

# 連續路徑輪廓控制在 3RPS 平行式工具機上的發展及實驗

研究生：張偉倫

指導教授：秦繼華 博士

國立交通大學機械工程學系

## 中文摘要

連續路徑軌跡追蹤在正交工具機上已經有相當成熟的發展，但是對非正交工具機，到目前為止，仍未有相同的發展。

本論文係針對 3RPS 並聯式工具機，發展出連續路徑追蹤上的輪廓誤差補償與預補償系統。本文針對此 3RPS 工具機，提出完整的系統架構，分別用牛頓法與虛功法建立動力方程式，並比較兩者在模擬演算上的執行速度。本文所構建的交叉耦合系統，與交叉耦合預補償系統，經多種軌跡測試，證明可行。最後本文以實驗驗證所建立的交叉耦合系統與交叉耦合預補償系統，由實驗可知，本文所發展的系統，在該實驗用 3RPS 並聯式工具機上，具有成效。

# The Development and Experiments of Continuous Path Contour Control on a 3RPS Parallel Machine Tool

Student: Wei-Lun Chang

Advisor: Dr. Jih-Hua Chin

Department of Mechanical Engineering  
National Chiao-Tung University

## Abstract

Continuous trajectory tracking has been well developed on machine tools of orthogonal nature. For non-orthogonally structured machine tools there is no comparable development. This study developed continuous trajectory cross-coupled contour tracking system, and contour tracking system with pre-compensation for 3RPS parallel machine tool. System structure is first constructed. Dynamic equations are derived by Newton's method and by virtual work principle. A comparison of execution performance between systems from the two methods is performed. The constructed cross-coupled contour tracking system and the system with pre-compensation are evaluated by different types of trajectory. The developed systems are finally implemented on an empirical 3 RPS parallel machine tool. The empirical evaluation has shown that the developed systems are successful and effective.

# 誌謝

終於熬過來了，論文的内容是我一點一滴踏實寫出來的，總算也能對自己有個交代，當然了，首先要謝謝我的指導教授秦繼華老師的指導與勉勵，還有之前學長努力的研究，我才有今日的成果，再來就是我的同窗好友小毛(孫晏晞)，我從他的身上學習到很多東西、表哥及學弟雄雄、小孔等，還有曾經在我課業上幫過許多忙的人，真的是很感謝你們！

在研究所的日子裡，深深的體會到要學以致用並不是那麼一件容易的事情，而要做"研究"，更是不容易，在做研究當中，若是沒有附加一些創造力或想像力，而只是單純的一板一眼的做，我想是會非常無趣的，而且常常會做不出來，除此之外，會發現自己是如此的渺小，自己會的東西竟然是這麼的少，所以唸的過程並不是如此的順遂，在當中並無不想過要放棄的念頭，我想我在這邊有很大的成長，也讓我的人生觀有很大的轉變，對於看事情的態度也都用積極、正面的想法去解決，且使我對自己未來所需要面臨的挑戰有更進一步的準備，不僅如此，不管在課業上、情緒、處事及抗壓方面的確都學習到不少。

再來就是要謝謝我的女友上惟，是你讓我在研究所的生活增添了許多色彩，有你的陪伴，讓我不覺得孤單，在生活上，你帶給我許多的歡樂，也幫我消除掉許多的壓力，很高興你能跟我一起走過來，最後要感謝的就是我的父母了，沒有他們的栽培跟用心，我想我不會有今天的成就，在我最困難的時候，我的父母一直支持著我，也讓我在沒有經濟的壓力下順利的完成學位，總算結局是完美的，也沒有辜負他們的期望，真的是很感激我的父母！

唯有經過如此的經歷，才能更讓我享受生命，讓我知道我所需要的是什麼！

# 目 錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
誌 謝 .....	iii
目 錄 .....	iv
圖 目 錄 .....	vi
表 目 錄 .....	ix
符 號 說 明 .....	x
<b>第一章 緒論 .....</b>	<b>1</b>
1.1 研究動機 .....	1
1.2 文獻回顧 .....	3
1.3 論文大綱 .....	4
<b>第二章 機構特性探討 .....</b>	<b>5</b>
2.1 機構特性 .....	5
2.1.1 自由度(Degree of Freedom)分析 .....	5
2.1.2 機構控制分析 .....	6
2.2 機構運動學(kinematic)分析 .....	7
2.2.1 桿件與上平板運動學分析(Link and Platform kinematic analysis) .....	7
2.3 前向運動學(Forward Kinematic) .....	11
2.4 動力學(Dynamics)分析 .....	13
2.4.1 牛頓法(Newton-Euler Method) .....	13
2.4.2 虛功法(Virtual Work Method) .....	16
2.4.3 Platform Jacobian矩陣與Link Jacobia 矩陣[11] .....	18
2.5 模擬與討論 .....	22
軌 跡 一 : .....	22
軌 跡 二 : .....	23
軌 跡 三 : .....	24
軌 跡 四 : .....	25
2.6 工作空間(Work Space)分析 .....	27
2.7 控制準備 .....	29
2.7.1 交叉耦合控制 .....	29
2.7.2 交叉耦合預補償控制 .....	30
<b>第三章 交叉耦合預補償控制與混合位置/力量控制 .....</b>	<b>32</b>
3.1 輪廓誤差模式 .....	32
3.1.1 路徑輪廓誤差 .....	32
3.1.2 方向輪廓誤差 .....	33
3.2 速度預補償 .....	35
3.3 多軸並聯式工具機交叉耦合與交叉耦合預補償控制流程規劃 .....	37
3.4 模擬與討論 .....	41
(1)、軌跡二(第二章)模擬 .....	41
Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3) .....	41

Structure 2：交叉耦合預補償控制(CCPM，圖 3.4).....	42
(2)、軌跡四（第二章）模擬 .....	44
Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3).....	44
Structure 2：交叉耦合預補償控制(CCPM，圖 3.4).....	45
(3)、具有尖角軌跡的模擬 .....	47
3.5 交叉耦合與預補償應用於力量控制 .....	48
3.5.1 驅動軸(actuator)機械模型.....	48
3.5.2 交叉耦合控制結合力量控制 .....	52
3.5.3 交叉耦合預補償控制結合力量控制 .....	54
3.6 模擬與討論 .....	55
(1)、軌跡二（第二章）力量控制模擬 .....	55
Structure 3：交叉耦合控制結合力量控制(圖 3.23).....	56
Structure 4：交叉耦合預補償控制結合力量控制(控制架構圖 3.24).....	56
(2)、軌跡四（第二章）力量控制模擬 .....	57
Structure 3：交叉耦合控制結合力量控制(圖 3.23).....	57
Structure 4：交叉耦合預補償控制結合力量控制(圖 3.24).....	57
3.7 混合位置/力量控制.....	58
3.7.1 接觸環境模型探討 .....	60
3.7.2 交叉耦合結合混合位置/力量控制 .....	62
<b>第四章 實驗與討論 .....</b>	<b>63</b>
4.1 實驗機台與校正 .....	63
4.2 開迴路(open loop)系統實驗.....	66
4.3 未耦合(uncouple system)系統實驗過程.....	72
4.4 交叉耦合與預補償系統架構實驗 .....	76
(1)、軌跡二（第二章）實驗 .....	78
Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3).....	78
Structure 2：交叉耦合預補償控制(CCPM，圖 3.4).....	79
(2)、軌跡四（第二章）實驗 .....	80
Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3).....	80
Structure 2：交叉耦合預補償控制(CCPM，圖 3.4).....	81
(3)、具尖角軌跡實驗 .....	83
(4)、漩渦狀軌跡實驗 .....	85
Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3).....	86
Structure 2：交叉耦合預補償控制(CCPM，圖 3.4).....	87
(5)、軌跡二（第二章）實驗驗證 .....	88
Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3).....	89
Structure 2：交叉耦合預補償控制(CCPM，圖 3.4).....	89
<b>第五章 結論 .....</b>	<b>95</b>
參考文獻.....	96

# 圖目錄

圖 2.1 3RPS並聯式機構示意圖 .....	6
圖 2.2 控制流程圖 .....	6
圖 2.3 上平板、桿件與下平板間的空間向量圖 .....	8
圖 2.4 工作空間軌跡圖 .....	9
圖 2.5 桿件長度變化圖 .....	9
圖 2.6 Newton-Raphson method解前向運動學流程圖 .....	12
圖 2.7 第 <i>i</i> 桿件的外力圖[10] .....	14
圖 2.8 第 <i>i</i> 驅動桿旋轉座標系[11].....	16
圖 2.9 軌跡一的工作空間圖 .....	22
圖 2.10 軌跡一的桿長變化圖 .....	23
圖 2.11 軌跡一的桿件輸出力圖 .....	23
圖 2.12 軌跡二的工作空間圖 .....	23
圖 2.13 軌跡二的桿長變化圖 .....	24
圖 2.14 軌跡二的桿件輸出力圖 .....	24
圖 2.15 軌跡三的工作空間圖 .....	24
圖 2.16 軌跡三的桿長變化圖 .....	25
圖 2.17 軌跡三的桿件輸出力圖 .....	25
圖 2.18 軌跡四的工作空間圖 .....	25
圖 2.19 軌跡四的桿長變化圖 .....	26
圖 2.20 軌跡四的桿件輸出力圖 .....	26
圖 2.21 工作空間流程圖 .....	28
圖 2.22 工作空間圖 .....	29
圖 2.23 輪廓誤差與預補償幾何關係圖[6] .....	30
圖 2.24 交叉耦合控制示意圖[6] .....	30
圖 2.25 交叉耦合預補償控制示意圖[6] .....	31
圖 3.1 輪廓誤差示意圖 .....	32
圖 3.2 預補償示意圖 .....	35
圖 3.3 並聯式工具機交叉耦合控制流程圖 .....	38
圖 3.4 並聯式工具機交叉耦合預補償控制流程圖 .....	40
圖 3.5 軌跡二交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖 .....	41
圖 3.6 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	42
圖 3.7 軌跡二驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	42
圖 3.8 軌跡二交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖 .....	42
圖 3.9 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	43
圖 3.10 軌跡二驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	43
圖 3.11 軌跡四交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖 .....	44
圖 3.12 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	45
圖 3.13 軌跡四驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	45
圖 3.14 軌跡四交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖 .....	45
圖 3.15 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	46
圖 3.16 軌跡四驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	46
圖 3.17 具尖角軌跡示意圖 .....	47

圖 3.18 具尖角軌跡工作空間輪廓誤差CCS與CCPM比較圖 .....	48
圖 3.19 馬達與滾珠螺桿示意圖 .....	49
圖 3.20 馬達輸出電壓與上桿件位移方塊線圖[31] .....	51
圖 3.21 力量控制示意圖[29] .....	52
圖 3.22 三軸平台力量控制示意圖 .....	52
圖 3.23 三軸平台交叉耦合控制結合力量控制 .....	53
圖 3.24 三軸平台交叉耦合預補償控制結合力量控制 .....	54
圖 3.25 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCS).....	56
圖 3.26 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCPM).....	56
圖 3.27 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCS).....	57
圖 3.28 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCPM).....	57
圖 3.29 混合位置/力量控制架構圖[24] .....	58
圖 3.30 接觸力的系統模型示意圖 .....	60
圖 3.31 系統與外界環境接觸力方塊圖 .....	61
圖 3.32 交叉耦合結合混合位置/力量控制 .....	62
圖 4.1 3RPS實際機台示意圖 .....	63
圖 4.2 桿件一步階響應圖 .....	65
圖 4.3 桿件二步階響應圖 .....	65
圖 4.4 桿件三步階響應圖 .....	66
圖 4.5 桿件進給速率圖 .....	67
圖 4.6 開迴路系統實驗桿件理想與實驗位置比較圖 .....	67
圖 4.7 開迴路系統實驗桿件誤差圖 .....	68
圖 4.8 開迴路系統實驗工作空間理想與實驗比較圖 .....	68
圖 4.9 工作空間進給速率 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$ 之桿件進給速率圖 .....	69
圖 4.10 工作空間進給速率 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$ 之桿件理想與實驗位置比較圖 .....	69
圖 4.11 工作空間進給速率 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$ 之桿件誤差圖 .....	70
圖 4.12 進給速率 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$ 之工作空間理想與實驗位置比較圖 .....	70
圖 4.13 開回路系統直線運動軌跡實驗 .....	71
圖 4.14 開回路系統直線運動軌跡實驗工作空間誤差圖 .....	72
圖 4.15 開回路系統直線運動軌跡實驗各桿件誤差圖 .....	72
圖 4.16 Uncoupled System控制圖 .....	73
圖 4.17 PID 控制理想與實驗比較圖(第二章軌跡二) .....	74
圖 4.18 PID 控制桿件誤差圖(第二章軌跡二) .....	74
圖 4.19 PID 控制工作空間誤差圖(直線運動軌跡) .....	75
圖 4.20 PID 控制桿件誤差圖(直線運動軌跡) .....	75
圖 4.21 Borland C++實驗人機介面圖 .....	77
圖 4.22 軌跡二實驗交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖 .....	78
圖 4.23 軌跡二實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	78
圖 4.24 軌跡二實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	78
圖 4.25 軌跡二實驗交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖 .....	79
圖 4.26 軌跡二實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	79
圖 4.27 軌跡二實驗驅動桿進給誤差輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	79
圖 4.28 軌跡四實驗交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖 .....	80

圖 4.29 軌跡四實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	81
圖 4.30 軌跡四實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	81
圖 4.31 軌跡四實驗交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖 .....	81
圖 4.32 軌跡四實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	82
圖 4.33 軌跡四實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	82
圖 4.34 具尖角軌跡實驗桿件進給速率圖 .....	83
圖 4.35 具尖角軌跡實驗CCS與CCPM比較圖 .....	85
圖 4.36 漩渦狀軌跡工作空間與各桿位置圖 .....	86
圖 4.37 漩渦狀軌跡實驗交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖 .....	86
圖 4.38 漩渦狀軌跡實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	87
圖 4.39 漩渦狀軌跡實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	87
圖 4.40 漩渦狀軌跡實驗交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖 .....	87
圖 4.41 漩渦狀軌跡實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	88
圖 4.42 漩渦狀軌跡實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	88
圖 4.43 驗證軌跡二實驗各桿件誤差與輪廓誤差示意圖(CCS).....	89
圖 4.44 驗證軌跡二實驗各桿件誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM) .....	89
圖 4.45 軌跡二輪廓誤差實驗與模擬比較圖 .....	91
圖 4.46 軌跡四輪廓誤差實驗與模擬比較圖 .....	92
圖 4.47 尖角軌跡輪廓誤差實驗與模擬比較圖 .....	93



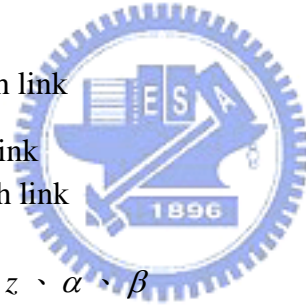


# 表 目 錄

表 2.1 平行式機構規格表 .....	21
表 2.2 牛頓法與虛功法執行效率比較表（時間單位：秒） .....	26
表 3.1 軌跡二PID控制參數表.....	41
表 3.2 軌跡二CCS與CCPM IAE比較表.....	43
表 3.3 軌跡四PID控制參數表.....	44
表 3.4 軌跡四CCS與CCPM之IAE比較表.....	46
表 3.5 具尖角軌跡PID控制參數表.....	47
表 3.6 具尖角軌跡CCS與CCPM IAE比較表.....	48
表 3.7 軌跡二交叉耦合結合力量控制之控制器參數表 .....	55
表 3.8 軌跡二FC+CCS與FC+CCPM之IAE比較表.....	56
表 3.9 軌跡四交叉耦合結合力量控制之控制器參數表 .....	57
表 3.10 軌跡四FC+CCS與FC+CCPM IAE比較表.....	58
表 4.1 桿件步階響應性能表 .....	66
表 4.2 工作空間進給速度 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$ 實驗桿件IAE比較表 .....	70
表 4.3 工作空間進給速度 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$ 實驗工作空間IAE比較 .....	71
表 4.4 軌跡二未耦合控制架構實驗PID參數表.....	73
表 4.5 直線運動軌跡未耦合控制架構實驗PID參數表.....	73
表 4.6 未耦合PID控制_軌跡二實驗IAE值 .....	75
表 4.7 未耦合PID控制_直線運動軌跡實驗IAE值 .....	76
表 4.8 軌跡二實驗CCS與CCPM IAE比較表.....	80
表 4.9 軌跡四實驗CCS與CCPM IAE比較表.....	82
表 4.10 具尖角軌跡實驗CCS與CCPM IAE比較表.....	85
表 4.11 漩渦狀軌跡實驗控制器增益值表 .....	85
表 4.12 漩渦狀軌跡軌跡實驗CCS與CCPM IAE比較表.....	88
表 4.13 驗證圓軌跡實驗CCS與CCPM IAE比較表.....	90

# 符號說明

- $F$  : degrees of freedom of a mechanism  
 $\lambda$  : degrees of freedom of the space in which a mechanism is intended to function  
 $n$  : number of links in a mechanism , including the fixed link  
 $j$  : number of joints in a mechanism , assuming that all the joints are binary  
 $f_i$  : degrees of relative motion permitted by joint i  
 $R(\varphi, \phi, \theta)$  : Roll-Pitch-Yaw Euler Angles  
 $a_i$  : the i-th universal joint  
 $b_i$  : the i-th ball joint  
 $L_i$  : link vector of i-th link  
 $l_i$  : length of i-th link  
 $n_i$  : the unit vector of i-th link  
 $S_i$  : position of i-th ball joint in generalized coordinate  
 $\dot{S}_i$  : the velocity of i-th ball joint  
 $\ddot{S}_i$  : the acceleration of i-th ball joint  
 $\dot{L}_i$  : axial velocity of i-th link  
 $w_i$  : the angular velocity of i-th link  
 $\ddot{L}_i$  : axial acceleration of i-th link  
 $\alpha_i$  : angular acceleration of i-th link  
 $J$  : Jacobian matrix  
 $q$  : generalized coordinate of  $z$  、  $\alpha$  、  $\beta$   
 $r_{iu}$  : distance of the mass center of upper link to ball joint  
 $r_{id}$  : distance of the mass center of lower link to universal joint  
 $m_{iu}$  : mass of upper link  
 $m_{id}$  : mass of lower link  
 $a_{iu}$  : acceleration of mass center of upper link  
 $a_{id}$  : acceleration of mass center of lower link  
 $u_i$  、  $v_i$  : universal joint direction vector  
 $I_u$  : mass moment of inertia of upper link  
 $I_d$  : mass moment of inertia of lower link  
 $I_p$  : mass moment of inertia of upper platform  
 $G$  : gravitational acceleration  
 $\ddot{x}_p$  : acceleration of the mass center on upper platform  
 $m_p$  : mass of upper platform  
 $f_i$  : actuator output force  
 $R_i$  : transformation matrix from i-th moving link to base coordinate



$J_p$  : platform Jacobian  
 ${}^i J_{id}$  、  ${}^i J_{iu}$  : link Jacobian  
 $\tau$  : actuator output force  
 $E$  : tracking error  
 $\varepsilon$  : contour error  
 $\overline{V}_k$  : precompensation velocity vector  
 $U$  : control signal  
 $E_r$  : contour error of workspace  
 $E_o$  : the orient error of  $\alpha$  、  $\beta$   
 $\overline{V}$  : average unit velocity of desired and actual velocity  
 $E_{or}$  : the orient contour error of  $\alpha$  、  $\beta$   
 $E_{rLi}$  : the link contour error  
 $L_{f,i}$  : reference position of i-th link  
 $E_{L,i}$  : position error of i-th link  
 $L_i(S)$  : transfer function of i-th link  
 IAE : Integral Absolute-Error  
 CCS : cross coupled system  
 CCPM : multiple cross coupled precompensation method  
 $f_e$  : the output force of workspace  
 $\sim$   
 $f_p$  : position controller  
 $\sim$   
 $f_f$  : force controller  
 FC : force control  
 T : sampling time  
 $P_d$  : desired position  
 $P_a$  : actual position  
 $V_a$  : actual tangent unit velocity vector  
 $V_d$  : desired tangent unit velocity vector



# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

在早期機器人的相關研究中多半以串聯式機器人為主，串聯式機器人具有較大的工作空間以及較高的操控靈敏等優點，但因其具有懸臂樑結構，後級驅動軸是前級驅動軸之負載，使得此類機器人的剛性較低、承載力低、在高速以及高負載的情況下運作容易產生振動，以及各關節誤差會累積在輸出端等缺點，使得精度難以提昇。

並聯式機器人的設計早在 1940 年代即被提出，1965 年 Stewart 提出六軸機器人又稱為史都華平台(Stewart Platform)，當時此機構的設計概念是用來製作飛行模擬器[1]，之後並聯式機器人不論是在機構設計或控制方面的研究便不斷的進行。與傳統串聯式機器人比較，並聯式機器人有以下之優點：

1. 高精度：並聯式機器人不會累積各支柱誤差，因此高精度的要求容易達成。
2. 高剛性：因為史都華平台每一根驅動桿皆為二力構件(two-force member)，僅在軸向受壓力或張力，應力與變形都相對於串聯式機器人來的小。
3. 低慣性：並聯式機器人的機械結構較串聯式機器人簡單，減少了許多框架(frame)及移動軸(moving axis)的質量，因此移動慣性小，在相同的驅動力下可以有較大的加速度，系統反應頻寬也較大，適合用來解決高速切削的問題。
4. 高力重比(force to weight ratio)：並聯式機器人可以將負載分散於各致動軸上，所以能提供較高的力重比。
5. 構造模組化：由於並聯式機器人的構造較簡單，各驅動桿及接頭均可採用模組化設計，所以在設計、生產、校正、維護的流程可更精簡，製造及庫存成本也會降低。

在 CNC 機器運動控制方面，輪廓誤差補償的技術是晚近的發展重點。自 Sarachik 和 Ragazzini [2]提出交叉偶合系統(Cross-Coupled System)後，交叉偶合結構歷經不斷改良、演化，已成為運動軌跡控制中廣為使用的一種方法。其中 Koren [3]提出對稱性交叉偶合控制器的架構，證實於雙軸控制系統中使用偶合控制可以改善輪廓誤差，在 1991 年又提出可變增益交叉偶合控制器[4]，根據加工路徑形狀修正其輪廓誤差的計算方式與控制器增益值。Huan [5] 提出一種工具機的軌跡預補償方法，利用速度預補償，得到良好的軌跡精度，Chin and Tsai [6] 將預補償法進一步發展到機器人上，後來 Chin and Lin [7] 整

合預補償與交叉偶合兩項特徵，提出工具機的交叉偶合與預補償方法，之後 Chin et al [8] 用模糊控制器來降低輪廓控制中的計算量，改進高速進給下的輪廓精度，Lue et al [9] 將預補償法延伸構建在複合型五軸工具機的運動軌跡控制上，不過尚未考慮機器動態，也無實驗驗證。由於機器進行加工時，外界負載、摩差力和慣性矩等皆會影響循跡精度，另外 CNC 控制指令的執行速度、加減速度控制、伺服控制等特性亦會影響機器的動態反應，除此之外，震動亦是影響動態的另一重要因素，這些都是在到目前為止的研究中，尚未充分觸及的議題。

因此本論文的目的，在於針對一個三軸實驗用運動平台，做包含上述考量之系統研發與實驗驗證。本論文建立系統的位置控制架構，推導軸空間與工作空間的轉換方程式，建立交叉偶合與交叉偶合預補償兩種方法控制，此外，架構是以工作空間為基礎，所以如何利用前向運動學(Forward kinematic)來做線上工作空間(workspace)的即時(Online)控制以算出輪廓誤差的補償以達完整的閉迴路控制是關鍵環節，論文中更以模擬與實驗來驗證所提之架構。在系統動態中，動態行為是以動力學(Dynamic)為基礎所建立的，本文中實驗用三軸平台的動態模型，係利用牛頓法[10]與虛功法[11]來推導建立，並做兩種動態模型的比較。對於控制而言，準確的動態模型十分重要，建立動態模型後，可以利用電腦數值模擬做控制與分析，選擇及設計適合的控制方法，且在動態模型的分析中將知道作用在接頭上面的力和力矩，因此將能事先選擇能匹配整個系統的軸承或驅動器。在控制方面，除了以交叉偶合預補償為基礎架構之外，更利用推導出來的動態模型結合交叉偶合與預補償來做力量控制[12]，再以力量控制為基礎去做軌跡的追蹤，並分析交叉偶合與預補償方法在軌跡控制方面的差異性，在[12]中對力量控制有很完整的敘述，對於混合位置/力量(Hybrid Position/Force Control)控制也有很完整的說明，在實務上，力量與位置往往必須同時考量，如點焊機器人，一方面必須與外界環境保持一接觸力來完成點焊的工作，另一方面又必須控制它的位置，所以必須同時考慮力量與位置兩種因素來完成工作，除此之外，在大多數的工具機應用場合也都是必須考慮力量與位置同時控制，才能達到高品質加工。

本論文對於平行式機構線上即時(online)工作空間(workspace)的補償控制，及交叉偶合與交叉偶合預補償兩種即時控制的架構，有完整的發展與驗證，在系統動態的力量控制中，亦將預補償控制方法運用於力量控制上，且討論交叉偶合與預補償方法在輪廓誤差上的表現，並分析輪廓誤差在力量控制架構中的影響。

## 1.2 文獻回顧

在探討機構動態模型之前，必須先決定機構運動學(kinematic)，平行式機構的運動學可分為前向運動學(forward kinematics)與逆向運動學(inverse kinematic)兩部份，給定一組支柱關節的位移量，分析活動平台位置與方向屬於前向運動學問題，相反的，給定活動平台的一組位置與方向，求解各支柱所需位移量的問題，則為逆向運動學問題。

有關平行式機構問題，如早期史都華平台的研究，大多集中在分析工作空間大小、奇異點位置分佈與迴避問題、順向運動學、機敏性(dexterity)、與機械效能分析等，一直到 90 年代初期以後，才有動態模型和運動控制等相關的研究被發表出來。

對於平行式機構動態方程式的推導，最常使用的方法有牛頓法[10]、[13,~15]，虛功法[11]、[16, 17]，其中[17]定義了 Link Jacobian 來簡化系統的動態方程式，其方法證實比牛頓法來的更有效率。

力量控制的目的是在於使手端 (end-effector) 與環境接觸時，其力量保持在一穩態值，用來保護機器及工件，及維持工作精度。在平台應用方面，隨著使用環境不同其控制需求有所差異，在飛行模擬器上要求加速度與軌跡，娛樂用運動模擬器則較寬鬆，應用在工具機上時，除位置控制外，亦須考慮力量控制，通常是將位置控制器和力量控制器分離設計，將兩者在工作空間中分離及線性化，發展線性控制器，追蹤期望之位置及力量軌跡，以切向動作最為位置控制器、正向力作為力量控制器之設計基本考量。一般而言，力量控制包含以下幾種方法：剛性控制(Stiffness control)[18]、阻抗控制(Impedance control)[19]、混合位置/力量控制(Hybrid Position/Force control)[12]、[20~24]，在剛性控制方面，主要是控制系統的剛性 (順應性)，使控制器的作用像一個彈簧。而阻抗控制最先由 Hogan[19]所提出，阻抗的意思即剛性再加上阻尼，其目的是要達到一目標阻抗，使得接觸力可以被控制在一定的範圍內，混合位置/力量控制最先是 Paul 與 Shimano[20]提出，主要是結合位置與力量的資訊，配合軌跡中之各種環境的限制，算出所需要的控制力矩。

### 1.3 論文大綱

第一章 緒論：說明論文研究動機，並對並聯式機構與控制做文獻回顧

第二章 機構特性探討：說明整體的機構組成架構，並分析機構的運動學、動力學。動力學部份對牛頓法與虛功法的執行效率做比較，探討兩者應用在即時(online)控制上的優劣。做系統模擬，最後分析機構之工作空間與初步探討控制方法。

第三章 交叉耦合預補償控制與混合位置/力量控制：建立完整的閉迴路控制，以作為後續實驗驗證的基礎，控制法則考慮了交叉耦合、交叉耦合預補償、力量控制，及混合位置/力量控制，而對於誤差量的修正，係利用 PID 控制器，最後以模擬來比較各控制法則

第四章 實驗結果與討論：本章完成了第三章所提的控制架構的實驗，並討論實驗的結果，且進一步確定適當的控制方法

第五章 實驗心得與結論：此章節為實驗後的結論，及實驗上的心得與改進



## 第二章 機構特性探討

在本章節中將討論實驗用三軸平行式機構的機構特性，首先先討論機構構型，其中包含上平板、下平板、驅動桿、以及伺服馬達，且介紹機器的整個運作流程，再來將針對機構桿件做位置分析、速度分析、加速度分析，以及上平板的運動學(kinematic)分析，及機構動力學(Dynamic)分析，此處將利用牛頓法[10]與虛功法[11]兩種方法推導，並做比較。本文所探討的，是一個 3RPS 平行式機構(Revolute-Prismatic-Spherical)，其組成方式為上平板與桿件的球接頭相接，下平板與桿件的萬象接頭相接，其中萬象接頭鎖死一個旋轉的自由度，透過驅動桿的長度變化可得到三個自由度的運動，其組裝示意圖如圖(2.1)所示，其中  $a_{i,i=1-3}$  代表球接頭、 $b_{i,i=1-3}$  代表萬象接頭、上平板與下平板的形心到球接頭與萬象接頭的半徑分別為 105 及 150 (mm)。

### 2.1 機構特性

#### 2.1.1 自由度(Degree of Freedom)分析

此平行式機構具有三個自由度，自由度的推導可由[11]得知：

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i \quad (2.1)$$

其中

$F$  : degrees of freedom of a mechanism

$\lambda$  : degrees of freedom of the space in which a mechanism is intended to function

