分波系統（Dense Wavelength-Division Multiplexing, DWDM）大多是在 1530~1565nm 的波段中，分出 32 個或更多的波長。

在寬頻需求日益增加的情況下，高密度分波多工系統可在不增加光纖網路鋪設成本之下倍數增加頻寬，可說是寬頻需求的救星。

DWDM 系統中其中很關鍵的元件為解多工器（Demultiplexer），具備將同一根光纖中各種不同波長的光的光分開到不同光纖中的能力。因為 DWDM 系統的頻道間距很小，所以需要分波能力相當好的光學元件才能勝任這種解多工的任務。而製作此元件的技術有很多種，包括光學鍍膜、陣列光波導元件、全光纖式元件、傳統繞射式光柵...等。本論文主要是利用稜鏡光柵的結構去設計易於光學對準、可串接提高效能、解析多頻道的高密度波長解多工器。

第二章 基本理論

2.1 純量繞射

2.1.1 繞射的發現、討論的歷史

1665年 Grimaldi 是第一個正確的報告並描述繞射現象的人，其裝置如圖 2.1：

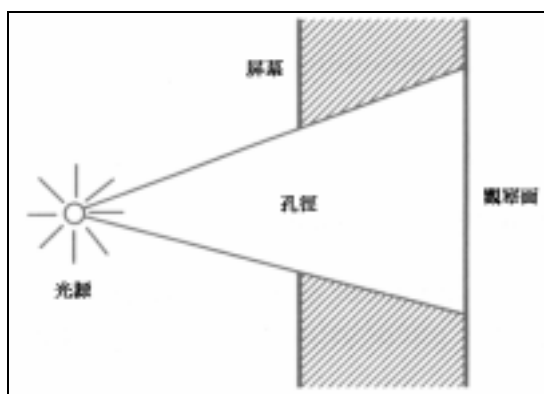


圖 2.1 光（微粒子）經孔徑情形

當時解釋光現象被接受的理論是將光視為微粒子，則邊緣變化應是很明顯的。其報告指出，在屏幕後的光自亮到暗是漸變的而非突然改變的。

1678年 Christian Huygens 首先提出光的波動理論，是第一個提出理論去解釋繞射現象的人，他認為在波前（wavefront）上的每一點都可以被視為新的次級球面的擾動源，各自產生二次子波（secondary wavelet），下一瞬間所觀察到波前可以用二次子波的包絡（envelope）去構成。圖示如圖 2.2。

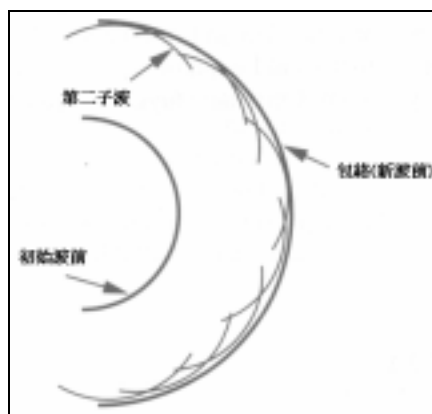


圖 2.2 Huygens 的二次子波

1804年 Thomas Young 提出干涉（interference）的概念而鞏固了波動理論。

- 1818年 Augustin Jean Fresnel 結合 Huygens 及 Thomas 的概念，任意地假設 Huygens 所提出的第二子波的振幅相位，彼此互相干涉，而可以相當準的推算出繞射圖樣。
- 1860年 Maxwell 確認光是一種電磁波。
- 1882年 Gustav Kirchhoff 給予繞射理論穩固的數學基礎，成功地證明 Fresnel 所假設的振幅、相位是光的波動特性邏輯上推論的結果。其提出的理論稱之為 Huygens-Fresnel principle。
- 1892~1894年 1892年 Poincare、1894年 Sommerfeld 分別證明 Kirchhoff 提出假定的內在不一致性。Sommerfeld 修改 Kirchhoff 的理論提出 Rayleigh-Sommerfeld theory。

2.1.2 從向量到純量理論

假設光在介電質 (dielectric medium) 的環境下傳播，介電值具有下列特性：

- * 線性 (linear) --- 滿足線性疊加特性
- * 各向同性 (isotropic) --- 與波的極化 (polarization) 無關
- * 均質性 (homogeneous) --- 整個傳播範圍電容率 (permittivity) 為定值
- * 非色散的 (nondispersive) --- 電容率與傳遞的波的波長無關

若同時假設波在非磁性的 (nonmagnetic) 介質中傳遞，即：透磁率 (permeability) 為定值 μ_0 (真空透磁率)。

由馬克士威爾方程式 (Maxwell' s equation) 推出波動方程式：

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1-1)$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1-2)$$

其中 \bar{E} 為電場 (electric field)， \bar{H} 為磁場 (magnetic field)， n 為介質的折射率 (refractive index)。上述兩方程式各分量皆遵循相同的純量方程式，例如 E_x 遵循下列方程式：

$$\nabla^2 E_x - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1-3)$$

即對 E_y, E_z, H_x, H_y, H_z 亦相同，因此可以簡化所有的電場、磁場的分量

方程式成一個純量方程式：

$$\nabla^2 u(P,t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1-4)$$

其中 $u(p,t)$ 表示著任一個純量場。總而言之，當光在介電值中傳遞時，所有電場及磁場的分量皆會表現出相同的行為而可以用單一個純量波動方程式 (scalar wave equation) 來表示。然而，純量理論只是近似解並非嚴格解，在邊界上電場 \bar{E} 、磁場 \bar{H} 的耦合 (coupling) 會引入，因此使用純量理論必須承擔一定程度的誤差，這些誤差是由於光通過面積中一小部份的邊界所引入的。

在光經過孔徑 (aperture) 繞射的情況下，若孔徑的面積相較於波長尺寸大很多，則邊界上電場、磁場的耦合效應會很小。因此在繞射結構尺寸相較於光波長尺寸大很多的情況下，將向量理論轉化成較簡化的純量繞射原理會是正確的。

2.1.3 繞射公式推導

(1) Helmholtz 方程式

由上述的純量理論，我們可以將光在位置 P 、時間 t 的擾動以函數 $u(P,t)$ 表示，對單色光 (monochromatic wave) 而言，純量場可以表示為：

$$u(P,t) = A(P) \cos[2\pi\nu t + \phi(P)] \quad (2.1-5)$$

其中 $A(P)$ 及 $\phi(P)$ 分別為位於 P 點的振幅 (amplitude) 及相位 (phase)， ν 為光頻率 (optical frequency)。其複數表示式：

$$u(P,t) = \text{Re}\{U(P) \exp(-j2\pi\nu t)\} \quad (2.1-6)$$

其中 $\text{Re}\{\}$ 是指實數部分，其中 $U(P)$ 為空間的複數函數：

$$U(P) = A(P) \exp[+j\phi(P)] \quad (2.1-7)$$

若用函數 $u(P,t)$ 的實數部分去表示光波的擾動，則在空間中的無源點 (source free space) 其必須滿足波動方程式：

$$\nabla^2 u - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1-8)$$

由於時間項的變化是已知的，將 (2.1-6) 式帶入 (2.1-8) 式，可以得到與時間獨立的方程式，稱之為 Helmholtz 方程式：

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \quad (2.1-9)$$

其中 k 是波數 (wave number) :

$$k = 2\pi n \frac{V}{c} = k_0 n \quad (2.1-10)$$

其中 k_0 是光波在真空中的波數 (wave number)，我們可以假想成事實上在任何單色波的複振幅在真空中 ($n=1$) 或均質性 (homogeneous) 介質中 ($n>1$)，必須滿足此方程式。

(2) Green 定理

利用數學上推導已知的關係式 Green 定理，可以幫助我們計算空間中觀察點的複振幅 U ，其描述如下：

$U(P)$ 、 $G(P)$ 是空間中任意兩點的複函數，假設 S 是包圍著體積 V 的封閉曲面，若函數 U 、 G 及其一次、二次微分在 S 上是單值且連續的，則我們可以得到下列關係式：

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \quad (2.1-11)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿著指出 S 面垂直方向的偏微分

(3) Helmholtz 及 Kirchhoff 積分定理 (The Integral Theorem of Helmholtz and Kirchhoff)

Kirchhoff 根據此積分定理計算繞射問題，此定理利用積分形式去表示在任意點的齊次波方程式的解，主要是利用任意環繞該點周圍面上點的解及其一次微分來表示該點的解。此原理先前已由 Helmholtz 推得。

假設觀察點為 P_0 ，且假設 S 是包圍著該點的任意曲面，此原理是利用面 S 上的解去表示在 P_0 的解。如圖 2.3 所示：

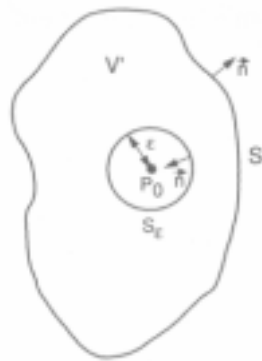


圖 2.3 Kirchhoff 積分面

Kirchhoff 選擇自點 P_0 向外擴散振幅為一的球面為 S 面，因此在 S 面上任一點 P_1 的擾動 Kirchhoff 用函數 G_k (以下簡寫為 G) 表示為：

$$G_k(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (2.1-12)$$

其中 r_{01} 表示點 P_0 指向點 P_1 的向量 \vec{r}_{01} 長度，由於在 Green 定理中函數 G 必須在邊界包圍的內部體積 V 為一次、二次可微分，因此必須排除函數不連續點 P_0 ，故取很小的球面 S_ε ，其半徑 ε ，內部包含點 P_0 ，體積 V' 表示在面 S 及面 S_ε 間的體積，包圍面以 $S' = S + S_\varepsilon$ 表示。

在體積 V' 內部中，由於向外擴的球面波滿足 Helmholtz 方程式，可得：

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0 \quad (2.1-13)$$

，而將兩個 Helmholtz equation 帶入 Green' s equation 的左邊得：

$$\iiint_{V'} (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dv = -\iiint_{V'} (UGk^2 - GUK^2) dv \equiv 0 \quad (2.1-14)$$

因此得

$$\iint_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (2.1-15)$$

即

$$-\iint_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \quad (2.1-16)$$

又在 S' 上的點 P_1 ，其 G 值為

$$G(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (2.1-17)$$

得

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (2.1-18)$$

其中 $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$ 指著指向面外的法向量 \vec{n} 和點 P_0 指向點 P_1 向量 \vec{r}_{01} 間的餘弦值。當點 P_1 落在面 S_ε 上時 $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -1$ ，且可得：

$$G(P_1) = \frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \quad (2.1-19)$$

假設面 S_ε 的半徑值 ε 取的非常小，則在點 P_0 可以表示成：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon^2 \left[U(P_0) \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) - \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \right] = 4\pi U(P_0) \quad (2.1-20)$$

將上式結果代入 (2.1-16) 式得：

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds \quad (2.1-21)$$

此結果稱為 Helmholtz 和 Kirchhoff 積分定理，由此定理可知，允許任意點 P_0 用環繞著該點的封閉面上的邊界值去表示該點的值。

2.1.4 Kirchhoff 計算經由不透明屏幕上孔徑的繞射現象

(1) Sommerfeld radiation condition

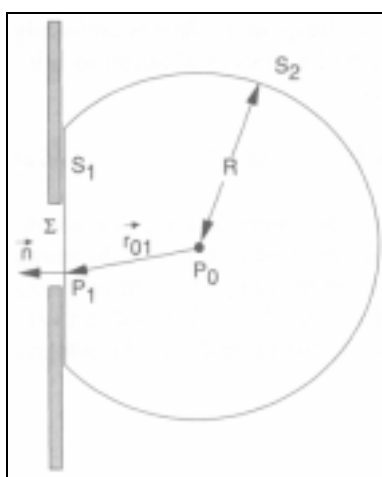


圖 2.4 Kirchhoff 計算經平屏幕繞射

如圖 2.4 所示，一個光波入射到屏幕，自屏幕上的孔徑左邊入射，計算孔徑後的點 P_0 的場。假設入射場為單色的 (monochromatic)，利用 Helmholtz 及 Kirchhoff 積分定理，選擇適當的積分面，則可以成功地計算出結果。Kirchhoff 選的封閉面 S 如上圖所示，共包含兩部份 S_1 直接貼緊屏幕的後方， S_2 則是中心點落在觀測點 P_0 上、半徑為 R 的球面，則

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.1-22)$$

其中

$$G = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (2.1-23)$$

在面 S_2 上

$$G = \frac{\exp(jkR)}{R} \quad (2.1-24)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left(jk - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{jkR}}{R} \approx jkG \quad (2.1-25)$$

其中的近似成立在 R 很大的時候，由上式，積分可化

$$\iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U(jkG) \right) ds = \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \right) R^2 d\omega \quad (2.1-26)$$

其中 Ω 為面 S_2 相對於 P_0 所張的立體角，其中 $|RG|$ 在面 S_2 上是均勻有限的，因此整個對面 S_2 的積分會消失，當擾動在各方向上具有此特性時：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \right) = 0 \quad (2.1-27)$$

上述的條件稱之為 Sommerfeld radiation condition。其成立條件為，波場 U 消逝的速度至少必須和發散的球面波一樣快，因此在此原理之下可以保證我們可以處理在面 S_2 向外發散的球面波，而不能處理向內的波，因為在我們處理的問題中，只有向外發散的波，其在面 S_2 上的積分貢獻總合為零。

(2) Kirchhoff 邊界條件 (The Kirchhoff Boundary Condition)

排除了面 S_2 的積分之後，現在觀測點 P_0 上的波場可以用無限大平面 S_1 上的波場及其沿法向量上的偏微分來表示，即：

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right\} ds \quad (2.1-28)$$

由於屏幕上除了孔徑之外為不透光的，Kirchhoff 使用了下列兩假設：

1. 通過面 S_1 上孔徑面積 Σ 處，面 S_1 上的波場 U 及其微分 $\partial U / \partial n$ 皆為定值，如同沒有屏幕一般。
2. 面 S_1 上、屏幕之後的幾何陰影部份，光場 U 及其微分 $\partial U / \partial n$ 皆為零。

上述條件即為 Kirchhoff 邊界條件 (Kirchhoff Boundary Condition)，第一個假設可以讓我們忽略屏幕對入射光場的影響，第二個假設讓我們可以省略除了孔徑部份其他部份的積分。因此積分化簡為：

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right\} ds \quad (2.1-29)$$

Kirchhoff 邊界條件簡化了積分計算，然而必須明白的是，上述的假設沒有一個是完全對的。存在屏幕必然會對孔徑處的光場造成某種程度上的擾動。此外，屏幕後的陰影永遠不會是完美的，光場必然會延伸到屏幕後數個波長的距離。然而，若孔徑的大小較大於波長，則這些效應可以安全的被忽略掉。

(3) Fresnel-Kirchhoff 繞射公式 (The Fresnel-Kirchhoff Diffraction Formula)

通常觀察點到孔徑的距離 r_{01} 是波長的很多倍，即： $k \gg 1/r_{01}$ ，因此可以更簡化 $U(P_0)$ 的表示式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(P_1)}{\partial n} &= \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \\ &\approx jk \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \end{aligned} \quad (2.1-30)$$

代入 (2.1-29) 式得

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \right] ds \quad (2.1-31)$$

假設一球面波入射孔徑，

$$U(P_1) = \frac{A \exp(jkr_{21})}{r_{21}} \quad (2.1-32)$$

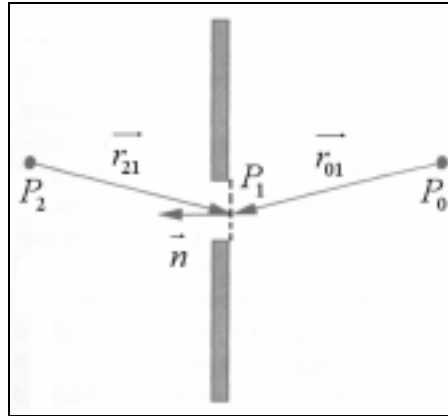


圖 2.5 Kirchhoff 繞射公式的向量取法

假設點光源位於點 P_2 ，點 P_2 到點 P_1 的距離為 r_{21} 且 r_{21} 為波長的很多倍（如圖 2.5），則 (2.1-31) 式可簡化為：

$$U(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[jk(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds \quad (2.1-33)$$

此結果只對單點光源入射成立，上式稱之為 Fresnel-Kirchhoff 繞射公式。我們注意到，上式中可看出置於點 P_0 的點光源在點 P_2 產生的效應等於置於等強度點光源在點 P_2 在點 P_0 產生的效應。此結果稱為 reciprocal theorem of Helmholtz。若將公式重新改寫成：

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} U'(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} ds \quad (2.1-34)$$

其中

$$U'(P_1) = \frac{1}{j\lambda} \left[\frac{A \exp(jkr_{21})}{r_{21}} \right] \left[\frac{\cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) - \cos(\bar{n}, \bar{r}_{21})}{2} \right] \quad (2.1-35)$$

現在可以將 (2.1-34) 式看成在觀測點的光場 $U(P_0)$ 相當於由位於孔徑無限多的第二點源所造成的。這些第二點源具有振幅及相位，用符號 $U'(P_1)$ 表示，其與入射光波前和入射到觀察點的角度有關。必須注意的是上式被限制在「單擴散點光源入射孔徑」的情況。

2.1.5 Rayleigh-Sommerfeld 的繞射計算

Kirchhoff 原理已經明顯地被實驗驗證其正確的結果並且被大量的應用。然而，其原理仍有一部份的內在不一致性，使其需要找到更令人滿意的數學延伸。Kirchhoff 原理的困難處在於必須同時用到邊界條件上的場強度及其沿法向量的微分。由眾所皆知的位能定理 (potential theory) 得知，若二維的位能函數及其沿法向量的微分皆在曲面的某部份為零，則位能函數必定遍及整個平面皆為零。由此可以類推，若三維波動函數的解在某部份的面上消失為零，則整個空間波動函數的解必定皆為零。因此，由 Kirchhoff 的兩邊界條件，暗指著在孔徑後方的場皆為零。而這與實際的物理情形不合。

Kirchhoff 定理 (Kirchhoff theory) 的內在不一致性被 Sommerfeld 所修正，他排除必須同時地使用邊界條件上的場強度及其沿法向量的微分為零。其理論稱之為 Rayleigh-Sommerfeld 原理。由前面的推導，得到此公式：

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right\} ds \quad (2.1-36)$$

從推導過程知其成立條件：

1. 純量繞射理論成立
2. 函數 U 、 G 皆滿足齊性純量波方程式
3. Sommerfeld radiation condition 成立

Kirchhoff 定理內的不一致性為必須在邊界條件上用到面 S_1 的 U 、 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 皆必須消失。Sommerfeld 希望排除同時用到 U 、 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 的邊界條件，則 Kirchhoff 定理內部的不一致性便可排除。其做法如下：

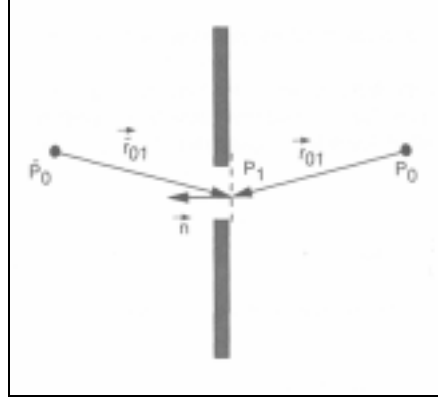


圖 2.6 Rayleigh-Sommerfeld 假設中 G 的點光源

Sommerfeld 假設 G 不只由位於點 P_0 的點光源所構成，同時還由位於點 P_0 的鏡面成像處點 \widetilde{P}_0 的第二點光源所構成，位於點 \widetilde{P}_0 的第二點光源和位於點 P_0 的點光源具有相同的波長然而兩光源震盪的相位差 180° 。則面 S_1 上點 P_1 的 G 值（以 G_- 表示）為：

$$G_-(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} - \frac{\exp(jk\widetilde{r}_{01})}{\widetilde{r}_{01}} \quad (2.1-37)$$

很明顯的，在孔徑 Σ 處（點 P_1 落在面 S_1 上） $G_-(P_1)$ 會消失，因此觀察點的場可表示成：

$$U(P_0) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ U \frac{\partial G_-}{\partial n} \right\} ds \quad (2.1-38)$$

上式稱為 The first Rayleigh-Sommerfeld 解。

$$\frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} - \cos(\vec{n}, \vec{\widetilde{r}}_{01}) \left(jk - \frac{1}{\widetilde{r}_{01}} \right) \frac{\exp(jk\widetilde{r}_{01})}{\widetilde{r}_{01}} \quad (2.1-39)$$

若點 P_1 落在面 S_1 上，則

$$\begin{aligned} r_{01} &= -\widetilde{r}_{01} \\ \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) &= -\cos(\vec{n}, \vec{\widetilde{r}}_{01}) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = 2 \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (2.1-40)$$

當 $r_{01} \gg \lambda$ ，則第二項可被忽略，得到：

$$\frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = 2jk \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (2.1-41)$$

即此處所推得的函數 $G_-(P_1)$ 的沿法向量偏微分為 Kirchhoff 所使用的 G_K 沿法向量偏微分的兩倍 ($G_K(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}$);

$$\frac{\partial G_K(P_1)}{\partial n} = jk \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}, \text{ 即:}$$

$$\frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = 2 \frac{\partial G_K(P_1)}{\partial n} \quad (2.1-42)$$

因此若使用 Kirchhoff 所選擇的 G_K 表示，觀察點 P_0 的光場可表為：

$$U_1(P_0) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ U \frac{\partial G_K}{\partial n} \right\} ds \quad (2.1-43)$$

另外使用相同方法推導，若使用的兩點光源是同相的，則函數可表：

$$G_+(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} + \frac{\exp(jk\widetilde{r}_{01})}{\widetilde{r}_{01}} \quad (2.1-44)$$

$$\frac{\partial G_+(P_1)}{\partial n} = \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} + \cos(\bar{n}, \widetilde{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{\widetilde{r}_{01}} \right) \frac{\exp(jk\widetilde{r}_{01})}{\widetilde{r}_{01}} \quad (2.1-45)$$

孔徑 Σ 處， $\frac{\partial G_+}{\partial n}$ 會消失，因此觀察點的場可表示成：

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} G_+ \right\} ds \quad (2.1-46)$$

因此若使用 Kirchhoff 所選擇的 G 表示， $G_+(P_1) = 2G_K(P_1)$ ，觀察點 P_0 的光場可表為：

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} G_K \right\} ds \quad (2.1-47)$$

將式 (2.1-43) 的 G_K 替換掉，可得：

$$U_1(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) ds \quad (2.1-48)$$

由於並沒有使用到 $\partial U / \partial n$ 的邊界條件，因此 Kirchhoff 原理內部的不一致性便被移除了。一般的表示法為：

$$U_1(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) ds \quad (2.1-49)$$

同樣的將式 (2.1-46) 的 G_K 替換可得：

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial U(P_1)}{\partial n} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} ds \quad (2.1-50)$$

若現在假設由自點 P_2 發散的球面波入射孔徑 (如圖 2.5)，

$$U(P_2) = A \frac{\exp(jkr_{21})}{r_{21}} \quad (2.1-51)$$

則可得

$$U_I(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[jk(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) ds \quad (2.1-52)$$

此結果稱為 Rayleigh-Sommerfeld 繞射公式。

同樣的使用 G_+ ，將 $\partial U(P_1)/\partial n$ 代入可得：

$$U_{II}(P_0) = -\frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[jk(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \cos(\bar{n}, \bar{r}_{21}) ds \quad (2.1-53)$$

2.1.6 Kirchhoff 及 Rayleigh-Sommerfeld 理論的比較

在使用 Green 函數推導繞射積分公式時，我們用符號 G_K 表示 Kirchhoff 所使用的 Green 函數，用 G_- 、 G_+ 表示 Sommerfeld 所使用的 Green 函數，則在孔徑 Σ 上 $\partial G_-/\partial n = 2\partial G_K/\partial n$ 、 $G_+(P_1) = 2G_K(P_1)$ ，其推導結果如下：

Kirchhoff 原理

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G_K - U \frac{\partial G_K}{\partial n} \right) ds \quad (2.1-54)$$

Rayleigh-Sommerfeld 解

$$U_I(P_0) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ U \frac{\partial G_K}{\partial n} \right\} ds \quad (2.1-55)$$

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} G_K \right\} ds \quad (2.1-56)$$

比較上述三式可得到此結果：

『Kirchhoff 的解是 Rayleigh-Sommerfeld 的解的算術平均數』

比較球面波入射的情形，可知兩者的差異僅在傾斜因子 (obliquity factor ψ)，因此我們可以寫出共通式如下：

$$U(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[jk(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \psi ds \quad (2.1-57)$$

即：其中傾斜因子 ψ ：

$$\psi = 1/2 \left[\cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) - \cos(\bar{n}, \bar{r}_{21}) \right] \cdots \cdots \text{Kirchhoff 原理}$$

$$\psi = \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) \cdots \cdots \text{First Rayleigh-Sommerfeld 解}$$

$$\psi = -\cos(\bar{n}, \bar{r}_{21}) \cdots \cdots \text{Second Rayleigh-Sommerfeld 解}$$

特殊情況下，當無窮遠的點光源產生垂直入射的平面波照明之下，其傾斜因子 ψ ：

$$\psi = 1/2(1 + \cos \theta) \cdots \cdots \text{Kirchhoff 原理}$$

$$\psi = \cos \theta \cdots \cdots \text{First Rayleigh-Sommerfeld 解}$$

$$\psi = 1 \cdots \cdots \text{Second Rayleigh-Sommerfeld 解}$$

其中 θ 為向量 \bar{n} 和向量 \bar{r}_{01} 的夾角。

上述三個公式在遠場觀察圓孔繞射時，三者的結果相同。若是在屏幕後，沿軸上觀察圓孔繞射，則僅在靠近孔徑時，上述三公式得到的結果會有不同。

若考慮的是小角度繞射的問題，則上述三公式完全相同。當角度變小時，三式中的傾斜因子皆趨近於 1，三式中不同處便消失。

一般而言，除去 Kirchhoff 原理內部的不一致性外，Kirchhoff 原理較 Rayleigh-Sommerfeld 原理更具一般性，因為後者需要繞射孔徑是平面的，而前者不需要。然而，多數我們關心的問題中，其繞射狹縫多是平面的，所以這個一般性並不是太重要。事實上，我們通常選擇使用 First Rayleigh-Sommerfeld 解，由於其形式比較簡單。

2.2 遠場繞射 (Fraunhofer diffraction)

2.2.1 遠場繞射積分公式

Fresnel-Kirchhoff 繞射積分公式：

$$U(P) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{jk(r+s)}}{rs} \psi dS, \quad \psi = 1/2 [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})] \quad (2.2-1)$$

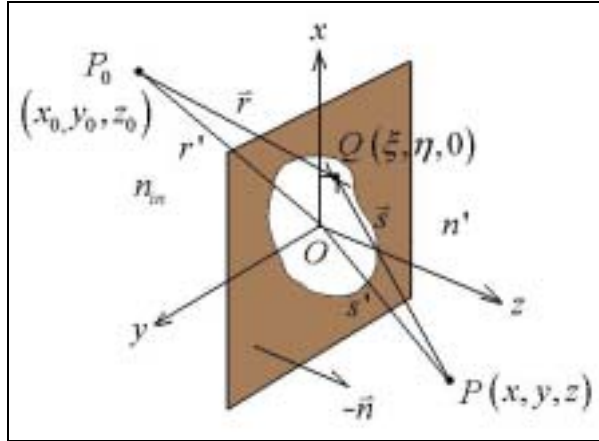


圖 2.7 經孔徑遠場繞射

若點 P_0 到 P 的距離遠大於孔徑的尺寸，則 $\psi = 1/2 [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})]$ 對整個孔徑而言並不會變化很大，假設 Q 是孔徑上的任一點，則線段 P_0QP 和線段 P_0P 並不會相差很遠，則 ψ 因子可以用 $\cos \delta$ 代替， δ 是線段 P_0P 和孔徑法向量的夾角而上式中的 $1/rs$ 可以用 $1/r's'$ 替代， r' 、 s' 分別是物點 P_0 、像點 P 到座標原點的距離：

$$U(P) = \frac{A \cos \delta}{j\lambda r's'} \iint_{\Sigma} e^{jk(r+s)} dS; \quad (2.2-2)$$

若 (x_0, y_0, z_0) 及 (x, y, z) 各自為物點 P_0 、像點 P 的座標， Q 為孔徑上的一點，其座標為 $(\xi, \eta, 0)$ ，則

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0)^2 \\ s^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z)^2 \\ r'^2 &= (x_0)^2 + (y_0)^2 + (z_0)^2 \\ s'^2 &= (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

若孔徑尺寸相較於 r' 、 s' 較小，則 r 、 s 可展開如下：

$$\begin{aligned} r &\sim r' - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} - \dots \\ s &\sim s' - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3} - \dots \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

則繞射積分公式可替換為：

$$U(P) = \frac{A \cos \delta}{j\lambda} \frac{e^{jk(r'+s')}}{r's'} \iint_{\Sigma} e^{jkf(\xi,\eta)} dS \quad (2.2-5)$$

其中

$$f(\xi,\eta) = -\frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} - \dots \quad (2.2-6)$$

若用方向餘弦 $l_0 = -\frac{x_0}{r'}, m_0 = -\frac{y_0}{r'}$ (2.2-7)

$$l = \frac{x}{s'}, m = \frac{y}{s'}$$

表示，則 $f(\xi,\eta)$ 可表為：

$$f(\xi,\eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r'} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s'} \right] \dots \quad (2.2-8)$$

我們可經由簡化去積分計算出像點 P 的光場，上述 $f(\xi,\eta)$ 若忽略二次方及高次項稱之為遠場繞射 (Fraunhofer diffraction)，當二次項不可忽略時稱之為近場繞射 (Fresnel diffraction)。

嚴格的來說，二次項及高階項只在 $r' \rightarrow \infty$ 、 $s' \rightarrow \infty$ 時才會消失，即當物點及觀察點均落在無窮遠時。然而，顯然地，當下式成立時，二次項對積分明顯無貢獻：

$$\frac{1}{2} k \left[\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r'} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s'} \right] \ll 2\pi \quad (2.2-9)$$

我們可以馬上確認上式成立的情形，如果我們用數學上推導的不等式

$$(l_0\xi + m_0\eta)^2 \leq (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.2-10)$$

及 l_0^2 、 m_0^2 、 l^2 、 m^2 不大於 1 的條件帶入，我們可以得到若滿足下列條件之一，則 (2.2-9) 式成立：

$$|r'| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda} \quad \text{且} \quad |s'| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda} \quad (2.2-11)$$

或

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} = 0 \quad \text{且} \quad l_0^2, m_0^2, l^2, m^2 \ll \frac{|r'|\lambda}{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}} \quad (2.2-12)$$

上述兩條件給了我們使用遠場繞射的條件，前者給定了 r' 、 s' 的距離

估算式，後者暗指著：假定物點及觀察點均很靠近 Z 軸，當觀測點落在平行孔徑的平面上時，亦會發生遠場繞射。

(2.2-11) 式對遠場繞射的距離限制是非常嚴格的，然而在實際的應用情形中，多半會在繞射孔徑後方加上一聚焦透鏡，聚焦透鏡的效果相當於提供一個相位矯正，對應消去遠場繞射積分中的二次指數項，如此在透鏡後焦平面上便可得到遠場繞射的場型。

在遠場繞射的情形下，令

$$p = (n'l - n_{in}l_0), \quad q = (n'm - n_{in}m_0) \quad (2.2-13)$$

代入，其中 n_{in} 、 n' 分別為入射光、出射光所在的介質折射率，則遠場繞射 (Fraunhofer diffraction) 積分公式可表為此形式：

$$U(P) = C \iint_{\Sigma} e^{-jk_0(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (2.2-14)$$

其中 C 為積分常數。由物點及觀察點的位置決定，在應用上常以其他的參量表示。假設打到孔徑上的總能量為 E ，由能量守恆可以推知抵達像平面的能量亦等於 E ，則：

$$\iint |U(p, q)|^2 dpdq = \frac{E}{R^2} \quad (2.2-15)$$

其中 R 是像點 P 到線段 PO 與平面交點的距離，而所有可能存在的 $U(p, q)$ 可用富立葉積分 (Fourier integral) 表示：

$$U(p, q) = \iint G(\xi, \eta) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (2.2-16)$$

其中 $G(\xi, \eta)$ 為瞳函數 (pupil function)，對一般的孔徑為：

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) &= \text{定值} \cdots \cdots \text{當點位於開口處} \\ G(\xi, \eta) &= 0 \cdots \cdots \text{當點在孔徑外時} \end{aligned} \quad (2.2-17)$$

且積分式是延伸整個 ξ, η 平面。

由富立葉積分轉換的 (Parseval 定理)，

$$\iint |U(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \iint |U(p, q)|^2 dpdq \quad (2.2-18)$$

假定孔徑面積為 D 且結合 (2.2-15) 及 (2.2-17) 式，則：

$$\frac{E}{\lambda^2 R^2} = |C|^2 D$$

解得：

$$C = \frac{1}{\lambda R} \sqrt{\frac{E}{D}} \quad (2.2-19)$$

因此，

$$U(p, q) = \frac{1}{\lambda R} \sqrt{\frac{E}{D}} \iint_A e^{-jk_0(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (2.2-20)$$

若我們以符號 I_0 表示在 $p=0$ 、 $q=0$ 中心的強度，則：

$$I_0 = |U(0,0)|^2$$

$$I_0 = \left(\frac{1}{\lambda R}\right)^2 \frac{E}{D} \left(\iint_A d\xi d\eta\right)^2 = \frac{ED}{\lambda^2 R^2} = C^2 D^2 \quad (2.2-21)$$

2.2.2 相關遠場繞射實例——矩形、狹縫及重複孔徑的繞射

(1) 矩形孔徑繞射

考慮一個矩形孔徑其尺寸為 $2a \times 2b$ 。將其中心點 O 放在平行邊緣 $O\xi$ 、 $O\eta$ 孔徑的中心處，則繞射積分為：

$$U(P) = C \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-jk_0(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta = C \int_{-a}^a e^{-jk_0 p\xi} dp \int_{-b}^b e^{-jk_0 q\eta} d\eta \quad (2.2-22)$$

又

$$\int_{-a}^a e^{-jk_0 p\xi} dp = -\frac{1}{jk_0 p} [e^{-jk_0 pa} - e^{jk_0 pa}] = 2 \frac{\sin k_0 pa}{k_0 p} \quad (2.2-23)$$

因此可得振幅為，

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left(\frac{\sin k_0 pa}{k_0 p}\right)^2 \left(\frac{\sin k_0 pb}{k_0 p}\right)^2 I_0 \quad (2.2-24)$$

已知中心振幅 $I_0 = C^2 D^2 = ED / \lambda^2 R^2$ ，其中 E 為打在孔徑 $D = 4ab$ 上的總能量。函數 $y = (\sin x / x)^2$ 圖形表示如圖 2.8：

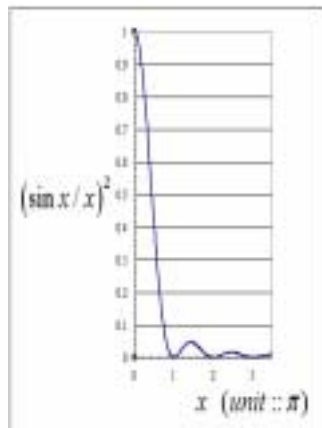


圖 2.8 函數 $y = (\sin x / x)^2$

其極大值在 $x=0$ 處 $y=1$ ，其局部極小發生在 $x=\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ ，局部極小值區分著其次的極大值，其次的極大值位置由方程式 $\tan(x)-x=0$ 給定（見表），其解的值近似於 $x=(2m+1)\pi/2$ ，其中 m 為整數。

表 2.1 $y=(\sin x/x)^2$ 前五個極大值

x	$y = (\sin x / x)^2$
0	1
$1.430\pi = 4.493$	0.04718
$2.450\pi = 7.725$	0.01648
$3.470\pi = 10.90$	0.00834
$4.479\pi = 14.07$	0.00503

我們可以發現強度分布 $I(P)$ 為零的位置是沿著平行矩形的邊的兩組平行線所構成的，定為：

$$k_0 pa = u\pi, k_0 pb = v\pi \quad (u, v = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2-25)$$

或是由 $p = (n'l - n_m l_0)$ ， $q = (n'm - n_m m_0)$ ， $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ 表為：

$$n'l - n_m l_0 = \pm \frac{u\lambda}{2a}, \quad n'm - n_m m_0 = \pm \frac{v\lambda}{2b} \quad (2.2-26)$$

(2) 單狹縫繞射

考慮上述情形的特例，即矩形孔徑沿某一方向無限延伸，假設有一沿 η 方向無限延伸的光源，由於 $q = (n'm - n_m m_0)$ ，其中 m_0 指出點光源的位置，則可以求出像面的強度為

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} I(P) dq = \frac{1}{k_0 b} \left(\frac{\sin k_0 pa}{k_0 pa} \right)^2 I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt \quad (2.2-27)$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \pi \quad (2.2-28)$$

因此

$$I' = \left(\frac{\sin k_0 pa}{k_0 pa} \right)^2 I_0' \quad (2.2-29)$$

其中

$$I_0' = \frac{\lambda}{2b} I_0 = \frac{2aE}{\lambda R^2} \quad (2.2-30)$$

此繞射圖案再次的被函數 $(\sin x/x)^2$ 所描述，是由一連串平行線光源的亮暗條紋所構成。常數 I_0' 為中心位置 $p=0$ 的強度。

(3) 重複孔徑的繞射

考慮屏幕上具有大量相同且類似方向排列的孔徑，假設 O_1, O_2, \dots, O_N 是一組類似放置的點，假設這些點相對位於屏幕上的座標為 $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \dots (\xi_N, \eta_N)$ 。則像平面的光場分佈可利用遠場繞射求出：

$$U(p, q) = C \sum_n \iint_{A_n} U(\xi, \eta) e^{-jk_0(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (2.2-31)$$

帶入變數變換 $\xi' = \xi - \xi_n, \eta' = \eta - \eta_n$ ：

$$\begin{aligned} U(p, q) &= C \sum_n \iint_A e^{-jk_0[p(\xi_n + \xi') + q(\eta_n + \eta')]} d\xi' d\eta' \\ &= C \sum_n e^{-jk_0[p\xi_n + q\eta_n]} \iint_A e^{-jk_0[p\xi' + q\eta']} d\xi' d\eta' \end{aligned} \quad (2.2-32)$$

此積分表示著繞射圖形等效於單一孔徑繞射的疊加。假若我們假設單一孔徑所造成的強度分佈為 $I^{(0)}(p, q)$ ，則由上式，全部的強度分佈可表示為：

$$\begin{aligned} I(p, q) &= |U(p, q)|^2 = I^{(0)}(p, q) \left| \sum_n e^{-jk_0[p\xi_n + q\eta_n]} \right|^2 \\ &= I^{(0)}(p, q) \sum_n \sum_m e^{-jk_0[p(\xi_n - \xi_m) + q(\eta_n - \eta_m)]} \end{aligned} \quad (2.2-33)$$

最簡單的情形即為只有兩個開孔的情形 ($N=2$)，即干涉理論：

$$\begin{aligned} I &= I^{(0)} \left\{ 2 + e^{-jk_0[p(\xi_1 - \xi_2) + q(\eta_1 - \eta_2)]} + e^{-jk_0[p(\xi_2 - \xi_1) + q(\eta_2 - \eta_1)]} \right\} \\ &= 4I^{(0)} \cos^2 \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (2.2-34)$$

2.3 稜鏡光柵 (Grism) 原理

2.3.1 稜鏡 (Prism) 特性

稜鏡有兩大用途，一是利用稜鏡材料折射率對波長的變化（色散），對光的不同組成波長進行分譜，使不同波長所組成的光束，在空間上按波長分開來；另一功能是利用光的折射和反射，改變光路的方向，以符合應用的需求。

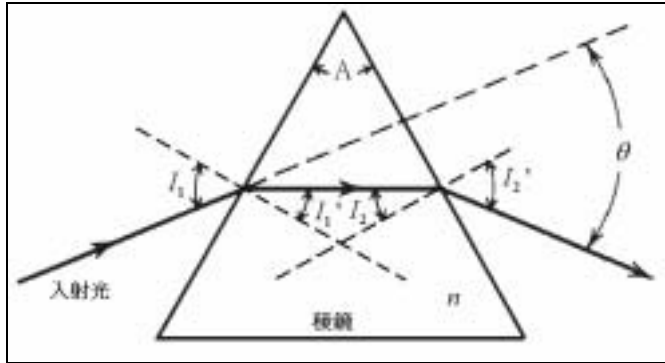


圖 2.9 光經稜鏡的路徑

(1) 稜鏡的偏轉特性

一典型的折射稜鏡如圖所示，頂角為 A 、入射角為 I_1 經第一面折射，其折射角為 I_1' ，光線被偏轉了 $I_1 - I_1'$ ，而同樣的在第二面光線被偏轉了 $I_2 - I_2'$ ，因此光線經過稜鏡的總偏向角 θ 為：

$$\theta = (I_1 - I_1') + (I_2 - I_2') = I_1 + I_2' - A \quad (2.3-1)$$

光線在兩折射面上滿足折射定律：

$$\begin{aligned} \sin I_1' &= \frac{1}{n} \sin I_1 \\ \sin I_2' &= n \sin I_2 \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

且 $I_2 = A - I_1'$ ，可推出偏向角 θ 與入射角 I_1 、稜鏡頂角 A 的關係式，其推導如下：

$$\begin{aligned} \sin I_2' &= n \sin I_2 = n \sin(A - I_1') \\ &= n(\sin A \cos I_1' - \cos A \sin I_1') \\ &= n\left(\sin A \sqrt{1 - \sin^2 I_1'} - \cos A \sin I_1'\right) \\ &= n\left(\sin A \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 I_1} - \frac{1}{n} \cos A \sin I_1\right) \end{aligned}$$

$$\sin(\theta + A - I_1) = \sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 I_1} - \sin I_1 \cos A \quad (2.3-3)$$

$$\theta = I_1 - A + \sin^{-1}\left(\sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 I_1} - \sin I_1 \cos A\right) \quad (2.3-4)$$

由上式可說明，偏轉角是折射率的函數，當折射率變大，偏轉角也隨著增加，在正常情形下，短波長折射率大於長波長折射率，因此短波長的偏轉角將大於長波長的偏轉角。

(2) 稜鏡的色散特性

在 (2.3-3) 式中，將入射角 I_1 視為常數，將偏向角 θ 當作折射率的函數進行微分，

$$\cos(\theta + A - I_1) \frac{d\theta}{dn} = \frac{n \sin A}{\sqrt{n^2 - \sin^2 I_1}} = \frac{\sin A}{\cos I_1'}$$

$$\frac{d\theta}{dn} = \frac{\sin A}{\cos I_1' \cos I_2'} \quad (2.3-5)$$

對波長的角色散 D 可表示為：

$$D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\sin A}{\cos I_1' \cos I_2'} \frac{dn}{d\lambda} \quad (2.3-6)$$

2.3.2 繞射光柵 (Diffraction Grating)

(1) 繞射光柵之原理

繞射光柵可以定義為可使入射波具有振幅 (amplitude) 或相位 (phase) 的週期性的變化的任意排列。我們可以用透射函數 (transmission function) 來描述光柵，其定義如下：

假定一透射或半透射的物體位於位於假想 $\xi\eta$ 平面上，使一平行單色光入射其方向以方向餘弦 l_0, m_0 定義。如圖 2.10 所示，其 η 軸垂直紙面方向，若不存在物體時，則 $\xi\eta$ 平面上光的擾動分布可由函數 $V_0(\xi, \eta) = A \exp[ik(l_0\xi + m_0\eta)]$ 表示，其中 $\exp(-i\omega t)$ 忽略未予考慮。當存在物體時，光的擾動會被調制成其他函數，我們以 $V(\xi, \eta)$ 表示，則物體的透射函數可表示為：

$$F(\xi, \eta) = \frac{V(\xi, \eta)}{V_0(\xi, \eta)} \quad (2.3-7)$$

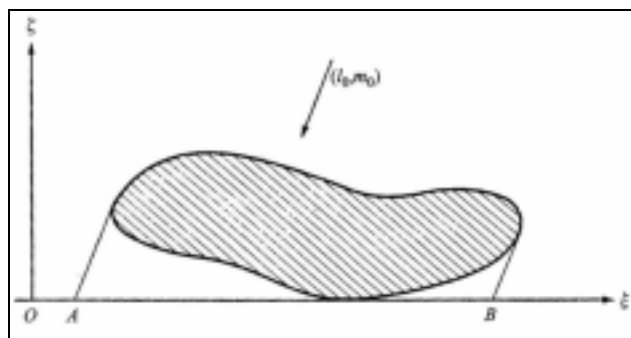


圖 2.10 光以方向 (l_0, m_0) 入射物體

一般來說， F 不只與 ξ 、 η 有關，亦與入射光的方向 (l_0, m_0) 有關。由於光通過物體時會改變其振幅及相位，所以通常透射函數為複數。在特殊的情況下，當物體只改變入射光波的振幅而不改變其相位（即：函數 F 的虛部為零），稱之為振幅型物體 (amplitude object)；若物體只改變入射光波的相位而不改變其振幅（即：函數 F 的絕對值為 1），稱之為相位型物體 (phase object)。

假如我們考慮光來自物體的反射光部分而非透射光部分，則稱上述函數為反射函數 (reflection function) 較適當，其定義方式相似，僅參考平面和入射光是落在物體的同一邊。

其物體幾何投影以外的 $|V/V_0|$ 為定值（圖中邊界以 A、B 表示），若陰影部分之外的區域以不透光屏幕遮蔽，則任意排列的物體的作用可看成是具有不均勻瞳函數 (pupil function) 的繞射狹縫，其中若狹縫的線寬度相較於波長大很多，則純量繞射公式的條件仍成立，差別僅在繞射積分內乘上 F 而已。

考慮一維光柵，其形狀任意、具 N 個溝槽，刻劃在平板的面上，假設其落在 $\xi\eta$ 平面上， η 是溝槽的方向、 d 是在 ξ 方向上的光柵週期。如圖 2.11 所示。

假設入射光位在圖 2.11 的平面上，入射方向和 $O\xi$ 夾了 θ_0 的角度， θ 是由落在距光柵很遠的觀察點 P 的連線計算與 $O\xi$ 的夾角。

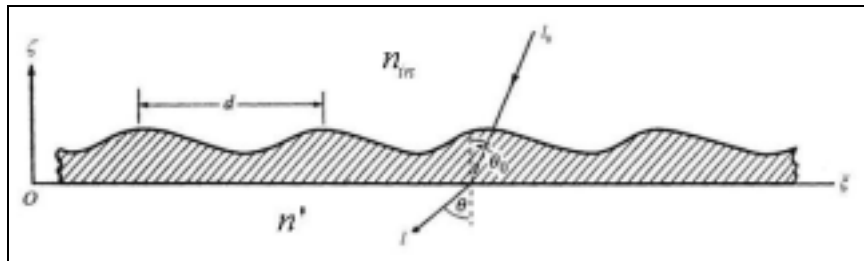


圖 2.11 光入射光柵

令

$$l_0 = \sin\theta_0, \quad l = \sin\theta, \quad p = n'l - n_m l_0 = n' \sin\theta - n_m \sin\theta_0 \quad (2.3-8)$$

觀察點 P 上的複振幅可以直接利用重複孔徑的繞射推導的公式計算，只是積分式中必須乘上單一週期元素的透射函數 (transmission function)。令 $q=0$ （即在 η 方向上入射出射光方向不發生變化）且

$$\xi_n = nd, \quad \eta_n = 0 \quad (n=0,1,2,\dots,N-1) \quad (2.3-9)$$

帶入式 (2.2-33) 我們可以得到

$$U(p) = U^{(0)}(p) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk_0 n p d} = U^{(0)}(p) \frac{1 - e^{-jNk_0 p d}}{1 - e^{-jk_0 p d}} \quad (2.3-10)$$

其中

$$U^{(0)}(p) = C \int_A F(\xi) e^{-jk_0 p \xi} d\xi \quad (2.3-11)$$

因此

$$\begin{aligned} I(p) = |U(p)|^2 &= \frac{(1 - e^{-jNk_0 pd})(1 - e^{+jNk_0 pd})}{(1 - e^{-jk_0 pd})(1 - e^{+jk_0 pd})} |U^{(0)}(p)|^2 \\ &= \frac{1 - \cos Nk_0 pd}{1 - \cos k_0 pd} I^{(0)}(p) \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

其中 $I^{(0)}(p) = |U^{(0)}(p)|^2$ ，若引入函數

$$H(N, x) = \left(\frac{\sin Nx}{\sin x} \right)^2 \quad (2.3-13)$$

則強度可改寫為：

$$I(p) = H\left(N, \frac{k_0 pd}{2}\right) I^{(0)}(p) \quad (2.3-14)$$

在討論此公式的含意之前，我們注意到光場分佈如同由一組具有相同振幅函數(amplitude function) $|U^{(0)}(p)|$ ，且個別間由於積分乘量 $k_0 pd$ 而具有相位差的同調光源所造成。為了觀察此相位差的重要性，我們考慮光柵上相鄰兩溝槽對應的兩點 A、B，如圖 2.12 所示。

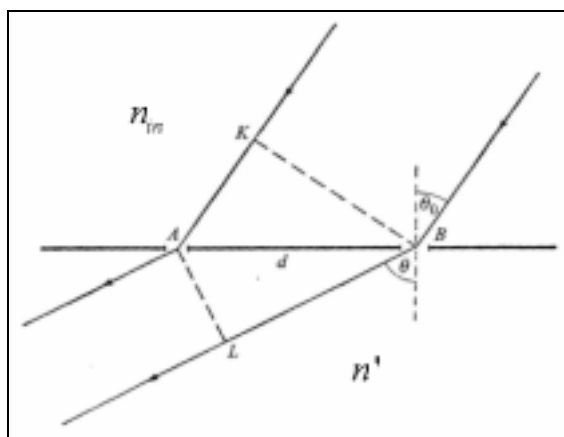


圖 2.12 相鄰兩點的光程

若不存在光柵結構，則抵達平面時兩點的光程差應該是固定的，即 $AK = n_{in} d \sin \theta_0$ ，K 是自點 B 作入射到點 A 的光線垂線的足點。

其次，自點 B 以 θ 方向出射的光和自點 A 出射的光其光路徑差了 $BL = n' d \sin \theta$ ，L 是自點 A 作點 B 以 θ 方向繞射光線垂線的足點，因在很遠的距離上觀察此光柵上相鄰兩溝槽對應兩點抵達的路徑差(path difference) 為

$$BL - AK = (n' \sin \theta - n_m \sin \theta_0) d = pd \quad (2.3-15)$$

對應的相位差為 $2\pi dp / \lambda = k_0 pd$ 。

式 (2.3-14) 中， $I(p)$ 可看成兩個函數的乘積，一為 $I^{(0)}(p)$ ，表示著光柵單一週期的效應；一為 H ，表示著由不同週期間產生的干涉效應。函數 $H(N, x)$ 的每一個極大值為 N^2 ，發生在 $\sin^2 x$ 消失之處，即， x 為 0 或 π 的整數倍時。因此 $H\left(N, \frac{kpd}{2}\right)$ 具有極大值 N^2 ，當：

$$p = n' \sin \theta - n_m \sin \theta_0 = \frac{m\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.3-16)$$

上式即所謂的光柵方程式 (grating equation)。

(2.3-16) 式和 (2.3-15) 相比較，其中 m 表示著在具有繞射極大值的方向上，相鄰兩溝槽對應兩點的光程差 (以波長數表示)，我們稱 m 為干涉階 (the order of interference)。

在主極大間有較弱的次大值，當 N 很大時，第一個次極大值只是主極大值的幾個百分比而已，次極大值間有強度為零的點分開，位於 $x = k_0 pd / 2 = \pm n\pi / N$ 之處，由方向表示：

$$p = n' \sin \theta - n_m \sin \theta_0 = \frac{n\lambda}{Nd}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.3-17)$$

其中 n/N 為整數時除外 (主極大位置)。

而函數 $I^{(0)}(p)$ 則取決於光柵單一週期的形式。假設繞射具有主極值落在某方向 $p = p'$ 上，其兩邊的極大值的下降變化相較於函數 H 的變化來的慢。則強度 $I(p)$ 的一般變化由干涉函數 (interference function) H 所決定，然而卻會被函數 $I^{(0)}(p)$ 所調變 (modulated)。因此 $I(p)$ 仍會有很明顯的極大值落在方向 $p = m\lambda / d$ 之處。由於這些方向皆與波長有關 ($m=0$ 除外)，我們發現光柵具有將非單色光分解成光譜階 (spectral order) 的能力。

為了解釋上面光柵的行為，我們考慮一連串的長等間距的狹縫，如圖 2.13 所示：

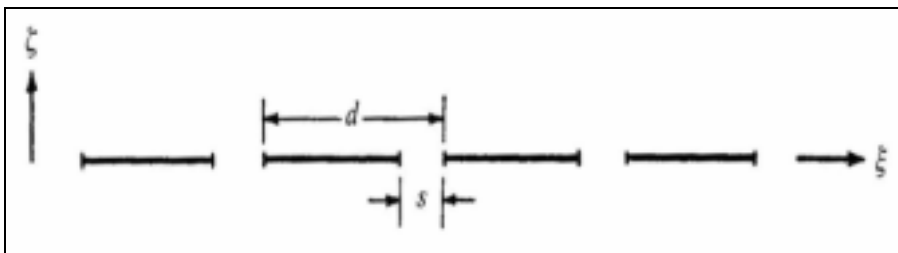


圖 2.13 多狹縫

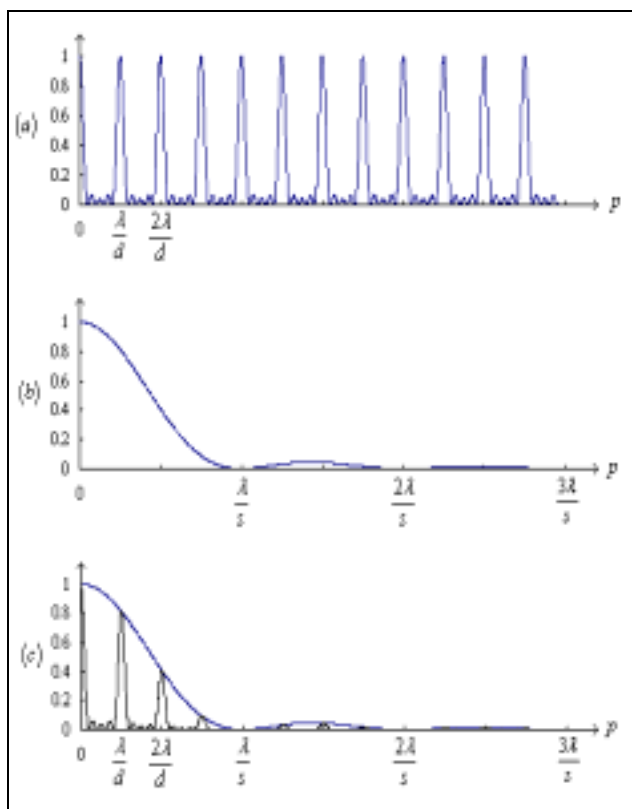
每個狹縫的寬度 s ，位在不透光的屏幕上。若光由很遠處入射光柵成平行狹縫的線光源，則 $I^{(0)}$ 可由單狹縫繞射的推導（帶入 $2a = s$ ）推得，則我們可以得到：

$$I(P) = \frac{sE}{\lambda R^2} \left(\frac{\sin \frac{Nk_0pd}{2}}{\sin \frac{k_0pd}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{k_0ps}{2}}{\frac{k_0ps}{2}} \right) \quad (2.3-18)$$

可以看出上式中有兩個因子，後面的因子表示著一個單狹縫的效應，其具有主極強在 $p=0$ 處，且極小值由 $k_0sp/2 = n\pi$ 給定，即：

$$p = \frac{n\lambda}{s}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.3-19)$$

其區分著次極大值。若 $\lambda/s > \lambda/d$ （即狹縫寬度 s 小於光柵的週期 d ），強度 $I(p)$ 除了有主極大值在 $p=0$ 處之外，其他的極大值在其兩邊逐漸加速地變小，其方向由光柵方程給定。其歸一化的強度分佈圖示如圖 2.14（ $s = d/4$ 的情形）：



$$(a) \frac{1}{N^2} H\left(N, \frac{k_0pd}{2}\right) = \left[\frac{\sin(Nk_0pd/2)}{N \sin(k_0pd/2)} \right]^2$$

$$(b) I^{(0)}(p) = \left[\frac{\sin(k_0ps/2)}{k_0sp/2} \right]^2$$

$$(c) \frac{1}{N^2} I(p) = \left[\frac{\sin(Nk_0pd/2)}{N \sin(k_0pd/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(k_0ps/2)}{k_0sp/2} \right]^2$$