$n$  : number of links in a mechanism , including the fixed link

$j$  : number of joints in a mechanism , assuming that all the joints are binary

$f_i$  : degrees of relative motion permitted by joint i

所以可得其自由度為

$$F = 6 \times (8 - 9 - 1) + (3 \times 1 + 3 \times 1 + 3 \times 3) = 3$$

由接頭的拘束關係，我們選擇工作空間的自由度為  $F = fun(z, \alpha, \beta)$ ，除此之外，亦定義

$FL = fun(l_1, l_2, l_3)$  為軸空間(Link Space)的參數。



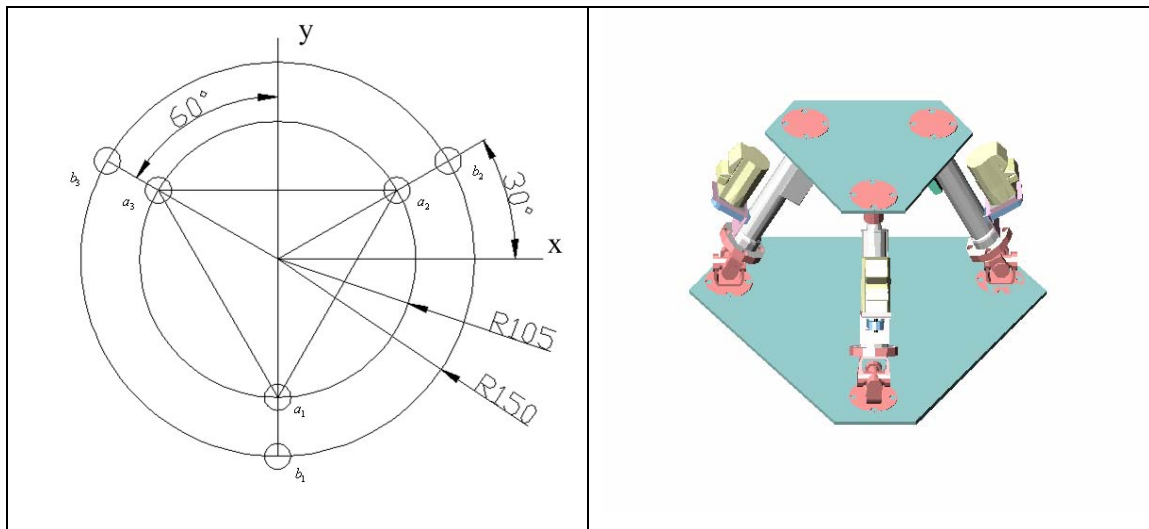


圖 2.1 3RPS 並聯式機構示意圖

### 2.1.2 機構控制分析

本小節將介紹整個機構的控制流程。在結構上，此並聯式平行機構是由三個 AC 伺服馬達(AC SERVO DRIVER)帶動三根驅動桿的伸長縮短，然後透過電腦，經過傳輸線及轉接卡控制整個機台。在控制卡方面，選用的為 ADLINK PCI-8134 控制卡，為一四軸控制的控制卡，而伺服馬達為 Panasonic MINAS MSDA5A1A1A，在驅動軸上皆附有光學尺負責實際訊號的量測。其控制流程圖如圖所示：

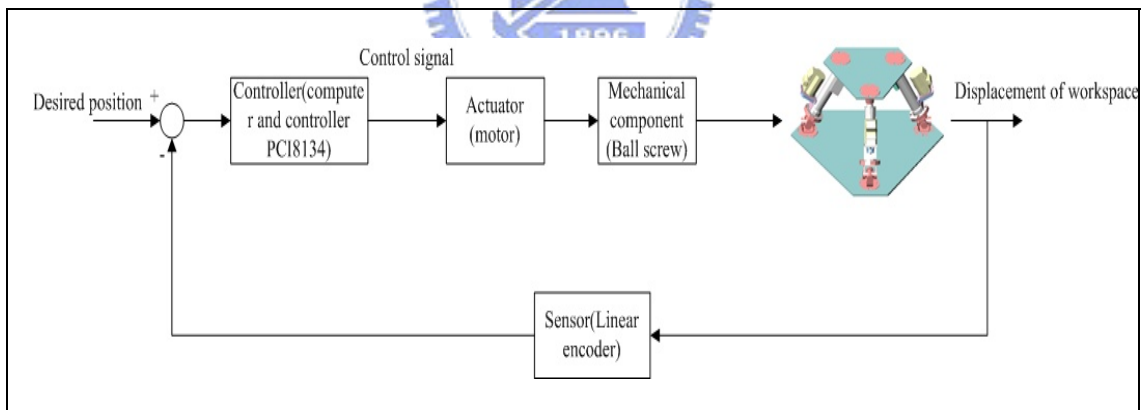


圖 2.2 控制流程圖

## 2.2 機構運動學(kinematic)分析

本小節將以空間中的幾何向量分析驅動桿及上平板的運動學及動力學。首先建立上平板與下平板的轉換矩陣，此處，以尤拉角(Euler Angle)[11]來表示此轉換矩陣，尤拉角表示式為：

$$R(x, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R(y, \phi) = \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

上述中  $c$  表示 cosine、 $s$  表示 sine。

上面的表示式分別代表對  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的旋轉，所以整個轉換矩陣可以寫成

$$R(\varphi, \phi, \theta) = R(z, \theta)R(y, \phi)R(x, \varphi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta - c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.2.1 桿件與上平板運動學分析(Link and Platform kinematic analysis)

上平板、桿件與下平板間的空間向量關係見圖 2.3：

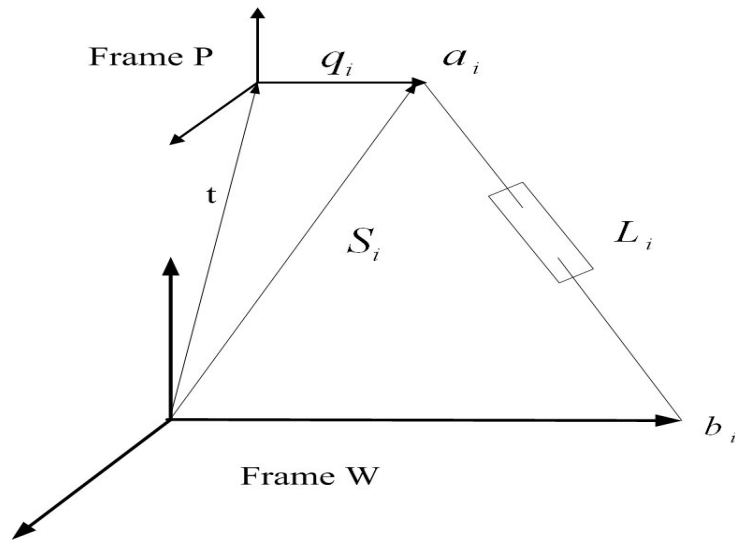


圖 2.3 上平板、桿件與下平板間的空間向量圖

圖中， $a_i$ 、 $b_i$  分別代表球接頭與萬象接頭，在圖中已將球接頭與萬象接頭視為與桿件一體， $q_i = R \times a_i$ ，其中  $R$  代表上平板相對於下平板的轉換矩陣，由圖可以看出

$$L_i = q_i + t - b_i \quad (2.6)$$

$L_i$  代表桿件向量，故可得桿長  $l_i = \sqrt{L_i \cdot L_i}$ ，桿長單位向量  $n_i = \frac{L_i}{l_i}$ ，由(2.6)可看出給定  $t$  (即工作空間參數  $z, \alpha, \beta$ )，則可以求出各軸的桿長，此即為逆向運動學(Inverse Kinematic)，由逆向運動學，再加上桿長最大、最小伸長長度限制、以及接頭限制的關係，可以求出此並聯式機構的工作空間(Work Space)。該並聯式機構桿長規格為(其中已將球接頭與萬象接頭大小包含進桿長中)： $250 < l_i < 315$  (mm)，且  $246 < z < 310$  (mm)、 $-0.38 < \alpha < 0.38$  (rad)、 $-0.38 < \beta < 0.38$  (rad)。以下為模擬給訂一組工作空間的軌跡，然後求出各軸的桿長變化，假設

$t = 0 \sim 5$ (秒)	$z$	$\alpha$	$\beta$
Sampling time	$260 + 5 \times t$	$0 + 0.05 \times t$	$0 + 0.02 \times t$
0.1 (s)	(mm)	(rad)	(rad)

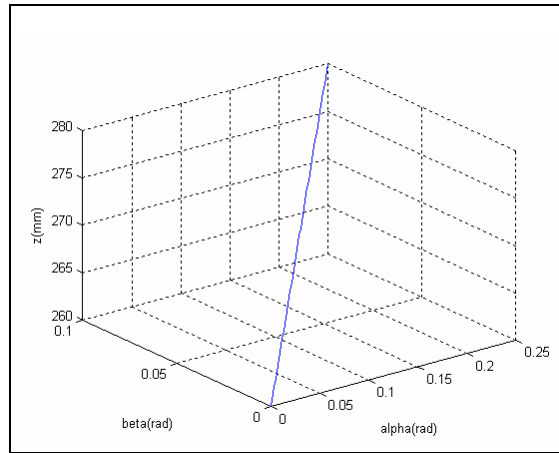


圖 2.4 工作空間軌跡圖

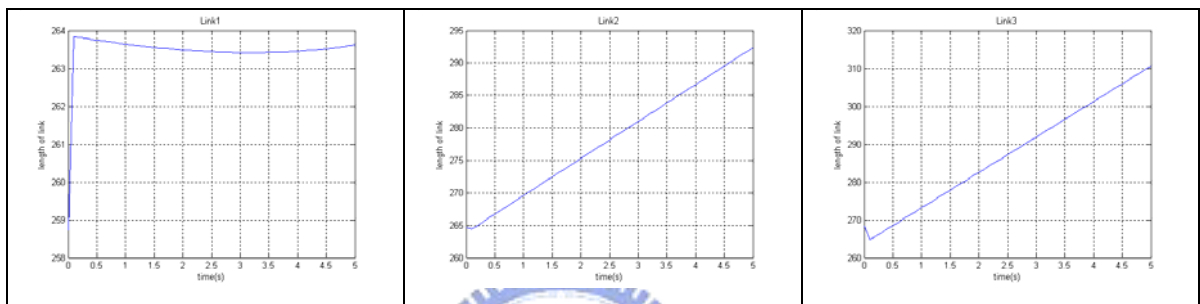


圖 2.5 桿件長度變化圖

此時要分析球接頭的速度與加速度，由圖可看出

$$\dot{S}_i = \dot{t} + \dot{q}_i = \dot{t} + R \times a_i \quad (2.7)$$

將(2.7)式對時間微分可得球接頭的速度為

$$\ddot{S}_i = \ddot{t} + w \times q_i \quad (2.8)$$

其中  $w$  代表上平板的角速度，將(2.8)式對時間微分可得球接頭的加速度為

$$\ddot{\ddot{S}}_i = \ddot{\ddot{t}} + \alpha \times q_i + w \times (w \times q_i) \quad (2.9)$$

其中  $\alpha$  代表上平板的角加速度。再來要討論桿件的軸向速度與角速度，此處分析桿件的軸向速度與加速度是為了可以得到一 Jacobian matrix，此 Jacobian matrix 有助於前向運動學(Forward Kinematic)及動力學的推導，由(2.8)式與  $n_i$  做內積可得球接頭速度大小在桿長方向的分量，可得桿件的軸向速度為

$$\dot{L}_i = \dot{S}_i \cdot n_i \quad (2.10)$$

而桿件角速度為

$$w_i = \frac{n_i \times \dot{S}_i}{l_i} \quad (2.11)$$

，注意(2.9)式的  $w_i$  是桿件的角速度，並不是上平板的角速度，此時同樣的將(2.10)式對時間微分可得桿件的軸向加速度

$$\ddot{L}_i = \ddot{S}_i \cdot n_i + \dot{S}_i \cdot (w_i \times n_i) \quad (2.12)$$

且由驅動軸軸向方向不會旋轉的特性，可知拘束條件  $n_i \cdot w_i = 0$ 、 $n_i \cdot \alpha_i = 0$  及  $n_i \times w_i = 0$ ，其中  $\alpha_i$  即為桿件的角加速度，最後整理可得

$$\alpha_i = \frac{n_i \times \ddot{S}_i - 2 \dot{L}_i w_i}{l_i} \quad (2.13)$$

由(2.10)式，可知

$$\dot{L}_i = \dot{S}_i \cdot n_i = (\dot{z} + w \times q_i) \cdot n_i \quad (2.14)$$

將(2.14)式展開可得三條方程式

$$\dot{L}_1 = \dot{z} \cdot n_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot (q_1 \times n_1) \quad (2.15)$$

$$\dot{L}_2 = \dot{z} \cdot n_2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot (q_2 \times n_2) \quad (2.16)$$

$$\dot{L}_3 = \dot{z} \cdot n_3 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot (q_3 \times n_3) \quad (2.17)$$

將(2.14)式化成矩陣表示式可得[10]

$$\dot{L}_i = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{或表示成 } \delta L = J^{-1} \delta P \quad , \quad p = [z, \alpha, \beta] \quad (2.19)$$

此處要注意到為什麼要用  $J^{-1}$  來表示，因為 **Jacobian Matrix** 的定義為對軸空間變數(廣義座標)的偏微分，所以此處所得到的 **Jacobian Matrix** 是 **inverse** 的。由上式可知當輸入  $p$  對時間的變化，經過 **Jacobian matrix** 的轉換，則可求出各軸桿長對時間的變化，其中  $J$  即為 **Jacobian matrix**，可表示成

$$J = \begin{pmatrix} n_{1,z}^T & (q_1 \times n_1)_x^T & (q_1 \times n_1)_y^T \\ n_{2,z}^T & (q_2 \times n_2)_x^T & (q_2 \times n_2)_y^T \\ n_{3,z}^T & (q_3 \times n_3)_x^T & (q_3 \times n_3)_y^T \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.20)$$

此機構的奇異點會發生在當  $\det(J) = 0$ ，所以在分析機構時，需注意是否會碰到奇異點，或者規避奇異點，此部分已有相當的討論[25]。由(2.18)可看出桿件與上平板的關係為以

Jacobian matrix 為轉換因子，其亦可想成如前述上平板座標係對下平板座標系中存在一轉換矩陣的關係，上述運動學的討論是之後要推導動力學的準備工作。

### 2.3 前向運動學(Forward Kinematic)

在之前提到當給定  $(z, \alpha, \beta)$  可以得到三根軸的桿長，此即為逆向動學，而前向運動學則為：給訂三根軸軸長，然後算出  $(z, \alpha, \beta)$ ，但是前向動學的解並不是如此簡單，由於機構為並聯式機構，且因為接頭限制的關係，所以當給定三根軸長，所得到的  $(z, \alpha, \beta)$  並不是唯一解，但是實際上符合平板的姿態只有一解，所以這就是前向運動學困難的地方。

在此處，將利用 Newton-Raphson method[9]去解前向運動學的數值解，基本上，此問題即為非線性方程式求根的問題，首先，定義

$$F(q) = l(q) - l_{given} \quad (2.21)$$

$l(q)$  為由 inverse kinematic 所求得的桿長， $l_{given}$  為給定的桿長，若當  $q = [z, \alpha, \beta]$  為所需要的前向運動學的解時，則(2.21)式則會等於零。將(2.21)式寫成三個封閉迴路方程式

$$F(q) = \sum_{i=1}^3 (l_i(q)^2 - l_{given}^2) \quad (2.22)$$

將式(2.22)式以泰勒級數展開可得

$$F(q)|_{q=q(n+1)} = F(q)|_{q=q(n)} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{q=q(n)} \right) \Delta q \quad (2.23)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{q=q(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(q)}{\partial z} & \frac{\partial F_1(q)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1(q)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2(q)}{\partial z} & \frac{\partial F_2(q)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2(q)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_3(q)}{\partial z} & \frac{\partial F_3(q)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3(q)}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

由[9]可知， $\frac{\partial F}{\partial q}$  等於  $J^{-1}$ ，如此可得

$$q_{(n+1)} = q_{(n)} - \left( \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{q=q(n)} \right)^{-1} (F(q)|_{q=q(n+1)} - F(q)|_{q=q(n)}) \quad (2.25)$$

整理可得

$$q_{(n+1)} = q_{(n)} - J(q_{(n)})(l(q_{(n)}) - l_{given}) \quad (2.26)$$

上述推導步驟為

Step 1：給定初始值  $q = [z, \alpha, \beta]$ 、及實際桿長  $l_{given}$ ，並由 inverse kinematic 算出  $l(q_{(n)})$

Step 2：由  $J(q_{(n)})(l(q_{(n)}) - l_{given})$  可得誤差值  $\Delta q$

Step 3：由(2.26)的式子可計算出新的姿態，若所求的  $\Delta p$  沒有在容許誤差範圍內，則將  $q_{(n+1)}$  設為  $q_{(n)}$ ，再將它代入式(2.26)去算新的誤差值  $\Delta p$

Step 4：重複上述步驟直到誤差值  $\Delta p \leq$  容許誤差，即可得到所求的  $[z, \alpha, \beta]$

在步驟 1 中的初始姿態  $q$  必須猜測的到，若是不正確的  $q$ ，有可能會導致不正確的解，通常是以前次計算所得到的上平板姿態為猜測值，也因此過程中所得到的誤差值是以其為基準，但須注意在算 Jacobian matrix 時需注意是否會有奇異點發生。

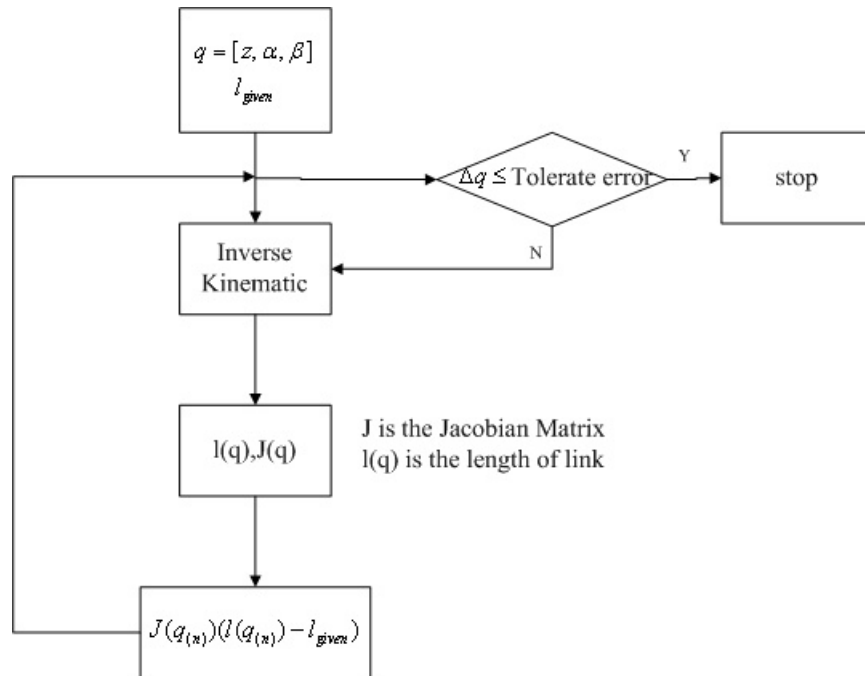


圖 2.6 Newton-Raphson method 解前向運動學流程圖

以下為利用 Newton-Raphson method 來算前向運動學的電腦模擬，參數數值如下表：

$l_{given} = [256.28 \ 268.6 \ 297.07]$	猜測值 $q_{(1)} = [280, \pi/22, \pi/22]$
$q = [270, \pi/18, \pi/20]$	容許誤差 $\Delta q = 1 \times 10^{-6}$

疊帶法過程如下表

	Z(mm)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)
1	280	$\pi/22$	$\pi/22$
2	270.0001	0.1745	0.1571
3	270.0000	0.1745	0.1571

由上表可看出 Newton-Raphson method 收斂速度很快，僅需三次的疊帶即可達到所需的容許誤差，但若是不正確的猜測值很可能會造成無法收斂，或不正確的答案。

## 2.4 動力學(Dynamics)分析

在此處，將利用牛頓法(Newton-Euler Method)[10]與虛功法(Virtual Work Method)[11]來推導此平行機構的動力學分析，而為什麼要分析此機構的動力學？其目的在於將此平行式機構建立一數學模型，利用此數學模型來表示系統的物理特性，即系統的動態特性，進而利於分析與控制，此數學模型是利用給予工作空間參數 $[z, \alpha, \beta]$ ，然後求出三根軸所需的出力，此稱為逆向動力學(Inverse Dynamics)，其可用來做力量的控制(Force Control)，而順向動力學(Forward Dynamics)則可用來做工作空間位置控制(Position Control)。在牛頓法上，利用座標之間的轉換，力量、力矩的平衡來獲得物體的受力狀況。牛頓法的特點在於觀念清晰，只要將外力圖與慣性力圖以相對應的方程式來表示即可，除此之外，對於串聯式機構，只要一層一層的做好座標轉換的工作，就可以把系統表現出來，但是相對於元件多且互相耦合的並聯式機構而言，牛頓法就顯的方程式多而且太煩雜。

相對的，虛功法和 Lagrangian 法近年來逐漸被利用在並聯機構的動態分析上，能量屬於純量而不是向量，利用此觀點，得以大幅度的減少方程式的數目，因此增加了運算的效率，對於數學轉換複雜的並聯式機構而言特別適合。

虛功法的核心觀念在於能量守恆，以並聯機構而言，平台與驅動機構的移動或轉動，必然來至於各驅動器所輸入的能量，因此可以能量的觀點，將系統簡潔的表示出來。

在推導之前，為了簡化動態模型以便於之後控制系統的設計，將提出幾個適當的假設，又不會影響模擬系統的真實性，其中包含

- (1) 假設可動平板為剛體
- (2) 忽略節點及軸與軸之間的摩擦力

### 2.4.1 牛頓法(Newton-Euler Method)

此動力學分析包含了驅動桿及上平板的動態方程式，在使用牛頓法之前，首先須了解機構的受力情況，先取出單一桿件做外力圖的分析，外力圖如圖 2.7 所示



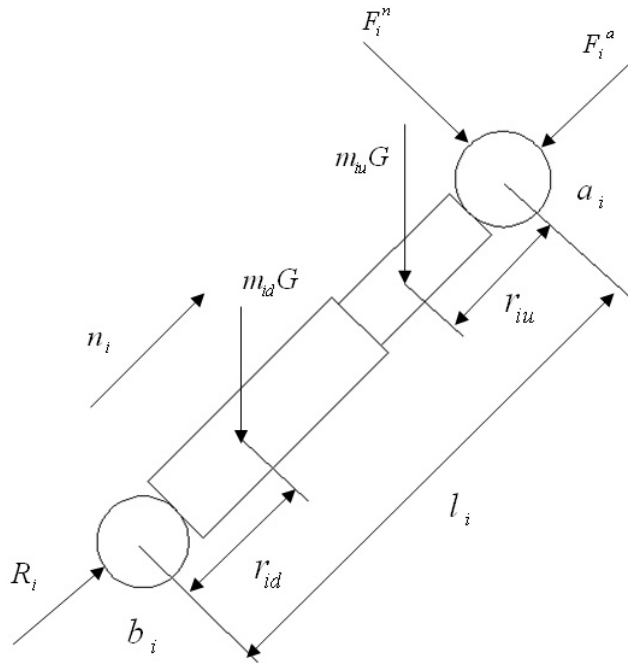


圖 2.7 第  $i$  桿件的外力圖[10]

圖中， $r_{iu}$ 、 $r_{id}$  分別為球接頭到上桿質心的距離及萬象接頭到下桿質心的距離，其中  $r_{id} = 110(\text{mm})$ ， $r_{iu} = 45(\text{mm})$ ， $l_i$  為桿長， $m_{iu}$ 、 $m_{id}$  為上桿及下桿的質量， $m_{iu} = 0.838(\text{kg})$ ， $m_{id} = 0.985(\text{kg})$ ， $R_i$ 、 $F_i^a$ 、 $F_i^n$  分別為平板給的作用力。

由前面的運動學分析，可得上下桿質心的加速度為[10]

$$a_{iu} = (l_i - r_{iu})w_i \times (w_i \times n_i) + (l_i - r_{iu})\alpha_i \times n_i + 2w_i \times \dot{l}_i n_i + \ddot{l}_i n_i \quad (2.27)$$

$$a_{id} = r_{id}w_i \times (w_i \times n_i) + r_{id}\alpha_i \times n_i \quad (2.28)$$

此時取桿件的力平衡方程式可得[10]

$$\begin{aligned} & m_{iu}(l_i - r_{iu})n_i \times G + m_{id}r_{id}n_i \times G + l_i n_i \times F_i^n + M_i \\ & = (I_u + I_d)\alpha_i - (I_u + I_d)w_i \times w_i + m_{iu}(l_i - r_{iu})n_i \times a_{iu} + m_{id}r_{id}n_i \times a_{id} \end{aligned} \quad (2.29)$$

將(2.29)式整理過後可得  $l_i n_i \times F_i^n + m_i c_i = N_i$

$$N_i = -m_{iu}(l_i - r_{iu})n_i \times G - m_{id}r_{id}n_i \times G + (I_u + I_d)\alpha_i - (I_u + I_d)w_i \times w_i + m_{iu}(l_i - r_{iu})n_i \times a_{iu} + m_{id}r_{id}n_i \times a_{id} \quad (2.30)$$

其中  $I_u$ 、 $I_d$  為上下桿件的質量慣性矩、 $M_i$  為接頭所提供的外力矩[10]，這邊需注意到，若當桿件的兩端都是使用球接頭的話，因為兩端的自由度相同，所以沒受到任何拘束，故  $M_i = 0$ 。

$$M_i = m_i c_i \quad (2.31)$$

$$c_i = u_i \times v_i \quad (2.32)$$

$$m_i = (N_i \cdot n_i) / (c_i \cdot n_i) \quad (2.33)$$

其中  $u_i$ 、 $v_i$  代表萬象接頭插銷方向的向量。

此時可得

$$F_i^n = (N_i \times n_i - m_i c_i \times n_i) / l_i \quad (2.34)$$

$$\text{假設 } F_i^a \text{ 爲軸向作用力， } F_i^a = f_i^a n_i \quad (2.35)$$

由(2.35)式可得上平板的動態方程式爲[10]

$$-\sum_{i=1}^3 f_i^a n_i - \sum_{i=1}^3 F_i^n + m_p G = m_p \ddot{x}_p \quad (2.36)$$

$$-\sum_{i=1}^3 f_i^a q_i \times n_i - \sum_{i=1}^3 q_i \times F_i^n - \sum_{i=1}^3 M_i = I_p \alpha - I_p w \times w \quad (2.37)$$

其中  $\ddot{x}_p$  爲形心  $[z, \alpha, \beta]$  的加速度、 $m_p$  爲上平板的質量、 $I_p$  爲上平板質量慣性矩、

$G = [0 \ 0 \ -9800]^T (mm/s^2)$  爲重力加速度。

將式(2.36)、(2.37)寫成矩陣形式可得

$$\begin{pmatrix} f_1^a \\ f_2^a \\ f_3^a \end{pmatrix} = J^T C \quad (2.38)$$

其中[10]

$$C = \begin{pmatrix} m_p G - m_p \ddot{x}_p - \sum_{i=1}^3 F_i^n \\ -I_p \alpha + I_p w \times w - \sum_{i=1}^3 q_i \times F_i^n - \sum_{i=1}^3 M_i \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

接下來要求在軸空間(joint space)驅動上桿件的輸出力，可得

$$f_i = m_{iu} a_{iu} \cdot n_i - f_i^a - m_{iu} G \cdot n_i \quad (2.40)$$

將(2.40)式寫成矩陣的形式爲

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{iu} (a_{1u} - G) \cdot n_1 \\ m_{iu} (a_{2u} - G) \cdot n_2 \\ m_{iu} (a_{3u} - G) \cdot n_3 \end{pmatrix} - J^T C \quad (2.41)$$

(2.41)式爲軸空間的輸出力，將其轉成工作空間(work space)的輸出力則爲

$$\tau = (f_z \quad \tau_\alpha \quad \tau_\beta)^T = J^{-T} F \quad (2.42)$$

或寫成[10]

$$\tau = J^{-T} \begin{pmatrix} m_{iu}(a_{1u} - G) \cdot n_1 \\ m_{iu}(a_{2u} - G) \cdot n_2 \\ m_{iu}(a_{3u} - G) \cdot n_3 \end{pmatrix} - C \quad (2.43)$$

### 2.4.2 虛功法(Virtual Work Method)

此處，將利用虛功法[11]來推導此三軸並聯式機構，利用虛工原理來推導動態模型的優點在於：拘束力一開始可以被消去，不需要像 Newton-Euler 法一樣去計算在每個接頭上的作用力，所以可以提升計算的效率。

首先，要先建立驅動桿與下平板的轉換矩陣，此目的在於可以簡化方程式計算的複雜度，減少程式中使用外積(cross product)的指令，如此會得到驅動桿的 Jacobian Matrix，定義為 Link Jacobian Matrices。

其中，轉換矩陣的選擇為  $w-v-w$  Euler Angles[11]，即一開始先對 Z 軸旋轉  $\phi_i$  角度，可得  $x' y' z'$  坐標系，然後再對  $y'$  軸旋轉  $\theta_i$  角度可得  $x_i y_i z_i$  坐標系。