圖 2.14 光經多狹縫的歸一強度分佈

(2) 閃耀光柵

由上述的推導我們可以將一個具有 N 個等間距溝槽、週期 d 、單一週期內透光區寬度 s 的光柵，其歸一化 (normalized) 後的光場強度值分佈表示如下：

$$i(\theta_0, \theta) = IF \times BF = \left[\frac{\sin(Nk_0pd/2)}{N \sin(k_0pd/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(k_0sp/2)}{k_0sp/2} \right]^2 \quad (2.3-20)$$

$$p = n' \sin \theta - n_{in} \sin \theta_0$$

光線以 θ_0 角度入射光柵

光線以 θ 角度出射光柵

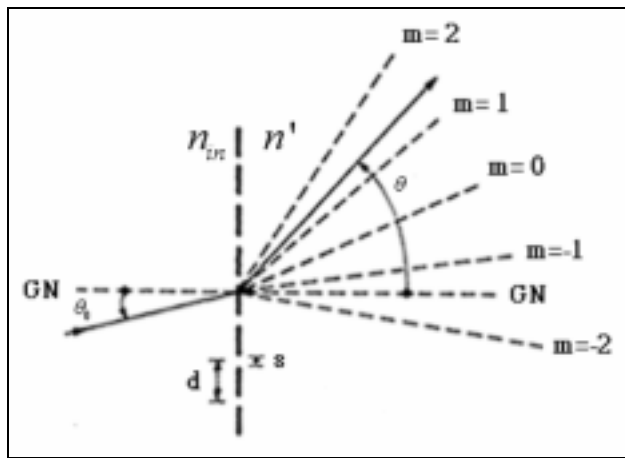


圖 2.15 光柵的繞射階分佈

方程式包含著兩部份，一部份為干涉函數 (Interference function) IF 、另一部份為閃耀函數 (Blaze function) BF ，其極大值皆為一，

$$IF = \left[\frac{\sin(Nk_0dp/2)}{N \sin(k_0dp/2)} \right]^2, \quad BF = \left[\frac{\sin(k_0sp/2)}{k_0sp/2} \right]^2 \quad (2.3-21)$$

其中 IF 與相鄰兩溝槽的相位差有關，而 BF 則是單一溝槽的繞射強度歸一分佈。 IF 的極大值發生在 $k_0dp/2 = m\pi$ 處，其中 m 為整數，推出的即是光柵方程：

$$n' \sin \theta - n_{in} \sin \theta_0 = \frac{m\lambda}{d}$$

而閃耀函數 BF 的極大值發生在 $k_0sp/2 = 0$ 處，即 $n' \sin \theta = n_{in} \sin \theta_0$ ，亦即光柵方程式中第零階 ($m=0$)，如圖 2.16 所示，即大部份的光都落在第零階，其他階的光的繞射效率較低，然而第零階的光是不具有色散特性的。

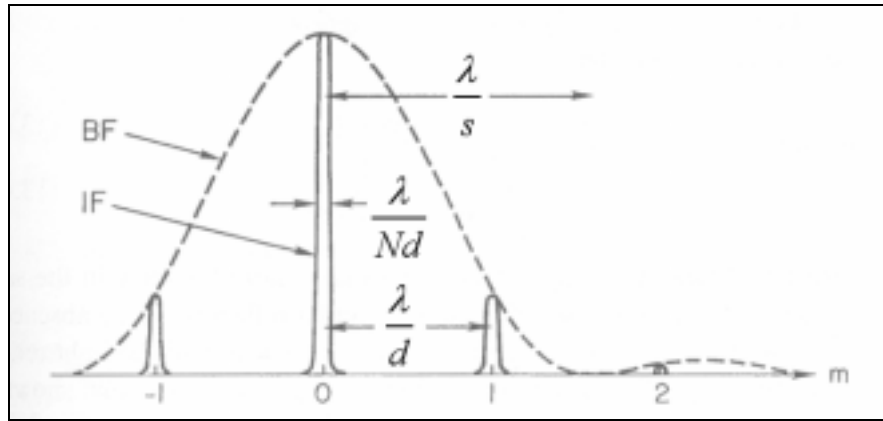


圖 2.16 光經多狹縫各繞射階強度變化

a. 閃耀光柵的閃耀效應

為了提高色散階（非零階）的繞射效率，我們必須移動閃耀函數極大值的位置使得其峰值落在干涉極強處（interference maximum）的色散階上。經由傾斜每個溝槽的斜面使其與光柵基面夾一個角度 β ，則可以達到此目的，說明如下：

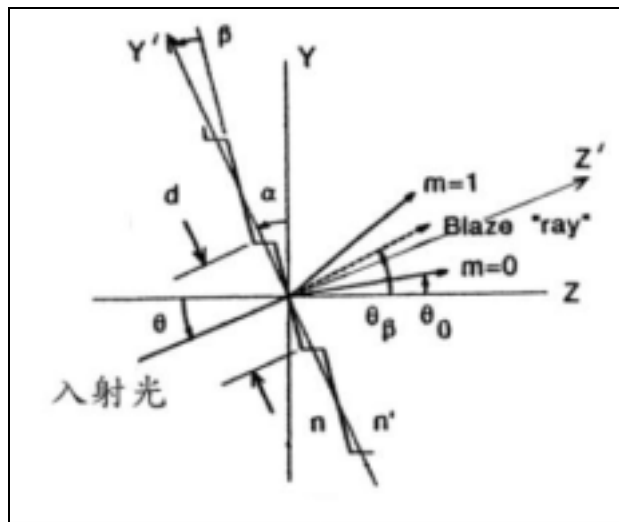


圖 2.17 光線入射傾斜閃耀光柵

討論廣泛的情形，圖 2.17 為光線入射傾斜閃耀光柵的情形，光柵面垂直於 $y-z$ 面，光線在 $y-z$ 平面內，光線以與 z 軸成 θ 角入射至光柵面，考慮到週期光柵結構，入射光將被繞射至各繞射級，其角分離是 λ 、 θ 和 α 的函數。對於週期為 d 的光柵，光柵方程給出第 m 級繞射：

$$d[n \sin(\alpha - \theta) - n' \sin(\alpha - \theta_m)] = m\lambda \quad (2.3-22)$$

由上一小節的討論可知，經過光柵的光場分布受單一光柵的繞射場型所調變，可將閃耀光柵單一周期的透射函數的經 *Fourier* 變換求得：

$$\begin{aligned}
T(y') &= \exp(ik_z \Delta z') \operatorname{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) \\
&= \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{h}{2} + y' \tan \beta\right) n \cos(\alpha - \theta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{h}{2} - y' \tan \beta\right) n' \cos(\alpha - \theta_\beta) \right] \right\} \operatorname{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) \quad (2.3-23) \\
&= \exp\left\{i \frac{\pi h}{\lambda} [n \cos(\alpha - \theta) + n' \cos(\alpha - \theta_\beta)] + \right. \\
&\quad \left. i \frac{2\pi}{\lambda} y' \tan \beta [n \cos(\alpha - \theta) - n' \cos(\alpha - \theta_\beta)] \right\} \times \operatorname{rect}\left(\frac{y'}{d}\right)
\end{aligned}$$

上式中 $h = d \tan \beta$ 為繞射邊陲高度， β 是閃耀角， (y', z') 座標系統中 y' 軸沿光柵基面， y 和 y' 兩軸間成 α 角（光柵傾斜角度）。

當光線通過閃耀面時，由折射率給出：

$$\begin{aligned}
n \sin(\alpha - \beta - \theta) &= n' \sin(\alpha - \beta - \theta_\beta) \\
n [\sin(\alpha - \theta) \cos \beta - \cos(\alpha - \theta) \sin \beta] \\
&= n' [\sin(\alpha - \theta_\beta) \cos \beta - \cos(\alpha - \theta_\beta) \sin \beta] \quad (2.3-24)
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
\tan \beta [n \cos(\alpha - \theta) - n' \cos(\alpha - \theta_\beta)] \\
= n \sin(\alpha - \theta) - n' \sin(\alpha - \theta_\beta) \quad (2.3-25)
\end{aligned}$$

如果折射角 θ_β 設計為第 m 級繞射角時， $\theta_\beta = \theta_m$ ，則代入 (2.3-22) 式，給出

$$\tan \beta [n \cos(\alpha - \theta) - n' \cos(\alpha - \theta_m)] = m \frac{\lambda}{d} \quad (2.3-26)$$

上式代入 (2.3-23) 式，單一週期的透射函數為：

$$\begin{aligned}
T(y') &= \exp\left\{i \frac{\pi h}{\lambda} [n \cos(\alpha - \theta) \right. \\
&\quad \left. + n' \cos(\alpha - \theta_m)] \right\} \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} y' m \frac{\lambda}{d}\right\} \operatorname{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) \quad (2.3-27) \\
&= e^{i\delta_m} e^{i2\pi m \frac{y'}{d}} \operatorname{rect}\left(\frac{y'}{d}\right)
\end{aligned}$$

其中利用 $\delta_m = \frac{\pi}{\lambda} h [n \cos(\alpha - \theta) + n' \cos(\alpha - \theta_m)]$ 。上式的 *Fourier* 變換為：

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i2\pi m \frac{y'}{d}} \text{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) e^{-i2\pi v y'} dy' \\
 &= e^{i\delta_m} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i2\pi\left(v - \frac{m}{d}\right)y'} dy' = e^{i\delta_m} \text{sinc}(vd - m)
 \end{aligned}
 \tag{2.3-28}$$

單一溝槽繞射的強度為：

$$BF = \text{sinc}^2(vd - m) \tag{2.3-29}$$

上式顯示對於一閃耀相位光柵繞射至各級的效率包絡為 sinc 函數平方，其中心移至第 m 級。因此當設計適當的閃耀角 β ，使折射角 $\theta_\beta = \theta_m$ 時，繞射至第 m 級的效率為 100%。

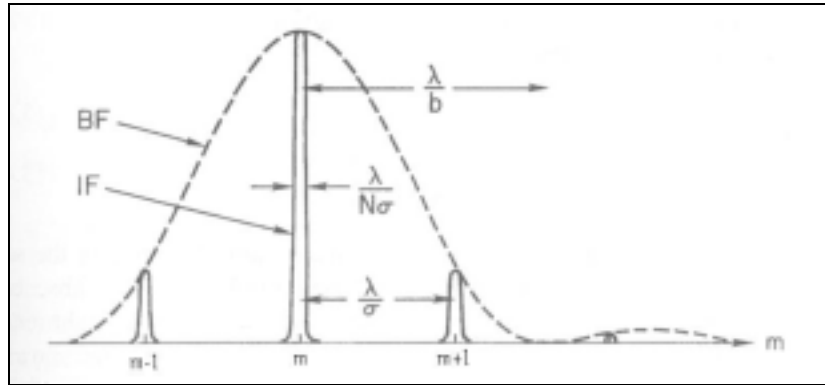


圖 2.18 光線入射閃耀光柵的各繞射階強度分佈

閃耀光柵的閃耀 (blazing) 效應相當於如同不存在繞射效應下，使光線閃耀函數的極大值落在其折射的方向上。(對反射光柵而言則是如同不存在繞射效應，使光線落在其反射的方向上)。也就是說可以經由控制光柵閃耀角 β ，控制光柵閃耀的方向。而對不落在閃耀峰值上其他角度的其他波長的繞射效率可以用閃耀函數 BF 去估算。

b. 效率計算

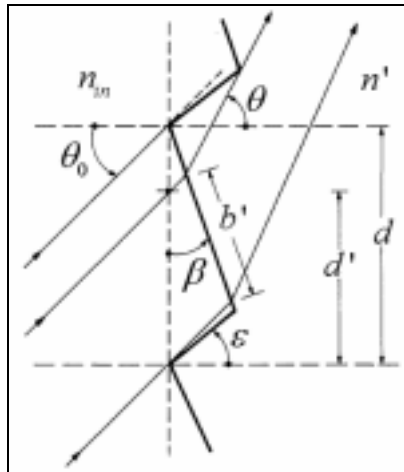


圖 2.19 邊陲對光的遮蔽

閃耀光柵的繞射效率可以由閃耀函數 BF 來估算。如圖 2.19 所示，相鄰邊陲遮蔽光線會造成的效率損失，考慮相鄰邊陲的遮蔽，閃耀光柵的閃耀函數可表示為：

$$BF = T_g \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right)^2 ; \quad (2.3-30)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{k_0 b' p}{2} = \frac{\pi b'}{\lambda} (n' \sin \delta' - n_{in} \sin \delta) \\ &= \frac{\pi b'}{\lambda} [n' \sin(\beta + \theta) - n_{in} \sin(\beta + \theta_0)] \end{aligned} \quad (2.3-31)$$

其中 T_g 為每個溝槽的幾何穿透因子 (geometrical transmission factor)，是入射光不被相鄰溝槽所遮蔽的比例，而定義為光柵平面上，不被遮蔽的長度比例：

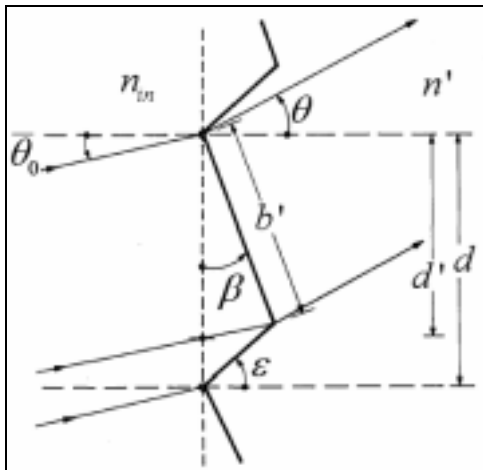
$$T_g = d' / d$$

而對單一個溝槽而言，其有效繞射孔徑寬度 (單狹縫寬度) 為 b' ，即整個斜面扣除被遮蔽的部份的寬度。雖然一般的應用上多採用 $T_g \approx 1$ 、 $b' \approx d$ 去近似，其嚴謹表示的量仍存在，可以很輕易的加入一般的計算中，以下是 T_g 、 b' 的計算 (幾何推導角度不含正負符號， β 、 ε 、 θ_0 、 θ 皆正)。

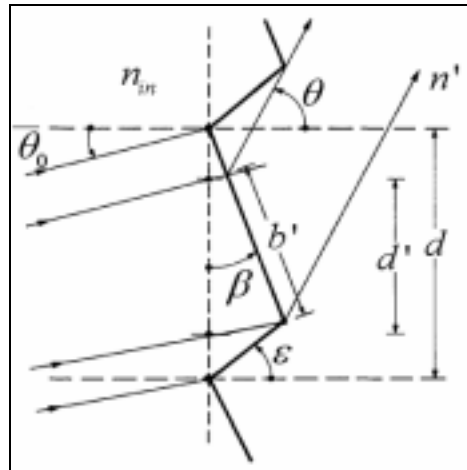
假設光柵的閃耀角大小為 β 、邊陲角度 ε ，則幾何穿透因子 (geometrical transmission factor) T_g 及有效溝槽寬度 (effective groove width) b' 的計算可分做四種情形討論：

I. $\theta_0 \leq \varepsilon$ 且 $\theta \leq \varepsilon$ 、II. $\theta_0 \leq \varepsilon$ 且 $\theta \geq \varepsilon$ 、III. $\theta_0 \geq \varepsilon$ 且 $\theta \leq \varepsilon$ 、IV. $\theta_0 \geq \varepsilon$ 且 $\theta \geq \varepsilon$

I. $\theta_0 \leq \varepsilon$ 且 $\theta \leq \varepsilon$



II. $\theta_0 \leq \varepsilon$ 且 $\theta \geq \varepsilon$



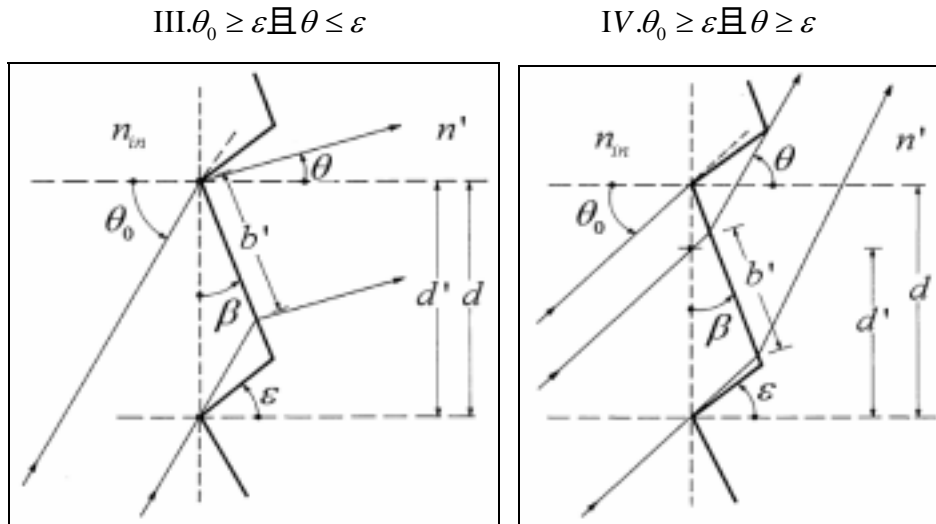


圖 2.20 四情形下邊陲對光的遮蔽

另外有一情形為光柵的琢面為浮雕在下方的結構，此種光柵很難製造，在此不予討論。

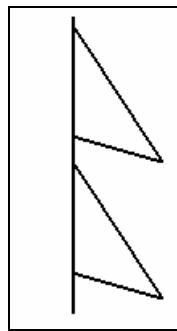


圖 2.21 光柵的琢面為浮雕在下方的情形

由三角形的正弦定理，可推出：

case I.

$$\frac{b'}{d} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \beta)}$$

case II.

$$\frac{b'}{d} = \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \beta)}$$

case III.

$$\frac{b'}{d} = \frac{\cos \theta_0}{\cos(\theta_0 - \beta)}$$

case IV.

$$\frac{b'}{d} = \frac{\cos \theta_0}{\cos(\theta_0 - \beta)} + \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \beta)} - \frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \beta)} \quad (2.3-32)$$

而幾何穿透因子 T_g 定義為光柵平面上，不被遮蔽的長度比例：

$$T_g = d' / d \quad (2.3-33)$$

上述四情形可以得到共通的表示式，

$$T_g = \frac{b' \cos(\theta_0 - \beta)}{d \cos \theta_0} \quad (2.3-34)$$

由圖 2.20 可以輕易的看出，case III. 的情形可以有最大的 T_g 值，使繞射效率達到 100%，是最佳的情形。

(3) 光柵特性

光柵方程式：

$$n' \sin \theta - n_{in} \sin \theta_0 = m \frac{\lambda}{d}$$

a. 角色散 (angular dispersion)：

$$D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} \quad (2.3-35)$$

$$D = \frac{m}{n' d \cos \theta} \quad (2.3-36)$$

這表示，固定週期下，兩個不同頻率的波，經過光柵後角度的分開大小會隨著繞射階數的提高而增加。焦平面上的線色散則表示成：

$$\frac{dx}{d\lambda} = f \frac{d\theta_m}{d\lambda} \quad (2.3-37)$$

b. 光柵的解析能力 (Resolving power)

討論由光柵可以得到的解析能力 (Resolving power)。第 m 階極大值和其鄰近的極小值的間隔為：

$$\Delta p = \frac{\lambda}{Nd} \quad (2.3-38)$$

若波長變化為 $\Delta\lambda$ ，對第 m 階極大值而言，對應的方向變化為

$$\Delta p' = \frac{m}{d} \Delta\lambda \quad (2.3-39)$$

當兩個波長非常小，小到足以相互重疊時，則波的峰值組合會變得模糊不清。色彩解析能力定義如下：

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} \quad (2.3-40)$$

其中 $\Delta\lambda_{\min}$ 是最小可解析的波長差，或稱為極限解析 (limit of

resolution)，而 λ 為中心波長，假設波長 $\lambda \pm \frac{1}{2}\Delta\lambda$ 恰好可解析（一波長極大值恰落在另一波長第一極小值處），即 $\Delta p = \Delta p'$ ，我們可以推得第 m 階的解析極限為：

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = |m|N \quad (2.3-41)$$

因此，光柵的解析能力（Resolving power）為繞射階數 m 乘上其光柵的溝槽數 N 。又由光柵方程式可得 $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$ ，帶入上式可得光柵解析能力的另一表示式：

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Nd|\sin\theta - \sin\theta_0|}{\lambda} \quad (2.3-42)$$

其中， N 為光柵的週期數， m 為繞射階數，上式亦表明了，光柵的色彩解析能力正比於光柵的長度 Nd 。

c. 無譜範圍（free spectral range, FSR）：

考慮不同繞射階數間的重疊情形，當波長 λ 的 $m+1$ 階與波長 $\lambda + \Delta\lambda$ 的第 m 階恰重合時，

$$d(n'\sin\theta - n_m\sin\theta_0) = (m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \quad (2.3-43)$$

則上式解出的波長差 $(\Delta\lambda)_{fsr}$ ，即為相隔兩個繞射階完全不相重疊的波長範圍，稱之為無譜範圍：

$$(\Delta\lambda)_{fsr} = \frac{\lambda}{m} \quad (2.3-44)$$

則應用在 DWDM 系統中，可分通道數 $N_{channel}$ ：

$$N_{channel} = \frac{(\Delta\lambda)_{fsr}}{\Delta\lambda_{min}} \quad (2.3-45)$$

2.3.3 閃耀式稜鏡光柵結構

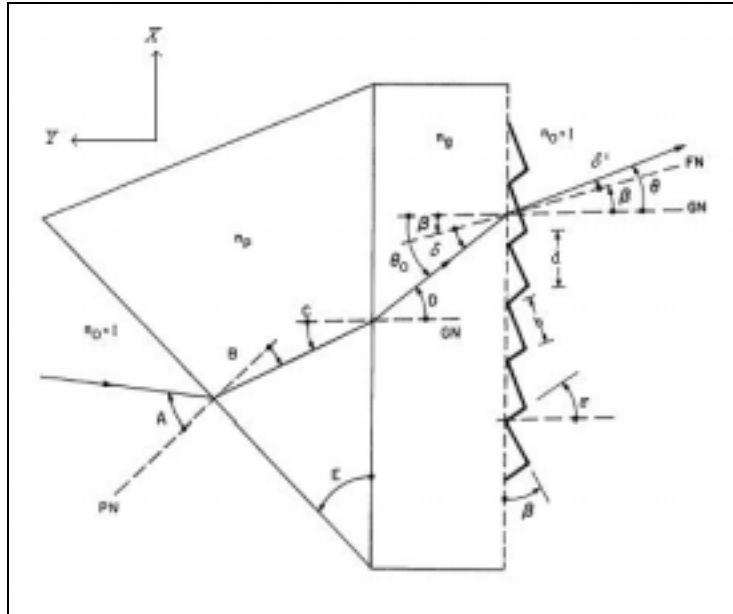


圖 2.22 閃耀式稜鏡光柵結構

稜鏡光柵 (Grating-Prism, Grism) 結合了稜鏡和光柵兩種光學元件的特性，可以在指定方向上得到色散開來的光譜。稜鏡光柵約可分成兩種類型：均勻色散稜鏡光柵 (constant-dispersion grism)，利用兩種光學元件的參數控制使稜鏡和光柵間的色散相互配合，可得到部份均勻色散，可應用在光譜儀的設計；另一種類型為直視稜鏡光柵 (direct-view grism)，使用較低色散的光柵，配上稜鏡使其轉折，造成淨偏折為零，而可使特定波長的光線入射、出射在同一線上，常應用在天文光學，圖 2.23 為一直視稜鏡的簡圖。

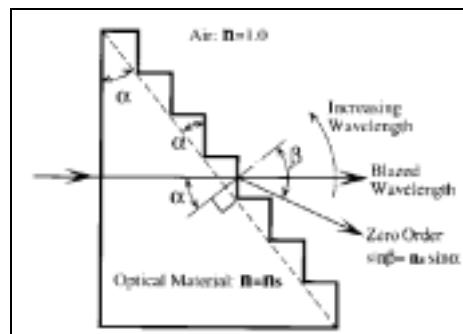


圖 2.23 直視稜鏡光柵結構

閃耀式稜鏡光柵 (Grism) 的幾何架構是由轉折稜鏡配上閃耀光柵，使得特定波長在特定方向上具有近乎百分之百的繞射效率，其結構如圖 2.22 所示：光線以角度 A 入射頂角為 E 、折射率為 n_p 的稜鏡，以角度 B 折射，抵達另一面時以角度 C 入射，以角度 D 折射進入光柵。對光柵面而言，光線以角度 θ_0 ($=D$) 入射、角度 θ 出射，光柵的單一週期為 d ，閃耀角為 β ，入、出射光線相對於單一週期的傾斜面的角度分別為 δ 及 δ' 。

入、出射角及光柵的閃耀角 β 的角度正負定義分別如圖 2.22 所示，對入、出射角而言，自 y 軸順時針方向為負、逆時針方向為正，而對光柵閃耀角角度則由相對表面的旋轉方向而定，自 x 軸順時針為正、逆時針方向為負。對光柵單一週期的傾斜面而言，其入射角度 θ 出射角度 θ' ：

$$\begin{aligned}\delta &= \theta_o + \beta \\ \delta' &= \theta + \beta\end{aligned}\quad (2.3-46)$$

在空氣---稜鏡面、稜鏡---光柵面上滿足折射定律 (Snell' s Law)，

$$n' \sin \theta' = n_{in} \sin \theta_{in}$$

即：

$$\begin{aligned}\sin A &= n_p \sin B \\ n_p \sin C &= n_g \sin D\end{aligned}\quad (2.3-47)$$

利用閃耀光柵結構使光線在繞射階上可以獲得最大的繞射效率，因此在光柵---空氣面上則滿足光柵方程 (grating equation) 及折射方程，

$$n' \sin \theta - n_{in} \sin \theta_o = m \frac{\lambda}{d} \cdots \cdots \text{光柵方程}$$

$$n_{in} \sin(\beta + \theta_o) = n' \sin(\beta + \theta) \cdots \cdots \text{折射方程}$$

即：

$$\sin \theta - n_g \sin \theta_o = m \frac{\lambda}{d} \quad (2.3-48)$$

$$n_g \sin(\beta + \theta_o) = \sin(\beta + \theta) \quad (2.3-49)$$

其中 ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 為繞射階數，其中當 $m=0$ 時，恰為 $n' \sin \theta = n_{in} \sin \theta_o$ ，此時繞射光線的軌跡恰如經過沒有刻痕的平滑面折射一般，此時光柵不具有色散的特性。而正的繞射階是沿著零階的光的逆時針方向、負的繞射階是沿著順時針的方向。

第三章 高密度波長解多工器之設計

3.1 解多工器簡介

所謂的 DWDM (Dense Wavelength-Division Multiplexing) 技術指的是在同一光纖中同時傳播多個光波長很接近 (100GHz 或更小) 的頻道 (假定一個波長代表一個頻道) 之技術, 如此一來不需要增加光纖就可以將總傳輸容量倍增, 在 DWDM 系統中所需要的關鍵元件與模組示意圖如下:

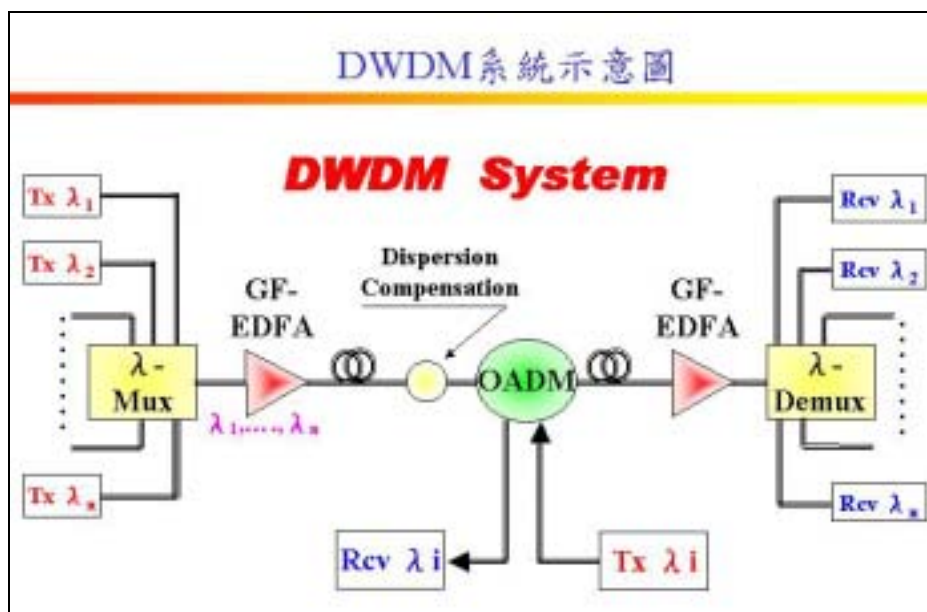


圖 3.1 DWDM 系統示意圖

基本上其中最主要的元件及模組包括:

- (1) 被動元件及模組: 波長多工/解多工器、擷取器、色散補償裝置……等。
- (2) 主動元件及模組: DWDM 光傳接模組、光放大器、可調頻/選頻光源……等。

DWDM 光通訊被動元件及模組中很重要的元件是 DWDM 光波長解多工器, 它的功能正是要來將合併到同一光纖各種不同波長的光的光分開到不同光纖(解多工)。因為 DWDM 的頻道間距很小, 所以需要窄頻 (narrow-band) 的濾波器才能勝任這種解多工的任務。(頻道間距 100GHz, 波長範圍約 0.8nm 或甚至更小, 光通訊界常用的 DWDM 大多是在 1530~1565nm 的波段中, 分出 32 個或更多的波長。)

用來製作波長解多工器的技術有許多種, 包括光學鍍膜、陣列光波導元件、全光纖式元件、傳統繞射式光柵……等, 而且各有優缺點, 如: 光學鍍膜式不需溫度補償但須多層鍍膜, 較利於小數目頻道

數的應用，AWG 利於大數目頻道數的應用但製作不易，全光纖式利於超窄頻道間距的應用且成本便宜，但製作方式的技術專利權被外國限制住，傳統繞射光柵式利於製作但體積較難縮小.....等)。

本篇論文則是利用稜鏡光柵的結構來設計高密度波長解多工器。

3.2 設計流程

(1) 決定系統規格

使用光纖通訊波段，中心波長（用 λ_c 表示） $1.550\ \mu\text{m}$ 、頻道間距 $0.8\ \text{nm}$ 、所使用的雷射入射光源擴束後為半徑約 $3\ \text{mm}$ 之平行光束，希望利用稜鏡光柵結構將各頻道分開，使各頻道間的訊噪比，

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} (A_S / A_N) \quad (3.2-1)$$

滿足通訊系統的規範（市售規格有 $\geq 15\ \text{dB}$ 、 $\geq 30\ \text{dB}$ ），甚至達到完全沒有串光（Crosstalk）的現象。

(2) 設計概念

希望在觀測平面上訊號區內，不同頻道可以完全分開，因此頻道間的間距至少要大於聚焦面上的光點大小。

由(2.3-37)式可知焦平面上的線色散與角色散的關係式為：

$$\frac{dx}{d\lambda} = f \frac{d\theta}{d\lambda}$$

因此對頻道間距為 $\Delta\lambda$ 而言，在焦平面上的間距 Δx 為

$$\Delta x = f \frac{d\theta}{d\lambda} \times \Delta\lambda$$

而經由稜鏡擴束經光柵面出射平行光在焦平面上的分布，可以由矩形孔徑的繞射去近似，由(2.2-24)式知尺寸為 $2a \times 2b$ 矩形孔徑繞射的強度分佈為：

$$I(p) = \left(\frac{\sin k_0 p a}{k_0 p} \right)^2 \left(\frac{\sin k_0 p b}{k_0 p} \right)^2 I_0$$

可推算出焦平面上，色散方向上中心到第一暗紋的半徑 r

$$r = \frac{\lambda f}{a} \quad (3.2-2)$$

即中心亮紋寬度 D 為

$$D = 2 \frac{\lambda f}{a} \quad (3.2-3)$$

因此我們得到下面的不等式：

$$\Delta x > D \quad (3.2-4)$$

$$f \frac{d\theta}{d\lambda} \times \Delta\lambda > 2 \frac{\lambda f}{a} \quad (3.2-5)$$

可推算出所需的稜鏡光柵的角色散：

$$\frac{d\theta}{d\lambda} > 2 \frac{\lambda}{a\Delta\lambda} \quad (3.2-6)$$

或表示成對頻道間距為 $\Delta\lambda$ 而言，其色散開來的角度差 $\Delta\theta$ ：

$$\Delta\theta > 2 \frac{\lambda}{a} \quad (3.2-7)$$

(3) 決定架構：

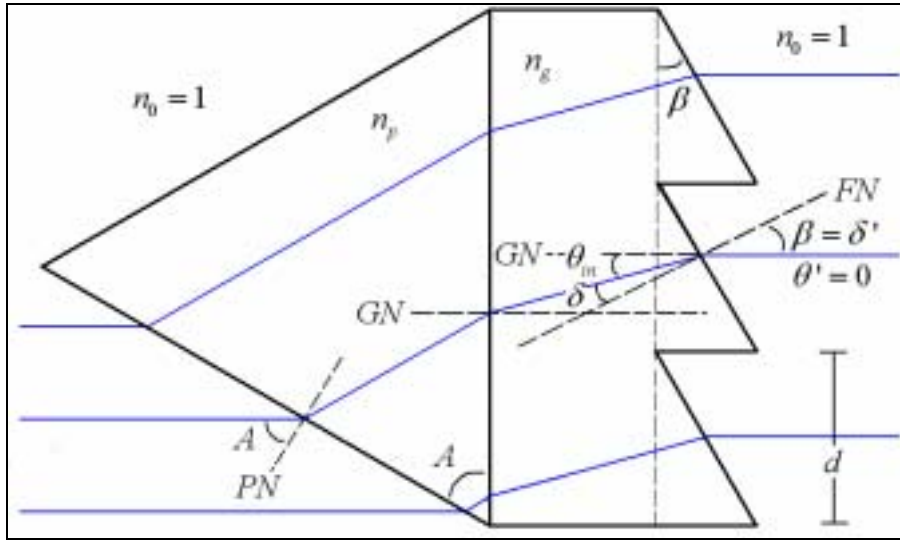


圖 3.2 系統架構示意圖

由 (2.3-42) 式知光柵的解析能力正比於光柵的長度 Nd ，因此使用上圖之結構之優點在於，使光先經過稜鏡擴束後再通過光柵可得到較佳的解析度。

可推出光經過稜鏡的偏轉進入光柵的入射角度：

$$\theta_{in} = \sin^{-1} \left\{ \frac{n_p}{n_g} \times \sin \left[A - \sin^{-1} \left(\frac{\sin A}{n_p} \right) \right] \right\} \quad (3.2-8)$$

希望光束平行入射平行出射，較易於光學上的對準，因此透過光柵的出射至空氣的角度為零 ($\theta = 0$)，如上圖所示，由 (2.3-16) 式，光柵方程式

$$\sin \theta - n_g \sin \theta_0 = \frac{m\lambda_c}{d} \quad (3.2-9)$$

$\theta_0 = \theta_{in}$ 帶入，可推出光柵週期和繞射階數 m 、入射角度 θ_{in} 及中心波長 λ_c 的關係式：

$$d = - \frac{m\lambda_c}{n_{gc} \sin \theta_{inc}} \propto m \quad (3.2-10)$$

其中 $n_{gc} = n_g(\lambda_c)$, $\sin \theta_{inc} = \sin \theta_{in}(\lambda_c)$ ，由上式可看出光柵週期和繞射階成線性關係。欲使中心波長 λ_c 經過閃耀光柵後的繞射效率集中在 $\theta' = 0$ 的方向上，光柵閃耀角 β 必須滿足：

$$n_g \sin(\beta + \theta_0) = n' \sin(\beta + \theta) \quad (3.2-11)$$

因此

$$\begin{aligned} n_g \sin(\beta + \theta_{in}) &= \sin(\beta) \\ n_g [\sin(\beta) \cos(\theta_{in}) + \cos(\beta) \sin(\theta_{in})] &= \sin(\beta) \\ [1 - n_g \cos(\theta_{in})] \sin(\beta) &= n_g \sin(\theta_{in}) \cos(\beta) \end{aligned}$$

可推得閃耀角 β 與進入光柵的角度 θ_{in} 的關係式：

$$\tan(\beta) = \frac{n_g \sin(\theta_{in})}{1 - n_g \cos(\theta_{in})} ; \beta = \tan^{-1} \left(\frac{n_g \sin(\theta_{in})}{1 - n_g \cos(\theta_{in})} \right) \quad (3.2-11)$$

由上式可以看出當稜鏡頂角給定時， θ_{in} 也將給定，光柵對特定波長的閃耀角 β 便決定了。

(4) 角色散

由 (2.3-16) 式，得

$$\sin \theta - n_g \sin \theta_0 = \frac{m\lambda}{d}$$

週期由 (3.2.10) 式：

$$d = -\frac{m\lambda_c}{n_{inc} \sin \theta_{inc}} \text{ 且 } \theta_0 = \theta_{in}$$

帶入得

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n_g \sin \theta_{in} + \frac{m\lambda}{-m\lambda_c / (n_{inc} \sin \theta_{inc})} \\ &= n_g \sin \theta_{in} - \frac{n_{inc} \sin \theta_{inc}}{\lambda_c} \lambda \\ &= \sin A \sqrt{n_p^2 - \sin^2 A} - \sin A \cos A - \frac{n_{inc} \sin \theta_{inc}}{\lambda_c} \lambda \\ \cos \theta d\theta &= \frac{n_p \sin A}{\sqrt{n_p^2 - \sin^2 A}} dn_p - \frac{n_{inc} \sin \theta_{inc}}{\lambda_c} d\lambda \end{aligned}$$

可推得稜鏡光柵的角色散：

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{n_p \sin A}{\sqrt{n_p^2 - \sin^2 A}} \frac{dn_p}{d\lambda} - \frac{n_{inc} \sin \theta_{inc}}{\lambda_c} \right) \quad (3.2-12)$$

對 DWDM 系統而言，光線平行出射，中心波長及相鄰波長的 $\cos\theta \sim 1$ 、頻段間距很小，稜鏡的色散 $dn_p/d\lambda$ 很小，若忽略，則可推出，稜鏡光柵的角色散：

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{n_{inc} \sin \theta_{inc}}{\lambda_c \cos \theta} \sim -\frac{n_{inc} \sin \theta_{inc}}{\lambda_c} = \frac{m}{d} = \text{constant} \quad (3.2-13)$$

從上面的推導我們可以得到，在此設計的結構之下（直視稜鏡光柵）：

- a. 角色散與光柵的材料完全無關，光柵的材料只決定了閃耀角的大小。
- b. 在設計限制光線出射方向要與入射方向平行的情形下，推出繞射階和光柵週期的比值為定值的結果。因此改變繞射階的大小則光柵週期隨之成比例變化（兩者呈線性比例）。此外改變繞射階數上會影響在此結構之下可解析的頻道數（使用的繞射階數越小則可解析的頻道數目越多，然而光柵週期亦隨之變小，將增加製作光柵的困難度及面臨純量繞射對繞射孔徑尺寸大小的規範）。
- c. 角色散主要取決於 $n_{inc} \sin \theta_{inc}$ 的值，隨之增加而變大，即當稜鏡的頂角加大、折射率加大，其角色散亦隨之增加。

(5) 評估製作方式

稜鏡光柵約有下列幾種製作方式：

- a. 直接將光柵結構做在稜鏡表面。
- b. 將製作好的光柵黏貼在稜鏡表面。

評估實際製作的可行性及經濟效益，最後選擇第二種製作稜鏡光柵的方式，稜鏡選擇一般市售可取得的折射率較高的稜鏡，而光柵結構則是利用鑽石切削加工 KRS5 材料做出連續的閃耀面及利用半導體製程加工在矽上製作分階結構近似光柵的閃耀面。

(6) 計算參數

- a. 稜鏡：

材料：SF10

頂角大小： 60°

折射率：

SCHOTT公司使用Sellmeier 玻璃色散公式 (glass dispersion

formular) 近似材料的折射率

$$n^2 - 1 = \frac{K_1 \lambda^2}{\lambda^2 - L_1} + \frac{K_2 \lambda^2}{\lambda^2 - L_2} + \frac{K_3 \lambda^2}{\lambda^2 - L_3} \quad (3.2-14)$$

其中，

$$K_1 = 1.61625977E+000 \quad L_1 = 1.27534559E-002 \quad K_2 = 2.59229334E-001 \quad L_2 = 5.81983954E-002 \quad K_3 = 1.07762317E+000 \quad L_3 = 1.16607680E+002$$

則以中心波長 $1.550 \mu m$ 為中心，頻道間距 $0.8 nm$ ，相鄰9頻道的折射率為：

表3.1 通訊波長材料SF10的折射率

波長 (μm)	折射率
1.5468	1.693529
1.5476	1.693517
1.5484	1.693505
1.5492	1.693493
1.5500	1.693482
1.5508	1.693470
1.5516	1.693458
1.5524	1.693447
1.5532	1.693435

b. 光柵：

材料1.：矽 (silicon)

製作方式：

利用半導體製程，在矽晶片上分16階製作以近似連續曲面。

折射率：

亦使用Sellmeier 玻璃色散公式去近似材料的折射率，

其中

$$K_1 = 1.06684293E+001 \quad L_1 = 9.09121907E-002 \quad K_2 = 3.04347500E-003 \quad L_2 = 1.28766017E+000 \quad K_3 = 1.54133408E+000 \quad L_3 = 1.21881600E+006$$

相鄰9頻道的折射率為：

表3.2 通訊波長材料Silicon的折射率

波長 (μm)	折射率
1.5468	3.477988
1.5476	3.477921
1.5484	3.477855
1.5492	3.477789
1.5500	3.477723
1.5508	3.477658
1.5516	3.477592
1.5524	3.477526
1.5532	3.477461

透射率：

一般矽的透射光譜圖如下，

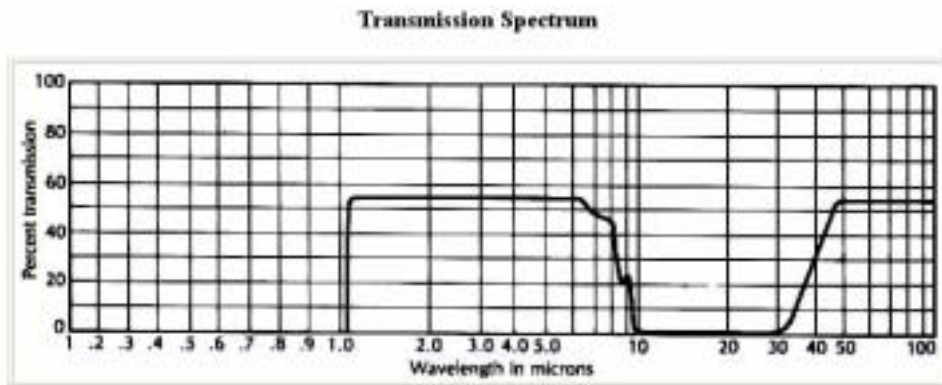


圖3.3 矽的透射光譜

繞射階數及週期：

由 (3.2.10) 式可推算出，滿足平行入射、平行出射稜鏡光柵的光柵面其相對應的繞射階與週期大小關係（前12個繞射階）：

表3.3 繞射階及對應的周期大小

繞射階數	週期大小 (μm)
-1	-1.8735
-2	-3.7470
-3	-5.6206
-4	-7.4941
-5	-9.3677
-6	-11.2412
-7	-13.1148
-8	-14.9883
-9	-16.8619
-10	-18.7354
-11	-20.6089
-12	-22.4825

考慮繞射理論的限制，實際製作時選取的繞射階為-9階、週期為 $16.861901 (\mu m)$

閃耀角：

由 (3.2.8) 式及 (3.2.11) 式，可推出以矽為基材的閃耀光柵的閃耀角為 -19.183688° ，考慮製程時的線寬限制，最後設計製作的單一週期參數如下，

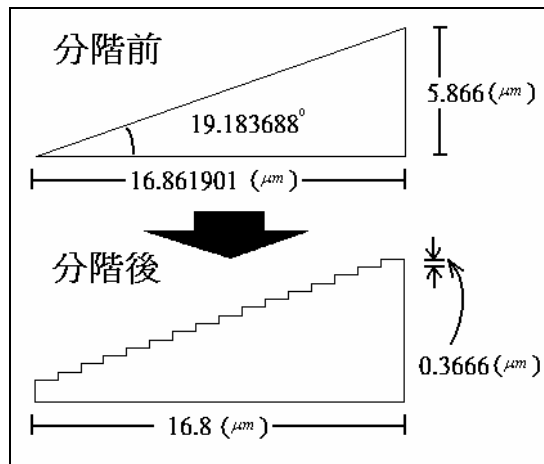


圖 3.4 矽的分階方式

可分頻道數：

由 (2.3-45) 式，可以推出，此結構下可分出208個頻道

材料2.：KRS5晶體

製作方式：

利用鑽石切削，在KRS5平板上刻出閃耀面。

折射率：

根據購買公司所取得的實際材料折射率量測數據：

表3.4 KRS5材料折射率

$\lambda (\mu m)$	n	$\lambda (\mu m)$	n	$\lambda (\mu m)$	n	$\lambda (\mu m)$	n
0.54	2.68059	10.00	2.37069	21.00	2.33643	32.00	2.27531
1.00	2.44620	11.00	2.36854	22.00	2.33206	33.00	2.26823
1.50	2.40774	12.00	2.36622	23.00	2.32746	34.00	2.26087
2.00	2.39498	13.00	2.36371	24.00	2.32264	35.00	2.25322
3.00	2.38574	14.00	2.36101	25.00	2.31758	36.00	2.24528
4.00	2.38204	15.00	2.35812	26.00	2.31229	37.00	2.23705
5.00	2.37979	16.00	2.35502	27.00	2.30676	38.00	2.22850
6.00	2.37797	17.00	2.35173	28.00	2.30098	39.00	2.21965
7.00	2.37627	18.00	2.34822	29.00	2.29495	40.00	2.21047
8.00	2.37452	19.00	2.34454	30.00	2.28867		
9.00	2.37267	20.00	2.34058	31.00	2.28212		

用中心波長附近波長折射率去匹配schott玻璃色散公式：

$$n^2 = a_0 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^{-2} + a_3\lambda^{-4} + a_4\lambda^{-6} + a_5\lambda^{-8} \quad (3.2-15)$$

其中

$$a_0 = 5.66301832E+000 \quad 、 \quad a_1 = -4.54611259E-004 \quad 、$$

$$a_2 = 2.92585473E-001 \quad 、 \quad a_3 = 2.44449159E-002 \quad 、$$

$$a_4 = 3.70462018E-003 \quad 、 \quad a_5 = 5.95790370E-004$$

可求得相鄰9頻道的折射率為：

表3.5 通訊波長材料KRS5的折射率

波長 (μm)	折射率
1.5468	2.405988
1.5476	2.405959
1.5484	2.405931
1.5492	2.405902
1.5500	2.405874
1.5508	2.405846
1.5516	2.405817
1.5524	2.405789
1.5532	2.405761

透射率：一般KRS5的透射光譜圖如下，

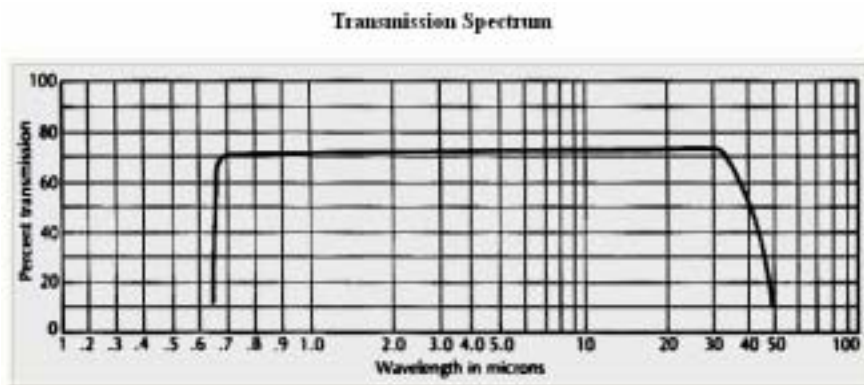


圖3.5 KRS5的透射光譜

繞射階數及週期：

由(3.2.10)式可推算出，滿足平行入射、平行出射稜鏡光柵的光柵面其相對應的繞射階與週期大小關係(前12個繞射階)：

表3.6 繞射階及對應的周期大小

繞射階數	週期大小 (μm)
-1	-1.8735
-2	-3.7470
-3	-5.6206
-4	-7.4941
-5	-9.3677
-6	-11.2412
-7	-13.1148
-8	-14.9883
-9	-16.8619
-10	-18.7354
-11	-20.6089
-12	-22.4825

考慮繞射理論的限制，實際製作時選取的繞射階為-8階、週期為14.988357 (μm)

閃耀角：

由 (3.2.8) 式及 (3.2.11) 式，可推出以KRS-5為基材的閃耀光柵的閃耀角為 -33.306272° 。考慮實際加工的精度限制，最後設計製作的參數如下：

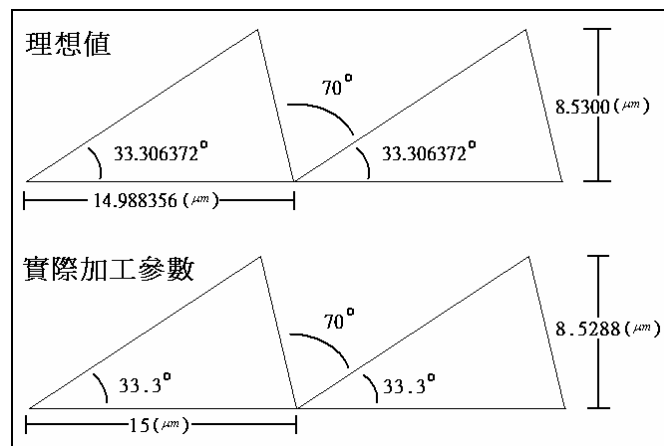


圖3.6 KRS5的加工參數

可分頻道數：

由 (2.3-45) 式，可以推出此結構下可分出個242個頻道。

(7) 分析

由 (3.2.12) 式可得到下列的近似表示式：

$$\Delta\theta = \frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{n_p \sin A}{\sqrt{n_p^2 - \sin^2 A}} \Delta n_p - \frac{n_g(\lambda_0) \sin\theta_g(\lambda_0)}{\lambda_0} \Delta\lambda \right) \quad (3.2-16)$$

將上述的設計參數及 $\Delta\lambda = 0.8\text{nm}$ 帶入，可得經過稜鏡光柵的後，各頻道間的色散角度差 $\Delta\theta$ 為：

$$|\Delta\theta| = 2.5141\text{E-}002(\text{度})$$

假設後焦平面為 60mm ，則焦平面上頻道間距 Δx 為：

$$\Delta x = f\Delta\theta = 26.3277 \quad (\mu\text{m})$$

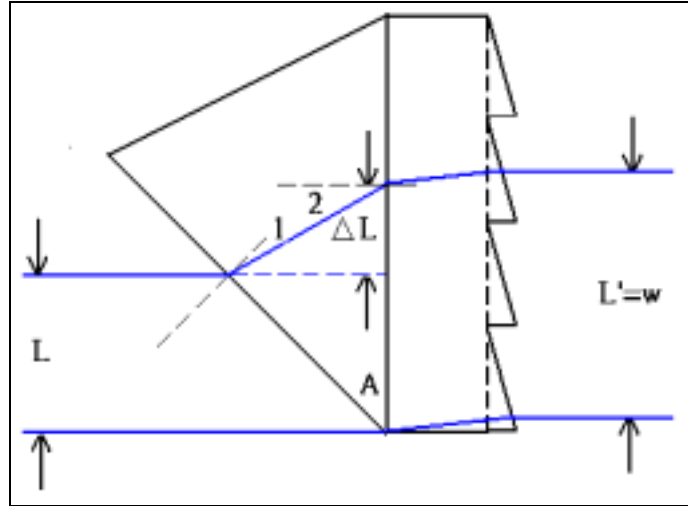


圖3.7 輸出光束與輸入光束的光束大小變化

而由上圖可看出，輸出光束與輸入光束的關係：

$$w = L + \Delta L = L(1 + \tan A \tan \theta_2) \quad (3.2-17)$$

將參數 $L = 3.0, \theta_0 = 60^\circ, \theta_2 = 29.243706^\circ$ 帶入上式，得 $w = 11.818471 \text{ mm}$

可求得後焦平面為 60mm ，則焦平面上的光斑大小為（用第一暗紋估計）：

$$D = 2 \frac{\lambda f}{w} = 15.738076 \quad \mu\text{m}$$

若考慮入射光束為圓形，出稜鏡光柵為橢圓形光束，利用艾里斑(Airy Disc)估計斑點大小則為，

$$D = 2.44 \frac{\lambda f}{w} = 19.200453$$

綜合上述知計算可得知，像平面上：

$$\Delta x > D \quad (26.327685 > 15.738076, \text{ or } 26.327685 > 19.200453)$$

即頻道間距為 0.8nm 的各頻道完全分開，無串光(crosstalk)現象發生。

第四章 元件模擬分析

4.1 利用 ZEMAX 軟體模擬稜鏡光柵

解多工器的構造圖示如下：

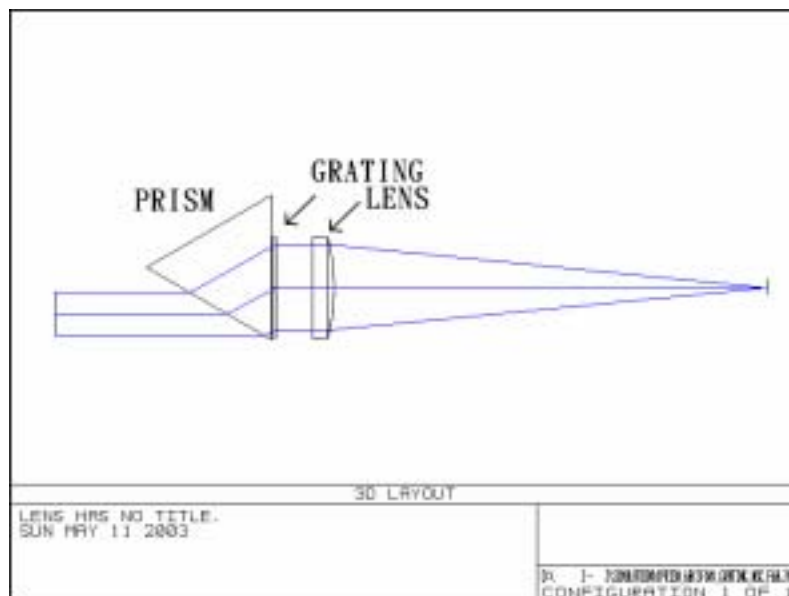


圖 4.1 解多工器構造圖

整個解多工器包含三個光學元件：稜鏡、光柵及聚焦透鏡。其中稜鏡的模擬是使用 ZEMAX 軟體中 Polygon 物件加以模擬（可參閱軟體使用手冊）。

利用 ZEMAX 軟體計算在相面上（訊號區）以中心波長 $1.550 \mu\text{m}$ 為中心、頻道間距 0.8 nm 相鄰 9 波長的場分佈情形如下：

(1) 光柵材料為矽時：

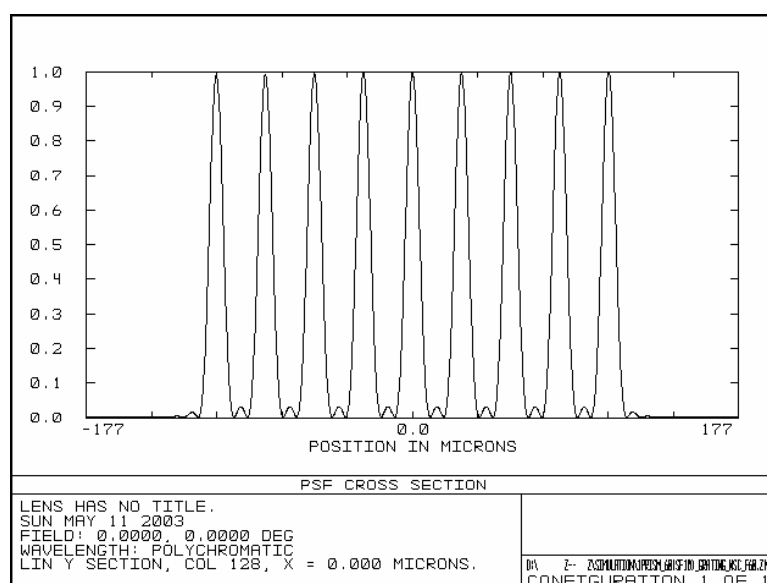


圖 4.2 光柵材料為矽時，訊號強度分佈

(2) 光柵材料為 KRS5 時：

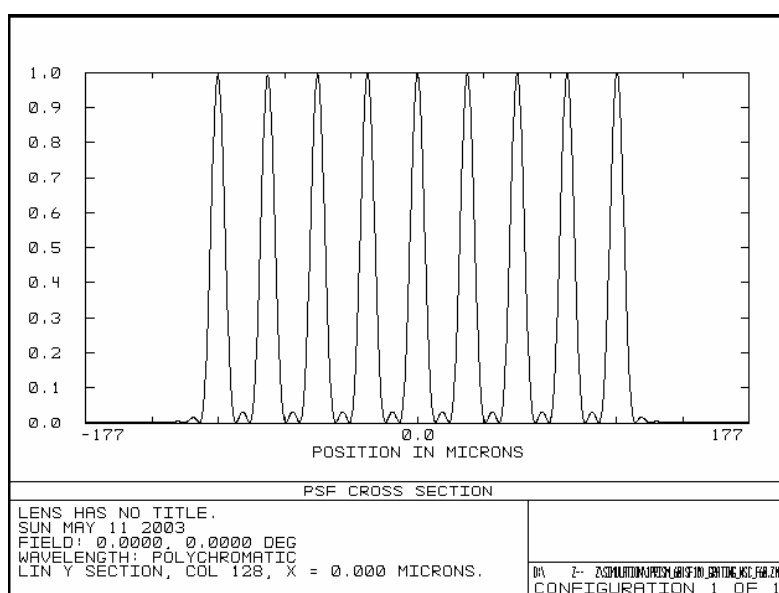


圖 4.3 光柵材料為 KRS5 時，訊號強度分佈

由於在此結構之下，稜鏡光柵的色散特性與光柵的材料無關，因此使用此兩種不同材料得到相同的訊號強度分佈。而各波長在訊號區相對中心波長的距離為：

表 4.1 各頻道在像面上的位置（相對中心波長）

波長 (μm)	相對距離 (μm)
1.5468	106.9
1.5476	80.1
1.5484	53.4
1.5492	26.7
1.5500	0.0
1.5508	-26.7
1.5516	-53.4
1.5524	-80.1
1.5532	-106.9