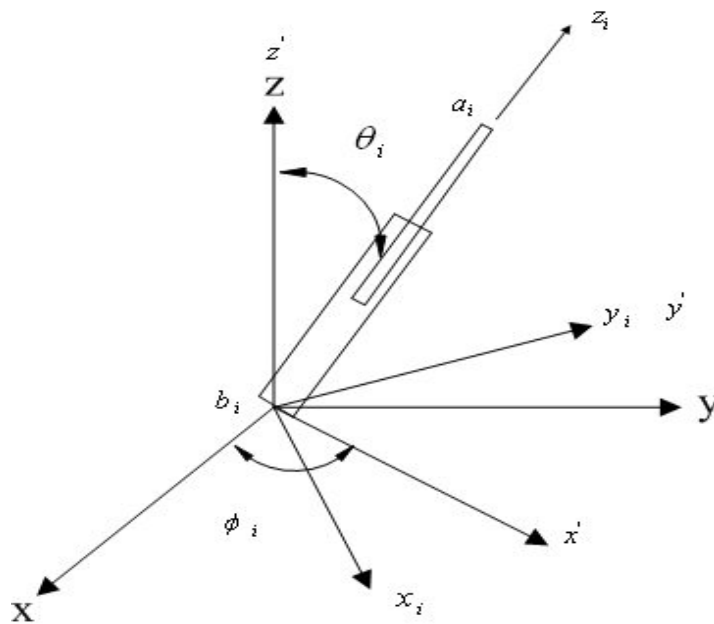


圖 2.8 第 i 驅動桿旋轉座標系[11]

其轉換矩陣可寫成

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i \cos \theta_i & -\sin \phi_i & \cos \phi_i \sin \theta_i \\ \sin \phi_i \cos \theta_i & \cos \phi_i & \sin \phi_i \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

由驅動桿作標系來看  $z_i$  軸方向的單位向量為  ${}^i n_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，且因為  $n_i = R_i {}^i n_i$ ，所以可得

$$n_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i \sin \theta_i \\ \sin \phi_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\text{且 } \cos \theta_i = n_{iz} \text{、} \cos \phi_i = \frac{n_{ix}}{\sin \theta_i} \text{、} \sin \theta_i = \sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2} \text{、} \sin \phi_i = \frac{n_{iy}}{\sin \theta_i}$$

此時要將球接頭的速度轉成驅動桿座標系下的速度，由(2.8)式可得

$${}^i \dot{S}_i = {}^i R \dot{S}_i \quad (2.46)$$

$$\text{其中 } {}^i R = R_i^T$$

將(2.6)式微分並乘上  ${}^i R$ ，整理後可得球接頭速度

$${}^i \dot{S}_i = \dot{L}_i {}^i n_i + L_i {}^i w_i \times {}^i n_i \quad (2.47)$$

再將(2.47)式微分一次可得球接頭的加速度為

$${}^i \ddot{S}_i = \ddot{L}_i {}^i n_i + 2\dot{L}_i {}^i w_i \times {}^i n_i + L_i {}^i \alpha_i \times {}^i n_i + L_i {}^i w_i \times ({}^i w_i \times {}^i n_i) \quad (2.48)$$

將(2.47)式對  ${}^i n_i$  兩邊取內積可得可得驅動桿沿軸向的速度為

$$\dot{L}_i = {}^i \dot{S}_{i,z} \quad (2.49)$$

將(2.47)式對  ${}^i n_i$  兩邊取外積可得可得驅動桿角速度

$${}^i w_i = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} -{}^i \dot{S}_{i,y} \\ {}^i \dot{S}_{i,x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

同理，將(2.48)式兩邊分別對  ${}^i n_i$  取內積及外積可得軸向加速度

$$\ddot{L}_i = {}^i \ddot{S}_{i,z} + \frac{{}^i \dot{S}_{i,x}^2 + {}^i \dot{S}_{i,y}^2}{l_i} \quad (2.51)$$

及桿件角加速度為

$${}^i\alpha_i = \frac{1}{l_i^2} \begin{pmatrix} -l_i {}^i\ddot{S}_{i,y} + 2 {}^i\dot{S}_{i,z} {}^i\dot{S}_{i,y} \\ l_i {}^i\ddot{S}_{i,x} - 2 {}^i\dot{S}_{i,z} {}^i\dot{S}_{i,x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

注意到(2.50)與(2.25)式中的第三個分量皆等於零，代表桿件不會自旋，即不會繞本身的軸方向旋轉。

此時可以求出上下桿件的質心速度與質心加速度為[11]

$${}^i v_{id} = \frac{r_{id}}{l_i} \begin{pmatrix} {}^i\dot{S}_{i,x} \\ {}^i\dot{S}_{i,y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^i v_{iu} = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} (l_i - r_{iu}) {}^i\dot{S}_{i,x} \\ (l_i - r_{iu}) {}^i\dot{S}_{i,y} \\ l_i {}^i\dot{S}_{i,z} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\text{和 } {}^i a_{id} = \frac{r_{id}}{l_i^2} \begin{pmatrix} l_i {}^i\ddot{S}_{i,x} - 2 {}^i\dot{S}_{i,z} {}^i\dot{S}_{i,x} \\ l_i {}^i\ddot{S}_{i,y} - 2 {}^i\dot{S}_{i,z} {}^i\dot{S}_{i,y} \\ -( {}^i\dot{S}_{i,x}^2 + {}^i\dot{S}_{i,y}^2 ) \end{pmatrix}, \quad {}^i a_{iu} = \frac{1}{l_i^2} \begin{pmatrix} l_i(l_i - r_{iu}) {}^i\ddot{S}_{i,x} + 2r_{iu} {}^i\dot{S}_{i,z} {}^i\dot{S}_{i,x} \\ l_i(l_i - r_{iu}) {}^i\ddot{S}_{i,y} + 2r_{iu} {}^i\dot{S}_{i,z} {}^i\dot{S}_{i,y} \\ l_i^2 {}^i\ddot{S}_{i,z} + r_{iu} ( {}^i\dot{S}_{i,x}^2 + {}^i\dot{S}_{i,y}^2 ) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

到目前為止，已經將桿件在 Link Space 中的運動學分析完畢，接下來要找分析上平板與桿件的運動學關係，其之間的關係以 Platform Jacobian 矩陣與 Link Jacobia 矩陣為轉換因子，以下為推導。

### 2.4.3 Platform Jacobian 矩陣與 Link Jacobia 矩陣[11]

由(2.18)式的 Jacobian 矩陣乘上  ${}^iR$  可得驅動桿座標系下的 Jacobian 矩陣為

$${}^i J_i^{-1} = {}^i R J_i^{-1} \quad (2.55)$$

$$\text{且 } {}^i J_i = {}^i R J_i = \begin{pmatrix} {}^i J_{i,x} \\ {}^i J_{i,y} \\ {}^i J_{i,z} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

${}^i J_i$  即為在驅動桿座標系下的 Jacobian Matrix。

由(2.18)、(2.49)與(2.55)式可得

$$\dot{L}_i = {}^i J_{i,z} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

將(2.57)式整理成矩陣形式可得

$$\dot{L} = J_p \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$\text{其中 } J_p = \begin{pmatrix} {}^1 J_{1,z} \\ {}^2 J_{2,z} \\ {}^3 J_{3,z} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

上式的  $J_p$  即稱為 Platform Jacobian，由(2.18)式可知 Platform Jacobian 即等於  $J^{-1}$ 。

同樣的，重新整理(2.50)、(2.53)式可得

$${}^i w_i = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} -{}^i J_{i,y} \\ {}^i J_{i,x} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix} x_p, \quad {}^i v_{id} = \frac{r_{id}}{l_i} \begin{pmatrix} {}^i J_{i,x} \\ {}^i J_{i,y} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix} x_p, \quad {}^i v_{iu} = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} (l_i - r_{iu}) {}^i J_{i,x} \\ (l_i - r_{iu}) {}^i J_{i,y} \\ l_i {}^i J_{i,y} \end{pmatrix} x_p \quad (2.60)$$

$$\text{其中 } x_p = \begin{pmatrix} z \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

合併(2.60)式可得

$${}^i \dot{x}_{id} = {}^i J_{id} \dot{x}_p, \quad {}^i \dot{x}_{iu} = {}^i J_{iu} \dot{x}_p \quad (2.61)$$

其中  ${}^i J_{id}$ 、 ${}^i J_{iu}$  即為 Link Jacobian 矩陣

$${}^i J_{id} = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ -{}^i J_{i,y} \\ {}^i J_{i,x} \end{pmatrix}, \quad {}^i J_{iu} = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} l_i {}^i J_{i,z} \\ -{}^i J_{i,y} \\ {}^i J_{i,x} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

推導完所有的運動學之後，接下來要建立動態方程式，最後再帶入虛工方程式求輸出力，首先，上平板的動態方程式為

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ext} + Mg - M \ddot{x}_p \\ n_{ext} - I\alpha - w \times Iw \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

其中  $f_{ext}$ 、 $n_{ext}$  為作用在質心的外力與力矩。同樣的，作用在驅動桿上下質心位置的力與力矩可表示成

$${}^i F_{id} = \begin{pmatrix} {}^i f_{id} \\ {}^i n_{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{id} {}^i Rg - m_{id} {}^i a_{id} \\ -I_d {}^i \alpha_i - {}^i w_i \times (I_d {}^i w_i) \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$${}^i F_{iu} = \begin{pmatrix} {}^i f_{iu} \\ {}^i n_{iu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{iu} {}^i Rg - m_{iu} {}^i a_{iu} \\ -I_u {}^i \alpha_i - {}^i w_i \times (I_u {}^i w_i) \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

根據虛功原理(作用在虛位移期間所作之功，若系統達平衡，則力乘上虛位移等於零)，虛工方程式可寫成[11]

$$\delta L^T \tau + \delta x_p^T F + \sum_{i=1}^3 (\delta^i x_{id}^T {}^i F_{id} + \delta^i x_{iu}^T {}^i F_{iu}) = 0 \quad (2.66)$$

其中  $\tau$  為驅動桿的輸出力，且由前面推導可知

$$\delta L = J_p \delta x_p, \quad \delta^i x_{id} = {}^i J_{id} \delta x_p, \quad \delta^i x_{iu} = {}^i J_{iu} \delta x_p \quad (2.67)$$

將(2.67)式帶入(2.66)式整理過後可得

$$\delta x_p^T (J_p^T \tau + F + \sum_{i=1}^3 {}^i J_{id}^T {}^i F_{id} + {}^i J_{iu}^T {}^i F_{iu}) = 0 \quad (2.68)$$

因為虛位移  $x_p^T$  不等於零，所以上式可改寫成

$$J_p^T \tau + F + \sum_{i=1}^3 {}^i J_{id}^T {}^i F_{id} + {}^i J_{iu}^T {}^i F_{iu} = 0 \quad (2.69)$$

在這邊需注意到， $F$  是以固定座標系來表示，但是  ${}^i F_{id}$ 、 ${}^i F_{iu}$  是以軸空間座標系來表示，

所以需將  ${}^i F_{id}$ 、 ${}^i F_{iu}$  分別乘上  ${}^i J_{id}^T$ 、 ${}^i J_{iu}^T$  來轉換成卡式座標系。

接著將(2.62)帶入(2.69)式整理可得

$$J_p^T (\tau + F_z) + F + J_x^T F_x + J_y^T F_y = 0 \quad (2.70)$$

其中

$$F_z = \begin{pmatrix} f_{1u,z} \\ f_{2u,z} \\ f_{3u,z} \end{pmatrix}; \quad J_x = \begin{pmatrix} {}^1 J_{1,x} \\ {}^2 J_{2,x} \\ {}^3 J_{3,x} \end{pmatrix}; \quad J_y = \begin{pmatrix} {}^1 J_{1,y} \\ {}^2 J_{2,y} \\ {}^3 J_{3,y} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

$$F_x = \begin{pmatrix} (r_{1d}f_{1d,x} + n_{1d,y} + (l_1 - r_{1u})f_{1u,x} + n_{1u,y})/l_1 \\ (r_{2d}f_{2d,x} + n_{2d,y} + (l_2 - r_{2u})f_{2u,x} + n_{2u,y})/l_2 \\ (r_{3d}f_{3d,x} + n_{3d,y} + (l_3 - r_{3u})f_{3u,x} + n_{3u,y})/l_3 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$F_y = \begin{pmatrix} (r_{1d}f_{1d,y} - n_{1d,x} + (l_1 - r_{1u})f_{1u,y} - n_{1u,x})/l_1 \\ (r_{2d}f_{2d,y} - n_{2d,x} + (l_2 - r_{2u})f_{2u,y} - n_{2u,x})/l_2 \\ (r_{3d}f_{3d,y} - n_{3d,x} + (l_3 - r_{3u})f_{3u,y} - n_{3u,x})/l_3 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

重新整理(2.69)式可得輸出力

$$\tau = -F_z - J_p^{-T} (F + J_x^T F_x + J_y^T F_y) \quad (2.74)$$

以上是利用牛頓法與虛功法來建立此平行機構的數學模型，此模型已詳細的推導出來，最後將提出牛頓法與虛功法的差異性，和利用牛頓法與虛功法在使用電腦模擬的執行效率上做個比較，以作為一個總結。

由前面的推導過程可以很明顯的看出使用牛頓法時，接頭的反作用力必須能夠計算出來，即必須考慮接頭的形式為何，然後去算  $M_i$ ，再來是分析作用在桿件與上平板的外力與慣性力，然後再帶入牛頓第二運動定律，此時可得到所有的外力，最後再取出上桿件做分析，可得到驅動上桿件的輸出力；而虛功法的特點在於，在驅動桿與下平板桿建立轉換矩陣，然後會得到每根桿件與下平板的轉換矩陣，即可建立一 Link Jacobian matrix，亦即桿件上所有的物理量皆以桿件座標系來表示，除此之外，虛功法優點在於不用去算拘束力，最後再將所有物理量帶入虛功方程式，求桿件的輸出力。

以下為利用牛頓法與虛功法所做的電腦模擬，及運算時間比較。其模擬的內容為給定一個空間軌跡，然後算出其完成此空間軌跡三根桿件所需要的輸出力。此平行式機構的所有參數規格整理如下表，其中質量的數據為以電子磅秤所量得，慣性矩為由幾何形狀及尺寸所求得：

表 2.1 平行式機構規格表

	上平板	上桿件	下桿件
質量(Kg)	1.44	0.838	0.985
質量慣性矩 (kg- $mm^2$ )	$0.02086 \times 10^6$	$0.0000943 \times 10^6$	$0.0001108 \times 10^6$



重力加速度 $g=9800$ $mm/sec^2$	萬向接頭到下桿質心位置的距離 $rid=110$ mm	球接頭到上桿質心位置的距離 $riu=45$ mm
------------------------------	-----------------------------	---------------------------

## 2.5 模擬與討論

以下將利用牛頓法(式 2.27~2.43)與虛功法(式 2.44~2.74)做系統模擬，計算桿件的輸出力，並比較此兩種方法的效率，利用此兩種方法所計算出來的軸輸出力是相同的。此處模擬四組空間中軌跡，然後求每根桿件所需的輸出力，其軌跡規劃如下，其中  $p$ 、 $v$ 、 $a$  分別代表上平板形心的位置、速度與加速度，桿長部分為由逆向運動學(式 2.6)所求得：

軌 跡 一 ：

$$p = \begin{pmatrix} 250+t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \times t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{時間為 } 0 \sim 7 \text{ 秒}$$

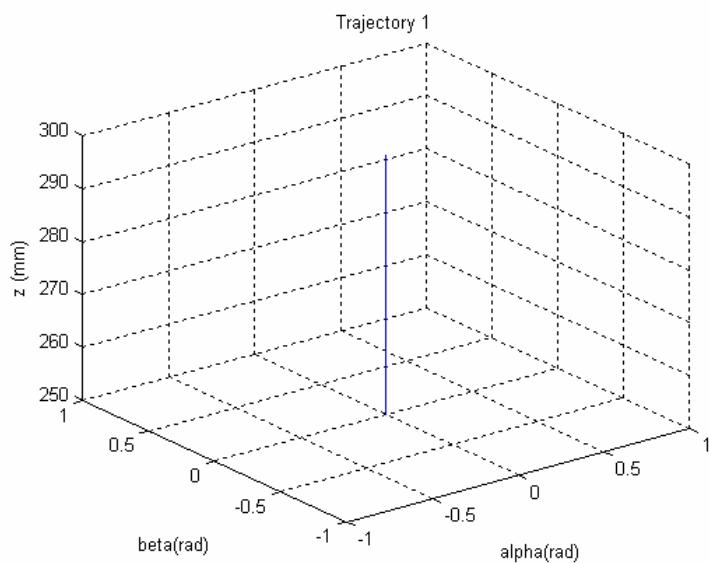


圖 2.9 軌跡一的工作空間圖

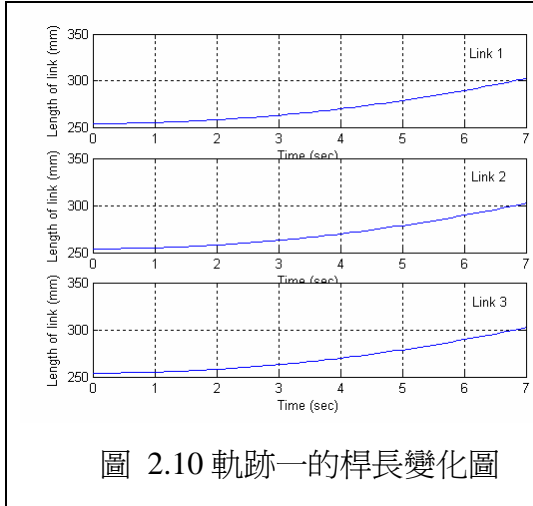


圖 2.10 軌跡一的桿長變化圖

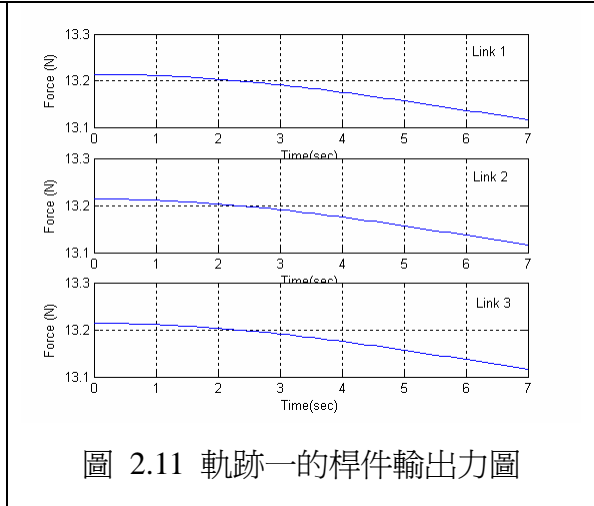


圖 2.11 軌跡一的桿件輸出力圖

軌 跡 二 :

$$p = \begin{pmatrix} 270 \\ 0.2 \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \\ 0.2 \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.4/7 \times \pi \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \\ -0.4/7 \times \pi \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.8/49 \times \pi \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \\ -0.8/49 \times \pi \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, \quad \text{時間為 } 0 \sim 7 \text{ 秒}$$

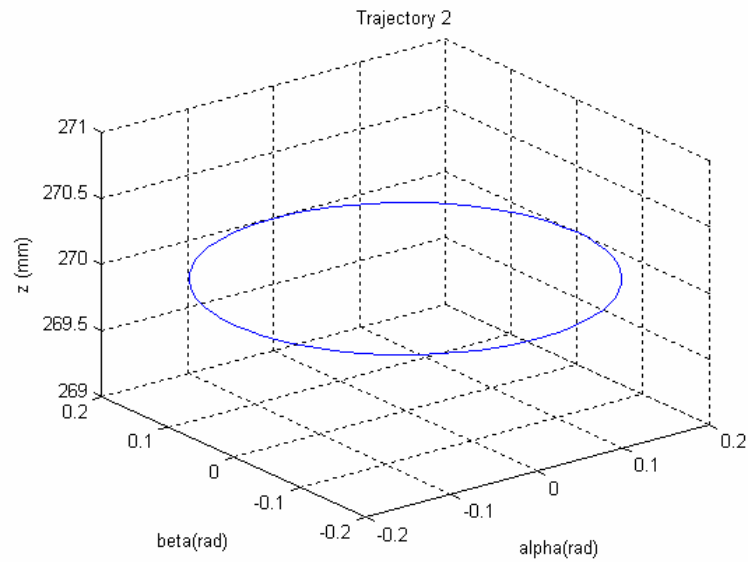


圖 2.12 軌跡二的工作空間圖

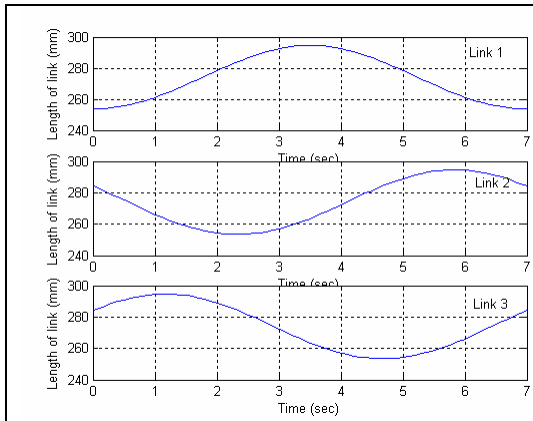


圖 2.13 軌跡二的桿長變化圖

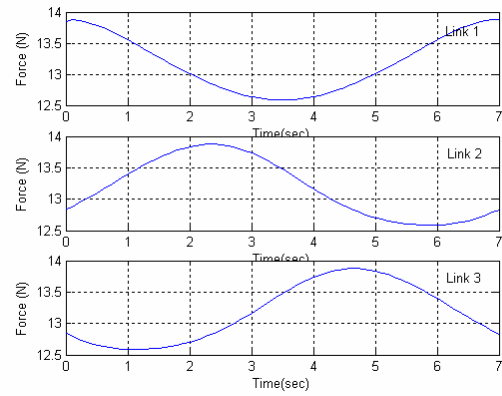


圖 2.14 軌跡二的桿件輸出力圖

軌 跡 三 :

$$p = \begin{pmatrix} 260 + 5 \times t \\ 0.2 \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \\ 0.2 \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -0.4/7 \times \pi \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \\ -0.4/7 \times \pi \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.8/49 \times \pi \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \\ -0.8/49 \times \pi \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, \quad \text{時間為 } 0 \sim 7 \text{ 秒}$$

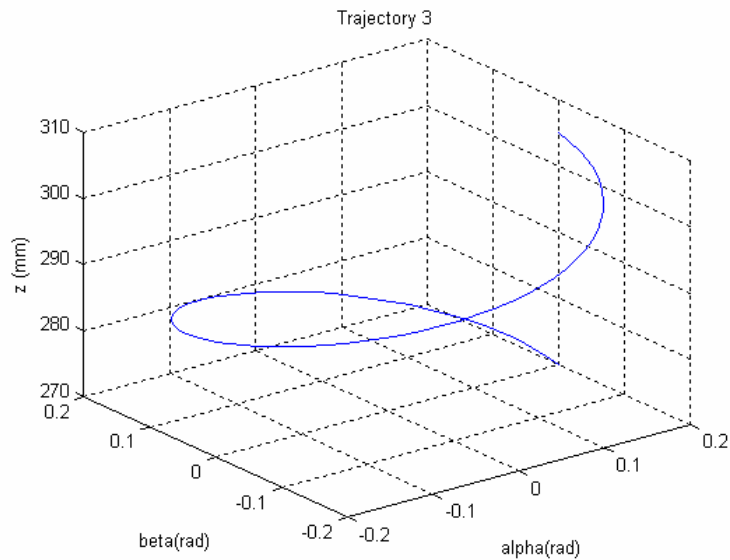


圖 2.15 軌跡三的工作空間圖

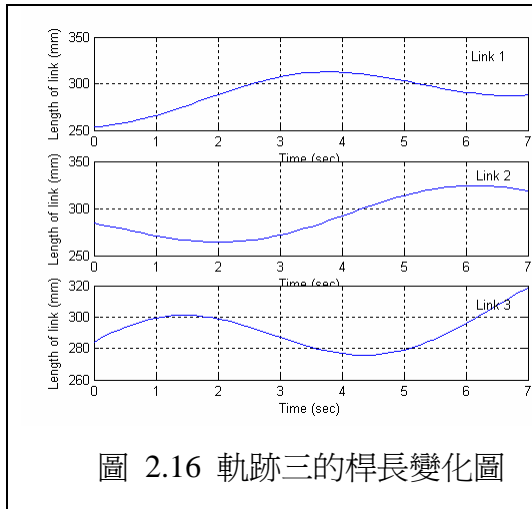


圖 2.16 軌跡三的桿長變化圖

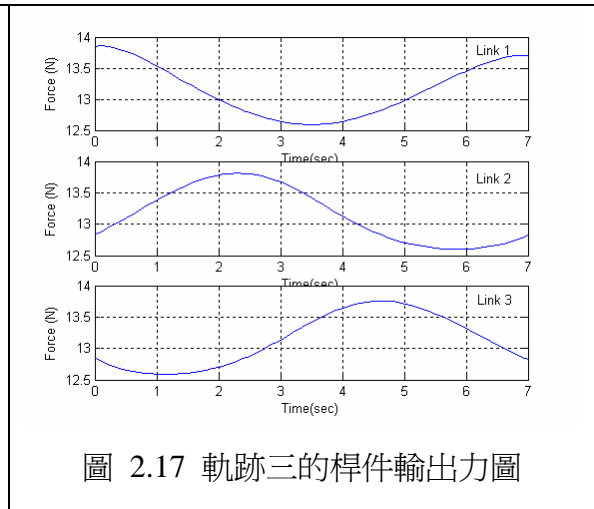


圖 2.17 軌跡三的桿件輸出力圖

軌 跡 四 :

$$p = \begin{pmatrix} 260+3 \times t \\ \pi/180 \times t \times \cos(t) \\ \pi/180 \times t \times \sin(t) \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/180 \times \pi \times \cos(t) - 1/180 \times \pi \times t \times \sin(t) \\ 1/180 \times \pi \times \sin(t) + 1/180 \times \pi \times t \times \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/90 \times \pi \times \sin(t) - 1/180 \times \pi \times t \times \cos(t) \\ 1/90 \times \pi \times \cos(t) - 1/180 \times \pi \times t \times \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{時間為 } 0 \sim 7 \text{ 秒}$$

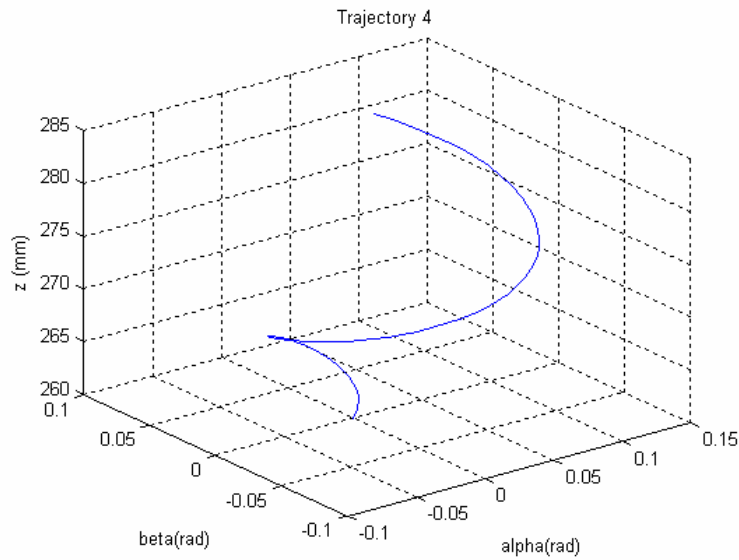


圖 2.18 軌跡四的工作空間圖

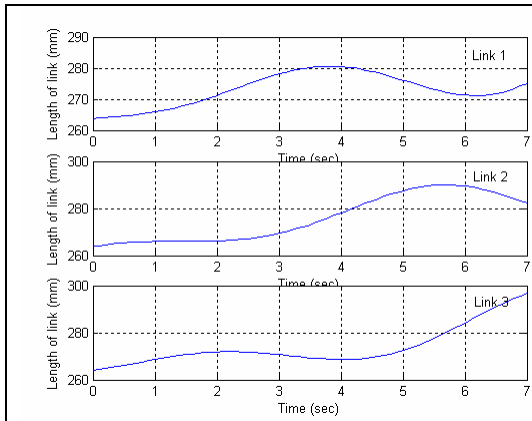


圖 2.19 軌跡四的桿長變化圖

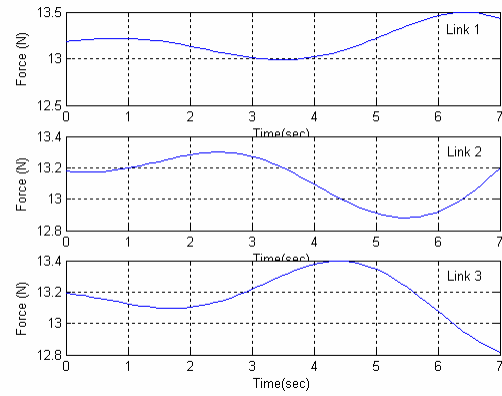


圖 2.20 軌跡四的桿件輸出力圖

以上四個軌跡為此機構的數學動態模型模擬，接下來比較牛頓法與虛功法在電腦模擬上各自所需的時間，此指令是由 matlab 軟體所提供的 tic、toc 兩個指令，其計算時間的條件為：由電腦開始讀進  $p$ 、 $v$ 、 $a$  這三個參數，然後至完成一個軌跡，並算出各桿件所須輸出的力為止，設定此為一個週期，下表為軌跡一到軌跡四分別使用牛頓法與虛功法所需花的時間表。

表 2.2 牛頓法與虛功法執行效率比較表（時間單位：秒）

	牛頓法	虛功法		牛頓法	虛功法
軌跡一	0.9690	0.5620	軌跡三	1.3600	0.7500
軌跡二	1.1250	0.5940	軌跡四	1.0160	0.5620