像面上各訊號間的距離約成定值，欲改變訊號間的距離只需要調整所加透鏡的焦距即可。

4.2 效率估算

4.2.1 折射面的效率估算

光經過折射面的穿透率可以利用電磁學推出的 Fresnel 公式去計算，即介面間的穿透率 T 與反射率 R 滿足：

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, R_{\perp} = r_{\perp}^2, T_{\perp} = 1 - R_{\perp} \quad (4.2-1)$$

$$r_{\parallel} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, R_{\parallel} = r_{\parallel}^2, T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel} \quad (4.2-2)$$

其中下標 \perp 表示 TE 偏振態、 \parallel 表示 TM 偏振態、 θ_i 表入射角、 θ_t 表出射角。各折射面的穿透率如圖所示：

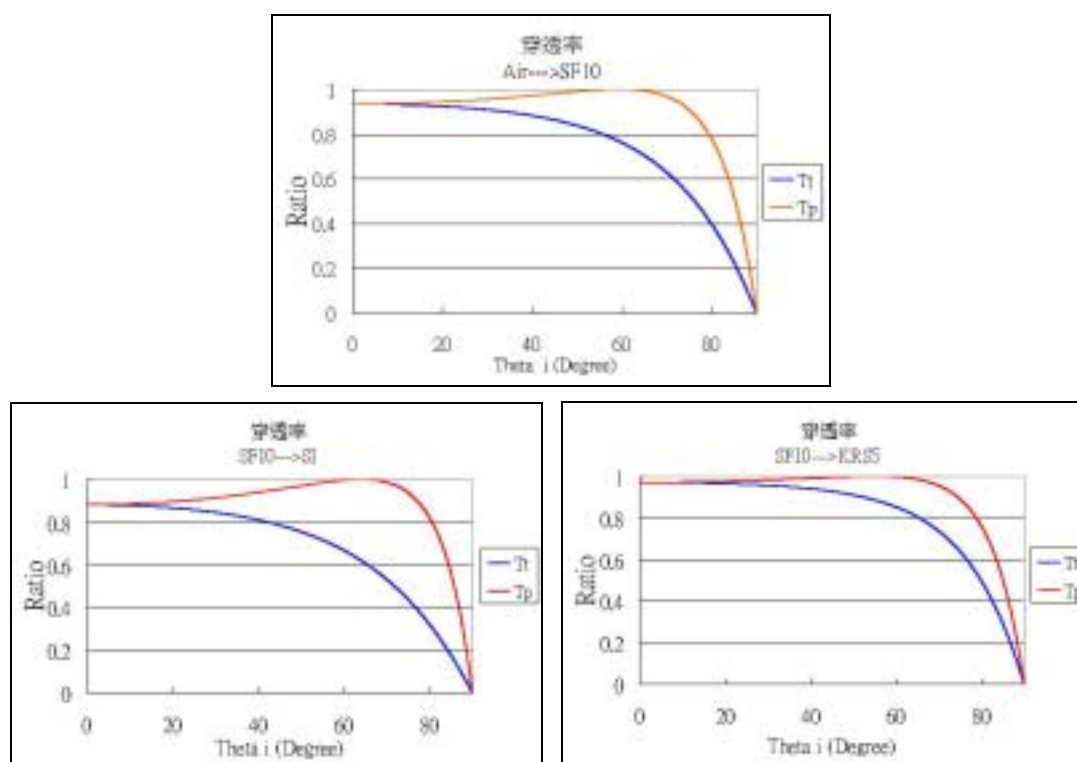


圖 4.4 各折射面間，入射角與穿透率的關係

帶入實際的入射角和折射角計算，可求得各折射面的穿透率：

Air---SF10：

$$T_{\perp} = 76.13\%、T_{\parallel} = 99.99\%$$

SF10---SI：

$$T_{\perp} = 84.68\%、T_{\parallel} = 91.18\%$$

SF10---KRS5：

$$T_{\perp} = 95.63\%、T_{\parallel} = 98.10\%$$

4.2.2 光柵面的效率估算

兩種不同材料、不同加工方式的光柵的繞射效率分別討論如下：

(1) 光柵材料---矽、加工方式---半導體製程

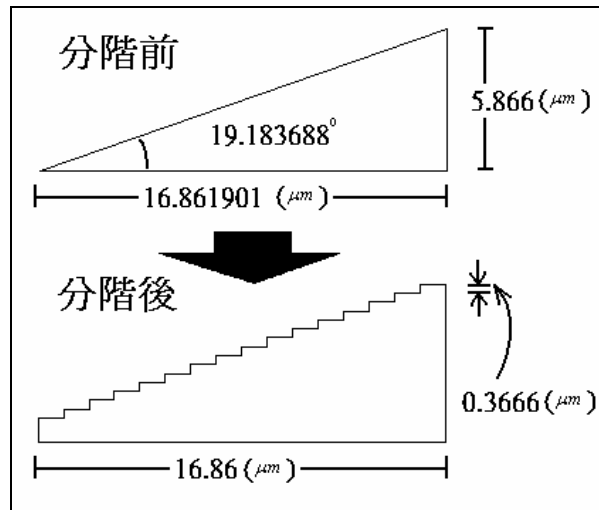


圖 4.5 矽的分階方式

分階後的線寬=1.05 μm ，小於純量繞射理論對繞射孔徑大小的限制，因此不能使用純量的計算去估計效率，使用軟體 GSOLVER（使用向量繞射理論）去估算繞射效率：

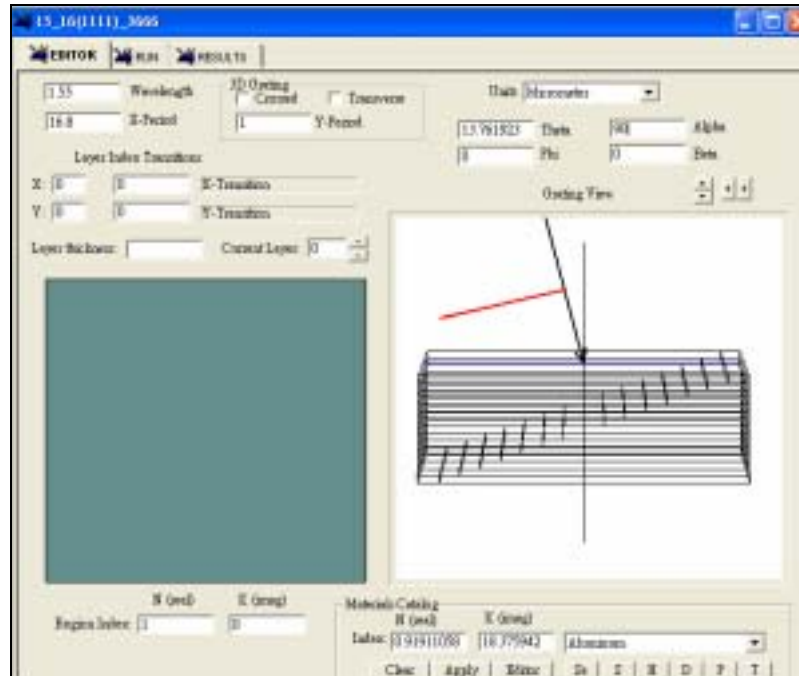


圖 4.6 GSOLVER 軟體介面

定義好單一週期的結構，給定折射率、週期、入射角度及偏振特性後，可計算落在各繞射階上的效率。其參數設定可參考軟體的 Help 選單。計算結果如下：

表 4.2 各繞射階的繞射效率

(a) TE 波入射、(b) TM 波入射

(a) TE 波入射

1T	0T	-1T	-2T	-3T	-4T	-5T
0.000456	0.000257	0.000147	0.000534	0.000476	0.000974	0.000266
-6T	-7T	-8T	-9T	-10T	-11T	-12T
0.000875	0.001348	0.002887	0.18008	0.003588	0.005401	0.008634
-13T	-14T	-15T	-16T	-17T	-18T	-19T
0.003705	0.001653	0.001169	0.000153	0.000418	0.000458	0.000763
SumR	SumT					
0.785763	0.214237					

(b) TM 波入射

1T	0T	-1T	-2T	-3T	-4T	-5T
0.001764	0.000744	0.000192	0.000438	9.32E-05	0.002556	0.004964
-6T	-7T	-8T	-9T	-10T	-11T	-12T
0.009671	0.009441	0.017351	0.576954	0.016648	0.006775	0.00556
-13T	-14T	-15T	-16T	-17T	-18T	-19T
0.006612	0.000315	0.004612	0.001884	7.26E-05	0.000521	0.000334
SumR	SumT					
0.3325	0.6675					

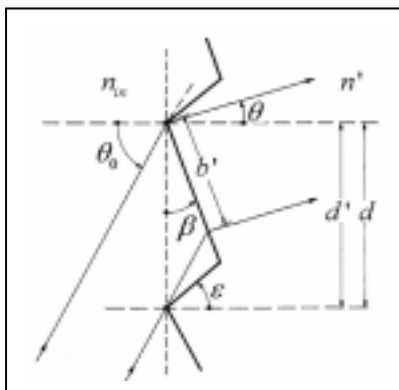
TE：總透射率佔 21.15%，設計的繞射階（-9）佔透射光的 83.00%，佔入射光的 17.56%。

TM：總透射率佔 66.64%，設計的繞射階（-9）佔透射光的 87.08%，佔入射光的 58.02%。

由計算結果可發現，此結構對入射光的偏振態相當敏感。不過對 TM 波入射仍有超過一半以上的效率。

(2) 光柵材料---KRS5、加工方式---鑽石切削

如 2.3 小節的討論可以利用閃耀函數 BF 去估計經過光柵面的效率：



$$BF = T_g \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right)^2 ; \quad (2.3-30)$$

$$\gamma = \frac{\pi b'}{\lambda} [n' \sin(\beta + \theta) - n_{in} \sin(\beta + \theta_0)] \quad (2.3-31)$$

$$T_g = \frac{b' \cos(|\theta_0| - |\beta|)}{d \cos|\theta_0|} \quad (2.3-32)$$

圖 2.19 邊陲對光的遮蔽

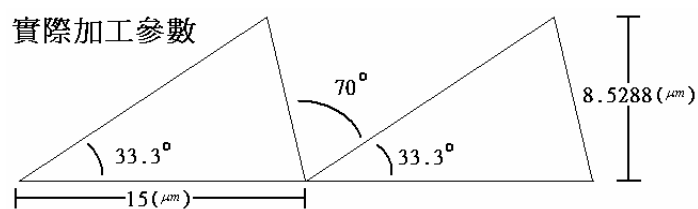


圖 4.7 KRS5 的實際加工參數

對此光柵面而言，

$$\theta_0 = 29.243705^\circ, \theta \sim 0^\circ, \varepsilon = 13.3^\circ$$

屬於第二章原理所討論的 CASE III, $\theta_0 \geq \varepsilon$ 且 $\theta \leq \varepsilon$ 的情形。此情形為最佳情形，即光線完全沒有被相鄰的邊陲所遮蔽，繞射效率可達 100%。對中心波長 $1.550 \mu\text{m}$ 、頻道間距 0.8 nm 相鄰 100 個波長範圍求出的閃耀函數分佈如下：

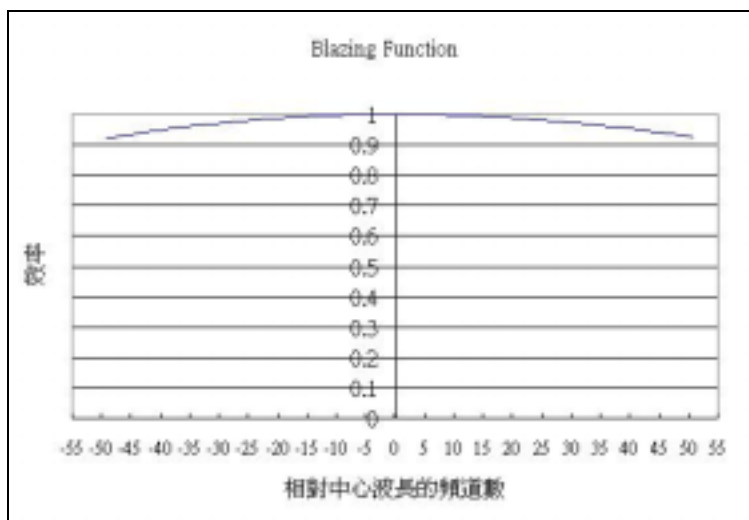


圖 4.8 相鄰中心 100 個頻道的繞射效率

相鄰 9 個波長的繞射效率則列表如下：

表 4.3 相隣中心波長 9 頻道的繞射效率

波長 (μm)	效率 (%)
1.5468	99.88
1.5476	99.92
1.5484	99.95
1.5492	99.98
1.5500	99.99
1.5508	100.00
1.5516	100.00
1.5524	99.99
1.5532	99.97

4.3 光場重建

經過稜鏡光柵的各頻道間的串光 (Crosstalk) 情形可以利用 Fresnel-Kirchhoff 繞射公式進行光場重建來分析。

平行光入射孔徑時，Fresnel-Kirchhoff diffraction formular 可改寫為：

$$U(P) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U_{in} \frac{e^{jks}}{s} \psi dS ; \psi = 1/2 [\cos\theta - \cos(\vec{n}, \vec{s})] \quad (4.3-1)$$

其中 θ 為光線入射傾斜角。

經過光柵後的光束分佈，光束在空間中成週期性的明暗分佈，光束經光柵後，光束空間分佈如圖 4.9 所示 (以 KRS5 光柵為例)：

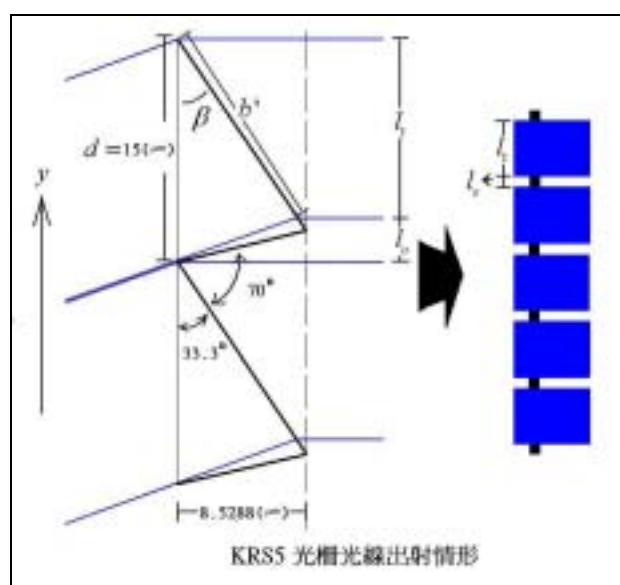


圖 4.9 光柵光束出射示意圖

繞射孔徑取在平行光柵頂部處，取振幅為 1、入射光抵達繞射面的相位為 $\exp[jk \times y \times \sin\theta_m]$ 。光柵對入射光線的作用是給予一個相位調制，即抵達光柵面處會增加一相位因子 $\exp[jkl]$ ， l 指的是各處光線通過光柵琢面所經過的路徑長，經過光柵出射面光束形式可表示為：

$$U_{in} = 1 \times \exp[jk \times y \times \sin\theta_m + k \times l] \quad (4.3-2)$$

入射截面為圓形的光束，經過稜鏡擴束後的截面近似於橢圓光束，繞射孔徑即為橢圓光束的截面積，加上聚焦透徑的相位因子：

$$t_L = \exp\left[-j \frac{k}{2f} R^2\right] ; R^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (4.3-3)$$

其中 ξ 、 η 表孔徑的直角座標。

則訊號區的光場分佈可經由下式求出：

$$U(P) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U_{in} t_L \frac{e^{jks}}{s} \psi dS \quad (4.3-4)$$

計算結果如下：

(1) 光柵基材為矽，週期為理想值時：

歸一化強度分佈：

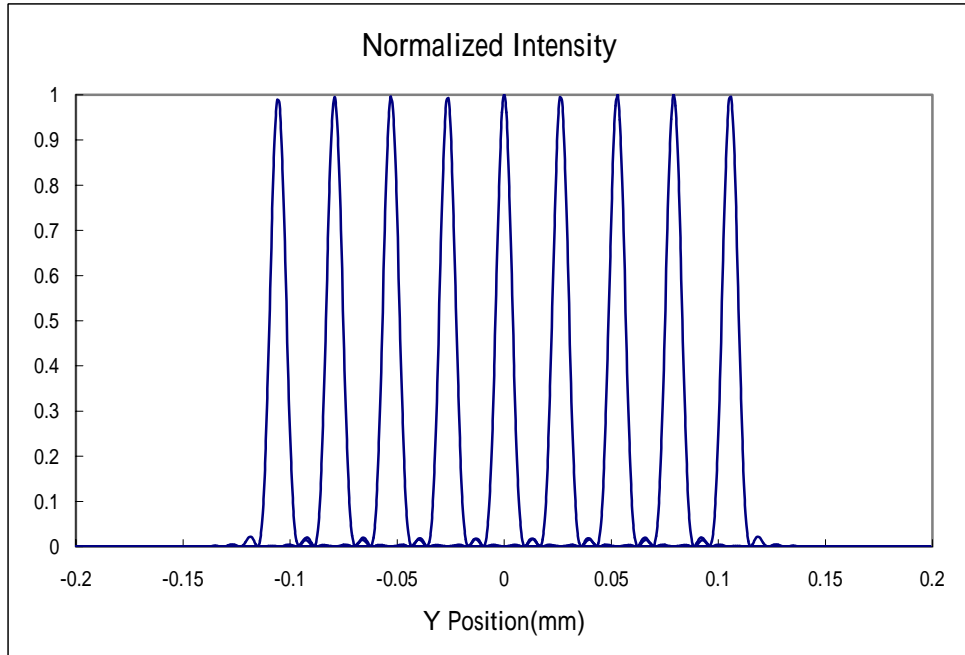


圖 4.10 理想週期下光柵（矽）的訊號強度分佈

以 dB 為單位表示：

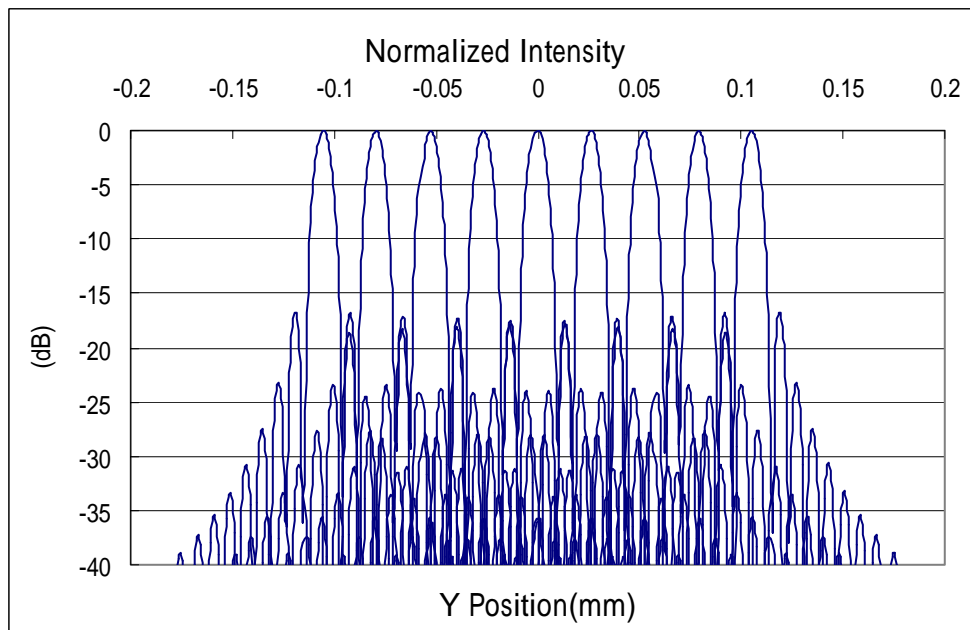


圖 4.11 理想週期下光柵（矽）的訊號強度分佈（dB 為單位）

(2) 光柵基材為矽，週期為 $16.8\ \mu\text{m}$ 時：

歸一化強度分佈：

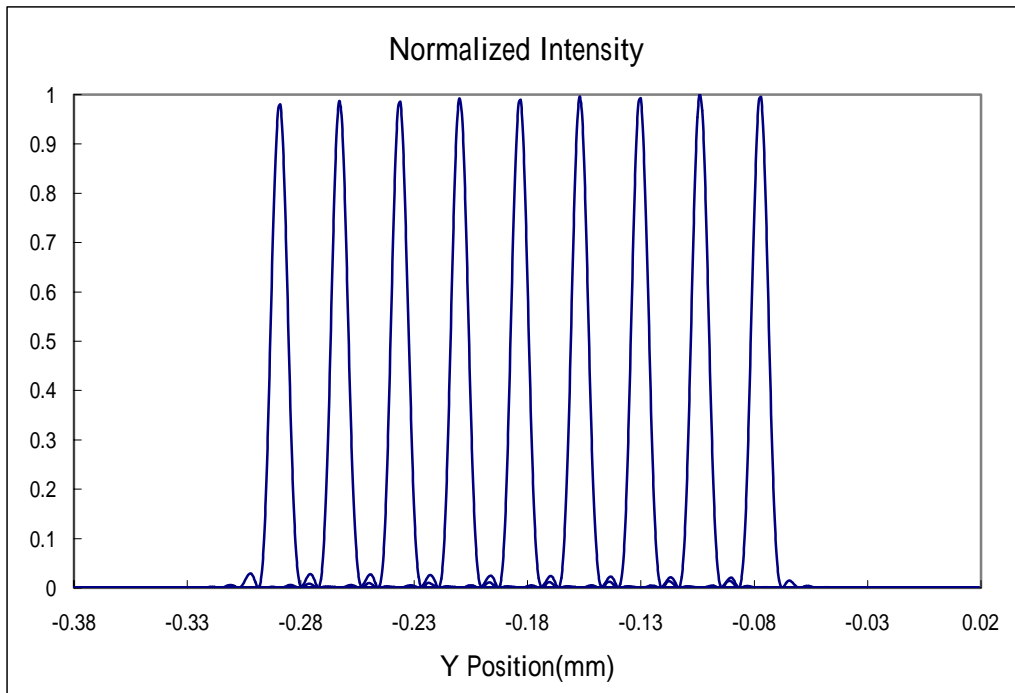


圖 4.12 週期 $16.8\ \mu\text{m}$ 時光柵（矽）的訊號強度分佈

以 dB 為單位表示：

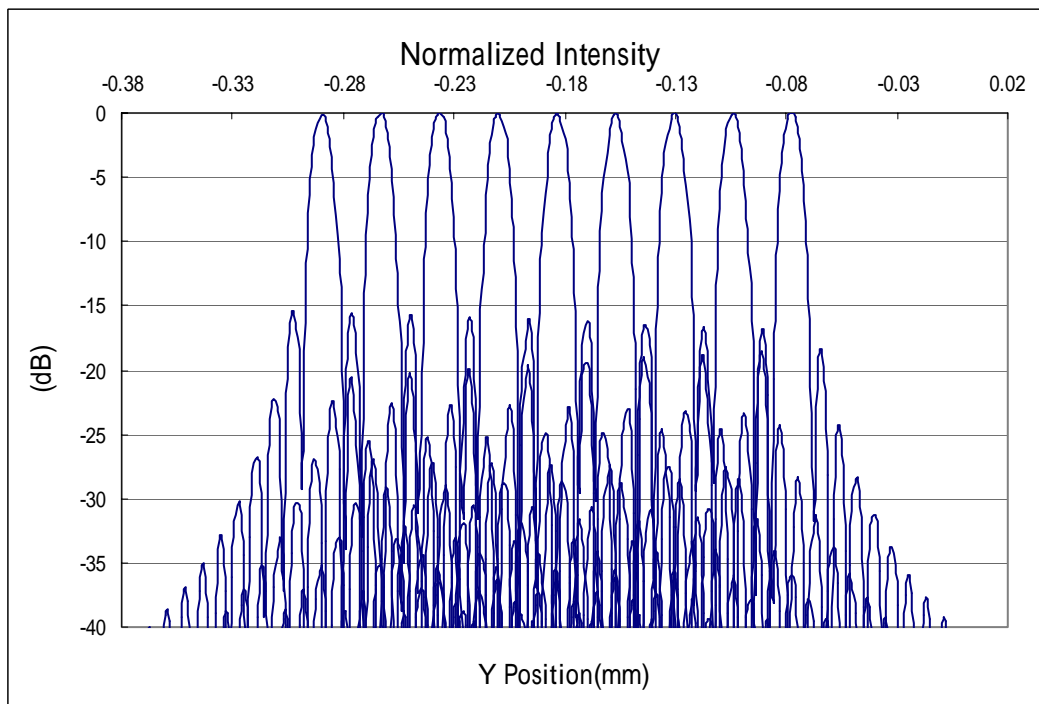


圖 4.13 週期 $16.8\ \mu\text{m}$ 時光柵（矽）的訊號強度分佈（dB 為單位）

(3) 光柵基材為 KRS5，週期為理想值時：

歸一化強度分佈：

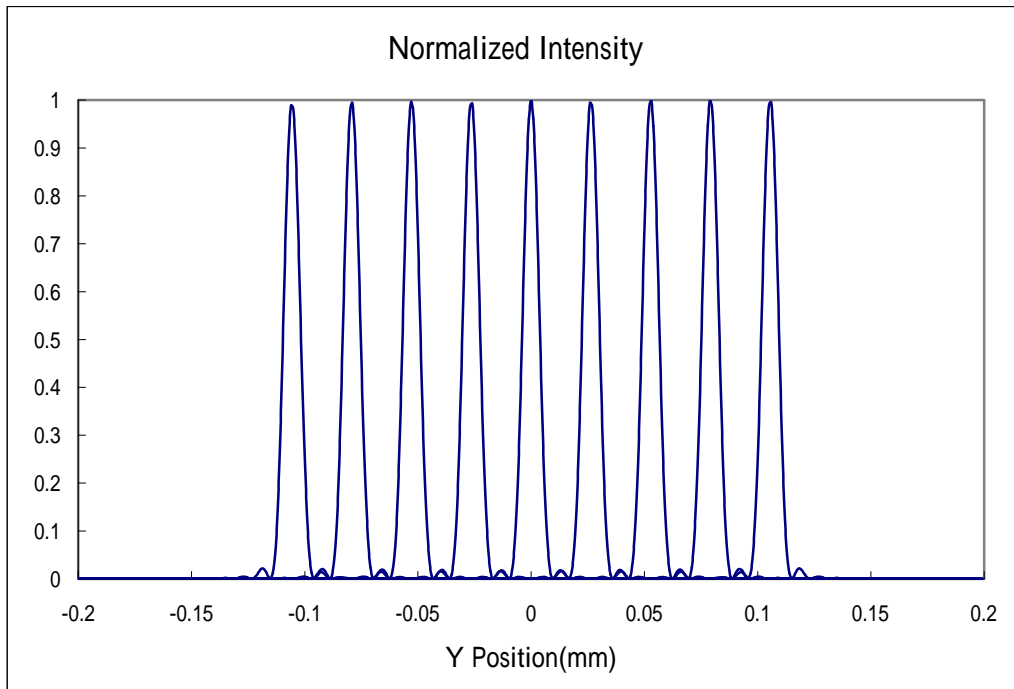


圖 4.14 理想週期下光柵 (KRS5) 的訊號強度分佈

以 dB 為單位表示：

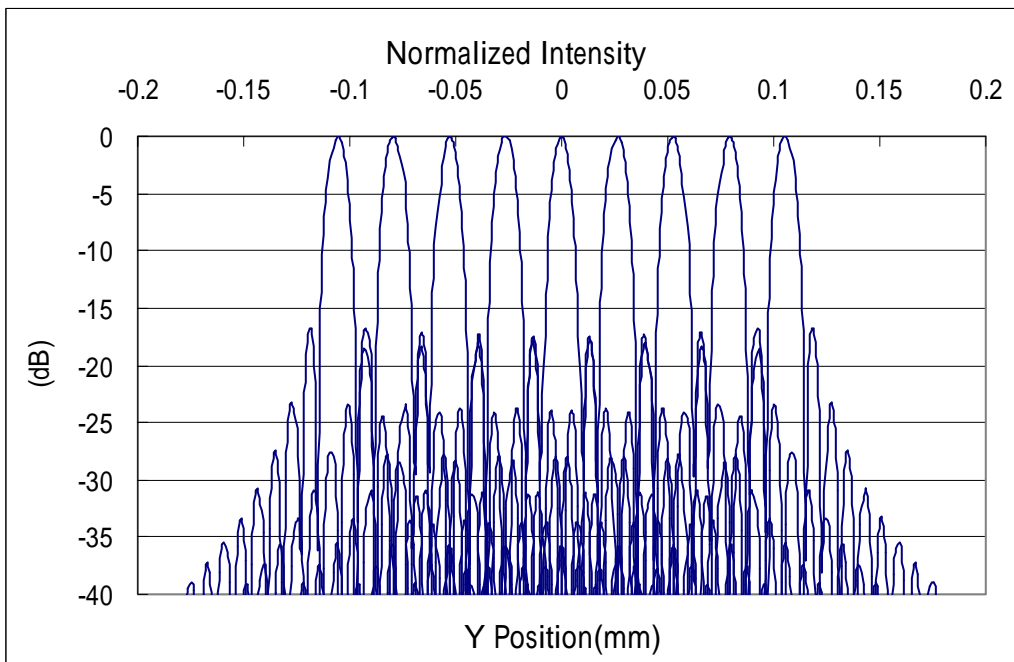


圖 4.15 理想週期下光柵 (KRS5) 的訊號強度分佈 (dB 為單位)