由表中可以很明顯的看出虛功法所需的時間幾乎都是牛頓法的一半，這是因為使用牛頓法時，機台每個結構的力平衡方程式都要被計算一次，因此影響數值計算的效率，若是硬體速度不夠快，可能會導致無法達到及時控制的要求；而虛功法因為拘束力一開始就被消去，因此相關計算的方程式較少，所以在計算效率上會比牛頓法快，但是，上面兩種方法對於數值計算上面還是有一定的複雜度，相對於串連式機構來講，明顯的複雜許多，而對於傳統工業電腦可能無法滿足即時控制，所以如何適度的簡化方程式，以提升計算的效率，這也是另一研究議題，而此議題在本研究中不多做討論。

接下來，將對四種軌跡的模擬做個總結，由圖 2.11 可以看出，當讓平板沿著 z 軸上升，且具有一保持常數的加速度  $a_z = 2mm/s^2$ ，其他參數保持常數，可以很明顯的看出

三根桿件的輸出力是相等的，而且因為當平板往上升時，桿件的向量會越來越接近垂直，所以桿件輸出力在水平方向的分量便會減小，故由圖可看出桿件的輸出力會越來越小，而由其他圖亦可很明顯的看出當桿件伸長時，其輸出力會越來越小，反之亦然，其道理都是一樣的，由以上的結果，可以證明建立的模型符合物理現象。

以上已將此平行式機構的數學模型完整的推導出來，接下來的討論將對此模型做控制與分析。

## 2.6 工作空間(Work Space)分析

此平行式機構具有三個自由度，在此節，將分析此機構的工作空間，一般而言，適用於工具機加工環境的工作空間定義為全部指向工作空間(Total Orientation Workspace, TOW)，意即在此空間中可動板上的參考點能夠讓 end-effector 於此區間內任意運動。故此機構的 TOW 定義為[25]：

$$\Omega_T = \{p \mid 246 < z < 310(mm) \in R^3, -0.38 < \alpha < 0.38(rad), -0.38 < \beta < 0.38(rad)\}$$

以下將依據此一 TOW 定義並配合逆向運動學來求此機構的工作空間，其利用的方法為採取疊加法並將其代入(2.6)式，逐一計算出相應之桿長，以便檢驗桿長是否符合其極限，從而標定工作空間之邊界，簡單的說，即是先由幾何及接頭的限制，求出  $\alpha$ 、 $\beta$  的最大最小值，然後再逐一的去找  $z$  軸的最大最小值，以下為求工作空間的流程圖與工作空間圖。

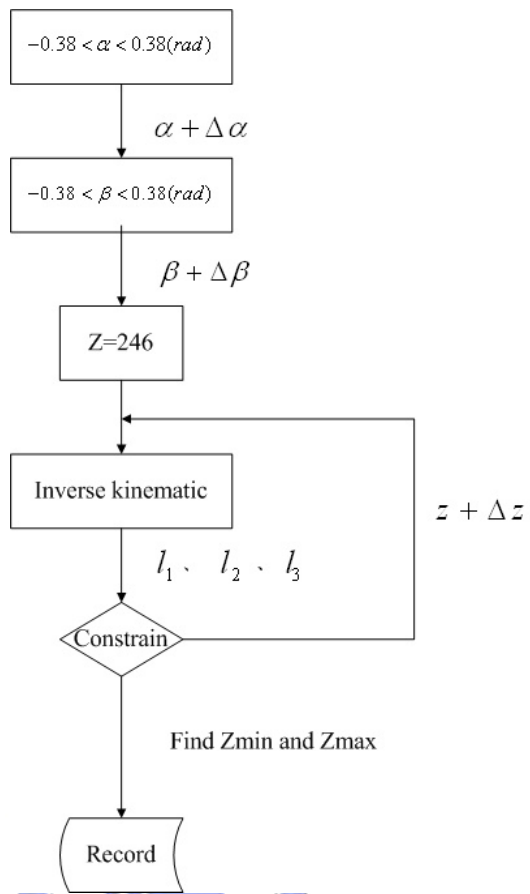


圖 2.21 工作空間流程圖

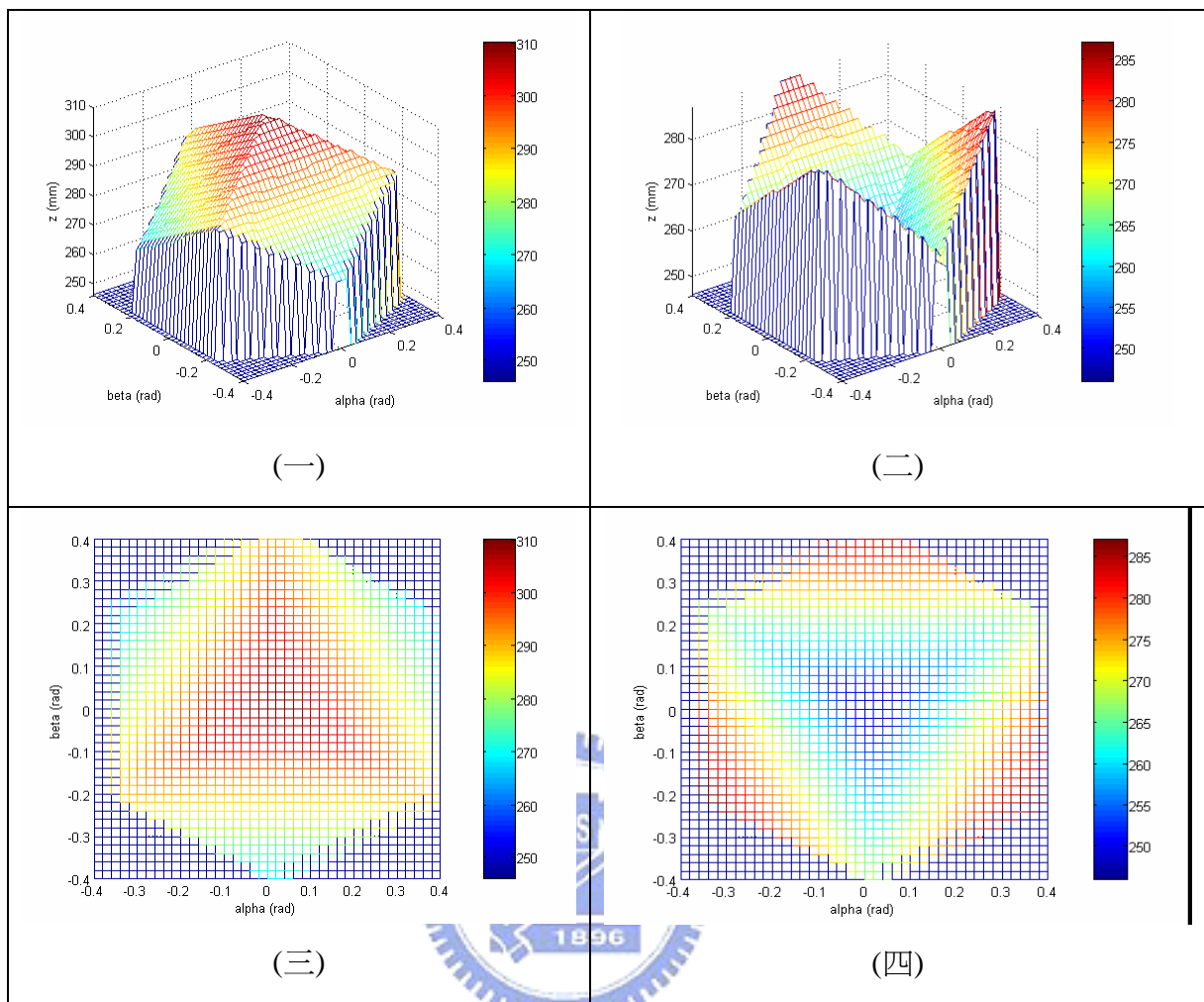


圖 2.22 工作空間圖

圖 2.22 中，圖(一)表示的是  $z$  軸的最大值、圖(二)表示的是當時的  $z$  軸最小值；而圖(三)、圖(四)分別是相對應的  $\alpha$ 、 $\beta$  值。

## 2.7 控制準備

### 2.7.1 交叉偶合控制

多軸進給系統的動態誤差包含：(1)追蹤誤差(position tracking error vector)、(2)輪廓誤差(contour error vector)。在軌跡追蹤上，傳統目標是追蹤誤差，其定義為真實的刀尖與理想位置的距離，但在多軸系統的控制下，因為軸與軸的特性不同，常會造成互相偶合的效應，所以若只有單純的做追蹤誤差的補償往往是無法有效的達到控制的精度，所以為了消除偶合現象，需再對輪廓誤差作補償，其定義為真實的位置與理想軌跡的最短距離，以下為交叉偶合的控制概念。

考慮 XY 平面之直線軌跡追蹤， $p_a$  為刀具真實位置、 $p_d$  為刀具理想位置，而追蹤誤



差  $E = P_d - P_a$ 、輪廓誤差  $\varepsilon = x_p \sin \phi - y_p \cos \phi$ ，其中  $P_a = (x_p, y_p)$ ，則輪廓誤差在 XY 平面上的分量為  $\varepsilon_x = -\varepsilon \sin \phi$ 、 $\varepsilon_y = \varepsilon \cos \phi$ ，控制架構如圖所示，由圖中可以很明顯的看出耦合的現象(即輪廓誤差)為由工作空間自由度互相影響所造成，若應用於並聯式機構須再做 Forward kinematic 與 Inverse kinematic 互相的轉換以做補償。

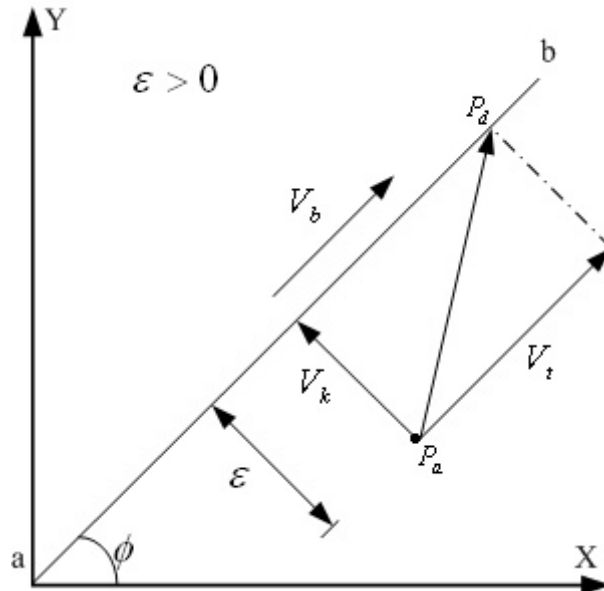


圖 2.23 輪廓誤差與預補償幾何關係圖[6]

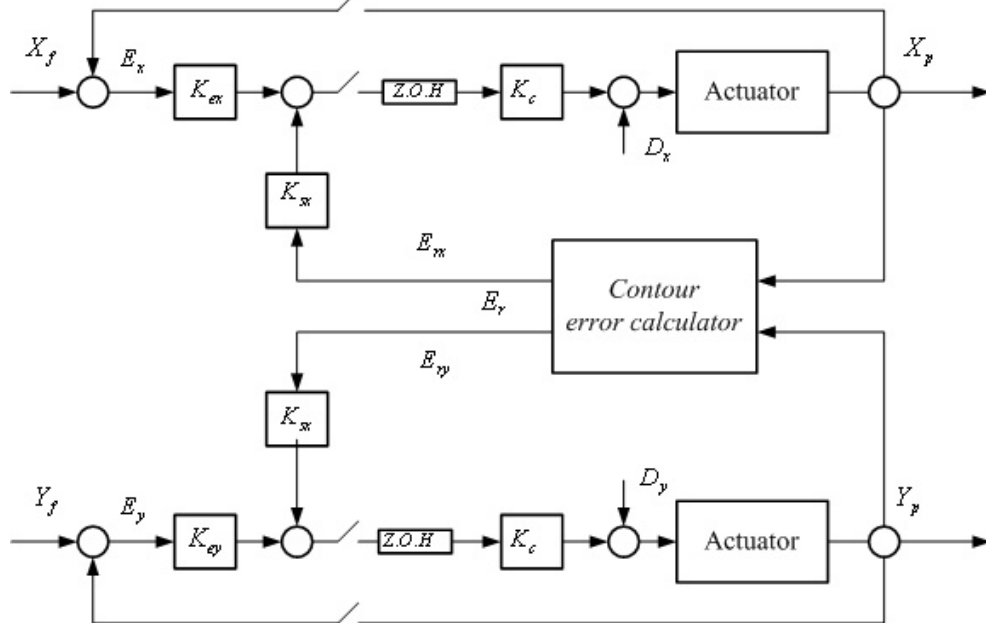


圖 2.24 交叉耦合控制示意圖[6]

### 2.7.2 交叉耦合預補償控制

預補償控制為交叉耦合控制的修正型，其概念為利用空間中幾何關係找出輪廓誤差與速度的關係式，藉此求出需補償的速度，修正出預補償的路徑，進而有效的消除輪廓誤

差，其控制示意圖如下

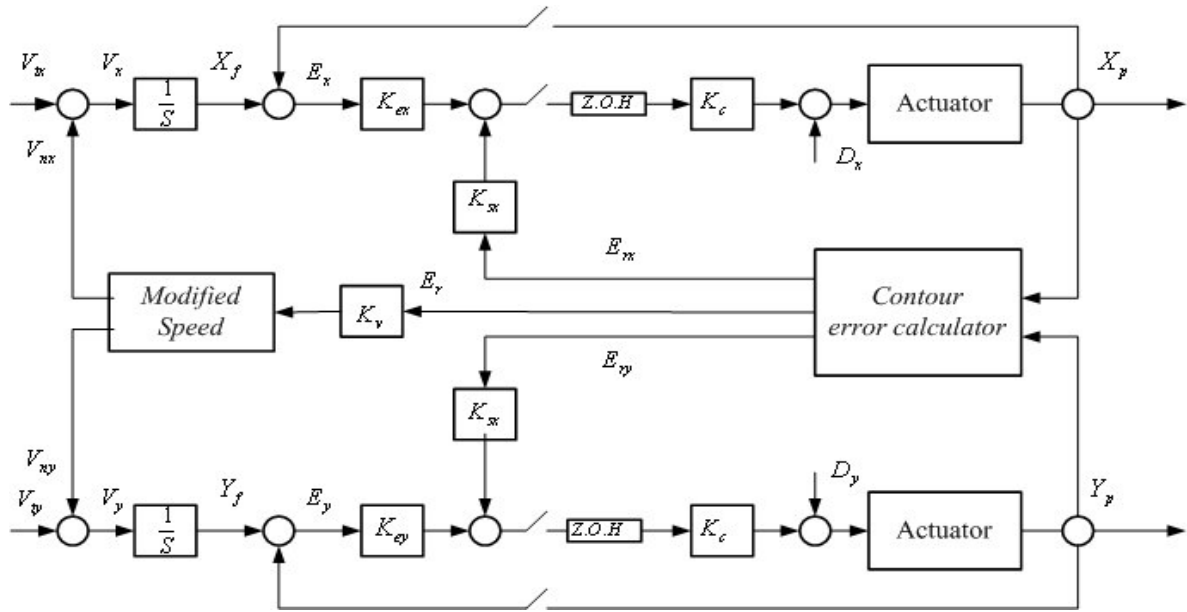


圖 2.25 交叉耦合預補償控制示意圖[6]

在預補償的演算架構中定義一個預補償的速度向量為  $\vec{V}_k = K_v \vec{\varepsilon}$ ，其中  $K_v$  為預補償增益。因此修正的速度包含進給速度與預補償的修改速度，並且表示如下：

$$\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_k \quad (2.75)$$

其中  $\vec{V}_t = V_b \vec{t}$  且  $\vec{t}$  為切線速度向量。因此修正的速度在 X 與 Y 的分量表示如下：

$$V_x = V_b \cos \phi - K_v \varepsilon \sin \phi \quad 、 \quad V_y = V_b \sin \phi + K_v \varepsilon \cos \phi \quad (2.76)$$

藉由將修正的速度對時間積分，可以得到新的參考位置，並且以離散的模式表示如下：

$$x_f(n) = x_f(n-1) + TV_x \quad 、 \quad y_f(n) = y_f(n-1) + TV_y \quad (2.77)$$

T 表示 sampling time interval，由下列的關係式可以得到進給位置誤差：

$$e_x(n) = e_x(n-1) + [x_f(n) - x_p(n)] \quad 、 \quad e_y(n) = e_y(n-1) + [y_f(n) - y_p(n)] \quad (2.78)$$

綜合上述，可得到控制訊號如下：

$$U_x(n+1) = K_{ex} e_x(n) + K_{ex} \varepsilon_x(n) \quad 、 \quad U_y(n+1) = K_{ey} e_y(n) + K_{ey} \varepsilon_y(n) \quad (2.79)$$

目前為止，已經說明交叉耦合及交叉耦合預補償，接下來將替本文之 3RPS 並聯式工具機建造交叉耦合預補償系統，其內容在第三章會有完整的說明。

### 第三章 交叉耦合預補償控制與混合位置/力量控制

在此章節中，將介紹交叉耦合控制所需要的輪廓誤差，而整個輪廓誤差的模式是建立在卡式座標系下，由輪廓誤差量所做的速度預補償量，必須分配給各根軸長。至此，所做的控制皆為位置控制，接下來，將以第二章所推導的動態模型為來做力量控制，其基礎是建立在輸入訊號為力量訊號，結合軌跡補償的訊號來做力量訊號的修正，以產生所需的輸出軌跡，此處的軌跡補償除了使用力量控制律，另考慮輪廓誤差在力量控制的影響，此外，亦將使用預補償方法結合力量控制來與各種方法互相比較，最後，將考慮整個系統與環境的影響，並建立起混合位置/力量控制架構。

#### 3.1 輪廓誤差模式

輪廓誤差的定義為真實的位置與理想軌跡的最短距離，在直角座標系下，它可分成路徑輪廓誤差與方向輪廓誤差，其示意圖如下：

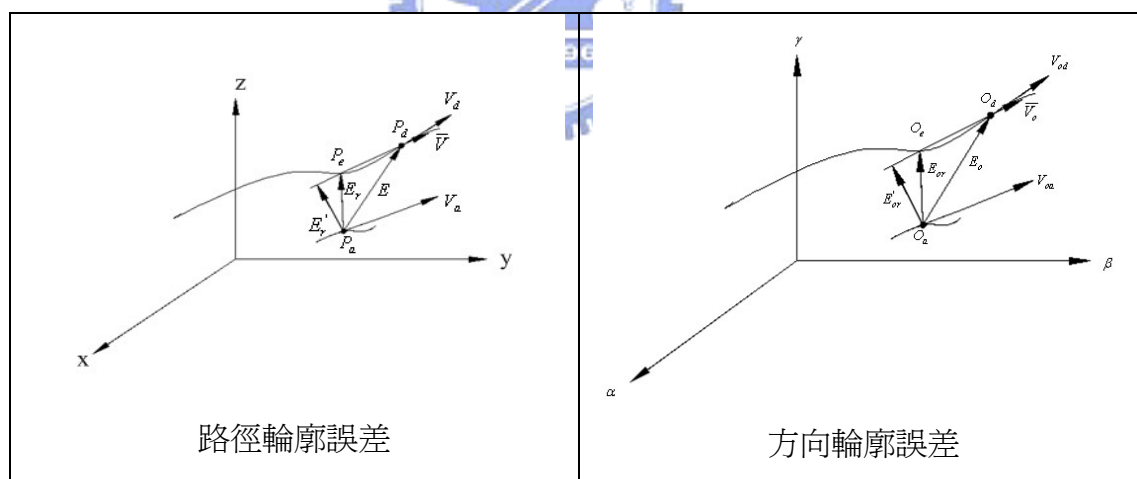


圖 3.1 輪廓誤差示意圖

##### 3.1.1 路徑輪廓誤差

圖(3.1)說明在卡式座標系下理想軌跡的路徑輪廓誤差與方向輪廓誤差，先從路徑輪廓誤差開始， $P_a$  為實際輸出位置、 $P_d$  為理想軌跡上的位置， $P_e$  為理想路徑上最接近  $P_a$  的位置， $V_a$ 、 $V_d$  分別代表實際值與理想值的切線速度單位向量， $E_r$  為路徑輪廓誤差， $\bar{V}$  代表  $P_e$  到  $P_d$  直線速度單位向量，當使用閉迴路伺服控制時  $E_r \approx E'$ ，此時  $\bar{V}$  可以當作其單

位平均速度向量，將上述物理量在直角座標系可表示成

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}^T = P_d - P_a \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} E_{rx} & E_{ry} & E_{rz} \end{bmatrix}^T = P_e - P_a \quad (3.2)$$

而  $V_a = \frac{\dot{P}_a}{\|\dot{P}_a\|}$ 、 $V_d = \frac{\dot{P}_d}{\|\dot{P}_d\|}$ ， $\bar{V}$  為  $V_a$ 、 $V_d$  平均單位速度向量，則

$$\bar{V} = \frac{\dot{P}_a + \dot{P}_d}{\|\dot{P}_a + \dot{P}_d\|} = \bar{V}_x i + \bar{V}_y j + \bar{V}_z k \quad (3.3)$$

整理(3.1)、(3.2)式，可以求得輪廓誤差

$$\mathbf{E}_r = P_e - P_a = P_e - (P_d - E) = E + P_e - P_d \quad (3.4)$$

因為  $E_r \approx E'_r$ ，所以可得輪廓誤差

$$\mathbf{E}_r = -(E \times \bar{V}) \times \bar{V} = E - (E \cdot \bar{V}) \bar{V} \quad (3.5)$$

將輪廓誤差表示成直角座標系下的三軸分量為[9]

$$\begin{pmatrix} E_{rx} \\ E_{ry} \\ E_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x - (E_x \bar{V}_x + E_y \bar{V}_y + E_z \bar{V}_z) \bar{V}_x \\ E_y - (E_x \bar{V}_x + E_y \bar{V}_y + E_z \bar{V}_z) \bar{V}_y \\ E_z - (E_x \bar{V}_x + E_y \bar{V}_y + E_z \bar{V}_z) \bar{V}_z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 方向輪廓誤差

在方向輪廓誤差中， $O_a$  為實際輸出位置、 $O_d$  為理想軌跡上的位置， $O_e$  為理想路徑上最接近  $P_a$  的位置， $V_{oa}$ 、 $V_{od}$  分別代表實際值與理想值的切線角速度單位向量， $E_{or}$  為方向輪廓誤差， $\bar{V}_o$  代表  $O_e$  到  $O_d$  直線角速度單位向量，當使用閉迴路伺服控制時  $E_{or} \approx E'_{or}$ ，此時  $\bar{V}_o$  可以當作其單位平均速度向量，將上述物理量在直角座標系可表示成

$$\mathbf{E}_o = \begin{bmatrix} E_\alpha & E_\beta & E_\gamma \end{bmatrix}^T = O_d - O_a \quad (3.7)$$

$$\mathbf{E}_{or} = \begin{bmatrix} E_{ora} & E_{orb} & E_{ory} \end{bmatrix}^T = O_e - O_a \quad (3.8)$$

而  $V_{oa} = \frac{\dot{O}_a}{\|\dot{O}_a\|}$ 、 $V_{od} = \frac{\dot{O}_d}{\|\dot{O}_d\|}$ ， $\bar{V}_o$  為  $V_{oa}$ 、 $V_{od}$  平均單位速度向量，則

$$\overline{V}_o = \frac{\dot{O}_a + \dot{O}_d}{\left\| \begin{matrix} \dot{O}_a + \dot{O}_d \end{matrix} \right\|} = \overline{V}_{o\alpha} \overline{\alpha} + \overline{V}_{o\beta} \overline{\beta} + \overline{V}_{o\gamma} \overline{\gamma} \quad (3.9)$$

整理(3.7)、(3.8)式，可以求得輪廓誤差

$$E_{or} = O_e - O_a = O_e - (O_d - E_o) = E_o + O_e - O_d \quad (3.10)$$

因爲  $E_{or} \approx E'_{or}$ ，所以可得輪廓誤差

$$E_{or} = -(E_o \times \overline{V}_o) \times \overline{V}_o = E_o - (E_o \cdot \overline{V}_o) \overline{V}_o \quad (3.11)$$

將輪廓誤差表示成直角座標系下的三軸分量爲[9]

$$\begin{pmatrix} E_{or,\alpha} \\ E_{or,\beta} \\ E_{or,\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha - (E_\alpha \overline{V}_{o\alpha} + E_\beta \overline{V}_{o\beta} + E_\gamma \overline{V}_{o\gamma}) \overline{V}_{o\alpha} \\ E_\beta - (E_\alpha \overline{V}_{o\alpha} + E_\beta \overline{V}_{o\beta} + E_\gamma \overline{V}_{o\gamma}) \overline{V}_{o\beta} \\ E_\gamma - (E_\alpha \overline{V}_{o\alpha} + E_\beta \overline{V}_{o\beta} + E_\gamma \overline{V}_{o\gamma}) \overline{V}_{o\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

以上所述爲路徑輪廓誤差與方向輪廓誤差，其基本概念爲利用直角座標系表示誤差量，其表示式的優點爲適用於各式加工機，在本文之 3RPS 三軸工具機中，因爲其在空間中只具有三個自由度，所以上面所述的輪廓誤差模式在  $x$ 、 $y$ 、 $\gamma$  三個方向的分量爲零，其輪廓誤差表示式修正爲  $E_r = [E_{rz} \ E_{or,\alpha} \ E_{or,\beta}]^T$ ，則在卡式空間中三個方向的分量

$$\text{爲} \begin{pmatrix} E_{rz} \\ E_{or,\alpha} \\ E_{or,\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z - (E_x \overline{V}_x + E_y \overline{V}_y + E_z \overline{V}_z) \overline{V}_z \\ E_\alpha - (E_\alpha \overline{V}_{o\alpha} + E_\beta \overline{V}_{o\beta} + E_\gamma \overline{V}_{o\gamma}) \overline{V}_{o\alpha} \\ E_\beta - (E_\alpha \overline{V}_{o\alpha} + E_\beta \overline{V}_{o\beta} + E_\gamma \overline{V}_{o\gamma}) \overline{V}_{o\beta} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

，除此之外，因爲此工具機爲一三軸並聯式工具機，所以所求得的輪廓誤差僅是代表上平板形心的誤差，若要應用於控制系統上，需再將所求得的輪廓誤差反算成各軸的桿長誤差，即驅動桿的輪廓誤差爲

$$E_{rLi} = \text{Inverse-kinematics}(E_{rz}, E_{or,\alpha}, E_{or,\beta}) \quad (3.14)$$

，然後再將桿長的誤差訊號送至驅動器，以進行控制。

輪廓誤差量的補償方法(即如何將輪廓誤差反算成各軸的桿長誤差此部份做進一步說明)：由圖(3.1)及式(3.5)、(3.11)求得輪廓誤差向量，利用向量合成的觀念，可知  $p_a$  向量加上  $E_r$  向量可得在卡式座標中所需要補償的軌跡點，將此點經由 Inverse Kinematic 計算後可求得各軸需補償的桿長量，再將此三軸的桿長量與實際的桿長量相減，經由控制器調整送出控制訊號，即可將輪廓誤差修正回來。

### 3.2 速度預補償

速度預補償的概念最先是由[5]所提出，其主要是創生一個速度預補償向量，以改善輪廓的精度並消除輪廓的穩態誤差，Chin and Tsai [6]將預補償結合交叉偶合法，在高速軌跡追蹤上表現優異，本節將結合輪廓誤差、交叉偶合控制、速度預補償的概念，構建 3RPS 工具機之軌跡追蹤系統。圖(3.2)所示為速度預補償在直角座標系下的示意圖，其中包含路徑速度預補償與方向速度預補償。

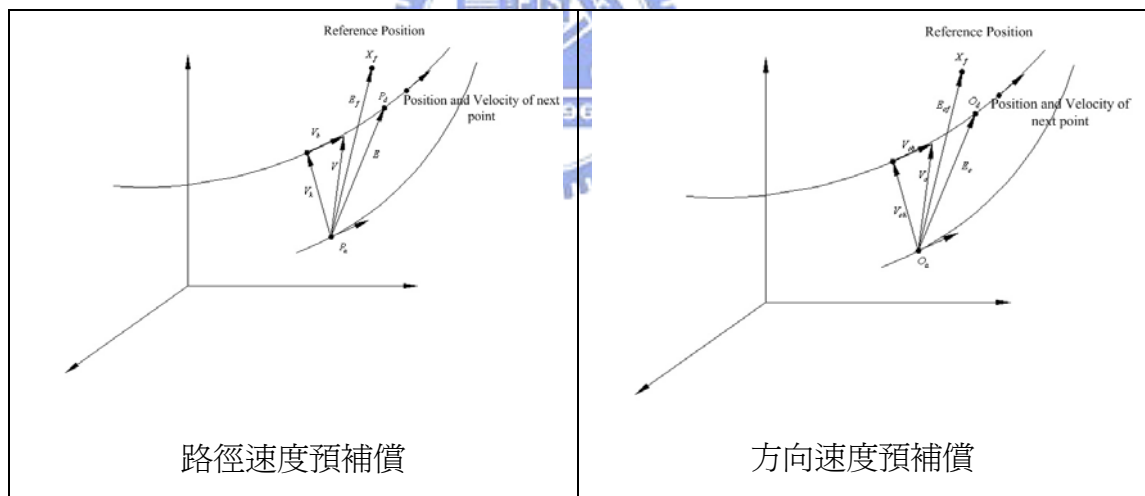


圖 3.2 預補償示意圖

預補償主要是利用輪廓誤差量的資訊來修正下一點所需的速度(或位置)輸出訊號，進而將下一點的速度訊號積分而得參考位置，以此參考位置做為“虛擬”的補償量( $E_f$ 、 $E_{of}$ )依據，使得控制訊號不依照原本軌跡的訊號輸出，亦即將原本的軌跡訊號提前先做修正，使得下一點的輸出訊號能夠將實際輸出位置“推向”落在原本的軌跡上，經過預補償後，修正的速度為包含進給速度與預補償的修改速度，路徑與方向速度預補償可表示如下：

$$V = V_b \vec{t} + V_k \quad (3.15)$$

$$V_o = V_{ob} \vec{t} + V_{ok} \quad (3.16)$$

其中  $V_k = K_v E_r$ 、 $V_{ok} = K_{ov} E_{or}$ ，而  $K_v$  與  $K_{ov}$  為補償增益。爲了消除穩態誤差，可增加一積分控制器，如此可將(3.15)、(3.16)式修改成如下[6]：

$$V = V_b \vec{t} + K_v E_r + K_i \int_0^t E_r dt \quad (3.17)$$

$$V_o = V_{ob} \vec{t} + K_{ov} E_{or} + K_{oi} \int_0^t E_{or} dt \quad (3.18)$$

將(3.17)與(3.18)以直角座標系表示可寫成

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_b \vec{t}_x + K_v E_{rx} + K_i \int_0^t E_{rx} dt \\ V_b \vec{t}_y + K_v E_{ry} + K_i \int_0^t E_{ry} dt \\ V_b \vec{t}_z + K_v E_{rz} + K_i \int_0^t E_{rz} dt \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} V_{o\alpha} \\ V_{o\beta} \\ V_{o\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ob} \vec{t}_\alpha + K_{ov} E_{or,\alpha} + K_{oi} \int_0^t E_{or,\alpha} dt \\ V_{ob} \vec{t}_\beta + K_{ov} E_{or,\beta} + K_{oi} \int_0^t E_{or,\beta} dt \\ V_{ob} \vec{t}_\gamma + K_{ov} E_{or,\gamma} + K_{oi} \int_0^t E_{or,\gamma} dt \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

以上爲在直角座標系下速度的預補償，要應用於本文之 3RPS 工具機時，需將預補償修

$$\text{正爲} \begin{pmatrix} V_z \\ V_{o\alpha} \\ V_{o\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_b \vec{t}_z + K_v E_{rz} + K_i \int_0^t E_{rz} dt \\ V_{ob} \vec{t}_\alpha + K_{ov} E_{or,\alpha} + K_{oi} \int_0^t E_{or,\alpha} dt \\ V_{ob} \vec{t}_\beta + K_{ov} E_{or,\beta} + K_{oi} \int_0^t E_{or,\beta} dt \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

，因爲此工具機爲一三軸並聯式工具機，所以所求得的預補償速度僅是代表上平板的速度補償，所以需再將所求得的預補償速度反算成各軸的桿長速度，因此，可以得到各驅動軸的參考位置如下所示：

$$L_{f,i}(n) = L_{f,i}(n-1) + T \dot{L}_i, i = 1 \sim 3 \quad (3.22)$$

其中 T 爲 Sampling Time

而各驅動軸的進給位置誤差表示如下：

$$E_{L,i}(n) = E_{L,i}(n-1) + [L_{f,i}(n) - L_{t,i}(n)], i = 1 \sim 3 \quad (3.23)$$

因此可以得到控制訊號如下

$$U_{L,i}(n+1) = K_{eLi}E_{Li}(n) + K_{erLi}E_{rLi}(n), i = 1 \sim 3 \quad (3.24)$$

### 3.3 多軸並聯式工具機交叉耦合與交叉耦合預補償控制流程規劃

至目前為止，已將控制所需的誤差量推導完畢，其中要注意的是，由於誤差量及預補償都是在直角座標系下完成，其代表的是上平板的形心，但由於此機構為並聯式機構，是由三根桿件來帶動伸長縮短，進而控制上平板形心的姿態，所以必須將直角座標系下的量轉換成三根桿件的量，即需要再經過 **Inverse Kinematics** 轉換，所以實際上所做的控制還是三根桿件的控制，以下為整合之前的推導，將交叉耦合與預補償用於三軸並聯式工具機，並用電腦模擬交叉耦合與預補償在輪廓誤差與進給誤差上的比較，此處對於追蹤誤差與輪廓誤差修正所使用的控制器為 **PID** 控制器，其控制律如下：

$$u = k_p e + k_i \int e dt + k_d \frac{de}{dt} \quad (3.25)$$

式子中  $e$  為誤差， $k_p$ 、 $k_i$ 、 $k_d$  分別為增益值， $u$  為所需的控制訊號。





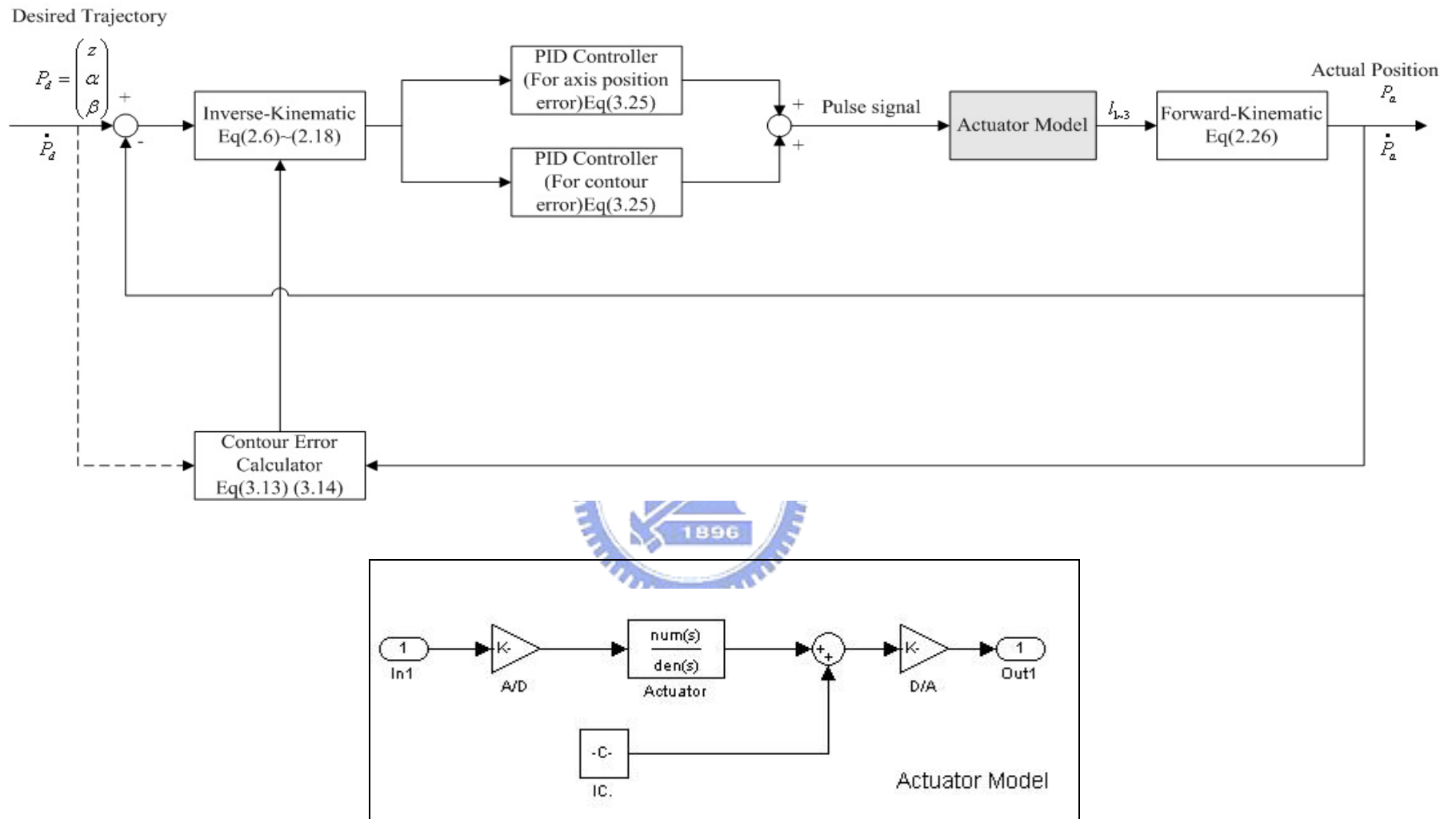


圖 3.3 並聯式工具機交叉耦合控制流程圖

圖(3.3)所示為交叉偶合控制流程圖，其中在驅動軸模型是用[32]所做的系統辨識模型，其實驗運作流程主要透過 PCI-8134 運動控制軸卡對軸向馬達送出脈波訊號，以每 50ms 送出軸向馬達隨機正反轉脈波訊號，其脈波訊號為輸入訊號，藉由光學尺迴授其位移量，其位移量為輸出訊號，利用系統辨認中常見的 Arx Model 方法(Autoregressive External Input Model)得到其各驅動軸的轉移函數，驅動軸轉移函數為[32]：

$$L_i(S) = \frac{0.1479S^2 + 3.161S + 297.8}{S^3 + 18.79S^2 + 1142S + 651.2} \quad (3.26)$$

利用此驅動軸的轉移函數，作為驅動軸模型。

接下來為交叉偶合預補償控制圖，見圖(3.4)，在預補償增益控制器中，主要用來修正速度命令，而所用的控制器為 PI 控制器，由式(3.17)、(3.18)可知，其目的為消除穩態誤差。



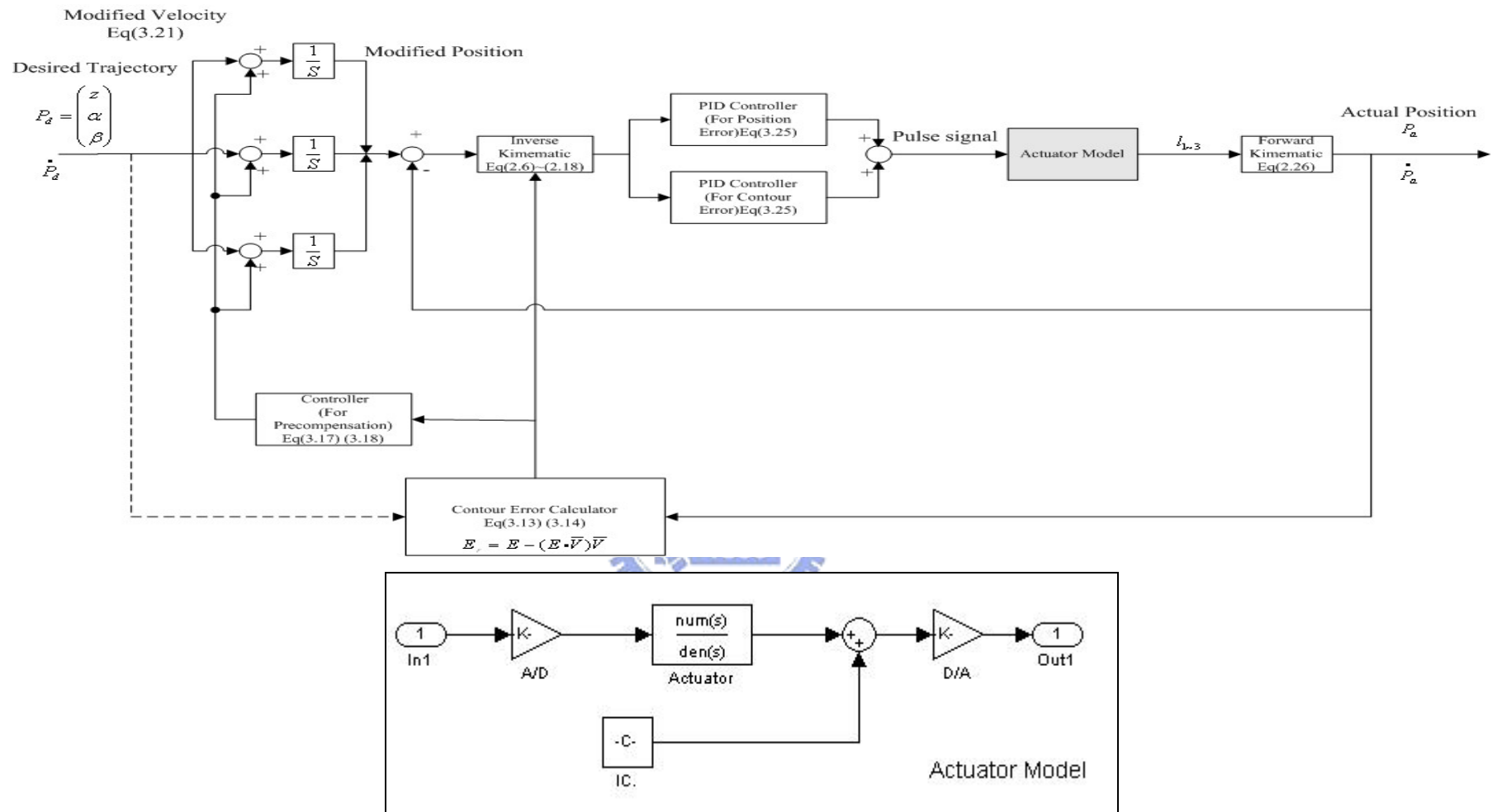


圖 3.4 並聯式工具機交叉耦合預補償控制流程圖

### 3.4 模擬與討論

爲了分析預補償方法在消除輪廓誤差的效果，以下將利用第二章的軌跡二與軌跡四兩個軌跡來做分析與比較，其中控制器的參數選擇以試誤法調整求得，除此之外，並討論預補償方法在不同速度時之輪廓誤差的比較。在誤差比較的方法上，是用 IAE (Integral Absolute-Error)值爲判斷，其定義爲[7]

$$IAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\varepsilon(i)|, \text{ 其中 } \varepsilon(i) \text{ 爲誤差值}$$

#### (1)、軌跡二（第二章）模擬

表 3.1 軌跡二 PID 控制參數表

	PID for Position Error			PI for Contour Error		PI for Precompensation	
	P gain	I gain	D gain	P gain	I gain	P gain	I gain
CCS	80	60	0.5	80	40	0	0
CCPM	80	60	0.5	80	40	25	15

Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3)

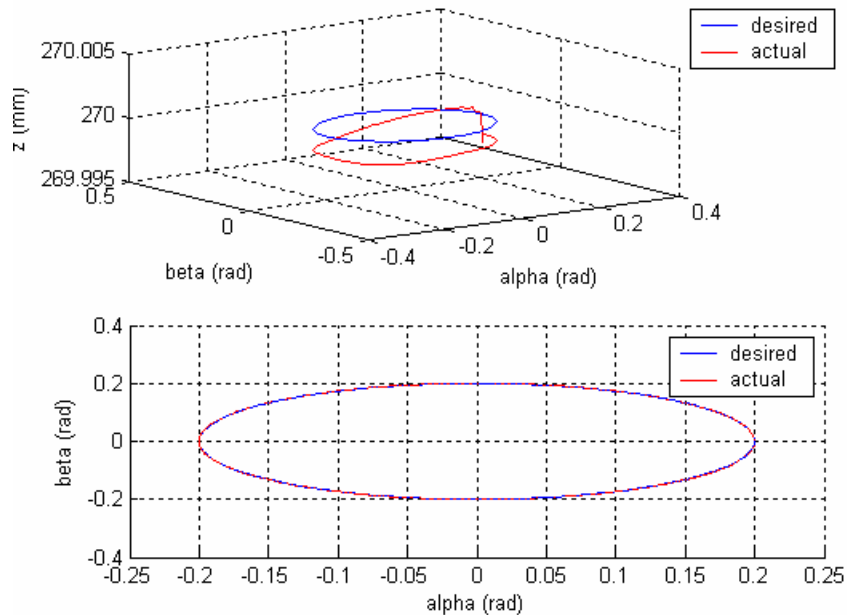


圖 3.5 軌跡二交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖

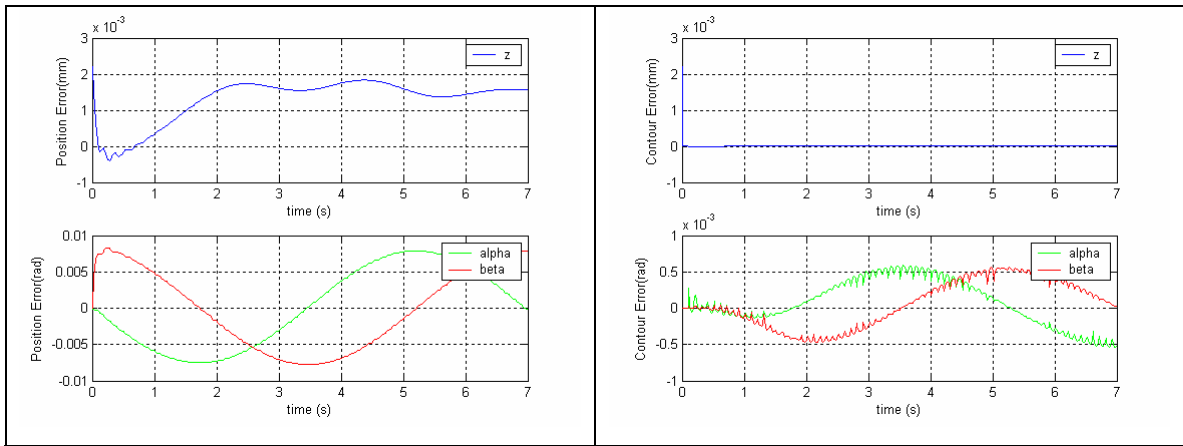


圖 3.6 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

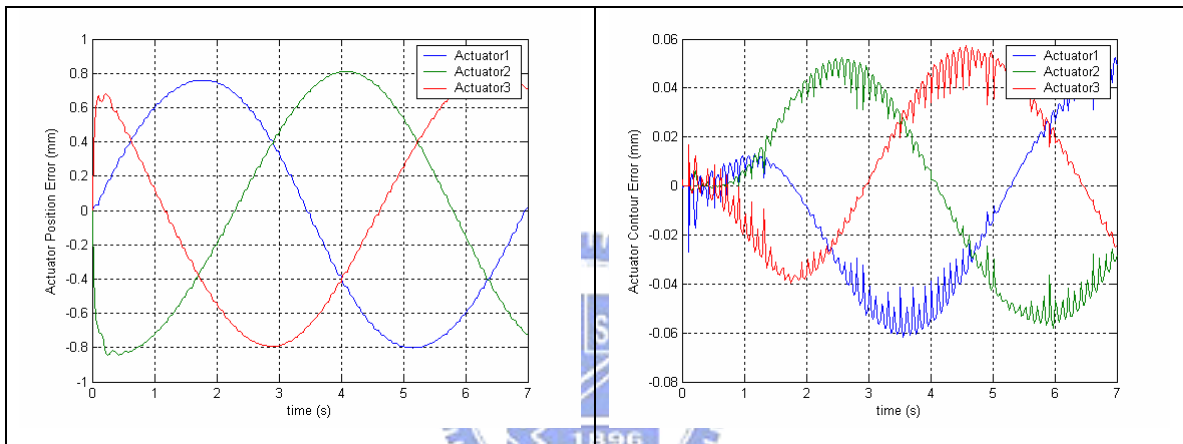


圖 3.7 軌跡二驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

Structure 2 : 交叉耦合預補償控制(CCPM, 圖 3.4)

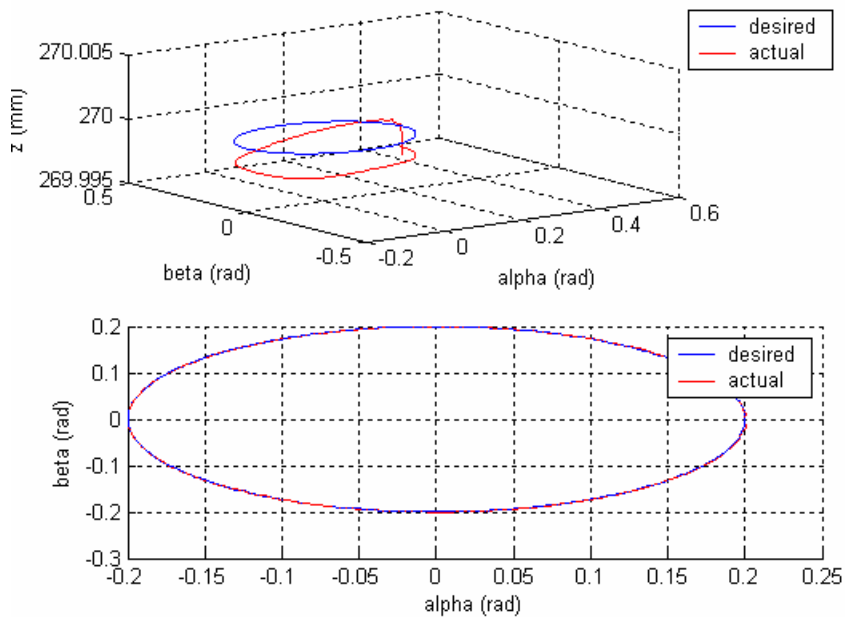


圖 3.8 軌跡二交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖

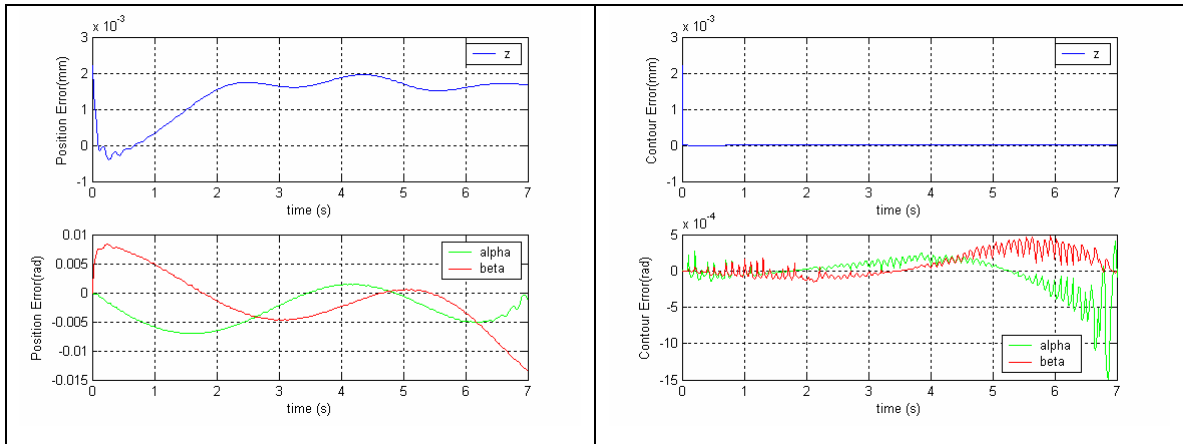


圖 3.9 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

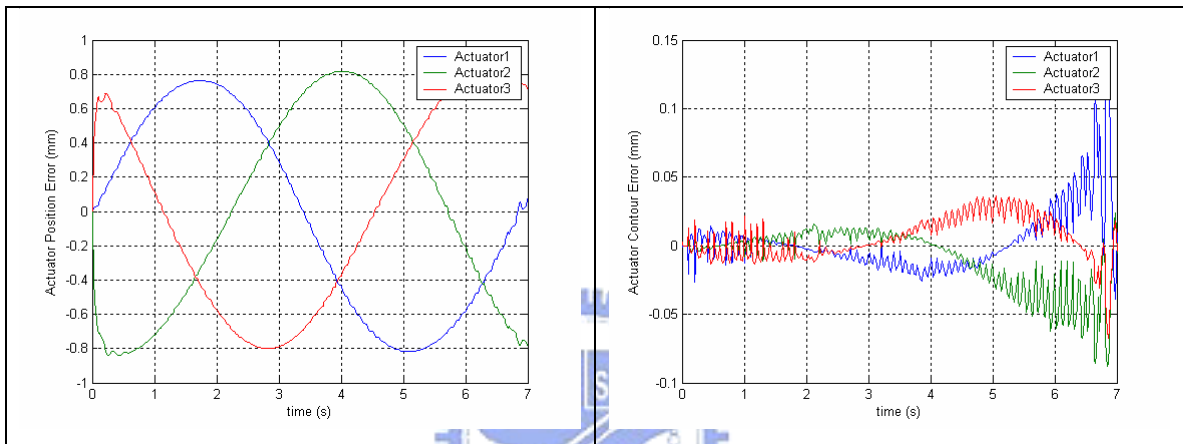


圖 3.10 軌跡二驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

在 IAE 值的計算上，因為誤差分為路徑與方向誤差，所以 IAE 值的計算如下：

$$IAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Z_{Error}(i)|, \quad IAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\alpha_{Error}(i)| + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\beta_{Error}(i)|$$

表 3.2 軌跡二 CCS 與 CCPM IAE 比較表

IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.0013	0.0096	5.704e-006	5.106e-004	1.4697	0.0772
CCPM	0.0013	0.0073	5.7944e-06	2.8084e-04	1.4863	0.0426

## (2)、軌跡四（第二章）模擬

表 3.3 軌跡四 PID 控制參數表

	PID for Position Error			PI for Contour Error		PI for Precompensation	
	P gain	I gain	D gain	P gain	I gain	P gain	I gain
CCS	80	120	1.5	80	90	0	0
CCPM	80	120	1.5	80	90	20	10

Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3)

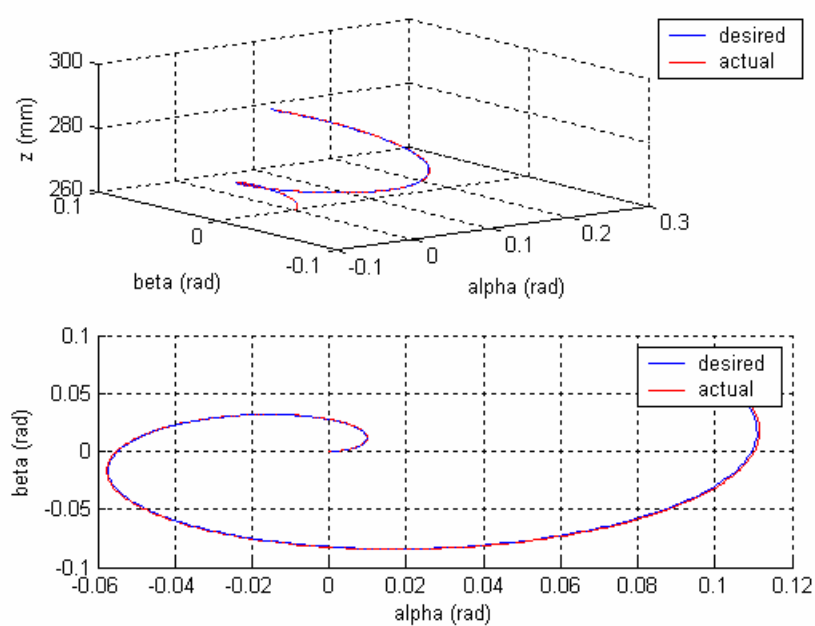


圖 3.11 軌跡四交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖

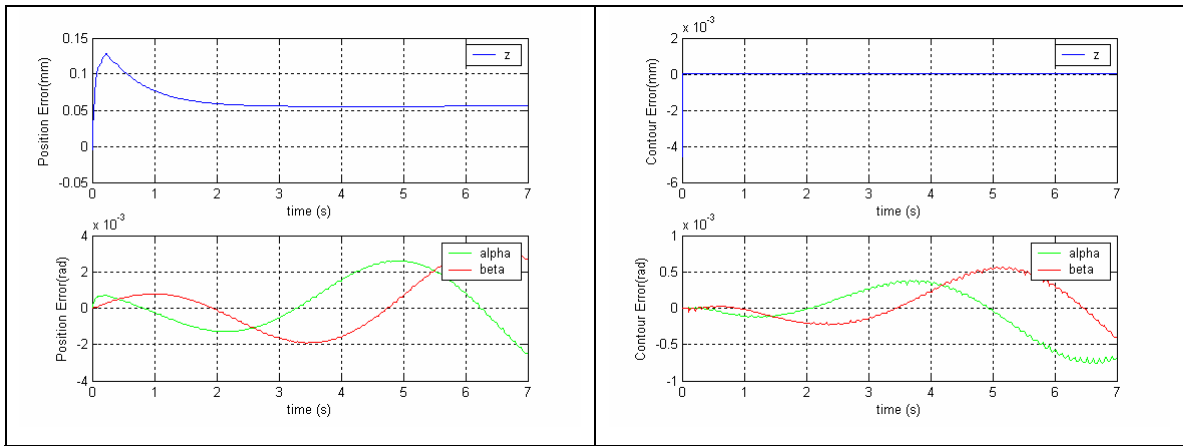


圖 3.12 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

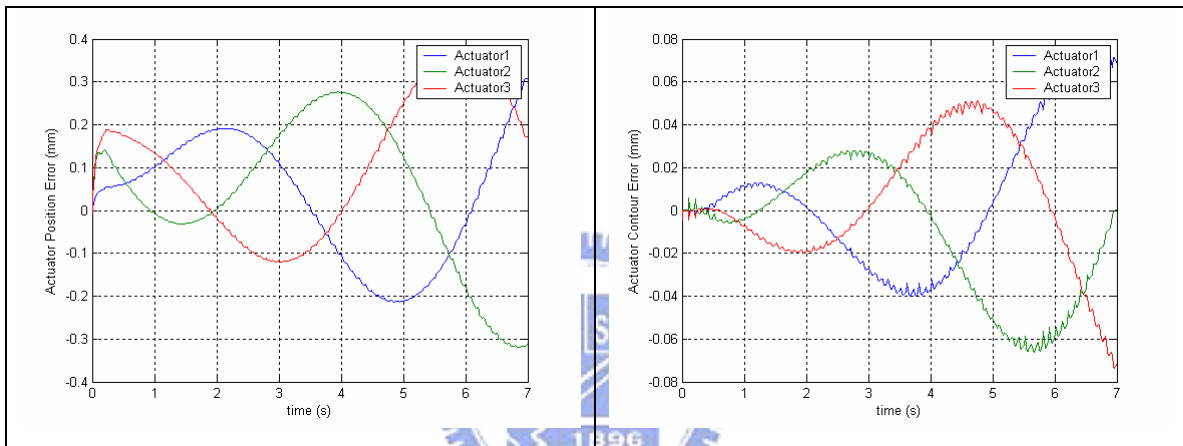


圖 3.13 軌跡四驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

Structure 2 : 交叉耦合預補償控制(CCPM, 圖 3.4)