(4) 光柵基材為 KRS5，週期為 $15.0\ \mu\text{m}$ 時：

歸一化強度分佈：

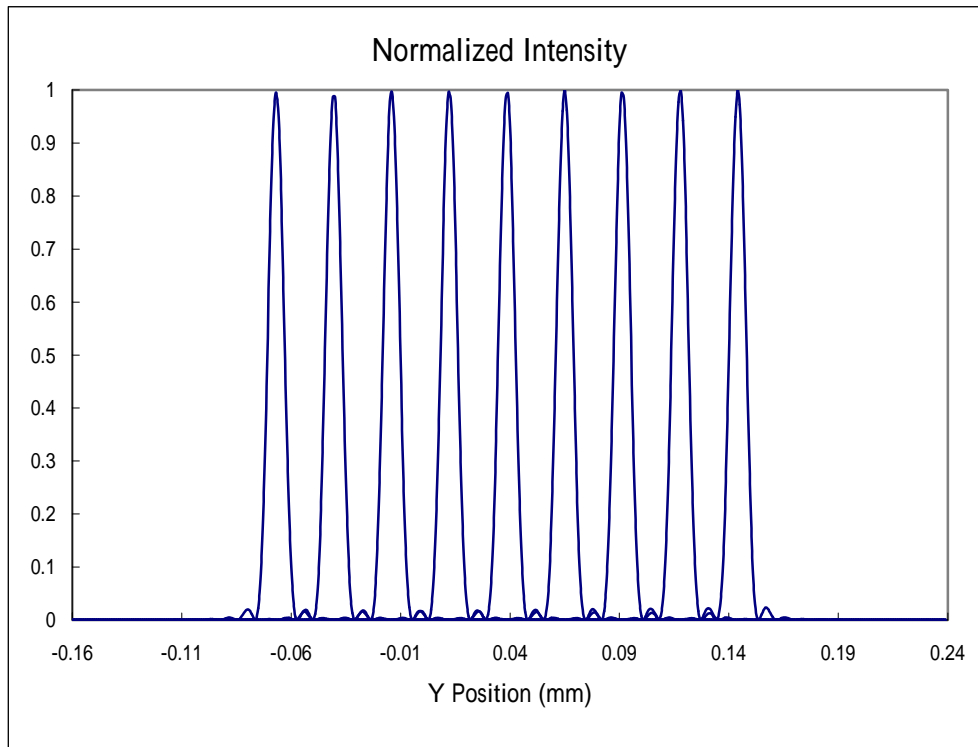


圖 4.16 週期 $15\ \mu\text{m}$ 時光柵 (KRS5) 的訊號強度分佈

以 dB 為單位表示：

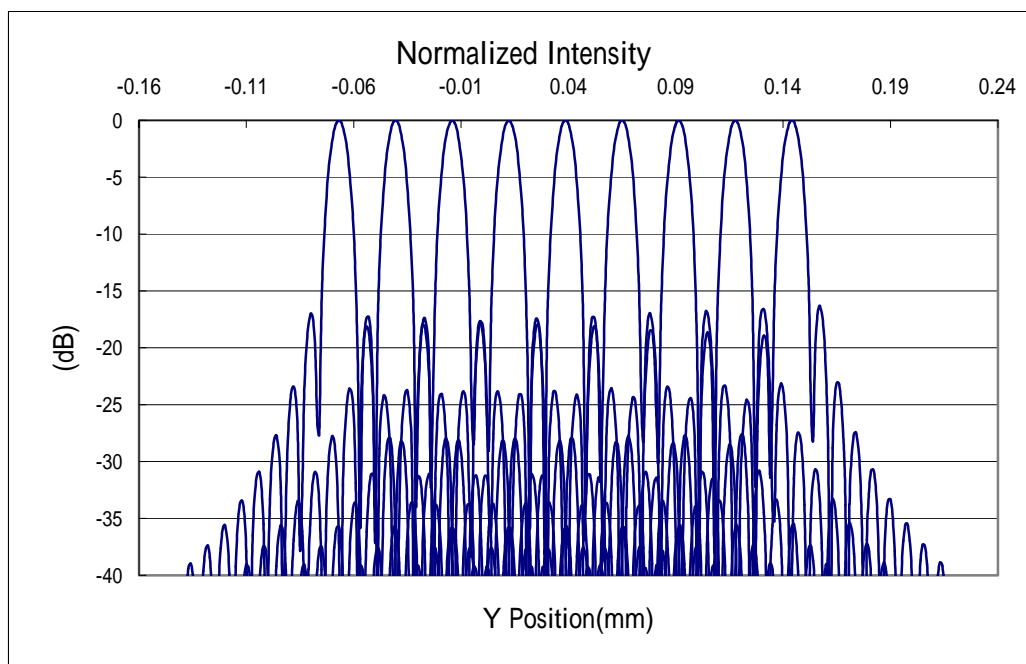


圖 4.17 週期 $15\ \mu\text{m}$ 時光柵 (KRS5) 的訊號強度分佈 (dB 為單位)

由歸一化強度圖形可看出，當製程限制使光柵週期有一定程度的誤差時，僅會造成各頻道在訊號區的位置稍微偏移，並不會對各頻道間的串光造成影響（相鄰頻道各自的第一暗紋兩兩分開）。而將歸一強度取 dB 值為單位作圖，則可發現訊號較相鄰頻道雜訊（最大值）大了約 24 (dB)，相鄰頻道的雜訊在可以接受的範圍內。

(5) 譜分佈（光柵週期為理想情形）

將各頻道訊號區（Airy disc）內的各波長強度進行積分，可求出設計的解多工器在理想情況下的譜分佈圖形。

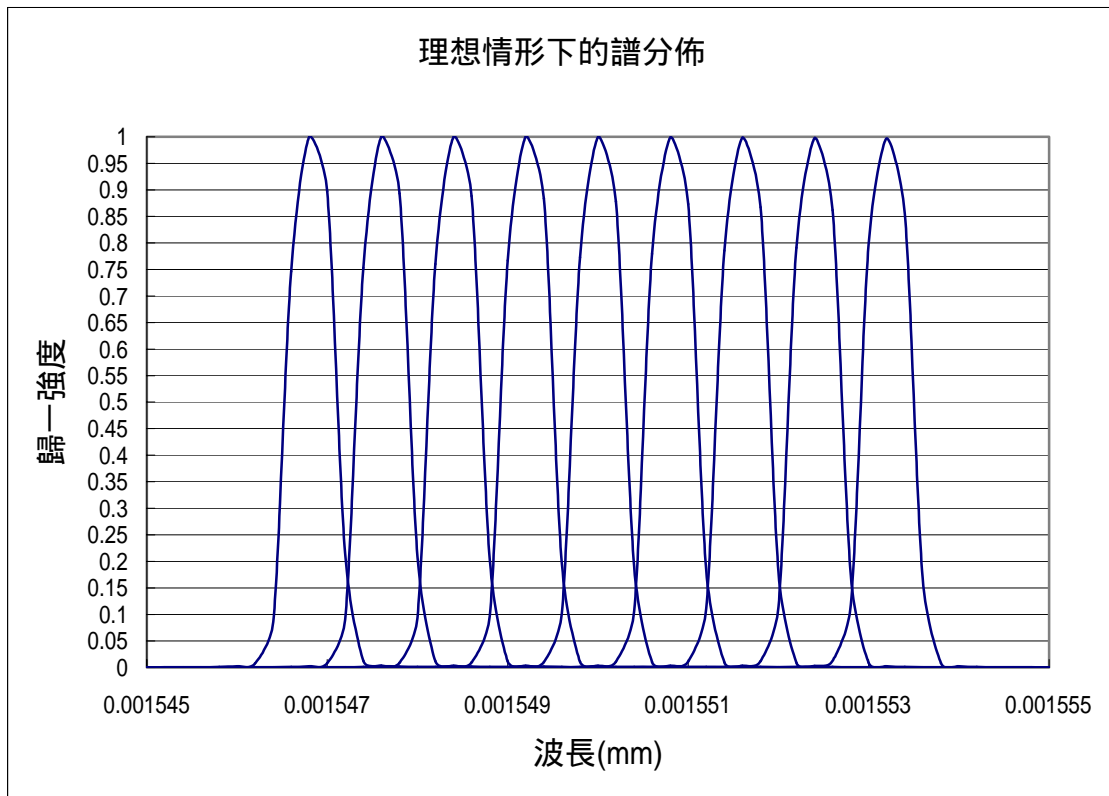


圖 4.18 光柵週期為理想週期時之譜分佈

以 dB 為單位做圖

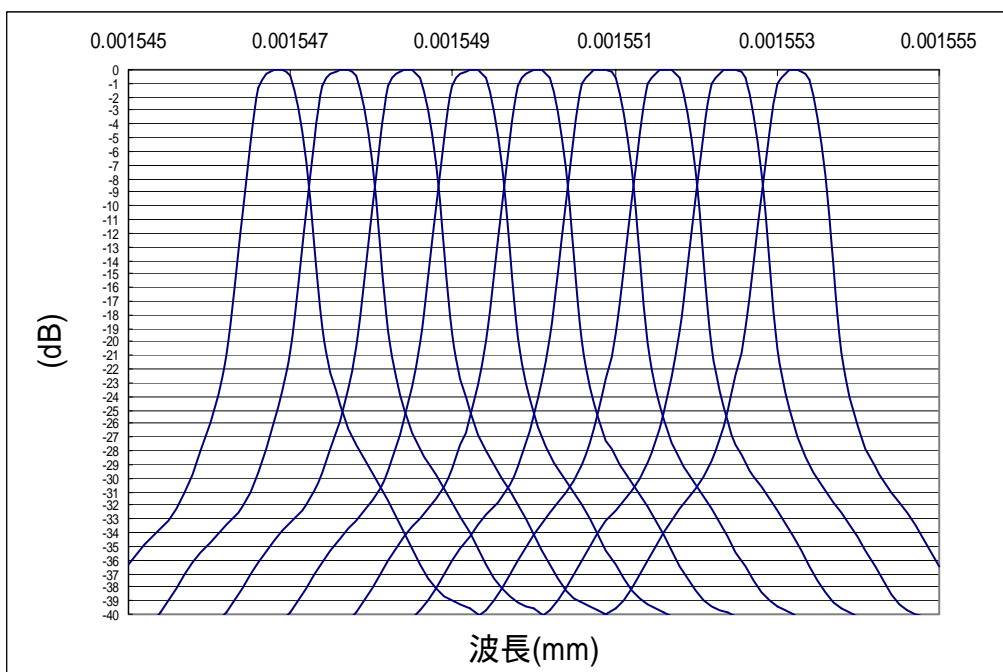


圖 4.19 光柵週期為理想週期時之譜分佈 (dB 為單位)

由上述圖形可看出模擬出理想情況下的解多工器的譜分佈圖形相鄰頻道交接處的 dB 值約為-9dB，各頻道峰值中心對應的 dB 值則約為-25dB。相鄰頻道的雜訊在可以接受的範圍內。

(6) 串接兩解多工器之譜分佈 (光柵週期為理想情形)

頻道間距 100GHz (dB 為單位)，9 頻道的譜分佈

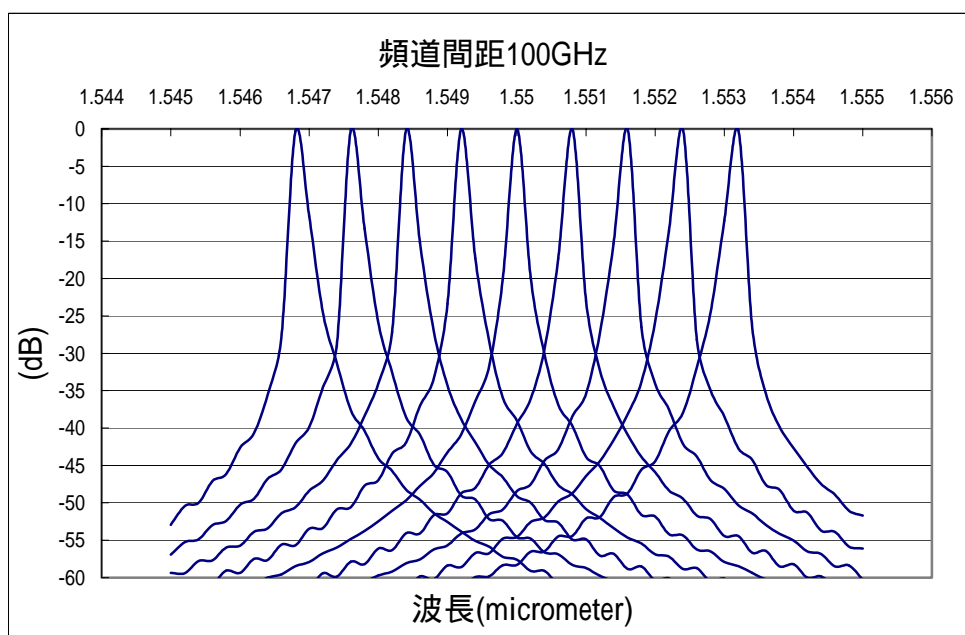


圖 4.20 串接兩解多工器之譜分佈 (100GHz)

頻道間距 50GHz (dB 為單位), 18 頻道的譜分佈

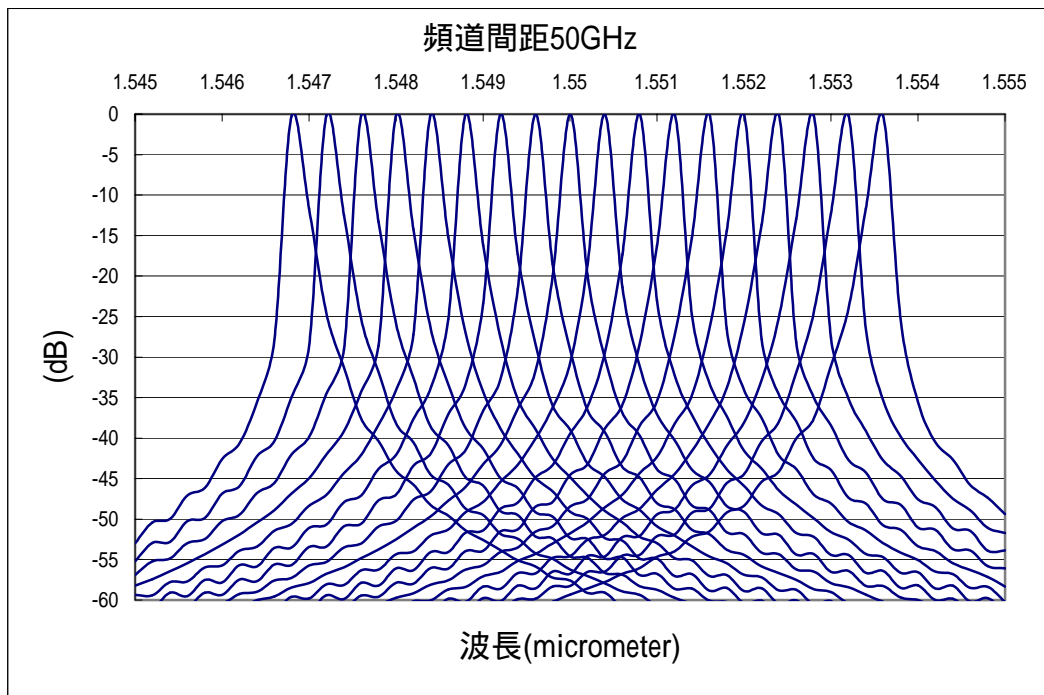


圖 4.21 串接兩解多工器之譜分佈 (50GHz)

由上述兩圖形可明顯看出此型態的多工器在串接使用的情況下，其分波能力可大幅提升。

第五章 元件的製作

5.1 引言

所設計的閃耀式稜鏡光柵型態的解多工器，稜鏡部份是採用市售 λ 公司所售頂角 60 度、材料為 SF10 的稜鏡；而閃耀光柵的製作則嘗試兩種不同的製作方式，一種方式則是利用「VLSI 半導體製程」採用二進階的方式，利用多道光罩對準程序製作分階結構在矽晶片上，以階梯狀不連續的相位分佈來近似原始的閃耀光柵的連續相位分佈；另一種為利用「精密溝槽加工機」在 KRS5 材料上直接切削出閃耀光柵結構。

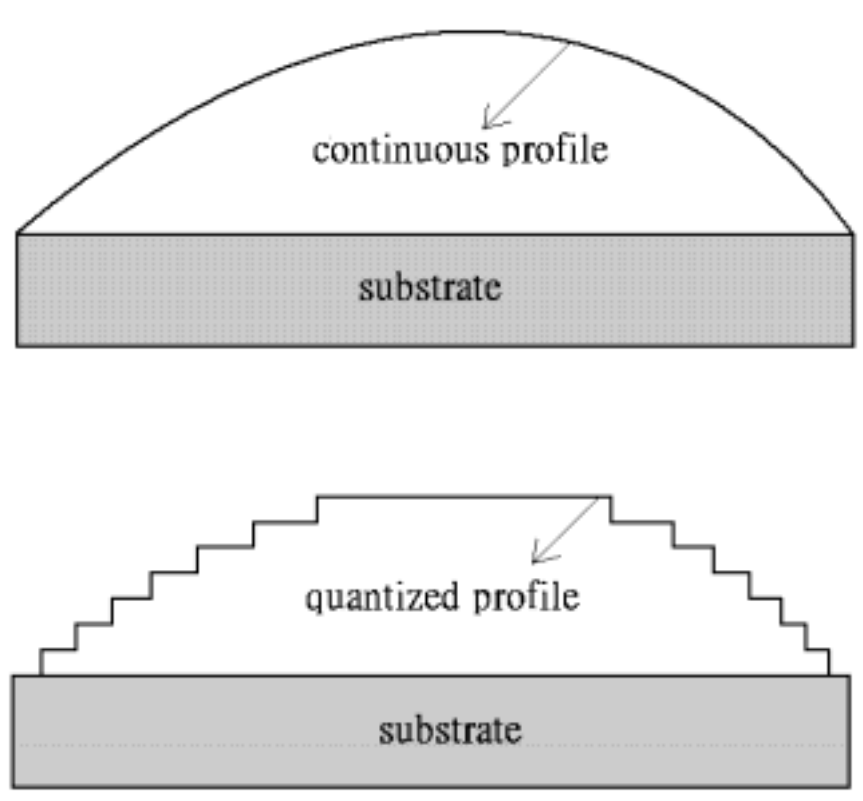


圖 5.1 分階示意圖

5.2 利用 VLSI 半導體製程閃耀光柵

5.2.1 分階結構近似連續面

由於連續的輪廓分佈在製程上有設備上的限制，雖可使用灰階光罩，但由於技術上灰階光罩製作不易價格昂貴，因此以二進階(2^N 階)的方式，利用多道光罩(N道)的對準程序，企圖將原始的連續相位分佈分階量化(quantization)，以階梯狀不連續的相位分佈來逼近原始的連續相位分佈。

二進階下的相位分階情形可分為二階、四階、八階、十六階... 2^N 階等，利用 1 到 N 片不等的光罩來達到分階的效果。使用的階數越多，將越近似理想的輪廓曲線，但同時製程上的困難度及誤差的相對提高。

在不同分階方式下，元件所能達成的光效率如表所示：

表 5.1 分階後與原始相位的效率比

階數	所需光罩數	TE 偏振態效率 (%)	TM 偏振態效率 (%)	平均效率 (%)
2	1	0.2847	0.5073	0.3960
4	2	0.4797	0.7429	0.6113
8	3	1.1580	0.8029	0.9805
16	4	18.0076	57.6954	37.8515

為配合製程設備的對準難易度，且考慮效率在可接受的範圍內，本文中將以十六階的方式來製作元件，由二進階的分階原理可知，將需要四道光罩(mask)來得到十六階化後的元件表面圖樣(profile)，如圖所示：

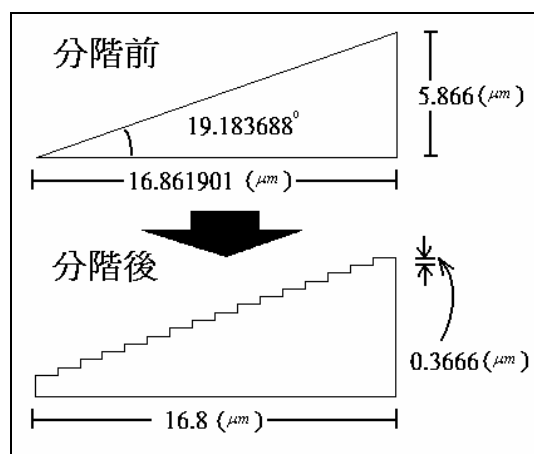


圖 5.2 分 16 階示意圖

在十六階元件的蝕刻過程中，四道光罩的分配示意圖如下，四道光罩分別代表著不同的蝕刻深度：

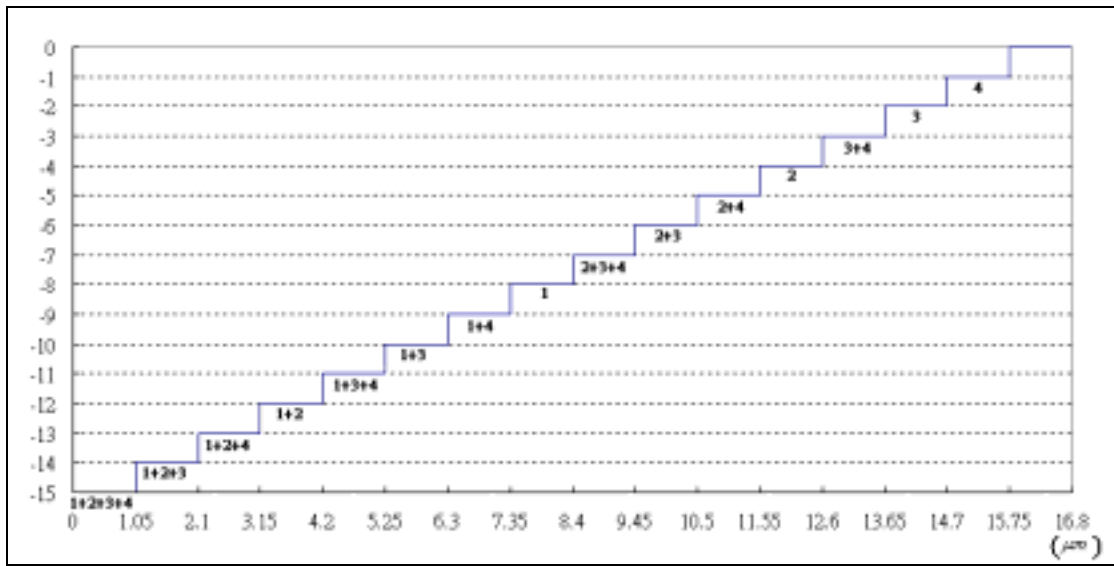


圖 5.3 蝕刻十六階元件之光罩分配圖

其中 1、2、3、4 分別代表 mask1、mask2、mask3、mask4，”+”號代表須有兩道以上的光罩均做蝕刻，最上面那一階的水平高度為元件未蝕刻前的表面高度。

以十六階元件為例，利用四道光罩來達成十六個步階的製作情形如圖所示。

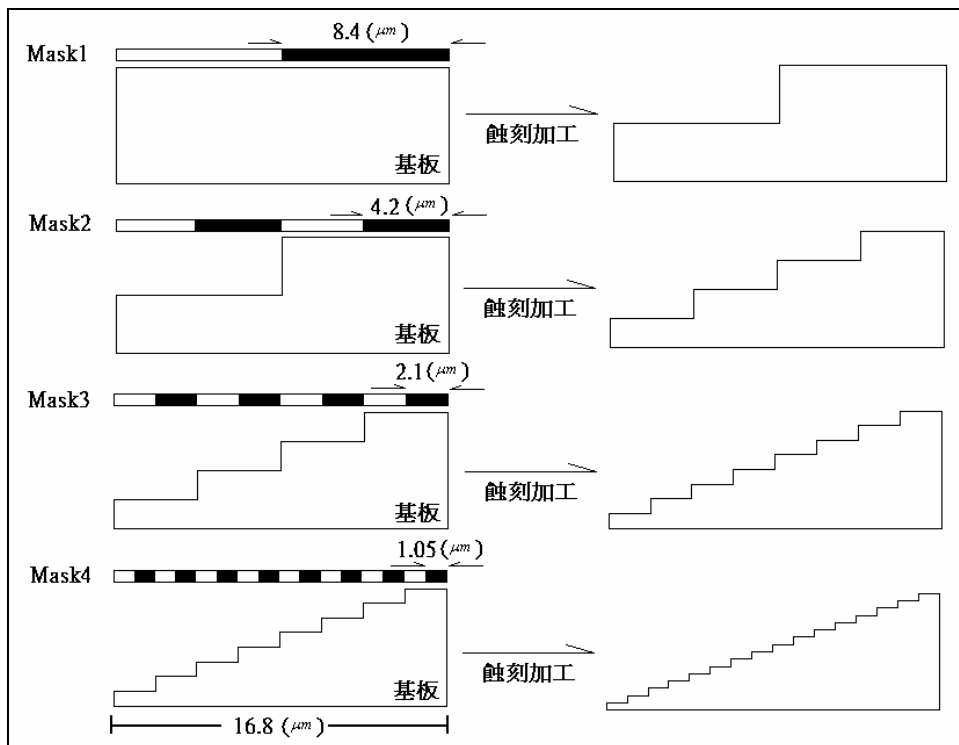


圖 5.4 十六階元件的蝕刻流程

5.2.2 光罩設計

a. 光罩繪製：

必須考慮製程方式來決定光罩中透光與不透光的部分，如半導體製程中使用光阻液為正光阻時，則透光區域為蝕刻區域，不透光區域為保留區域，若是使用半導體製程但光阻液為負光阻時，則恰好相反。由於負光阻在曝光後進行顯影時，會產生膨脹（swelling）的現象，使得負光阻的體積增加，導致顯影後的負光阻與光罩上圖案的誤差增大，所以利用正光阻進行光罩圖案的轉移會有較好的效果。故所設計的光罩是適用於正光阻的圖形。

光罩係委託國家奈米元件實驗室製作，對於光罩的繪製先採用 fortran 程式語言撰寫套裝軟體 AutoCAD 的腳本檔案 (*.scr)，再利用套裝軟體 AutoCAD 執行腳本，所繪出的光罩檔案再存成國家奈米元件實驗室可接受的 *.dxf 格式。

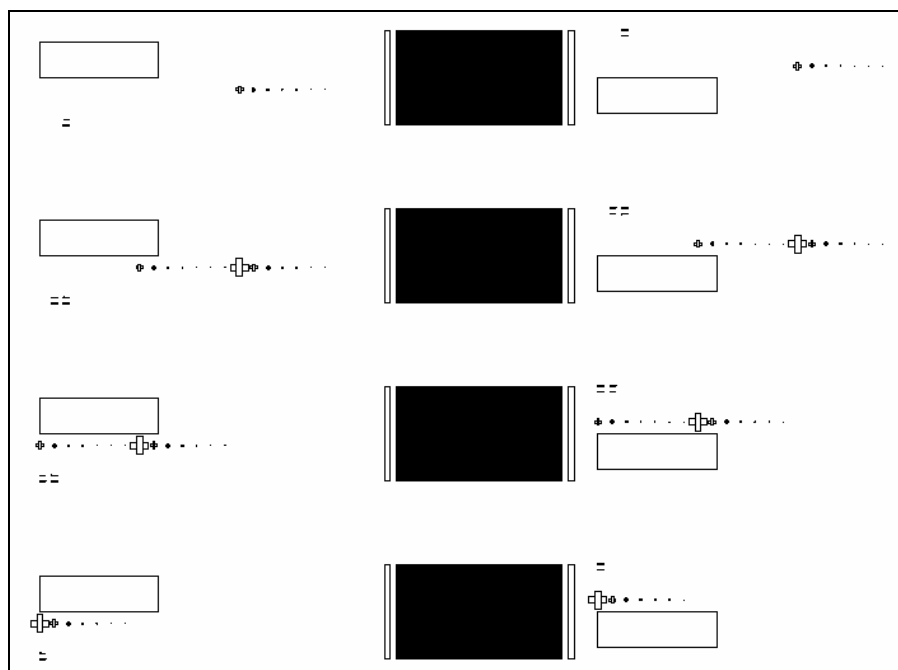


圖 5.5 十六階元件製作之光罩圖樣

b. 對準鍵的設計

因為元件是利用多道光罩來達成，因此在製作過程中依次使用每一道光罩圖案時，必會遇到相互間的對準問題，所以必須在光罩上畫上許多的對準鍵(Alignment Key)作為每一道光罩間互相對準的記號，對準鍵的形式及大小，將對元件的製作精確度有相當大的影響，在許多論文中均提到，對準誤差在製程技術上是最難克服的。

因此在設計光罩上的對準鍵時，需將所有機台的自由度的特性考慮進去，因為半導體中心(SRC)的光罩對準曝光機(Aligner)上放置 wafer

的平台有三個自由度(x 方向、y 方向及旋轉)可以調整，而光罩是固定不動的，利用對準鍵進行對準可達到誤差最小的要求。

上述的三個自由度中，以旋轉自由度最難控制，通常受限於對準顯微鏡的景深太淺，無法同時很清晰地看到光罩和晶片上的圖形。當晶片和光罩有一個小角度差時，通常是無法察覺到，這就造成了曝光後在晶片上前後兩道光罩的圖形出現傾斜誤差。因此在設計對準鍵時，可以設計兩邊對稱或是斜角對稱，且相距較遠的對準鍵，如此一來當對準其中一個對準鍵時，再移動顯微物鏡到與其對稱的另一個對準鍵上，即可清楚的看到是否有傾斜的情形發生。其原理簡易說明於圖 5.6:

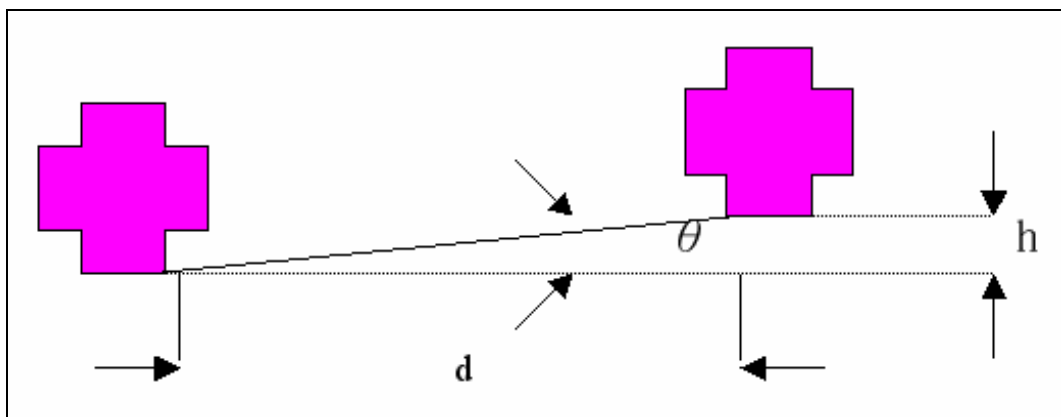


圖 5.6 對準鍵的旋轉對準誤差

假設底部的虛線代表光罩與晶片上圖形的共同對準線，由上圖可知左邊的對準鍵已與晶片對準，而右邊的對準鍵卻和晶片間有一個小角度 θ 的傾斜發生(relative rotation)。當距離 d 越小時，偏斜的線度 h 越小，越難發覺傾斜程度。但當 d 變大時，傾斜的程度 h 可越容易被發覺出來。因此以設計相距較遠且位置相對的對準鍵為佳，如此可減小對準時誤差的發生。

適當的對準鍵設計將有助於對準過程的進行，總的來說，在設計對準鍵時需注意以下幾點：

1. 對準顯微鏡的視場、解析度及景深(倍數越高，則景深越小)造成的限制，足夠的景深方可使我們在對準時，同時看清楚光罩與基板(substrate)上的圖案
2. 盡量將對準鍵設計在光罩上不同的角落處(拉長距離)，以防因光罩與基板的相對旋轉所引起的誤差產生。
3. 在多道光罩的製程情況下，對準鍵的設計可朝向”配對式”對準鍵的方式來處理，即多道光罩間各自設計不同形式的對準鍵，但前後兩道光罩的對準是以契合的形式來達成。

對準鍵的畫法其實有好幾種，但我們可大致歸由兩類，重合型對準鍵與契合型對準鍵。

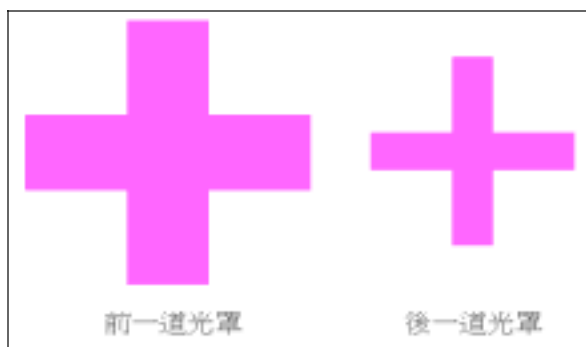


圖 5.7 重合型對準鍵



圖 5.8 契合型對準鍵

本論文是利用重合型對準鍵，其中在光罩的設計上，對準鍵可多做幾組，各組對準鍵之對準誤差均不相同，如對準誤差 $10\ \mu\text{m}$ 、 $5\ \mu\text{m}$ 、 $3\ \mu\text{m}$ 、 $2\ \mu\text{m}$ 、 $1\ \mu\text{m}$ ，這樣若 $1\ \mu\text{m}$ 誤差之對準鍵若在顯微鏡下無法對準，至少可退而求其次，來對準 $2\ \mu\text{m}$ 之對準鍵，依此類推……。如圖 4.8 之重合型對準鍵，若能使兩圖形重合，則水平與垂直之對準誤差均可在接受範圍以內。

所設計的光罩上共有 3 組對準鍵，一組十字型的對準鍵其對準誤差較大依次為 $300\ \mu\text{m}$ 、 $100\ \mu\text{m}$ 、 $50\ \mu\text{m}$ 、 $30\ \mu\text{m}$ 、 $10\ \mu\text{m}$ 、 $5\ \mu\text{m}$ ，可在一開始進行粗略的對準、另外有兩組分別為十字型及圓形的對準鍵其對準誤差較小的對準鍵，對準誤差依次為 $5\ \mu\text{m}$ 、 $2\ \mu\text{m}$ 、 $1\ \mu\text{m}$ 、 $0.5\ \mu\text{m}$ 、 $0.3\ \mu\text{m}$ 、 $0.1\ \mu\text{m}$ ，因此當光罩與矽晶片上兩組圖案對準時，對準誤差可控制在 $0.1\ \mu\text{m}$ 內。

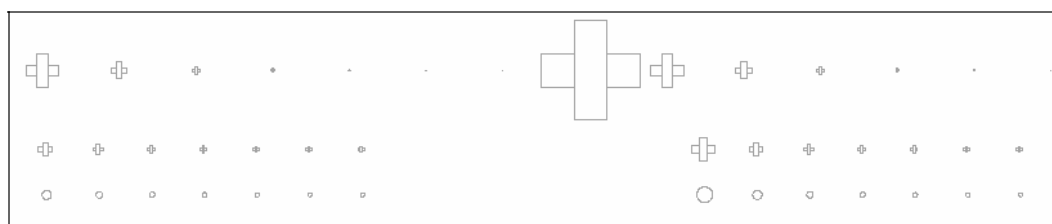


圖 5.9 設計在光罩上使用的三組重合型對準鍵

5.2.3 加工流程

以分十六階進似連續面來製作閃耀光柵，十六階的製程步驟需四道光罩，由於製程中需要對準一道以上的光罩，因此如何減少對準過程中所發生的對準誤差，將是決定元件品質的一大因素。以下為元件的製程步驟及相關參數：

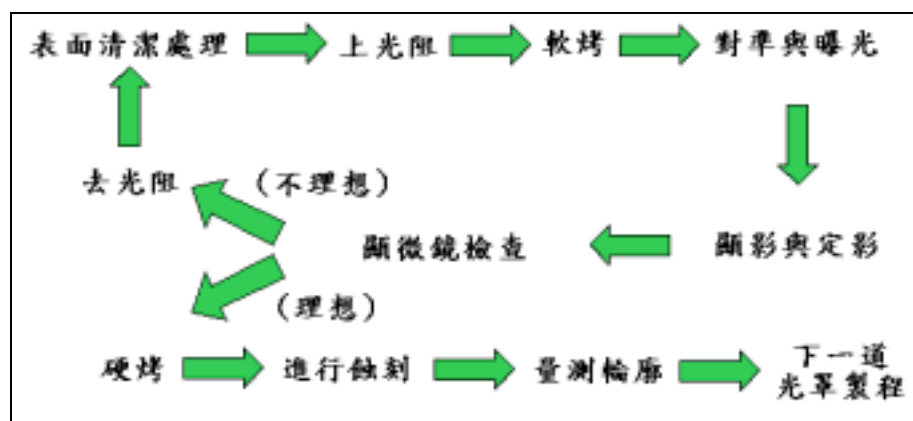


圖 5.10 實驗製程流程圖

分十六階製作閃耀光柵的製程步驟如下：

(1) 表面清潔處理

- 將矽晶片置入載具(holder)中，先用 D. I. Water(去離子水)沖洗 5 分鐘。
- 浸泡於丙酮(acetone)中，並置於超音波震盪器中 6 分鐘，目的在於去金屬、酯類及塵粒。
- 以 D. I. Water 沖洗 5 分鐘。
- 將沖洗好之基板放入硫酸與雙氧水混合液($H_2SO_4 : H_2O_2 = 3:1$ —約 1200 ml)中約 20 分鐘加以清洗，目的在於去除重金屬及有機物。
- 以 D. I. Water 沖洗 5 分鐘。
- 以氮氣槍或旋乾機將基板吹乾。

(2) 上光阻

為了增加光阻與矽晶片的附著力，在上光阻前先將矽晶片送入 $150^{\circ}C$ 的 Y.E.S. 烤箱中，使基板表面鍍上一層光阻附著膜 HMDS(Hexamethyldisialzane)，之後將基板取出，並置於室溫下冷卻。

(3) 軟烤

將光阻塗佈器(spinner)設定 6000 轉，塗上正光阻 FH6400，並以 $90^{\circ}C$ 加熱板(Hot plate)軟烤(soft bake)1 分鐘。

(4) 以第一道 mask 進行曝光。

(5) 用顯影液 FH-D5 來顯影，D. I. Water 為定影液，基板經氮氣槍吹乾後，再至顯微鏡下觀察顯影後的結果，；如果顯影結果並不理想，則應把光阻去掉後，再重頭做起。

(6) 硬烤

若顯影結果理想，則將矽晶片置於 150°C 的加熱板(Hot plate)硬烤 (soft bake)20 分鐘 (for ICP Process)。

(7) 蝕刻

VLSI 半導體蝕刻製程方式又可細分為：濕蝕刻(wet etching)、乾蝕刻(dry etching)、活性離子蝕刻(reactive ion etching, RIE)、化學輔助活性離子束蝕刻(chemically assisted reactive ion beam etching, CAIBE)、感應耦合電漿離子蝕刻 (Ion Coupled Plasma dry etching system, ICP)、電子束微影光刻 (electron beam lithography)...等。

配合學校及精密儀器中心所提供的製程設備，使用活性離子蝕刻 (RIE)及感應耦合電漿離子蝕刻 (ICP)兩種加工方式對矽晶片進行加工，兩種加工方式的特性如下：

a. 感應耦合電漿離子蝕刻---具有矽晶片對光阻的選擇比高的特性 (約 40:1)，可降低經由光阻定義圖形轉換到矽晶片上的形變，蝕刻轉換出的側壁垂直度佳；其最小蝕刻深度單位較大 (約 0.6 μm)，無法精確到奈米等級；蝕刻速率快，可降低蝕刻的時間，是適合進行深蝕刻的機台。

b. 活性離子蝕刻---經由氣體的選擇、混合比率、壓力大小、流量控制與功率調整等可以決定蝕刻速率，蝕刻速率較慢 (最小的單位時間內平均蝕刻深度約幾個奈米)，若進行深蝕刻所需花費的製程時間比較久；其矽晶片對光阻的選擇比很差 (約 1:5)，若進行深蝕刻則難以避免由光阻轉換至矽晶片上所造成的形變。

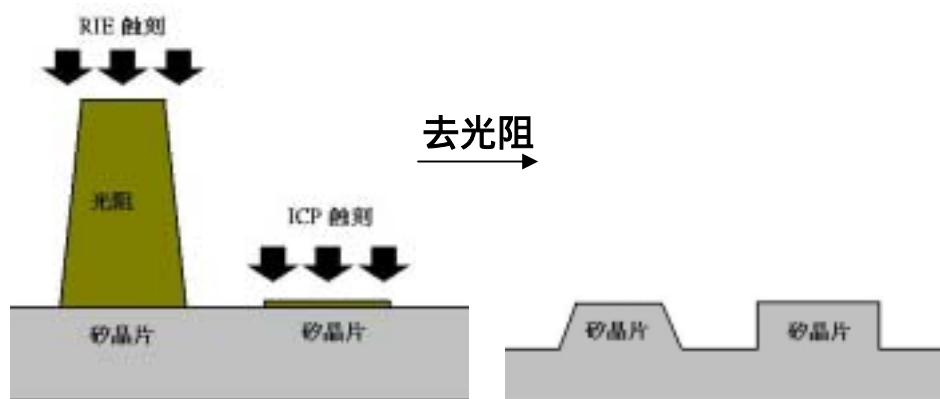


圖 5.11 蝕刻選擇比示意圖

由於製程蝕刻深度最深的一道深約為 $3\ \mu\text{m}$ ，又製程線寬的誤差不能大於 $1\ \mu\text{m}$ ，為了避免由光阻轉換至矽晶片上所造成的形變，最後的加工方式為綜合上述兩種加工方式，選擇先使用感應耦合電漿離子蝕刻 (ICP) 蝕刻大部份的深度，再利用活性離子蝕刻 (RIE) 進行蝕刻至所需的深度，可得到較小的線寬誤差，繞射面分 16 階後單一步階的深度為 $0.3666\ \mu\text{m}$ ，Mask 1：蝕刻出八個步階深度，即 $2.9328\ \mu\text{m}$ 。

(8) 用丙酮去除光阻。

(9) 第二、三、四道光罩製程，重複流程 (1) ~ (8)，僅步驟 7 中改為 Mask 2：蝕刻出四個步階深度，即 $1.4664\ \mu\text{m}$ 、Mask 3：蝕刻出二個步階深度，即 $0.7328\ \mu\text{m}$ 、Mask 4：蝕刻出一個步階深度，即 $0.3664\ \mu\text{m}$ 。

5.3 利用鑽石加工製作閃耀光柵

5.3.1 加工機台規格

考慮利用鑽石加工，可在硬度較低的紅外材料上切割出連續的閃耀面，而可得到效率近乎 100%的閃耀光柵。加工是委託工研院機械所代為進行，所使用的機台為「精密溝槽加工機」(型號為 NACHI NCAU-300E)，其規格如下：

(1) 定位精度：

$$X : 500mm \pm 1\mu m$$

$$Y : 300mm \pm 1\mu m$$

$$Z : 200mm \pm 1\mu m$$

(2) 平面度：

$$(300 \times 500) < 4\mu m$$

(3) 表面粗糙：

$$Ra < 0.02\mu m$$



圖 5.12 精密溝槽加工機

5.3.2 加工材料特性

查詢市售紅外材料的軟硬度，KRS5 材料的的硬度低，(Knoop Hardness 值為 40，鑽石的 Knoop Hardness 值為 7000)，類似臘狀，因此利用鑽石刀進行切削時不易碎裂，適合進行鑽石加工，下列是 KRS5 材料的一些特性：

(1) 光學特性

transmission range : 0.6 to 40 μm

relative index : 2.37069 at 10 μm

reflection loss : 28.4% at 10 μm

dn/dT : $-235 \times 10^{-6} / ^\circ C$

(2) 物理特性

density : 7.371gm/cc

Thermal expansion : $58 \times 10^{-6} / ^\circ C$

Hardness : Knoop 40.2

Dielectric Constant : 32.5

(3) 化學特性

Solubility : 0.05gm/100gm water at 20 $^\circ C$

Molecular weight : 42 mole% TlBr, 58 mole% TlI

5.3.3 加工方式

選擇尖端角度適當的鑽石刀，製作配合閃耀角角度的夾具將刀具固定在機台上，在 KRS5 材料上刻畫出所需的表面結構。本次加工所選擇的鑽石刀的尖端角度為 70 $^\circ$ ，屬於 2.3.2- (2) 所討論的情形中最佳的第三種情形，即光線完全沒有被相鄰的邊陲所遮蔽，效率可達 100%。

第六章 量測結果

6.1 元件製作結果

6.1.1 分階製作近似連續面的閃耀光柵

使用精密儀器中心的 Zygo NewView5000 儀器來量測以矽為基材分階製作近似連續面的閃耀光柵表面輪廓。

(1) 四階

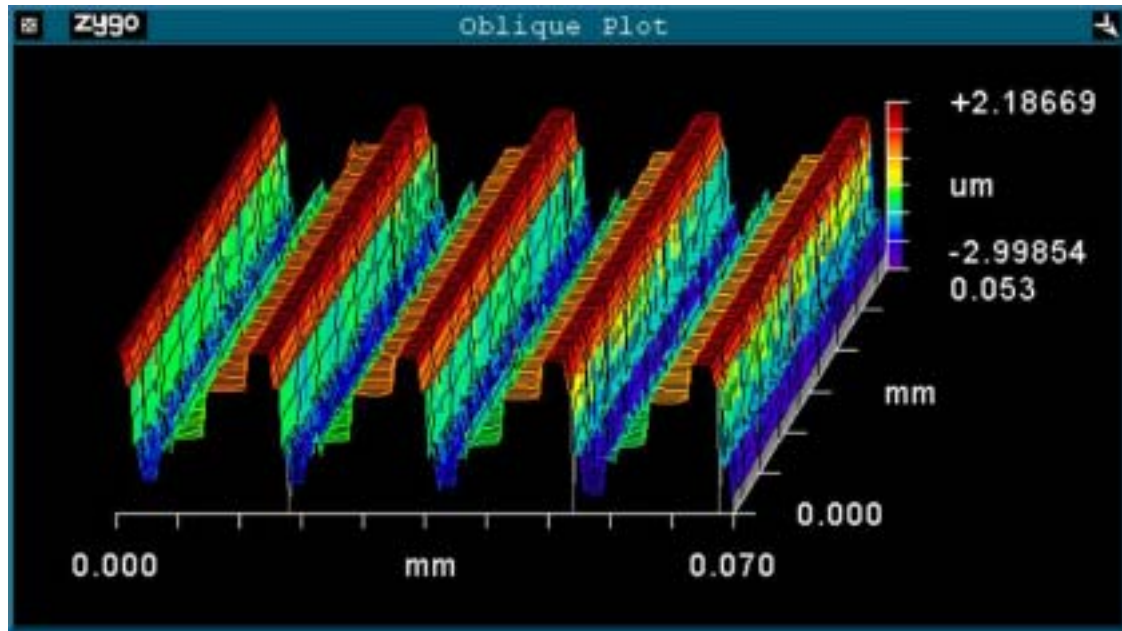


圖 6.1 四階蝕刻深度—側視 3-D 圖 (ZYGO 圖)

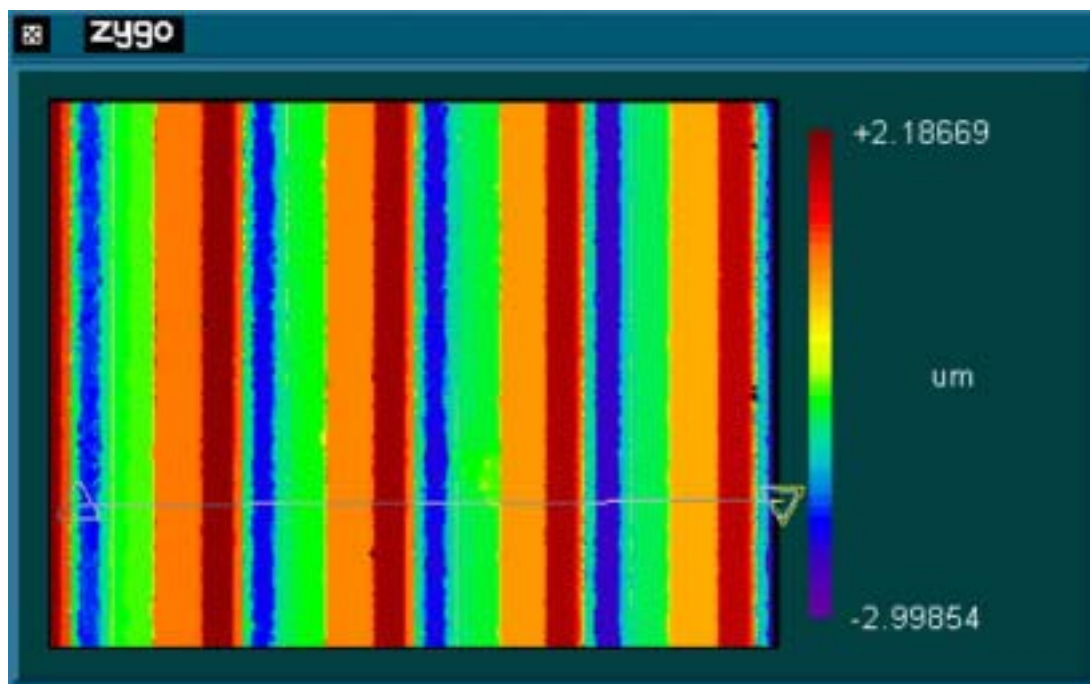


圖 6.2 四階蝕刻深度—俯視 3-D 圖 (ZYGO 圖)

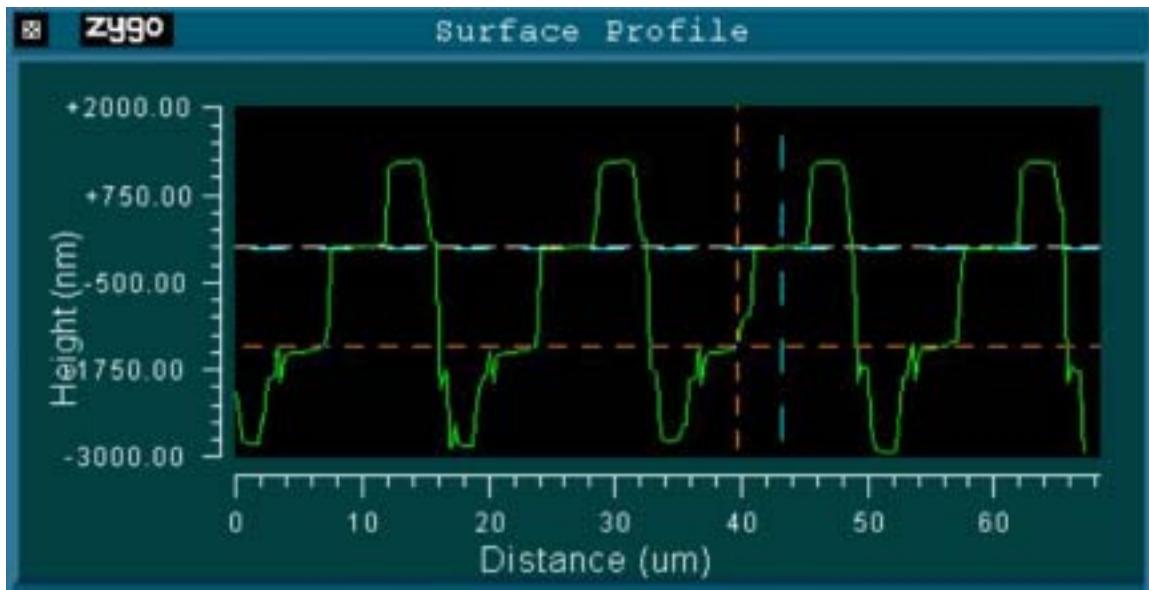


圖 6.3 四階蝕刻深度一剖面圖 (ZYGO 圖)

(2) 八階

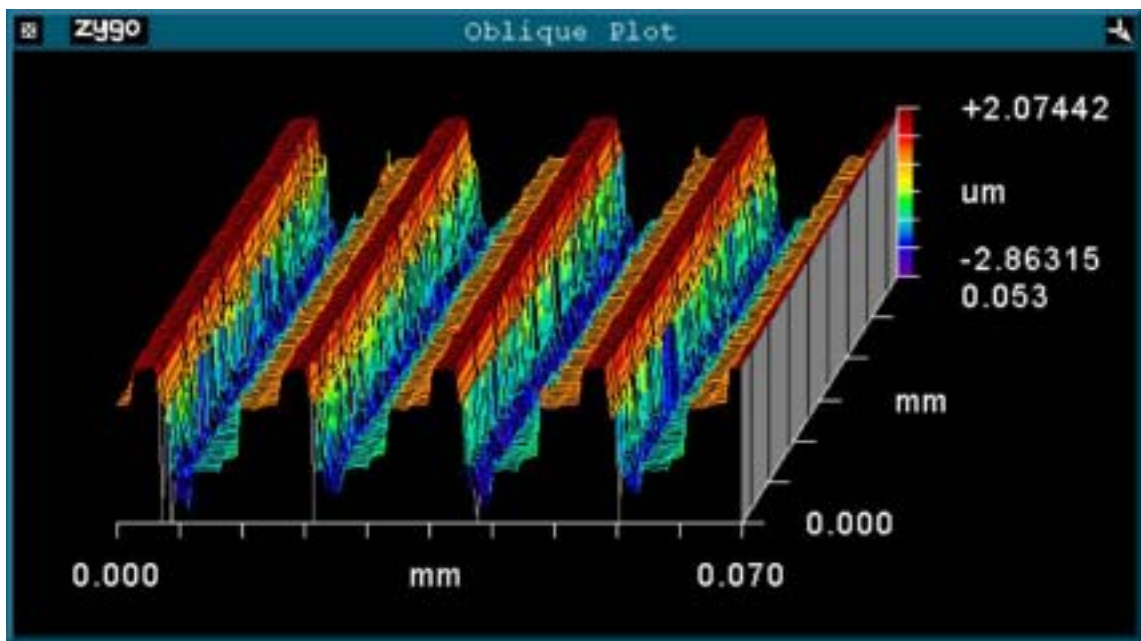


圖 6.4 八階蝕刻深度一側視 3-D 圖 (ZYGO 圖)

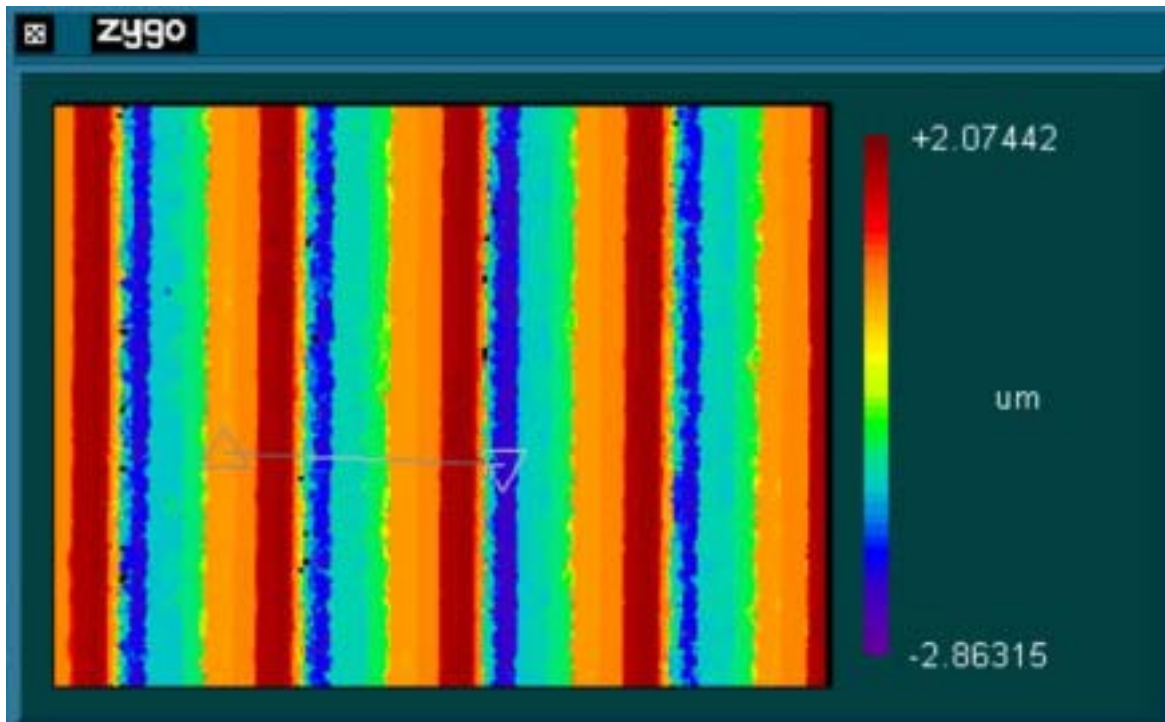


圖 6.5 八階蝕刻深度—俯視 3-D 圖 (ZYGO 圖)