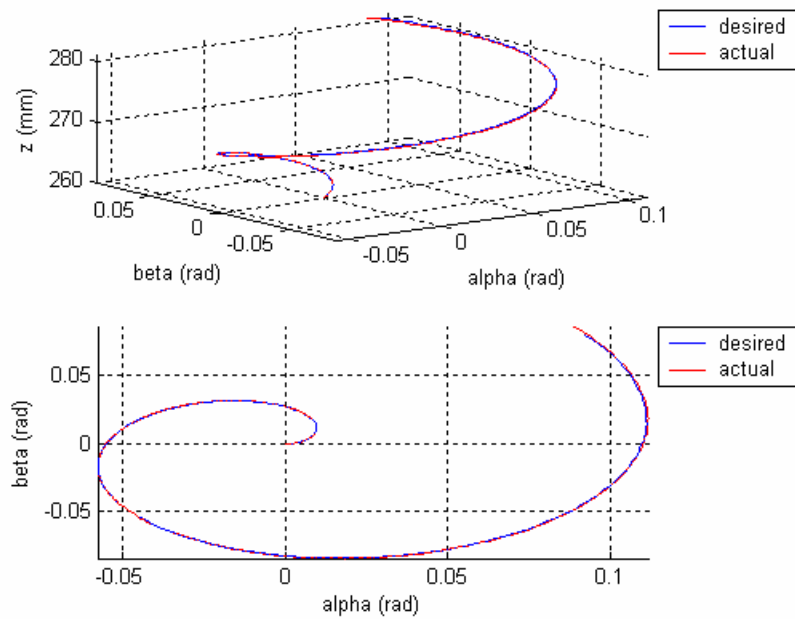


圖 3.14 軌跡四交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖



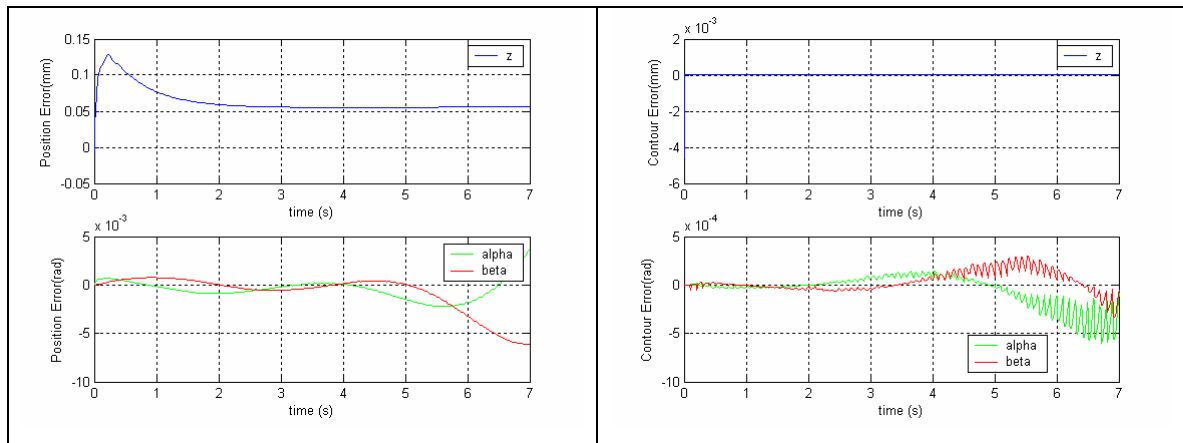


圖 3.15 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

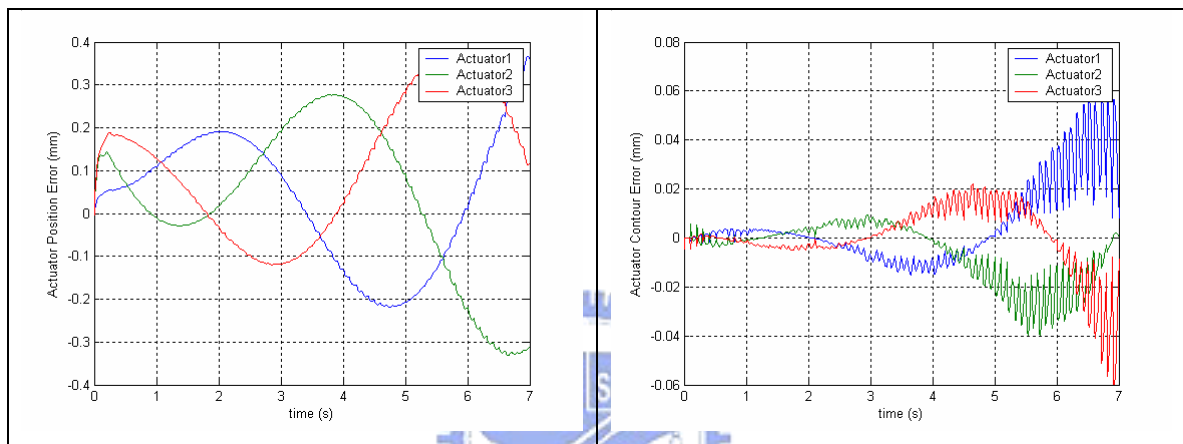


圖 3.16 軌跡四驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

表 3.4 軌跡四 CCS 與 CCPM 之 IAE 比較表

IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.0629	0.0025	1.248e-005	4.657e-004	0.43	0.0772
CCPM	0.0635	0.0021	1.1811e-05	1.9560e-04	0.4524	0.0304

由模擬的數據可看出預補償方法的 IAE 值明顯的比 CCS 小很多，這意味著預補償能有效的減低誤差，在軌跡二中，由圖(3.6)與圖(3.9)比較，很明顯的可以看出圖(3.9)的輪廓誤差很平穩的在 0 附近上下起伏，不像圖(3.6)起伏這麼大，再比較桿件的誤差，由圖(3.7)與(3.10)亦可以看出預補償方法在桿件的輪廓誤差上大致控制在-0.02~0.02 區間，明顯的比 CCS 小很多，而且誤差的震盪也比較平穩，另外令一組軌跡，由圖(3.12)與(3.15)亦可看出預補償的輪廓誤差明顯小很多，而且收斂的也較快，歸納起來，預補償方法能夠有效的降低輪廓誤差。

### (3)、具有尖角軌跡的模擬

接下來將比較交叉耦合與預補償方法分別對具有尖角軌跡的表現，給定軌跡如圖

$$3.17, \text{ 且工作空間近給速度 } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \text{ 加速度 } a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

表 3.5 具尖角軌跡 PID 控制參數表

	PID for Position Error			PI for Contour Error		PI for Precompensation	
	P gain	I gain	D gain	P gain	I gain	P gain	I gain
CCS	60	70	0.8	70	85	0	0
CCPM	60	70	0.8	70	85	20	13

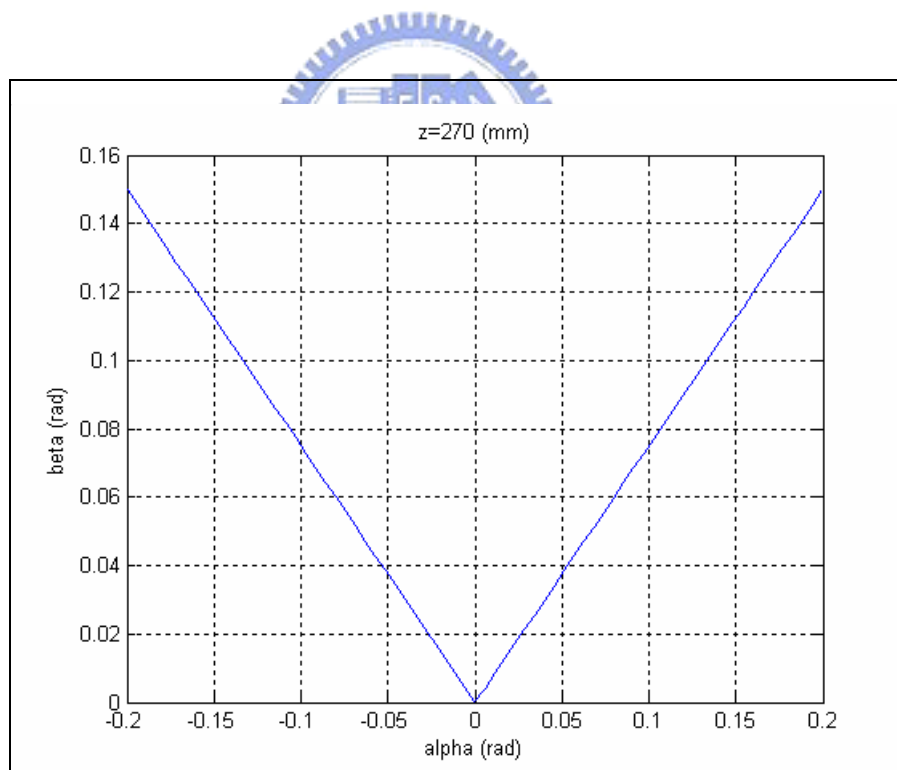


圖 3.17 具尖角軌跡示意圖

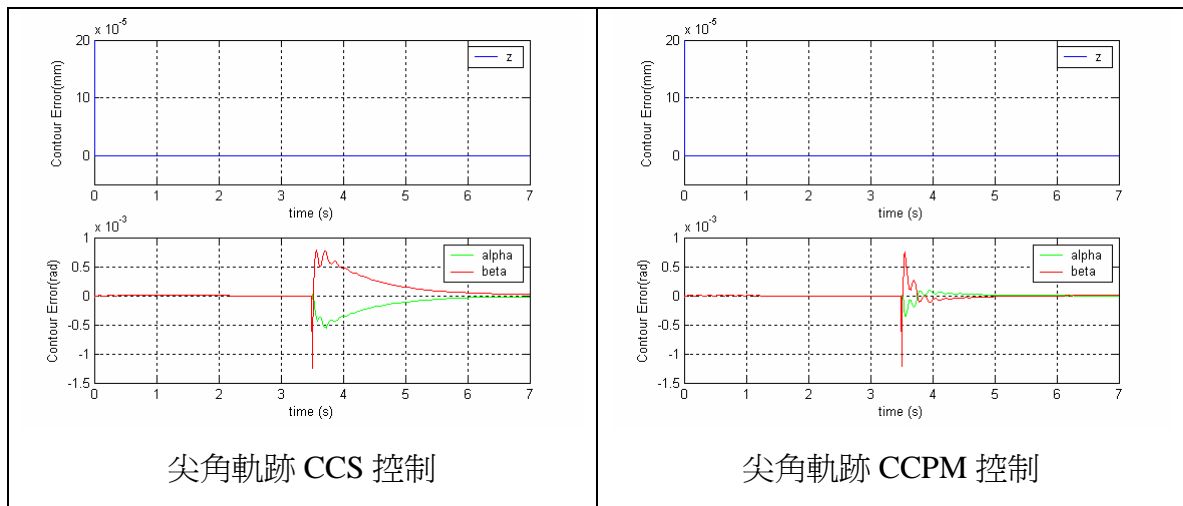


圖 3.18 具尖角軌跡工作空間輪廓誤差 CCS 與 CCPM 比較圖

表 3.6 具尖角軌跡 CCS 與 CCPM IAE 比較表

IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	8.4988e-04	0.0036	1.2359e-06	2.3021e-04	0.4892	0.0351
CCPM	8.4417e-04	0.0035	1.1986e-06	1.0773e-04	0.5019	0.0175

由模擬可以看出在尖角處時，雖然 CCS 與 CCPM 在轉角處輪廓誤差都有放大的反應，但由模擬的結果可以看出 CCPM 對於輪廓誤差的改善還是比 CCS 好，且輪廓誤差能夠快速的修正回來，由 IAE 值更可看出輪廓誤差降低約一半左右。

### 3.5 交叉偶合與預補償應用於力量控制

#### 3.5.1 驅動軸(actuator)機械模型

在進行力量控制前，須先建立驅動器(actuator)的模型，由於力量控制是以電壓為輸入訊號，然後送出所需要的力矩，所以首先步驟即為建立馬達的模型，而機台的運動方式為由馬達的旋轉帶動皮帶，然後再經由皮帶帶動滾珠螺桿使得桿件做直線運動，進而使上平板形心點跑出所需的軌跡，而以下為驅動軸的模型建立，其內容包括馬達模型與滾珠螺桿模型，圖 3.19 為馬達與驅動桿的簡易示意圖。

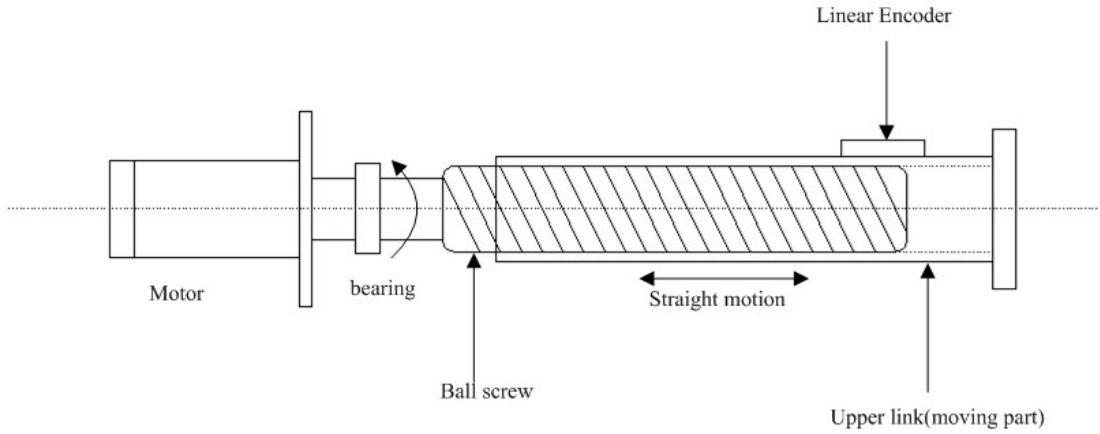


圖 3.19 馬達與滾珠螺桿示意圖

馬達的電樞迴路方程式以 Kirchhoff 法則可表示如下[31]：

$$La \frac{di_a(t)}{dt} + Rai_a(t) + e_m(t) = e_a(t) \quad (3.27)$$

$La$ ：電樞之感應係數， $i_a$ ：電樞電流， $Ra$ ：電樞電阻， $e_m$ ：因馬達旋轉時磁力線在線圈上切割所感應之反電動勢， $e_a$ ：電壓。

馬達反電動勢與角速度成正比，扭矩與電流成正比，所以有以下關係式：

$$e_m(t) = Km \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3.28)$$

$$T(t) = Kt i_a(t) \quad (3.29)$$

$Km$ ：旋轉反電勢常數， $Kt$ ：扭矩常數

馬達扭矩運動方程式可寫成：

$$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + C \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3.30)$$

$\theta$ ：馬達回轉角， $J$ ：馬達軸與螺桿之慣性矩， $C$ ：回轉軸衰減係數

整理式子(3.27)~(3.30)可得

$$\frac{LaJ}{Kt} \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + \frac{LaC + RaJ}{Kt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{RaC + KmKt}{Kt} \frac{d\theta(t)}{dt} = e_a(t) \quad (3.31)$$

而馬達的感應係數遠小於電樞阻抗，故  $La \doteq 0$ ，則可簡化成下式

$$\frac{RaJ}{Kt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{RaC + KmKt}{Kt} \frac{d\theta(t)}{dt} = e_a(t) \quad (3.32)$$

將(3.32)式兩邊取 Laplace 轉換可得轉移函數

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{Ea(s)} = \frac{Kt}{s(RaJs + (RaC + KmKt))} \quad (3.33)$$

式(3.33)即為一般馬達的近似模型，以上為馬達模型的動態，接下來將包含上桿件的動態推導。

導螺桿旋轉產生軸向力  $P$  使上桿件產生移動，其關係式如下[31]：

$$P = K_n \{K_R \theta(t) - x(t)\} \quad (3.34)$$

$K_n$ ：導螺桿與上桿件之進給剛性

$K_R$ ：馬達旋轉產生直線運動的轉換係數( $L/2\pi$   $L$ ：螺桿導程)，此處  $K_R$  為 0.637

$x(t)$ ：上桿件位移

將軸向力  $P$  換算為螺桿之扭矩  $T_b$ ，則其關係式如下：

$$T_b = \frac{d_2}{2} P \tan(\beta + \rho) \quad (3.35)$$

$d_2$ ：螺桿直徑

$\beta$ ：導程角

$\rho$ ：摩擦角

導程角與螺桿效率  $\eta$  可表示如下：

$$\tan \beta = \frac{L}{\pi d_2} \quad (3.36)$$

$$\eta = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta + \rho)} \quad (3.37)$$

整理(3.35)~(3.37)可得

$$T_b = \frac{1}{\eta} K_R P \quad (3.38)$$

式(3.38)即為軸向力與扭矩的關係式，其中滾珠螺桿的  $\eta = 0.9$  以上。

若馬達只有迴轉，所需扭矩  $T_a$  為

$$T_a = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \quad (3.39)$$

故馬達的輸出扭矩即為  $T = T_a + T_b$

整理(3.34)、(3.38)、(3.39)可得馬達的輸出扭矩即為

$$T(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{1}{\eta} K_R K_n \{K_R \theta(t) - x(t)\} \quad (3.40)$$

由(3.27)~(3.29)可得馬達扭矩與電壓的關係式

$$T(t) = \frac{Kt}{Ra} \left[ e_a(t) - Km \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \quad (3.41)$$

將上桿件視為一二階系統，則輸出力  $P$  可表示成

$$P = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + C \frac{dx(t)}{dt} \quad (3.42)$$

$M$ ：上桿件質量

整理(3.34)、(3.40)、(3.41)、(3.42)並經過 Laplace 轉換可求得輸入電壓與上桿件位移的關係式如下：

$$\frac{X(s)}{Ea(s)} = \frac{Kt}{Ra} \frac{1}{\frac{MJ}{K_n K_R} s^4 + \frac{1}{K_n K_R} \left[ \frac{MKtKm}{Ra} + CJ \right] s^3 + \left[ \frac{MK_R}{\eta} + \frac{KtKm}{K_n K_R} \frac{C}{Ra} + \frac{J}{K_R} \right] s + \left[ \frac{CK_R}{\eta} + \frac{KtKm}{K_R Ra} \right] s} \quad (3.43)$$

將(3.43)表示成系統方塊圖如下[31]：

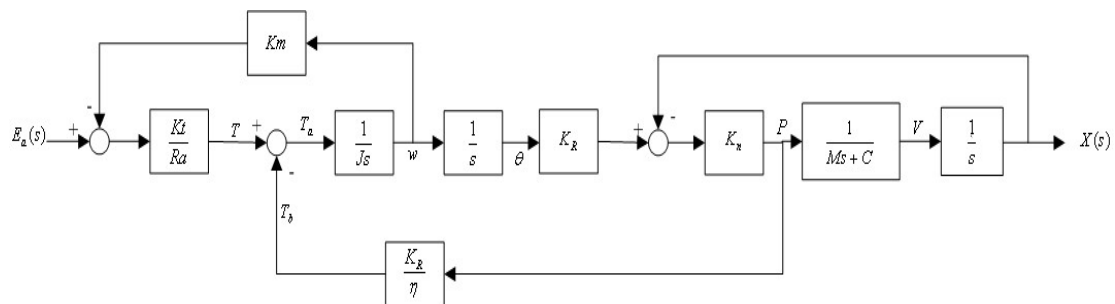


圖 3.20 馬達輸出電壓與上桿件位移方塊線圖[31]

以上為進行力量控制前所需的驅動桿動態模型，接下來將利用第二章所推導的動態方程式(式(2.44)~(2.74))來做力量控制與混合位置/力量控制，並探討交叉偶合與預補償方法使用於力量控制中對於輪廓誤差的影響。

力量控制的概念在於：利用已知的系統參數，包括質量、慣量、速度與加速度來計算每個軸所需的輸出力矩(此即為逆向動力學)，然後經由控制器修正計算出所需的力矩，以達到控制的效果，由第二章所推導出來的動態方程式，可寫成一般機器手臂的動態方程式如下[29、30]：

$$\tau = A(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) + G(q) \quad (3.44)$$

其中

$q = [l_1 \ l_2 \ l_3]^T$  平台三根軸桿件的向量

$A(q)$  為  $3 \times 3$  正定對稱慣性矩陣

$B(q, \dot{q})$  為  $3 \times 1$  科氏力和離心力向量

$G(q)$  為重力向量

$\tau$  為  $3 \times 1$  力矩向量

其控制律可表示成如下[29、30]

$$\tau = A(q) \left( \ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) \right) + B(q, \dot{q}) + G(q) \quad (3.45)$$

其控制示意圖如下：

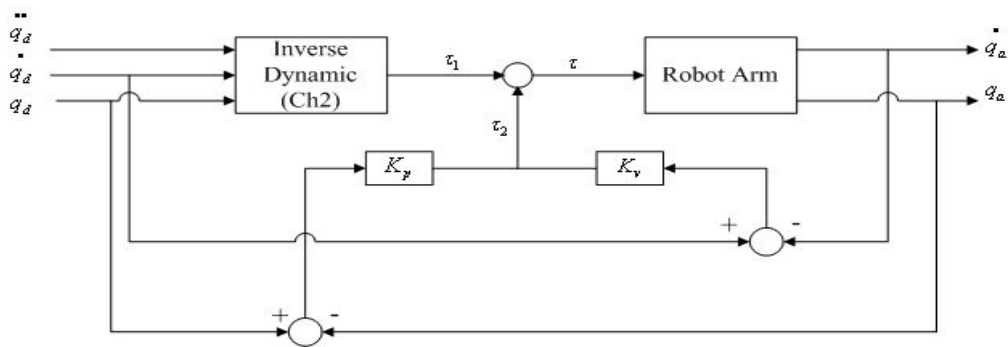


圖 3.21 力量控制示意圖[29]

其中  $\tau_1 = A(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) + G(q)$ 、 $\tau_2 = K_p(q_d - q) + K_v(\dot{q}_d - \dot{q})$ ，在此處需注意到上述皆為建立在軸空間之下所做的推導，以下為建立 3RPS 平台工作空間的力量控制示意圖。

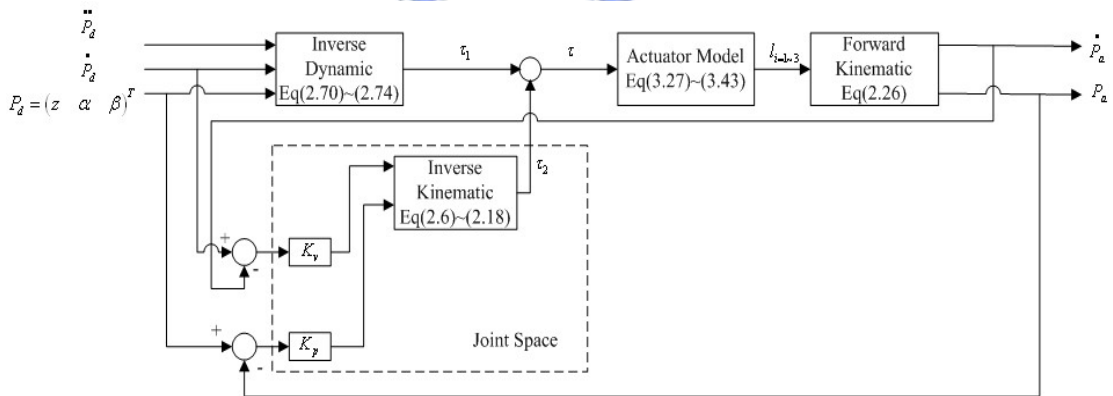


圖 3.22 三軸平台力量控制示意圖

### 3.5.2 交叉耦合控制結合力量控制

傳統力量控制[11、19~23]中，對軌跡的誤差補償技術中，僅僅只考慮到追蹤誤差，對於輪廓誤差部分大多沒有討論，而完整的軌跡追蹤需輪廓誤差與追蹤誤差都能在一定的誤差範圍之內，才能達到高精度的曲線軌跡，所以本論文將結合輪廓誤差的補償方法應用於力量控制之中，除此之外，亦將提出預補償方法與力量控制結合之架構，之後亦用模擬來討論系統架構。

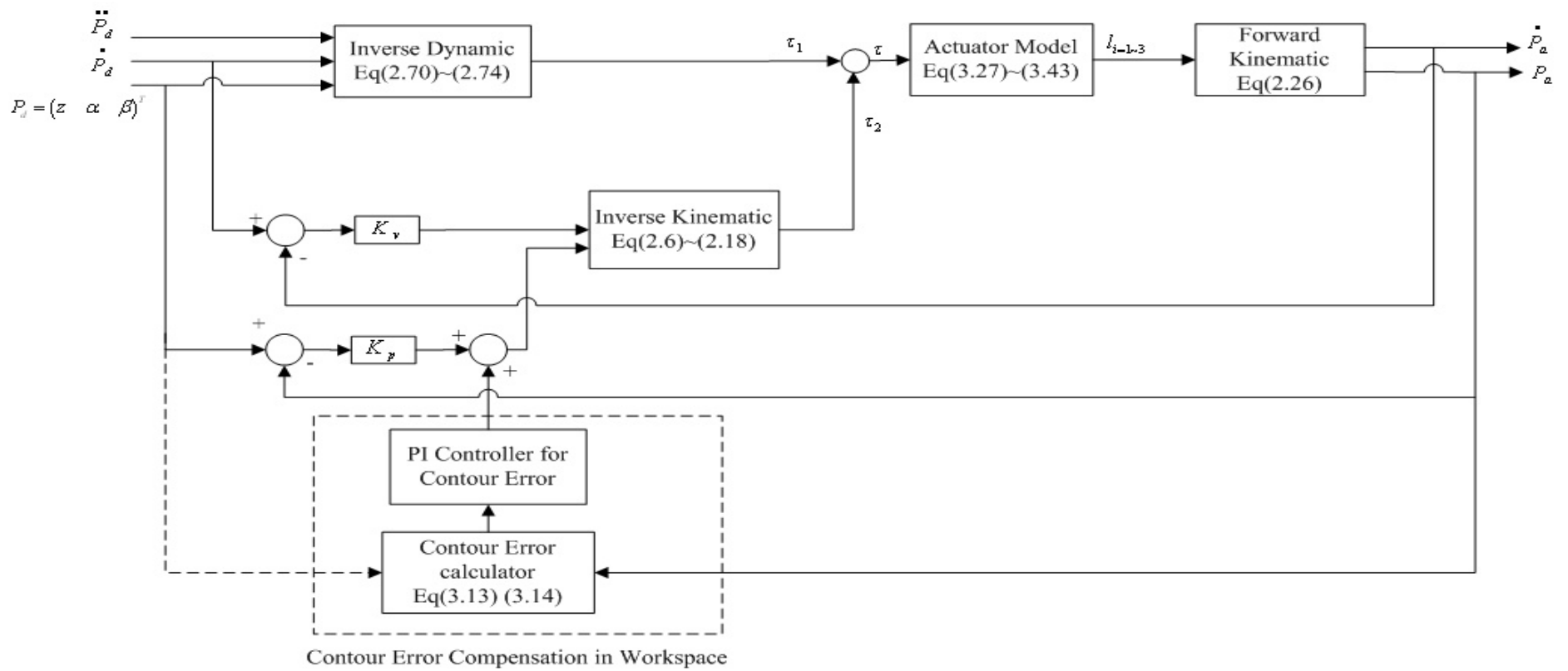


圖 3.23 三軸平台交叉耦合控制結合力量控制



### 3.5.3 交叉耦合預補償控制結合力量控制

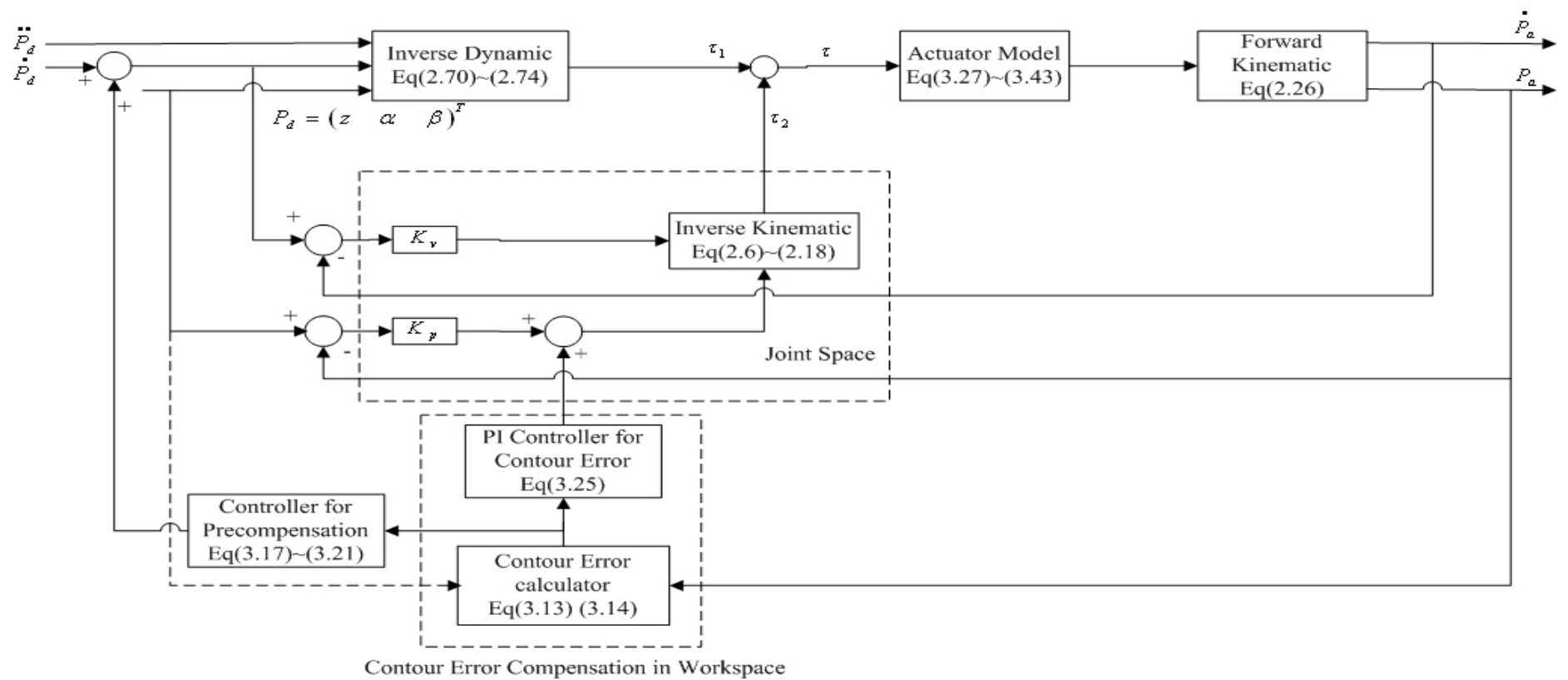


圖 3.24 三軸平台交叉耦合預補償控制結合力量控制

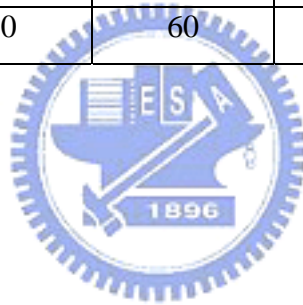
### 3.6 模擬與討論

力量控制與位置控制的整體架構有很大的不同，且力量控制考慮了整體系統的動態，它能處理有關力在系統中的反應。力量控制是以力當成輸入訊號去控制整個機構，在模擬部份，亦是利用第二章軌跡二及軌跡四兩組軌跡來做模擬，控制架構圖(3.23)以力量控制為基礎除了補償空間中的追蹤誤差，並考慮在工作空間的輪廓誤差以做輪廓誤差的補償，而圖(3.24)則是結合了預補償方法補償一速度項來消除輪廓誤差，在架構中所需注意到的一點即為工作空間與軸空間互相的轉換。