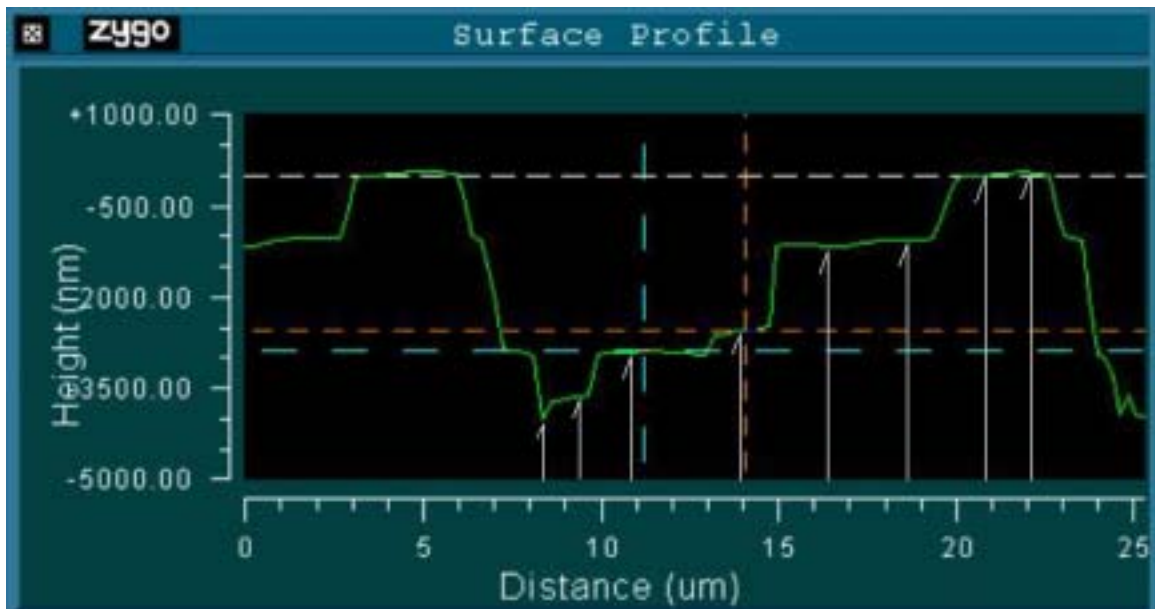
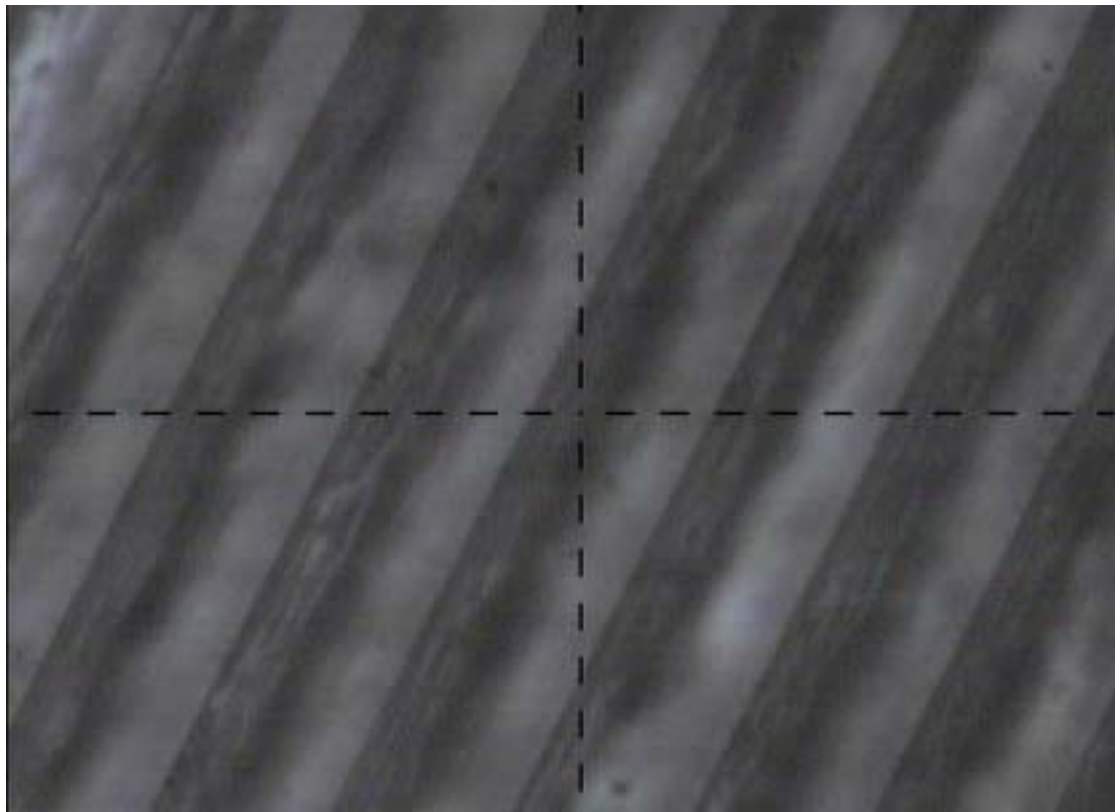
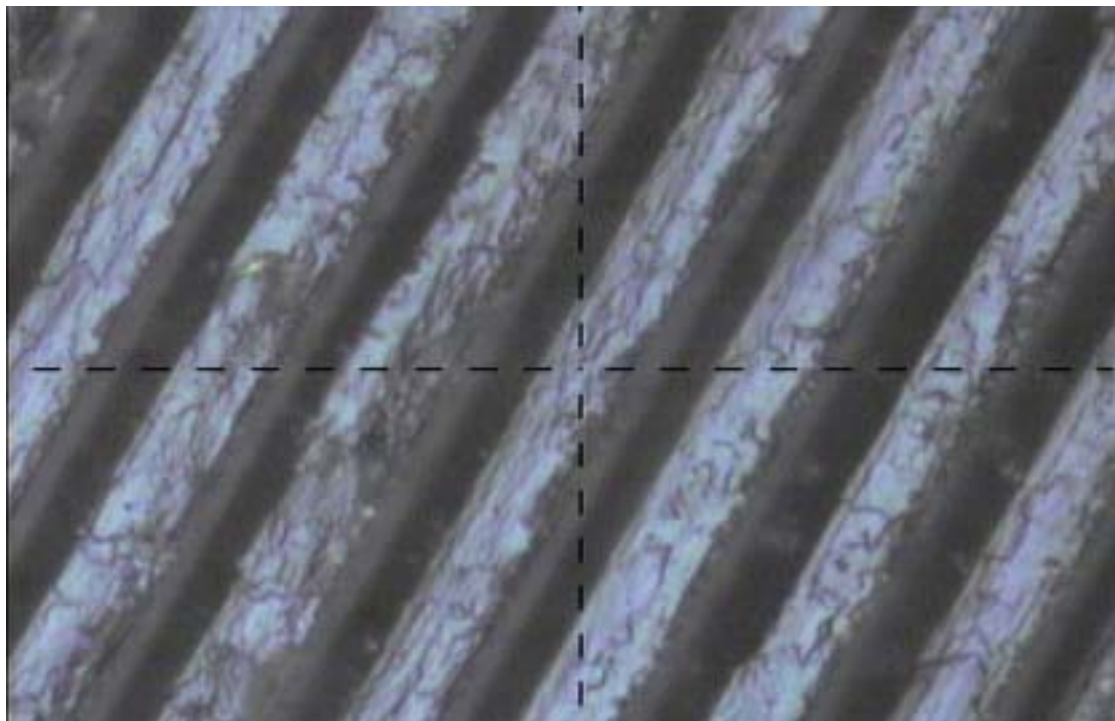


圖 6.6 八階蝕刻深度—剖面圖 (ZYGO 圖)
(箭頭標示不同階的分佈)

6.1.2 鑽石加工製作閃耀光柵



(a) 較佳處



(b) 較差處

圖 6.7 加工後表面輪廓圖 (顯微鏡)

6.2 稜鏡光柵型態解多工器的分光效果

以購買的稜鏡（材料 SF10）與利用鑽石切削加工的光柵（材料 KRS5），裝置量測系統，對其光學特性進行量測。

6.2.1 譜分佈量測

(1) 量測系統配置圖

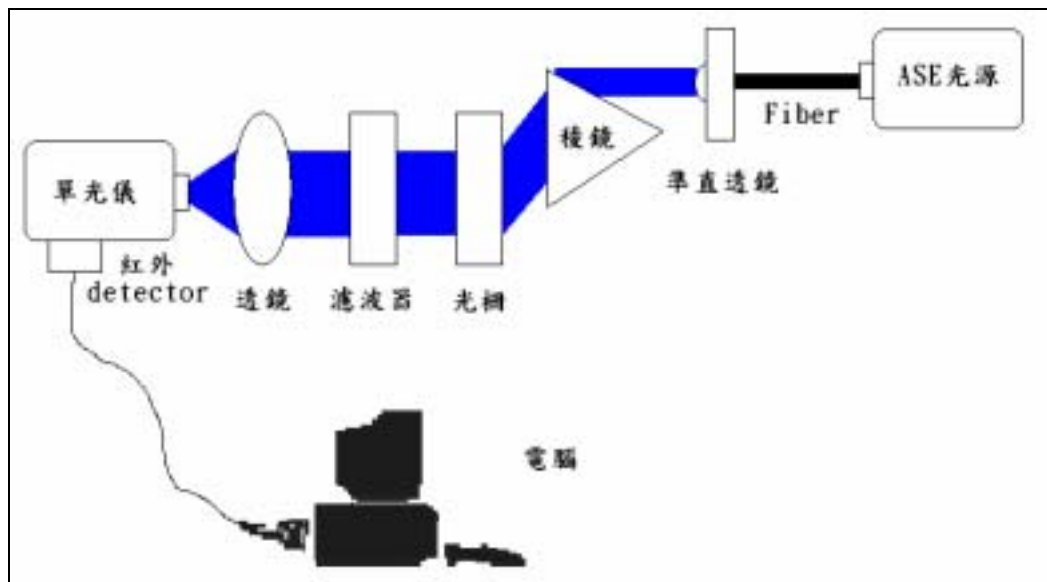


圖 6.8 譜分佈量測系統配置圖

(2) 儀器架構

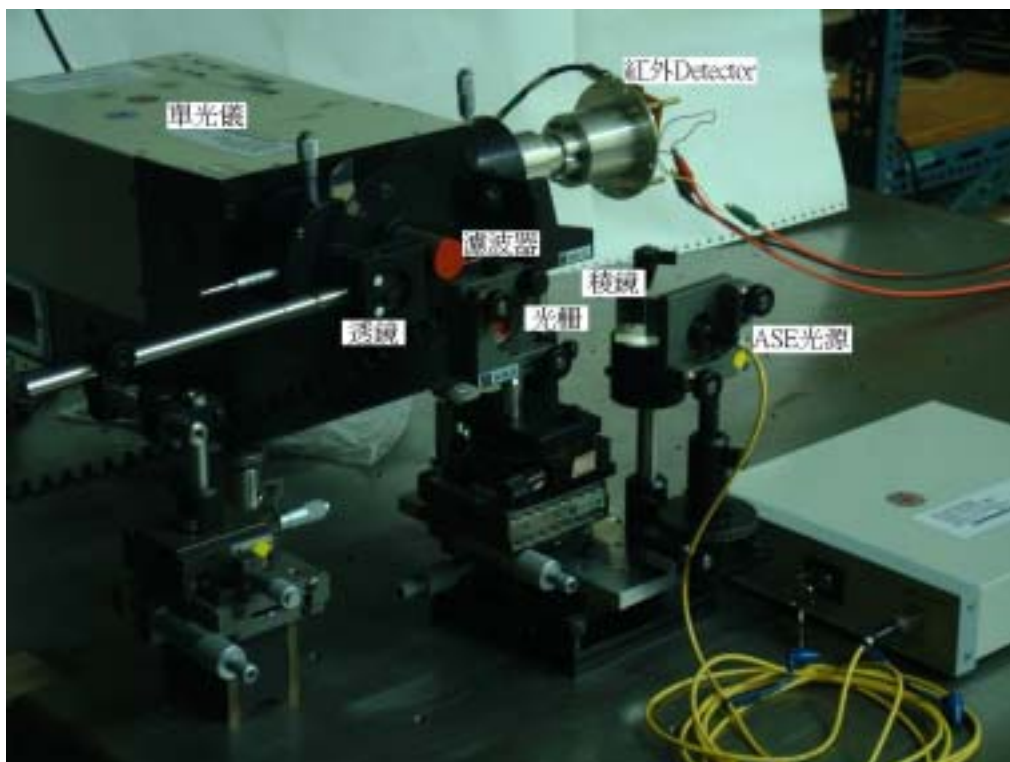


圖 6.9 量測譜分佈的儀器架構

(3) 譜分佈

a. 實際量測結果

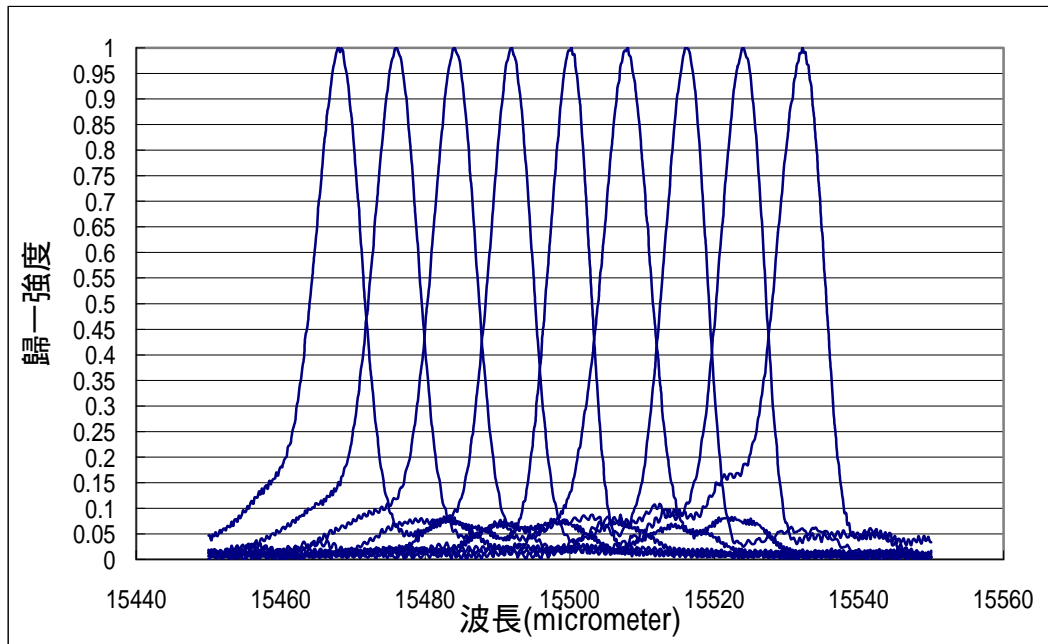


圖 6.10 100GHz 以 $1.550 \mu\text{m}$ 為中心 9 頻道譜分佈

b. 以 dB 為單位作圖

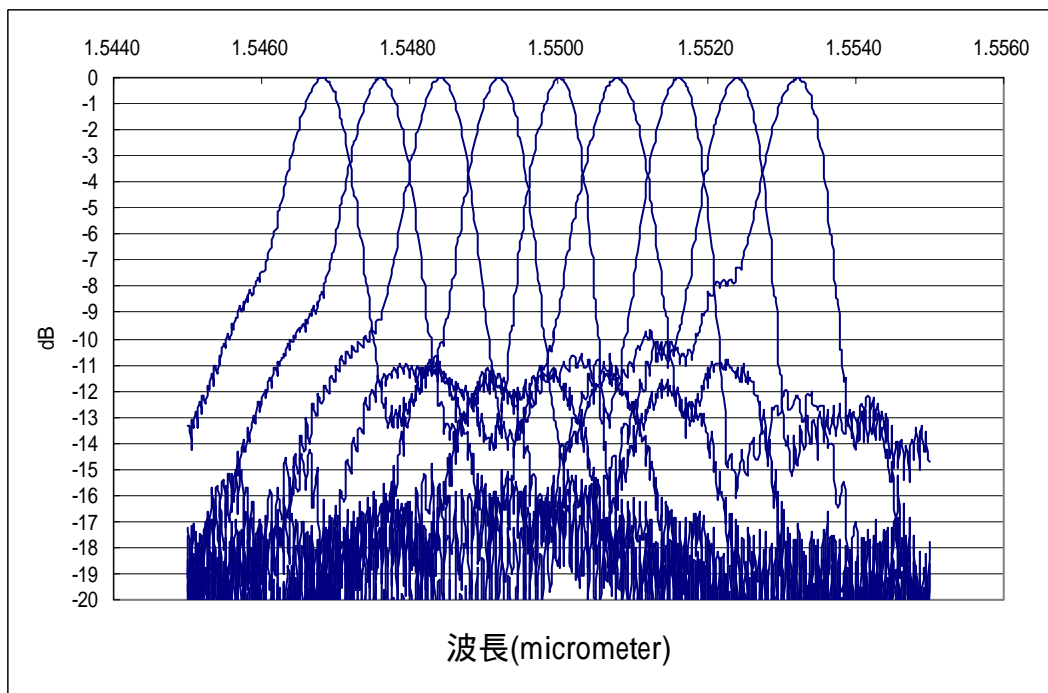


圖 6.11 100GHz 以 $1.550 \mu\text{m}$ 為中心 9 頻道譜分佈 (dB 圖)

6.2.2 光場分佈量測

(1) 量測系統配置圖

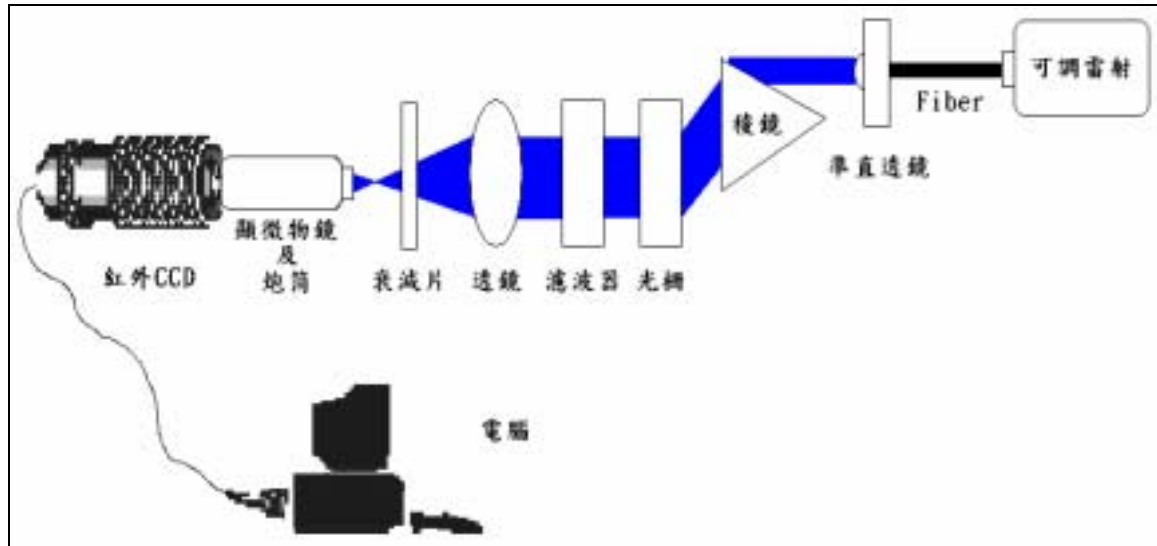


圖 6.12 光場分佈量測系統配置圖

(2) 儀器架構

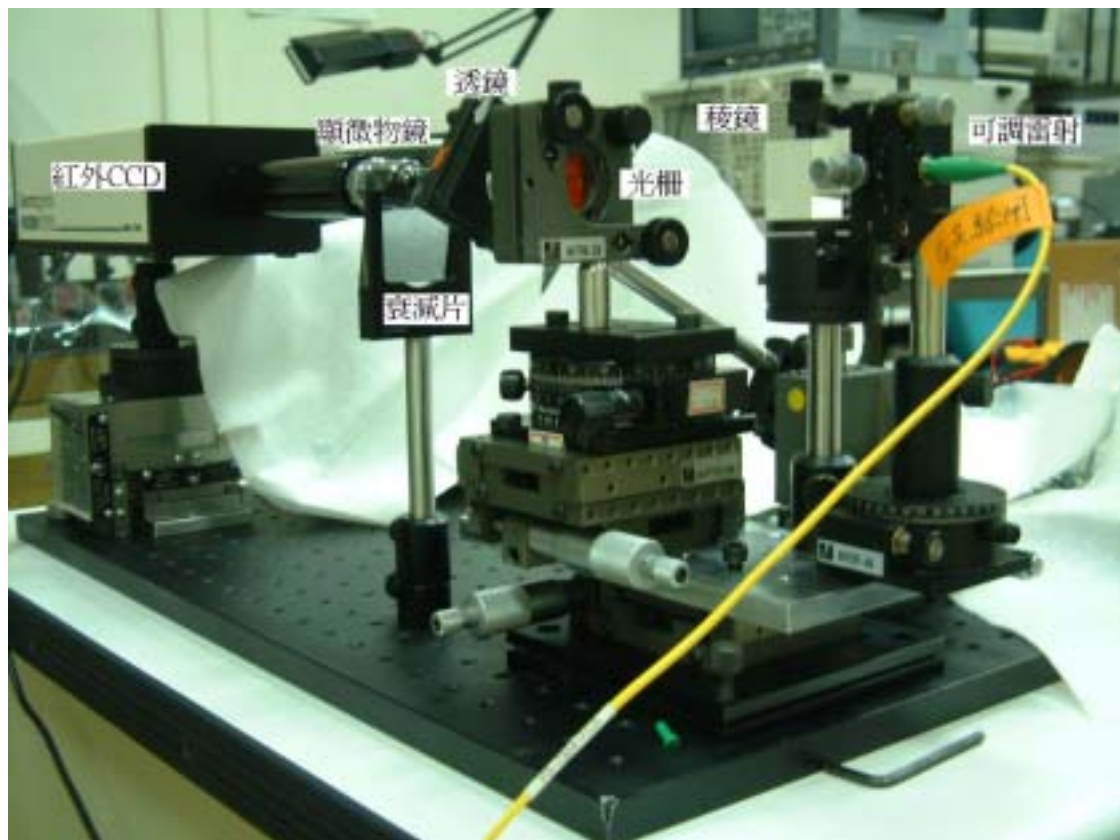


圖 6.13 量測光場分佈的儀器架構

(3) 光場分佈圖

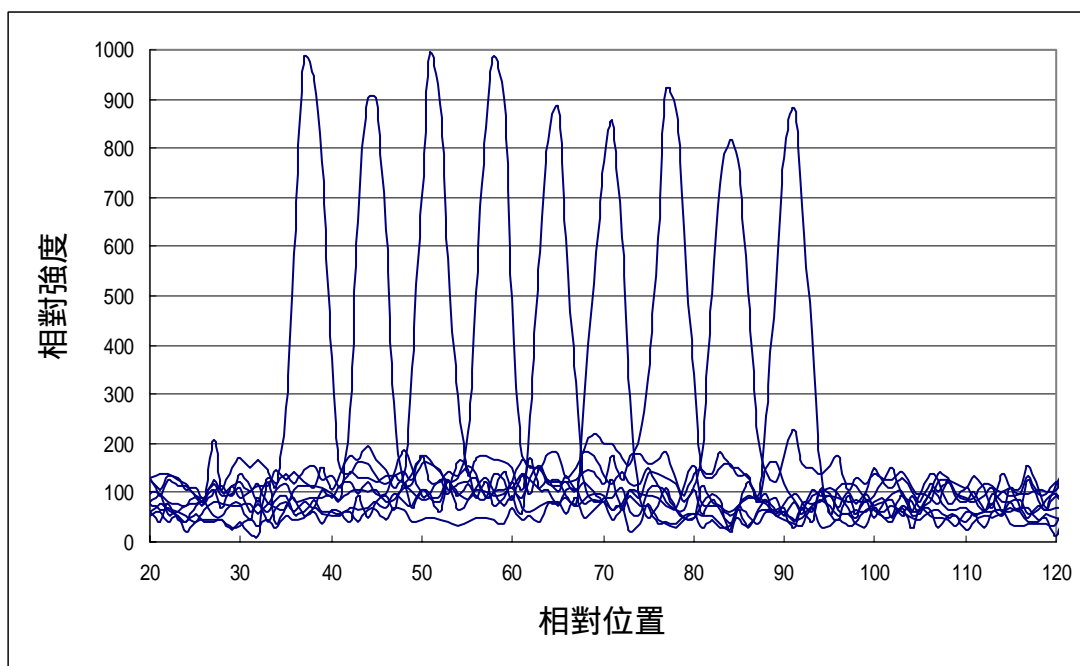


圖 6.14 訊號區訊號強度分佈量測結果

6.3 誤差討論

(1) 所設計的稜鏡光柵，製作光柵的部分，嘗試了兩種方式來製作閃耀光柵的結構。利用半導體製程在矽基片上製作閃耀光柵，在製作上遭遇相當大的困難，四道光罩的線寬依次為 $8.4\ \mu\text{m}$ 、 $4.2\ \mu\text{m}$ 、 $2.1\ \mu\text{m}$ 及 $1.05\ \mu\text{m}$ ，由於後面的結構是製作在上一道光罩製作的結構上，考慮最後一道製程，因此每一道的製程誤差皆必須控制在 $1\ \mu\text{m}$ 以內。

嘗試的結果發現，由於線寬細、蝕刻深度深，因此除了第一道光罩製程之外，後續的黃光製程皆受到上下階梯的曝光劑量不同的影響，使得當上方曝光劑量夠的時候，下方的曝光劑量不足，在便會發生底部的光阻無法顯影的現象。若是將光阻膜厚降低、顯影時間加長，雖然可得到上下都顯影清楚的結果，然而在蝕刻的過程卻發現，頂部的光阻由於顯影過久，光阻膜厚減少，在進行乾蝕刻時尚未蝕刻到所需的深度時，頂部的光阻已經完全被乾蝕刻去除了。造成頂部的階梯無法蝕刻完全。日後碰到類似的問題（深蝕刻、二進階光罩製程）可考慮底部的曝光區可比理想值再加大一些，以改進階梯上下曝光劑量不同的問題、或是考慮增加光罩數目，將頂部、底部的蝕刻區域分成兩次或多次進行，亦可改進階梯上下曝光劑量不同的問題。

(2) 在利用鑽石加工切削 KRS5 材料製作閃耀光柵的部分，由於 KRS5 材料類似臘狀的結構，因次在加工的時候，可能會造成光柵基面受壓力而形變的現象，部分區域也有頂部碎裂、底部殘留切削材料的餘屑的情形。由於 KRS5 的熔點低 (414.5°C)，未來可考慮對模具進行鑽石加工，再利用熱膜壓的方式將閃耀光柵結構壓在 KRS5 材料上。

(3) 實際量測得到的光場分佈圖 (圖 6.13)，在圖中各頻道的相對強度並不均勻，這是由於量測時背景輻射跳動產生雜訊所造成的。

(4) 模擬元件的效能時所使用的入射光是假設為振幅均勻的平行光，然而實際的光束 (ASE 光源、可調雷射) 的振幅分佈並非均勻分佈，這可能是造成模擬與量測結果有誤差的原因。由譜分佈圖實際量測結果 (圖 6.10) 可看出實際製作的解多工器，其相鄰頻道交接處的 dB 值仍有 -3.5dB ，各頻道峰值中心對應的 dB 值平均則約為 -10dB 。

第七章 結論與展望

紅外材料 KRS5 的熔點低 (414.5°C)，未來可利用鑽石切削加工模具，再以熱膜壓方式壓製此種以稜鏡光柵型態的解多工器，應可大大改善直接利用鑽石加工切削在 KRS5 材料上所引起的加工上的誤差，且用熱壓膜方式適合量產製造，可大大降低加工成本，提高此種型態多工器的市場競爭性。

市售三大型態解多工器與稜鏡光柵型態解多工器的優缺點列表比較如下：

表 7.1 解多工器的優缺點比較

	陣列波導 (AWG)	薄膜濾鏡 (TFF)	光纖光柵 (FBG)	稜鏡光柵 (Grism)
優點	可一次分出多波長 分出波長損耗低 適合量產	成熟的鍍膜技術支援 對溫度不敏感 低串訊	可得窄帶寬訊號 低插入損耗 低串訊	可一次分出多波長 分出波長損耗低 可串接提高效能 可得窄帶寬訊號 低成本, 適合量產 低串訊
缺點	對光偏極特性敏感 對溫度敏感	不易得窄帶寬訊號 頻道數目受限	需要旋光器提升效能 頻道數目受限 對溫度敏感	對溫度敏感

此種型態解多工器雖有對溫度敏感的缺點，隨溫度變化會有頻道飄移的現象 ($0.23\text{nm}/^{\circ}\text{C}$)，然而在實際應用時此誤差極易矯正，只要隨溫度變化適度的矯正接收端的光纖陣列位置，使其隨之移動即可。

此外可以考慮進一步利用稜鏡、光柵材料間的折射率隨溫度的變化差異性設計進行被動式的溫度補償結構，亦可以解決此種型態解多工器對溫度敏感的缺點。

由上述的討論可知，利用稜鏡光柵結構所設計的解多工器，是一種可行性高，並具有市場競爭力的新的設計方案。