#### (1)、軌跡二（第二章）力量控制模擬

表 3.7 軌跡二交叉偶合結合力量控制之控制器參數表

	PD for Force Control		PI for Contour Error		PI for Precompensation	
	P gain	D gain	P gain	I gain	P gain	I gain
CCS	180	80	60	40	0	0
CCPM	180	80	60	40	35	20



Structure 3 : 交叉耦合控制結合力量控制(圖 3.23)

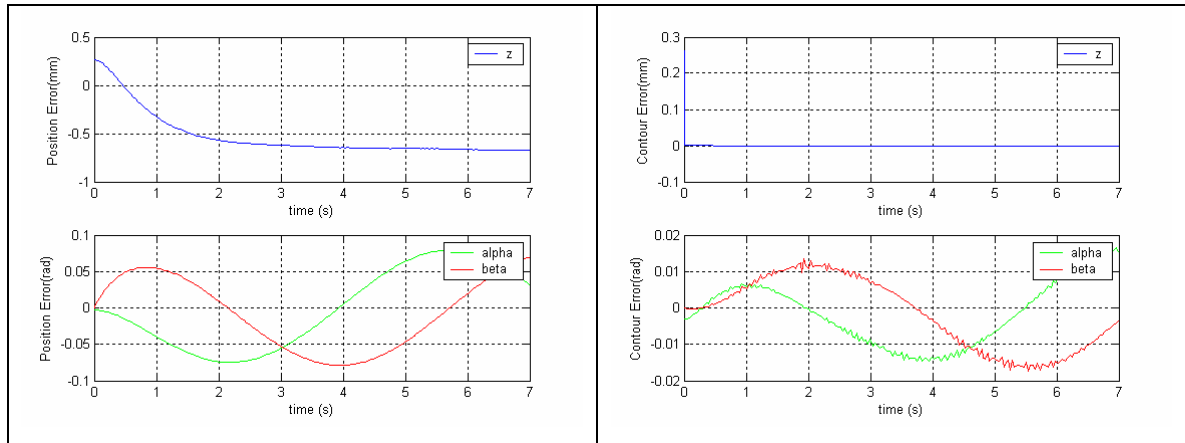


圖 3.25 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCS)

Structure 4 : 交叉耦合預補償控制結合力量控制(控制架構圖 3.24)

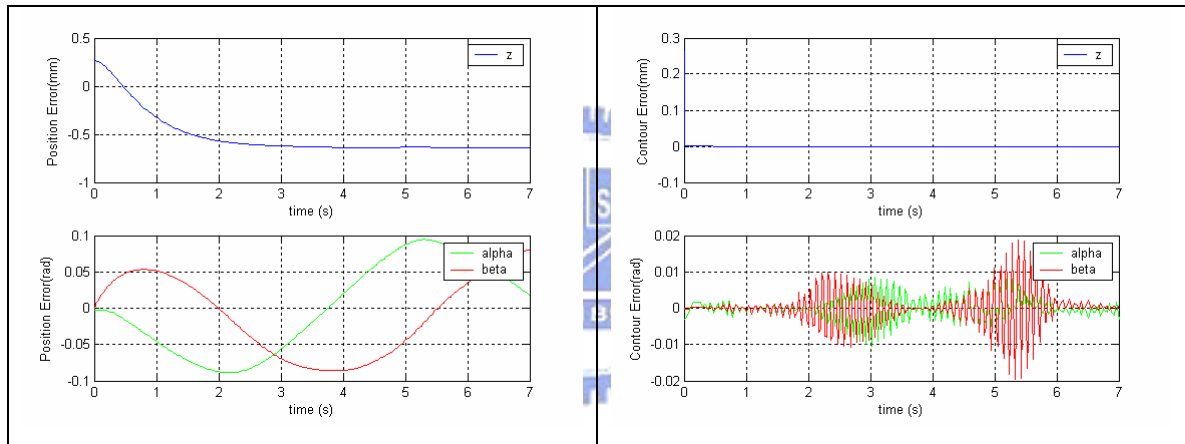


圖 3.26 軌跡二工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCPM)

表 3.8 軌跡二 FC+CCS 與 FC+CCPM 之 IAE 比較表

IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差	
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$
CCS	0.5317	0.0865	0.0102	0.0152
CCPM	0.5137	0.0934	0.0184	0.0054

## (2)、軌跡四（第二章）力量控制模擬

表 3.9 軌跡四交叉偶合結合力量控制之控制器參數表

	PD for Force Control		PI for Contour Error		PI for Precompensation	
	P gain	D gain	P gain	I gain	P gain	I gain
CCS	260	90	40	30	0	0
CCPM	260	90	40	30	4.2	0.08

Structure 3：交叉偶合控制結合力量控制(圖 3.23)

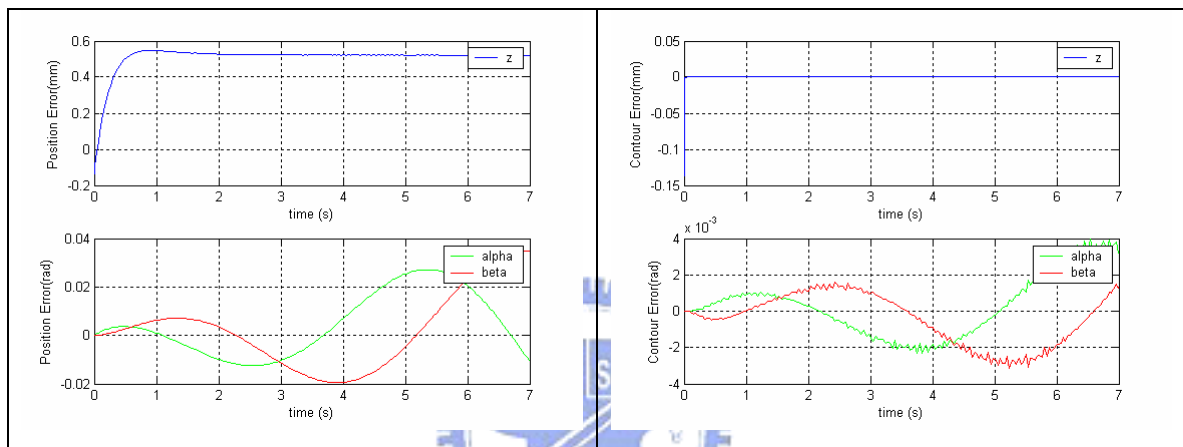


圖 3.27 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCS)

Structure 4：交叉偶合預補償控制結合力量控制(圖 3.24)

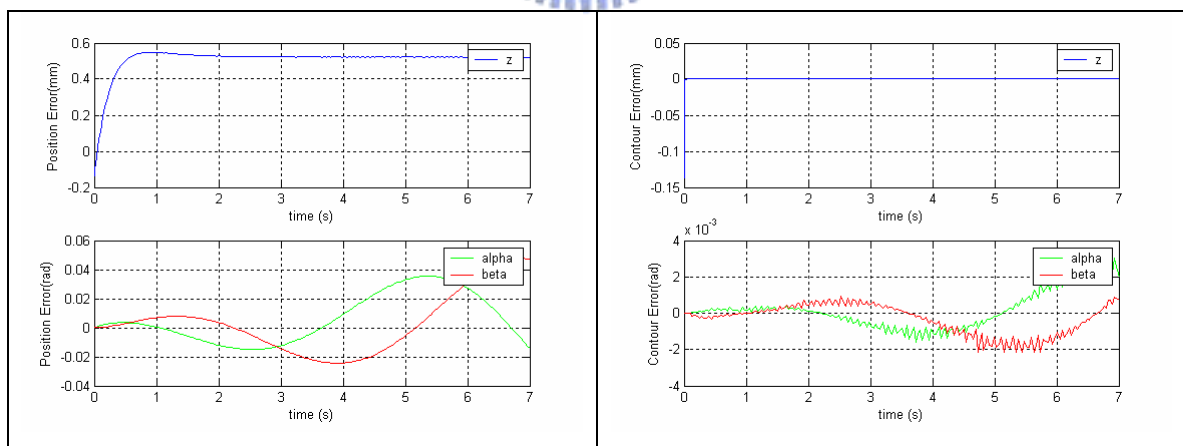


圖 3.28 軌跡四工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(FC+CCPM)

表 3.10 軌跡四 FC+CCS 與 FC+CCPM IAE 比較表

IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差	
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$
CCS	0.4843	0.0217	6.6913e-004	0.0024
CCPM	0.4825	0.0277	6.6263e-004	0.0014

在力量控制的模擬中，分別由表 3.8 及表 3.10 明顯的看到加入了預補償方法可以明顯的降低軌跡的輪廓誤差，此意味著在力量控制下，加入預補償方法能提升軌跡追蹤能力的精度。

### 3.7 混合位置/力量控制

混合位置/力量控制其輸入訊號即混合了位置與力量資訊，其控制架構如下

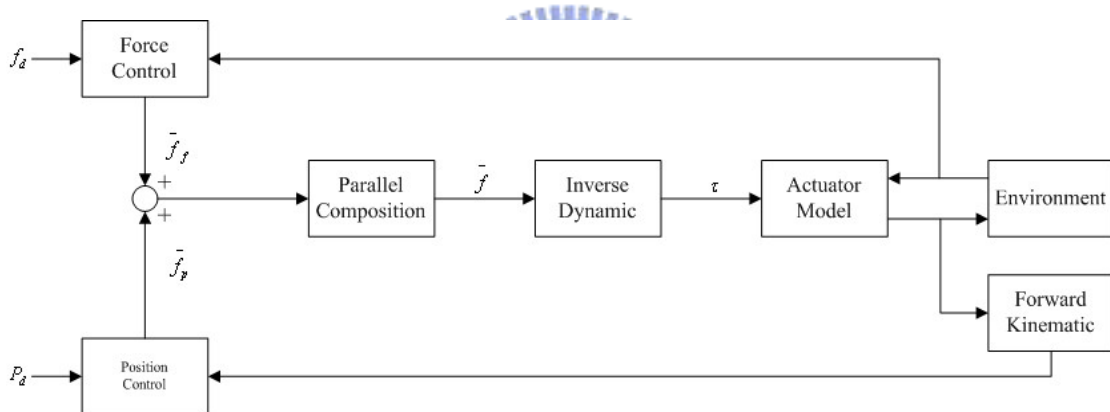


圖 3.29 混合位置/力量控制架構圖[24]

在(3.44、3.45)式子中，其動態方程式為建立在軸空間，由於軸空間的數學式子較複雜、不易求得，所以將其轉至工作空間來討論，可得動態方程式如下[24]

$$f_e = C(r)\ddot{r} + D(r, \dot{r}) + E(r) + F \quad (3.46)$$

其中

$r = [z \ \alpha \ \beta]$  為工作空間參數向量

$C(r)$  為  $3 \times 3$  對稱慣性矩陣

$D(r, \dot{r})$  為  $3 \times 1$  科氏力和離心力向量，其值微小，故予以忽略

$E(r)$  為重力向量

$F$  為機器手端(end-effector)與環境接觸的接觸力

$f_e$  為工作空間的輸出力  $f_e = J^T \tau$

比較軸空間與工作空間方程式，可以得下列關係式

$$C(r) = J^{-T}(q)A(q)J^{-1}(q) \quad (3.47)$$

$$D(r, \dot{r}) = J^{-T}(q)B(q, \dot{q}) - C(r)J(q)\dot{q} \quad (3.48)$$

$$E(r) = J^{-T}(q)g(q) \quad (3.49)$$

因式(3.46)存在著非線性項，所以會造成工作空間的耦合現象，為消除此現象，將(3.46)式重新表示成[24]

$$f_e = \hat{C}(r)M_d^{-1}\tilde{f} + \hat{D}(r, \dot{r}) + \hat{E}(r) + \hat{F} \quad (3.50)$$

其中  $\hat{C}(r)$ 、 $\hat{D}(r, \dot{r})$ 、 $\hat{E}(r)$  為  $C(r)$ 、 $D(r, \dot{r})$ 、 $E(r)$ 、 $\hat{F}$  為與環境的接觸力量測值的估測值， $M_d$  為正定對角化慣性矩陣， $\tilde{f}$  為位置與力量的控制命令值。若動態方程式經過完

整的非線性補償及工作空間中的參數分離後，則  $\hat{C}(r) = C(r)$ 、 $\hat{D}(r, \dot{r}) = D(r, \dot{r})$ 、

$\hat{E}(r) = E(r)$ 。

混合位置/力量控制器，是以 PI 控制器設計力量控制器，目的是為了消除力量部分的穩態誤差，以達設計之期望值；並以 PD 控制器設計位置控制，使機器手端(end-effector)能達到所設定之軌跡，混合位置/力量控制器設計如下

$$\tilde{f} = \tilde{f}_p + \tilde{f}_f \quad (3.51)$$

$\tilde{f}_p$ ：位置控制器  $\tilde{f}_f$ ：力量控制器

其中

$$\tilde{f}_p = M_d \ddot{r}_d + k_v \dot{e}_p + k_p e_p \quad (3.52)$$

$$\tilde{f}_f = k_w e_f + k_i \int_0^t e_f d\tau \quad (3.53)$$

其中

$$e_p = r_d - r \quad e_f = f_d - f$$

結合式(3.33~3.36)可得[24]

$$M_d \ddot{e}_p + k_v \dot{e}_p + k_p e_p + k_w e_f + k_i \int_0^t e_f d\tau = 0 \quad (3.54)$$

其中  $k_v$ 、 $k_p$  為控制位置的參數，即為 PD Control， $k_w$ 、 $k_i$  為控制力量的參數，即 PI Control。

為了瞭解當機器手端與環境接觸時的行為，所以需建立環境的模型，以下將建立與環境接觸時的接觸力模型。

### 3.7.1 接觸環境模型探討

接觸力的部份為考慮在無摩擦且為彈性體的表面下進行，假設接觸面座標系統為  $\sum c$ ，其轉換矩陣為  $R_c = [t_{1c} \ t_{2c} \ n_c]$ ，其中  $t_{1c} \times t_{2c} = n_c$ ， $n_c$  為接觸面之單位法向量，且接觸力的模型可以表示成

$$f = K_f (r - r_o) \quad (3.55)$$

$r$  為手端的位置、 $r_o$  為手端與外界環境接觸的靜止點(未變形點)，而剛性矩陣  $K_f$  可以表示成  $K_f = k_{f,n} n_c n_c^T$ ， $k_{f,n}$  為剛性係數，但須注意的是式(3.55) 所敘之接觸力模型是必須有以下兩個假設條件下才能成立的

- (a) 接觸力的探討為接觸物體表面的正向力
- (b) 機器手端與接觸環境無摩擦，故切線方向的向量皆不提供任何接觸力

接觸力的系統模型示意圖如下所示，圖中說明當系統與環境接觸時，造成環境變形之位移量為  $\Delta = r - r_o$ ，則接觸力由虎克定律可得  $f = K_f \times \Delta$ ，則系統可藉由調整馬達之輸出力  $\tau$  來改變接觸點之位移量，以控制系統與環境的接觸力  $f$ 。

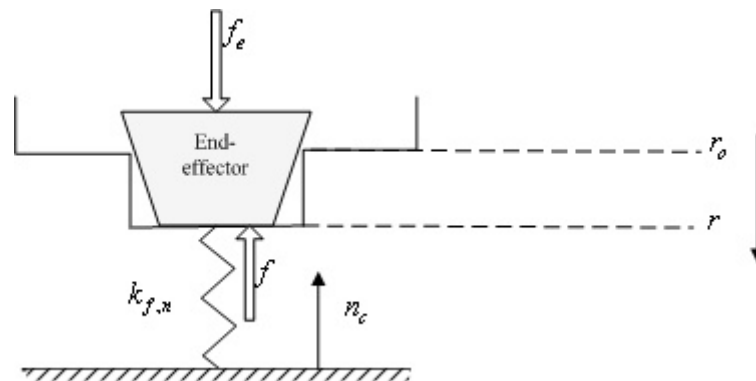


圖 3.30 接觸力的系統模型示意圖

將接觸力系統表示成控制方塊圖，如圖所示

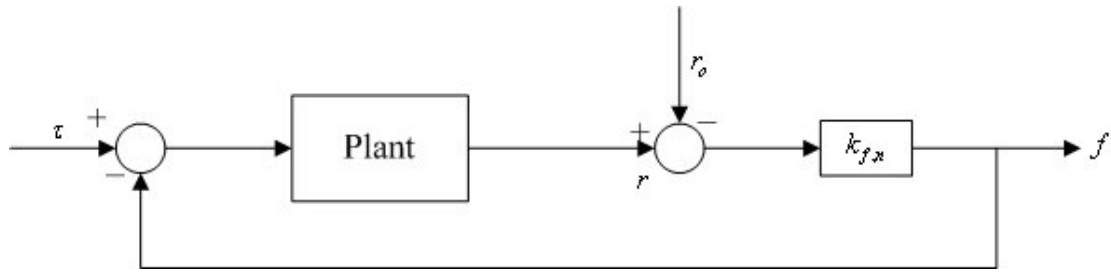


圖 3.31 系統與外界環境接觸力方塊圖

將  $e_p = r_d - r$ 、 $e_f = f_d - f$  代入式(3.55)，可得

$$f_d - e_f = K_f((r_d - e_p) - r_o) \quad (3.56)$$

將(3.56)重新整理後，可得

$$e_f = f_d - K_f(r_d - r_o) + K_f e_p = f_d - K_f(r_d - r_o) + K_f(r_d - r) \quad (3.57)$$

將式(3.57)代入式(3.54)整理可得

$$M_d \ddot{r} + k_v \dot{r} + (k_p + k_w K_f)r + k_i K_f \int_0^t r d\tau = M_d \ddot{r}_d + k_v \dot{r}_d + k_p r_d + k_w (f_d + k_f r_o) + k_i \int_0^t (f_d + k_f r_o) d\tau \quad (3.58)$$

式(3.58)即為混合位置/力量控制法則，由式(3.58)可知當輸入期望位置、力量及手端與環境接觸的靜止點(未變形點)，即可求出經過補償修正過後的實際位置值，在由式(3.55)求出與環境的接觸力，然後作回授控制。



### 3.7.2 交叉耦合結合混合位置/力量控制

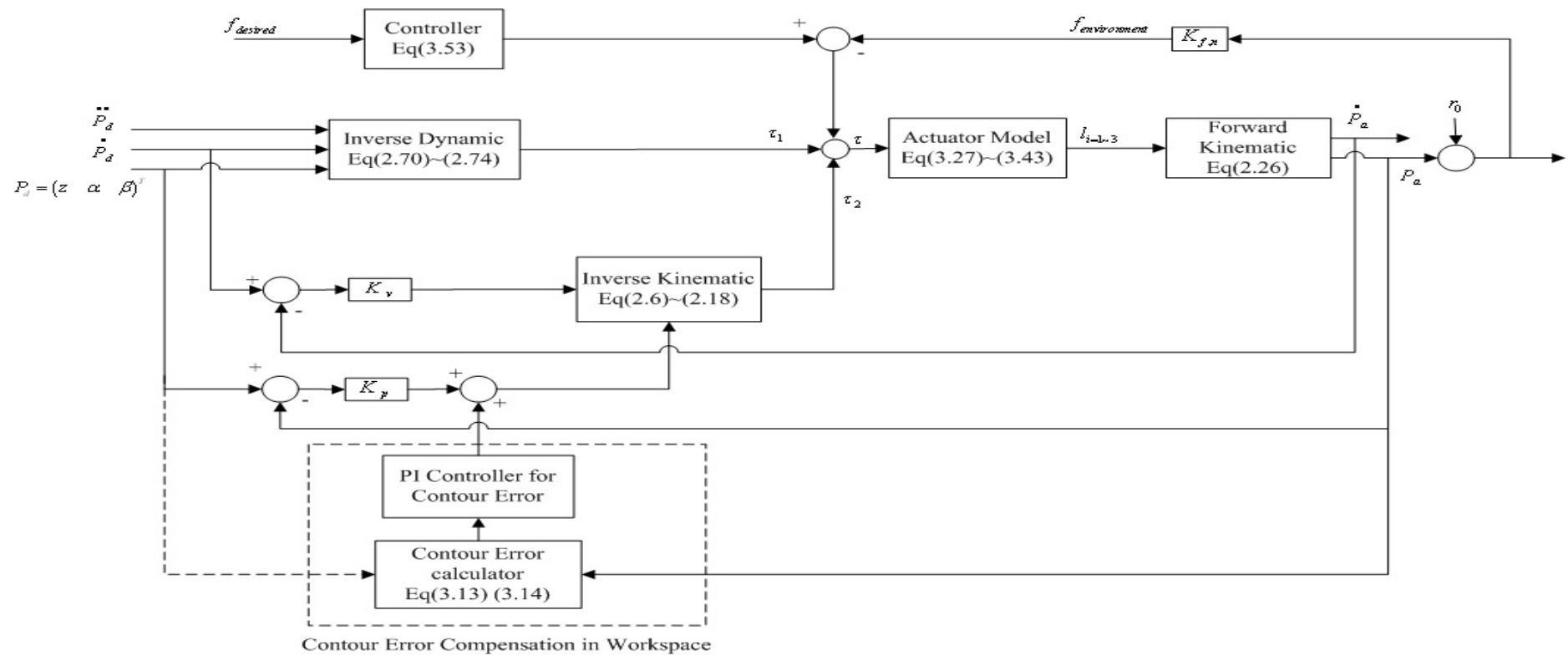


圖 3.32 交叉耦合結合混合位置/力量控制

## 第四章 實驗與討論

### 4.1 實驗機台與校正

首先，3RPS 機構如圖 4.1 所示，PCI-8134 運動控制卡加裝在電腦 PCI 插槽內，其運動方式為利用電腦下命令，經由轉接板將訊號送至 Driver，然後使馬達旋轉，再經由導螺桿使桿件做直線運動，藉由裝在桿件上的光學尺量測現在桿件的實際位置，在回授給電腦做處理，其中光學尺為 RENISHAW 公司所出的線性光學尺，型號為 RGH41X，解析度達  $1\mu\text{m}$ ，滾珠螺桿其精度為 C5 等級，行程為  $5\text{cm}$ ，導程誤差為  $18\mu\text{m}$ ，而控制器設計方面則由電腦利用程式去撰寫所完成。



圖 4.1 3RPS 實際機台示意圖

PCI-8134 控制卡能做位置控制與速度控制，卡的輸出訊號為 pulse train，最大的 pulse 輸出頻率為  $2.4\text{Mpps}(\text{pulse/per sec})$ 。整個機台的運作為利用馬達的旋轉來帶動導螺桿，使三根桿件來做直線的運動，即將旋轉運動轉成直線運動，進而帶動上平板，使平板作出所需的軌跡，此處，控制訊號與桿件直線運動的關係為： $1\text{pulse} = 10^{-6}\text{m}$ ，代表當 command 下 1pulse 的命令時，桿件伸長或縮短  $10^{-6}\text{m}$ ，所以要使桿件伸長  $1\text{mm}$  需下  $1000\text{pulse}$  的 command。由於機構為平行式機構，所以進給速率(pulse/s)的控制是以上平板的形心點為基準(即形心點的速度)，然後再藉由 Inverse-kinematics(式 2.6~2.18)求出所需的桿長進給速率。

實驗的基本步驟為，先規劃出工作空間的軌跡(即形心的軌跡)，然後經由逆向運動學

(第二章)算出所需的桿長，以桿長為訊號換算成所需的 pulse 命令送給馬達，然後由三根軸同時做所需的伸長量，再藉由光學尺回授目前實際的位置，實驗一開始，先對控制系統的工作性能做分析，將以步階函數為測試訊號分析三根桿件的工作性能，下圖為三根桿件的開回路步階響應圖，圖中橫軸為時間，縱軸為桿件位置。



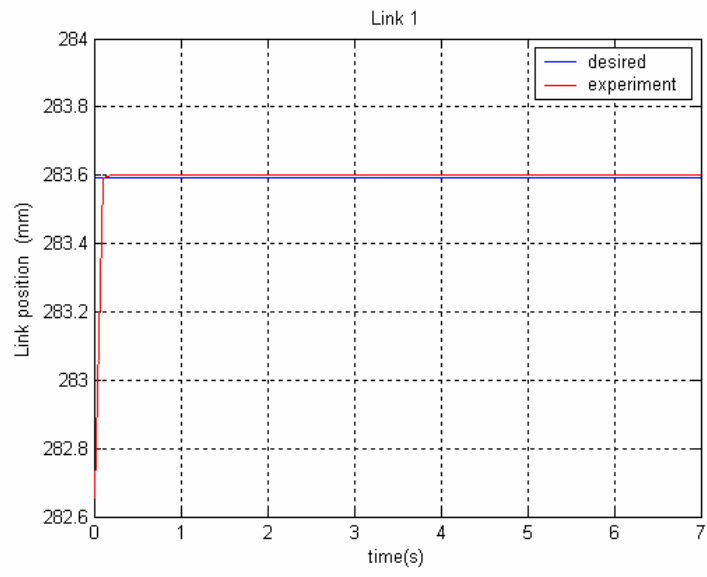


圖 4.2 桿件一步階響應圖

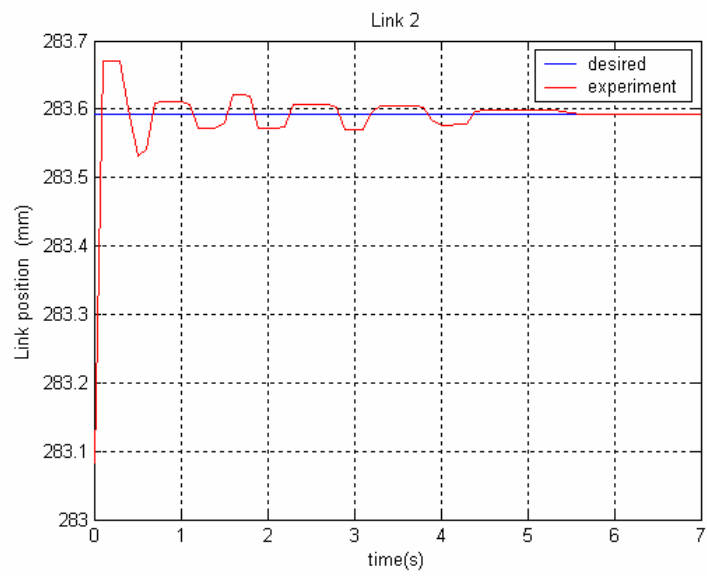


圖 4.3 桿件二步階響應圖

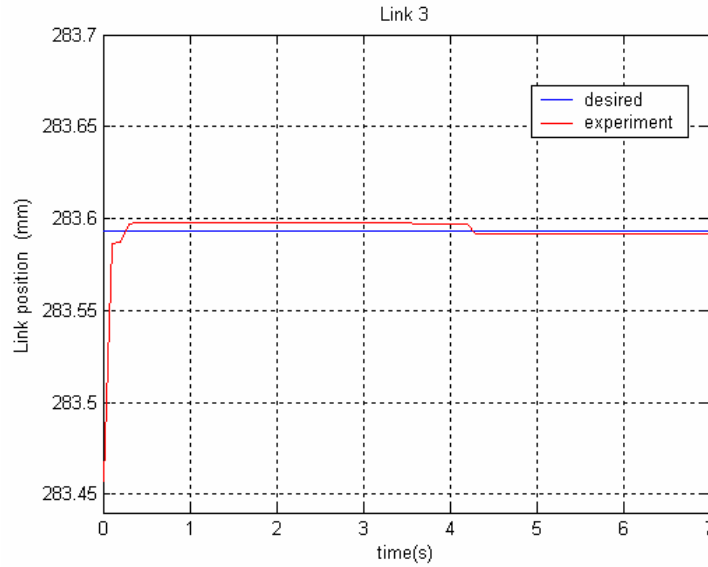


圖 4.4 桿件三步階響應圖

表 4.1 桿件步階響應性能表

	桿件一	桿件二	桿件三
最大超越量 %	0.0035	0.0286	0.0028
延遲時間(s)	0.1	0.08	0.25
上升時間(s)	0.2	0.16	0.5
安定時間(s)	0.1	5.5	4.2

圖 4.2~4.4 分別為三根桿件的步階響應圖，由圖中很明顯的看出伺服馬達的反應非常快，而上表為響應的性能表，由圖中可看出桿件二震盪較大且安定時間最長，這與桿件硬體設計有關，在控制方面，若能有效的提升 0~1 秒之間的輸出響應性能，必能大大的提升軌跡追蹤能力。

## 4.2 開迴路(open loop)系統實驗

以下為利用第二章所模擬出來的軌跡二，以及直線運動軌跡來做實驗，實驗過程中，參數  $p$ 、 $v$ 、 $a$  分別代表上平板形心的位置、速度與加速度，對於給的位置控制訊號必須經由 Inverse-Kinematic(第二章)來求三根桿件須給多少訊號(即 pulse 訊號)，而對於加工的進給速率方面，著重於上平板的形心速率，而並不是考慮三根桿件的速率，所以實驗過程亦是給定形心的加工速率然後再經 Inverse-Kinematic(第二章)來算出三根桿件所需的輸出速率(即 pulse/sec)，如此即可完成所需的軌跡規劃，圖 4.5 為由第二章軌跡二所規劃的形心速度所求出所需三根桿件的進給速率。

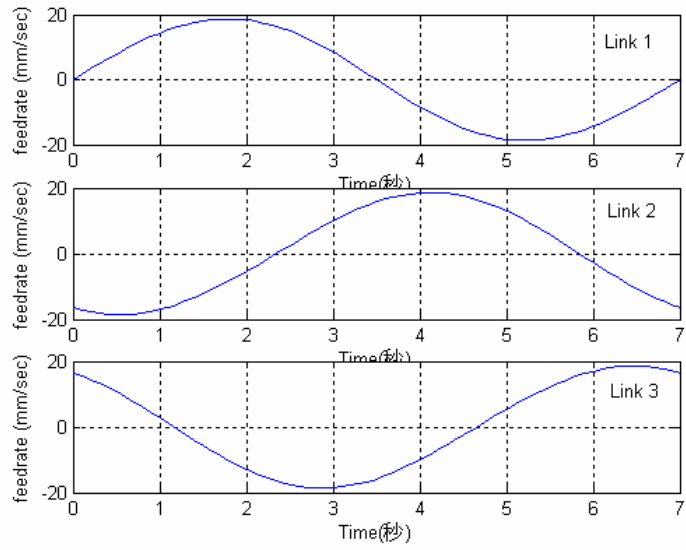


圖 4.5 桿件進給速率圖

下圖為由實驗所得的三根桿件位置圖，藍色為所需的理想位置，而紅色代表實際的位置值。

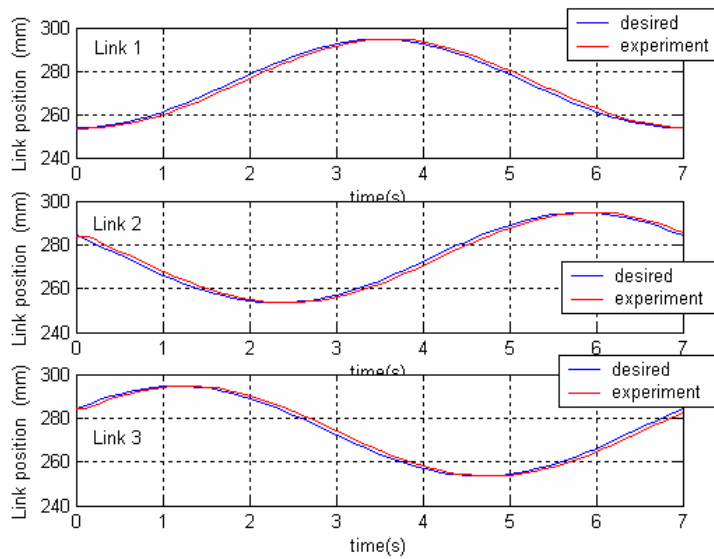


圖 4.6 開迴路系統實驗桿件理想與實驗位置比較圖

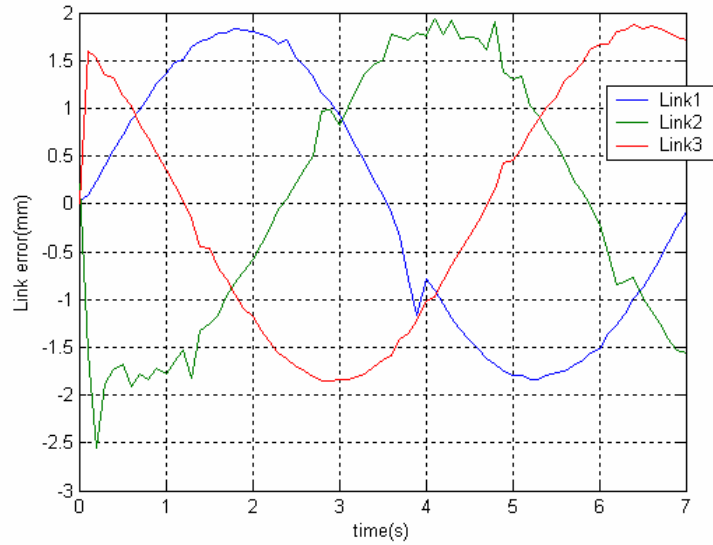


圖 4.7 開迴路系統實驗桿件誤差圖

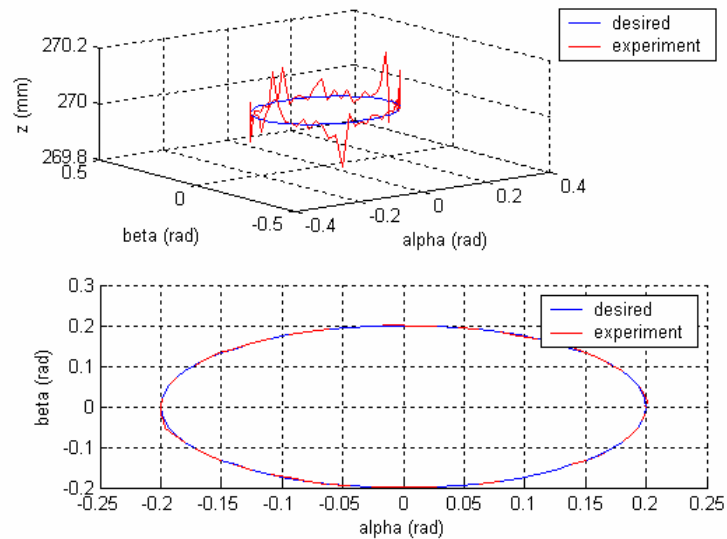


圖 4.8 開迴路系統實驗工作空間理想與實驗比較圖

在軌跡二的實驗過程中，整個工作時間為 7 秒，接下來將進給速率加速，軌跡規劃如

$$\text{下 } p = \begin{pmatrix} 270 \\ 0.2 \times \cos(2/3 \times \pi \times t) \\ 0.2 \times \sin(2/3 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.54 \\ 0.54 \end{pmatrix}, \text{可看出此形心的速度比軌跡二形心最}$$

大的速度大約快五倍，且整個過程速度不變，而過程限定在三秒內完成，下圖為桿件的進給速率圖：

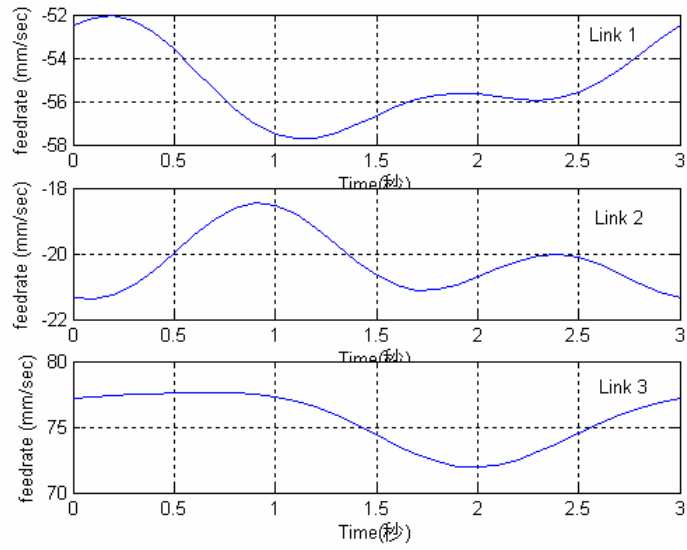


圖 4.9 工作空間進給速率  $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$  之桿件進給速率圖

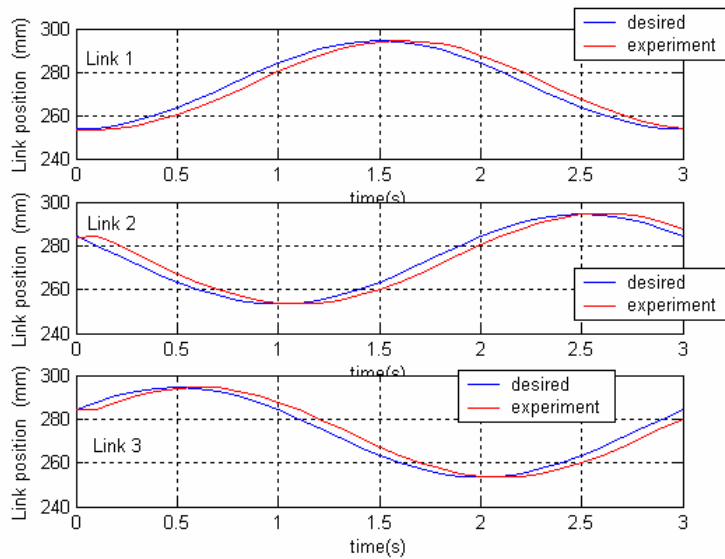


圖 4.10 工作空間進給速率  $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$  之桿件理想與實驗位置比較圖



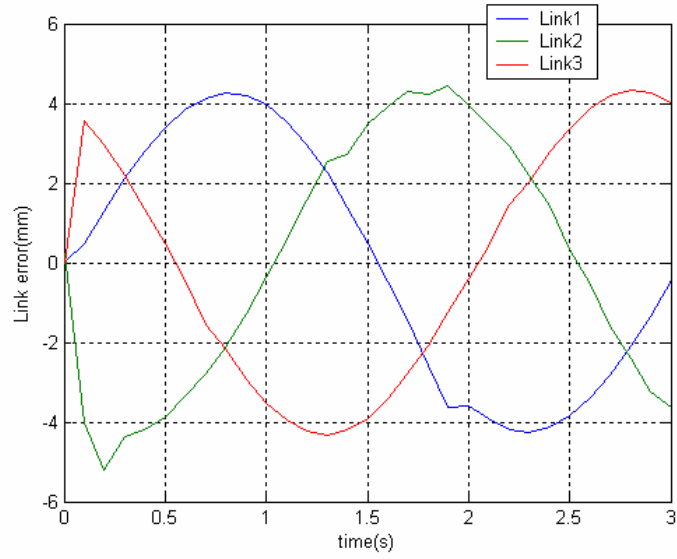


圖 4.11 工作空間進給速率  $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$  之桿件誤差圖

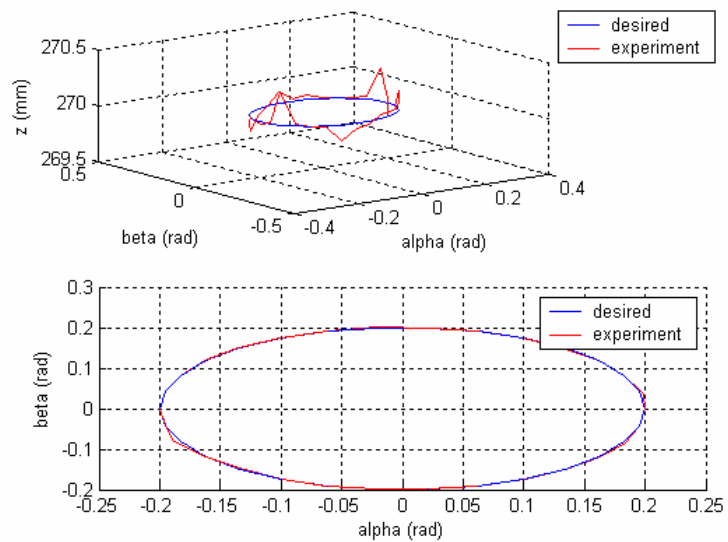


圖 4.12 進給速率  $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$  之工作空間理想與實驗位置比較圖

表 4.2 工作空間進給速度  $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$  實驗桿件 IAE 比較表

IAE 值	桿件一	桿件二	桿件三
第二章 軌跡二	1.1717	1.1901	1.1733
工作空間進給速率 $v = (0 \ 0.54 \ 0.54)^T$	2.6845	2.7548	2.6904

表 4.3 工作空間進給速度  $v = (0 \quad 0.54 \quad 0.54)^T$  實驗工作空間 IAE 比較

IAE 值	工作空間位置誤差	
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$
第二章 軌跡二	0.029485	0.022876
進給速率 $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0.54$	0.061032	0.052411

由這兩次的實驗可以很明顯的看出當軌跡在高速運動時，會有比較不容易控制的特性，由圖 4.7 與 4.11 比較，誤差將近放大了兩倍，更可看出在高速時其誤差量會變大，而由桿件的 IAE 值更證實出速度加快其桿件誤差會增加，接下來另一組實驗為直線運動軌跡，其軌跡規劃如下：

$$p = \begin{pmatrix} 255 + 0.5 \times t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.12 \\ 0.12 \end{pmatrix}, \quad \text{軌跡時間為 } t = 0 \sim 7 \text{ 秒，由工作空間的進給速率}$$

轉換成各軸的進給速率示意圖如下：

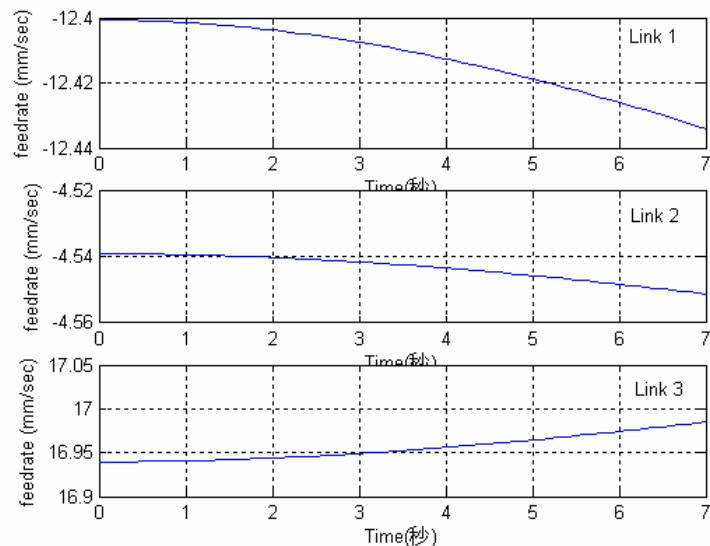


圖 4.13 開回路系統直線運動軌跡實驗

其實驗結果如下，由圖 4.15 可明顯的看出當作直線上升運動時，各桿件都送出相同的控制訊號，可是桿件二的誤差比起其它桿件有較大的現象，這是機械硬體性質所造成的誤差。

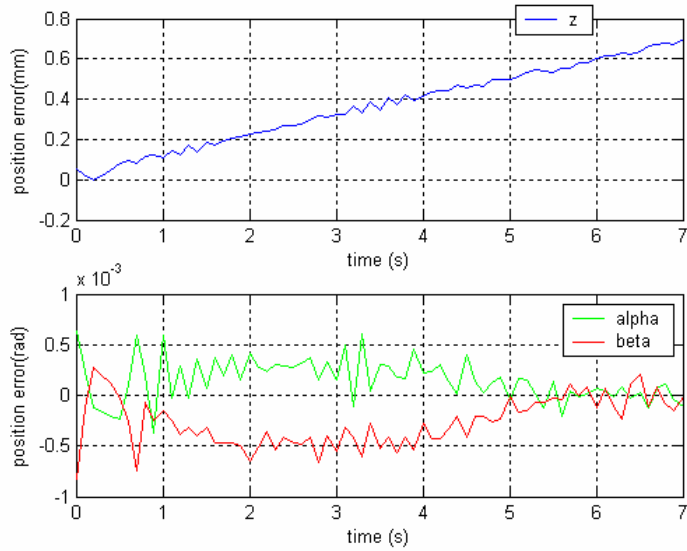


圖 4.14 開回路系統直線運動軌跡實驗工作空間誤差圖

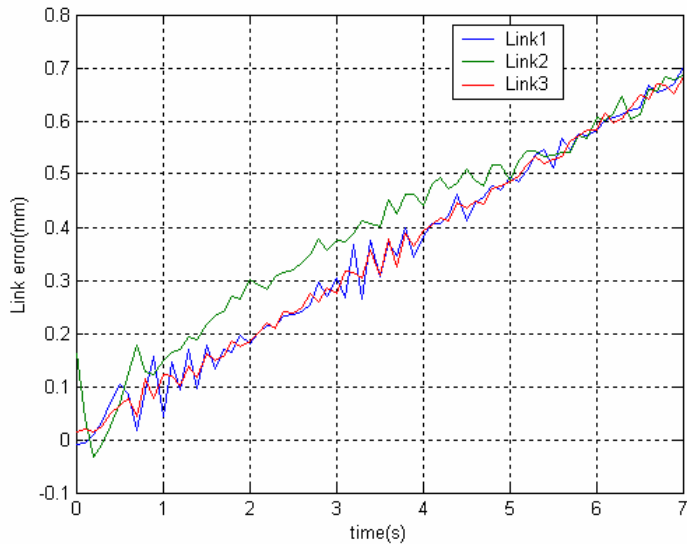


圖 4.15 開回路系統直線運動軌跡實驗各桿件誤差圖

以上實驗為開回路系統控制，接下來為加入 PID 控制閉迴路實驗，而其實驗目的為降低桿件的誤差，以及工作空間的誤差。

### 4.3 未耦合(uncouple system)系統實驗過程

圖 4.16 為未耦合系統控制架構圖，在連續類比領域，其 PID 控制的輸出為

$$u = k_p e + k_i \int e dt + k_d \frac{de}{dt} \quad (4.1)$$

其中  $e$  為誤差量， $k_p$ 、 $k_i$ 、 $k_d$  為增益值，而在實際實驗上，電腦為一數位訊號，所以必須將式(4.1)修改成離散的數位訊號，可得如下式子[28]

$$U_n = U_{n-1} + k_p(e_n - e_{n-1}) + k_i e_n T + \frac{k_d}{T}(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \quad (4.2)$$

T 為 sampling time，由(4.2)式可知目前輸出可由上一次的輸出，目前誤差、上一次的誤差及增益值計算得到，以下將利用之前開迴路系統之軌跡二與直線運動軌跡來做與未耦合控制實驗的比較，表 4.4 與表 4.5 為各 PID 控制器的增益值。

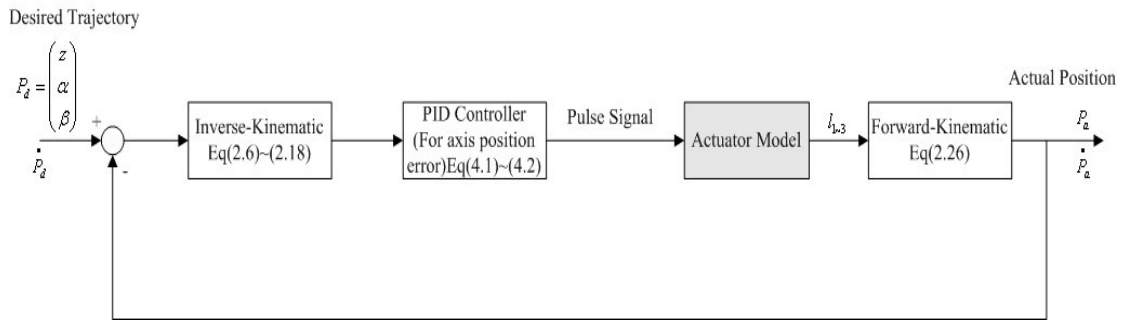


圖 4.16 Uncoupled System 控制圖

表 4.4 軌跡二未耦合控制架構實驗 PID 參數表

	PID for Position Error		
	P gain	I gain	D gain
PID Control For link error	250	370	45

表 4.5 直線運動軌跡未耦合控制架構實驗 PID 參數表

	PID for Position Error		
	P gain	I gain	D gain
PID Control For link error	300	400	5

以下為經過閉迴路控制實驗所得各桿件追蹤反應圖，很明顯的由圖 4.7 與 4.18 比較，經過控制後桿件的誤差可大幅的縮減至一半以上，而由表 4.6 可看出經過 PID 控制過後的實驗其誤差很明顯的降低，而在直線運動軌跡實驗部份比較圖 4.14，4.15 與圖 4.19，4.20 亦可明顯的看到圖 4.20 的誤差降低至 0.25mm 以下，再由表 4.7 的 IAE 值可看出誤差經由 PID 控制器補償後亦降至一半以上。

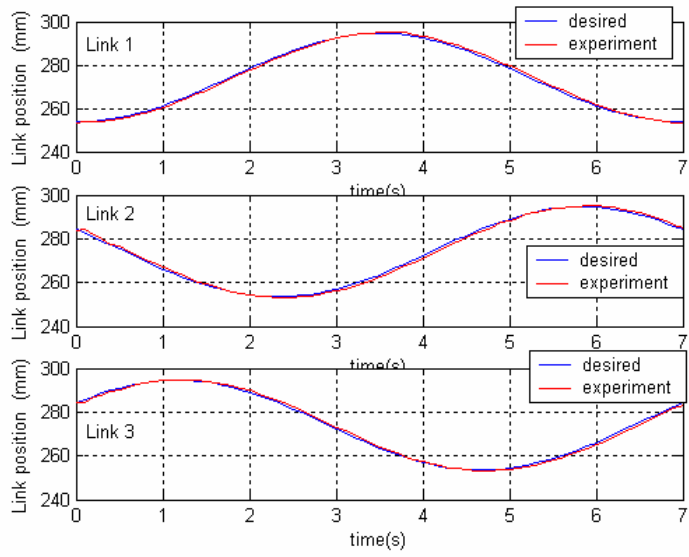


圖 4.17 PID 控制理想與實驗比較圖(第二章軌跡二)

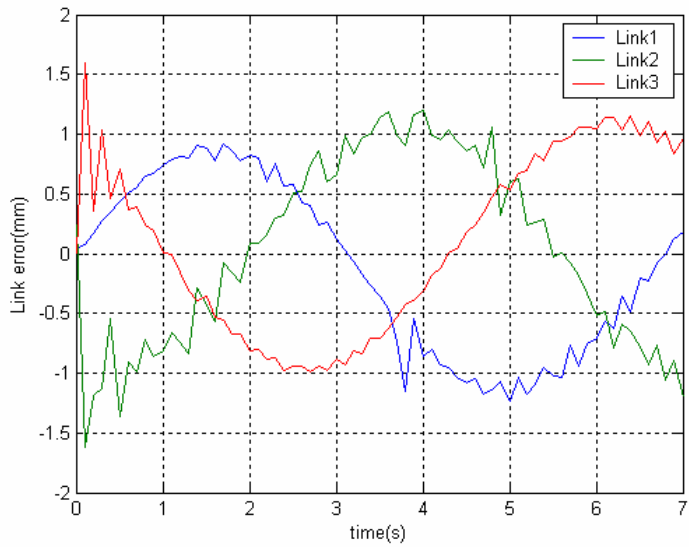


圖 4.18 PID 控制桿件誤差圖(第二章軌跡二)

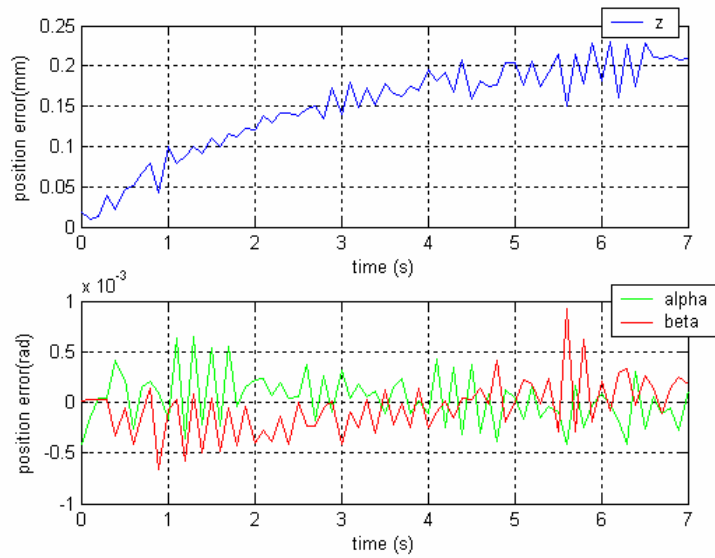


圖 4.19 PID 控制工作空間誤差圖(直線運動軌跡)

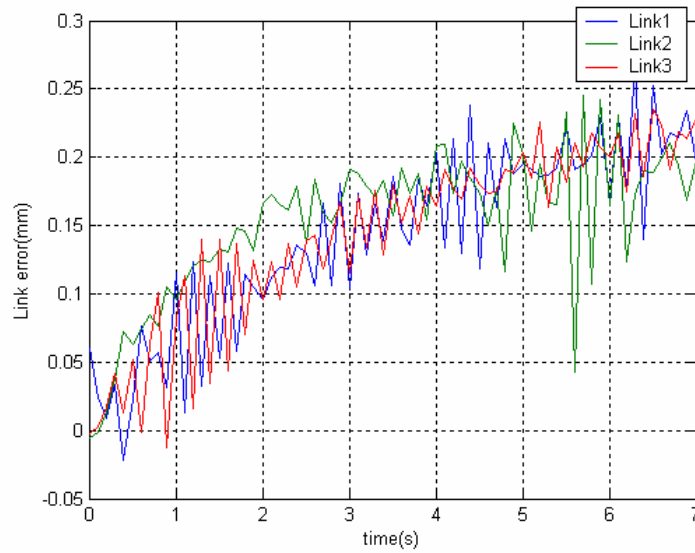


圖 4.20 PID 控制桿件誤差圖(直線運動軌跡)

表 4.6 未耦合 PID 控制\_軌跡二實驗 IAE 值

IAE 值	桿件一	桿件二	桿件三
開迴路實驗	1.1717	1.1901	1.1733
PID 未耦合控制實驗	0.6311	0.686	0.6704

表 4.7 未偶合 PID 控制\_直線運動軌跡實驗 IAE 值

IAE 值	桿件一	桿件二	桿件三
開迴路實驗	0.343	0.4	0.34
PID 未偶合控制實驗	0.142	0.152	0.142

#### 4.4 交叉偶合與預補償系統架構實驗

此節所介紹的為完整的控制過程實驗，此處所做的實驗為利用第三章的控制架構圖所做的實驗(圖 3.3、圖 3.4)，以下為實驗流程簡介：

Step1：先規劃出工作空間(上平板形心)所欲進行的軌跡

Step2：將所規劃的工作空間軌跡經由 Inverse kinematic 轉換，算出所需的桿長長度，再經由類比轉成數位訊號(pulse)，將訊號傳送給驅動器使桿件做伸長縮短動作

Step3：利用所架設在三根桿件的光學尺來讀取目前桿長位置(光學尺所得到的訊號為 pulse，須再將其做類比的轉換)

Step4：此時所量測到的資訊為桿件位置資訊，必須再經由 Forward kinematic 來求得目前上平板的姿態

Step5：此時有了線上(online)工作空間姿態的資料，即可做負回授控制(Feedback control)，經過負回授後再由 Inverse kinematic 轉換可得桿件的誤差量，然後經由控制器(PID controller)算出下一點的控制訊號，再將訊號送給驅動器

Step6：在完成步驟 2~4 的同時，可利用第三章公式(3.6)、(3.12)、(3.13)求得目前的輪廓誤差量，接下來步驟 7 為輪廓誤差的補償

Step7：對於輪廓誤差的補償為利用向量合成的觀念，由式 (3.14)，此時須再由 Inverse kinematic 轉換算出相對應桿件輪廓誤差的桿長，再由負回授可得桿件的誤差，將此誤差量經由控制器(PID controller)算出下一點的控制訊號，將其與 Step5 訊號相加當成下一點的控制訊號做輪廓誤差的補償

Step8：重複步驟 2~7 可完成交叉偶合控制系統實驗

Step9：對於預補償部分，由步驟 1 可求得工作空間的進給速度(或亦可自行規劃出上平板的進給速度，注意此處的進給速度是給定上平板的速度，並不是給定桿件的進給速度)，由步驟 6 中所求得的輪廓誤差可求出所需補償的速度量，由式(3.17~3.21)，然後再經由 Inverse kinematic 轉換算出所需補償的桿件速度量

Step10：將桿件速度積分可得所需的桿件位置，如此可得桿件的進給誤差，由式

(3.22~3.24)，再由 step5 算出控制訊號

Step10：重複步驟 1~10 可完成交叉偶合預補償控制系統實驗

上述 10 個步驟為完整的控制實驗過程，在實驗程式的撰寫方面，是以 Borland C++ 為開發工具，作為與機台溝通的橋樑，以下為實驗所建立的人機介面圖：

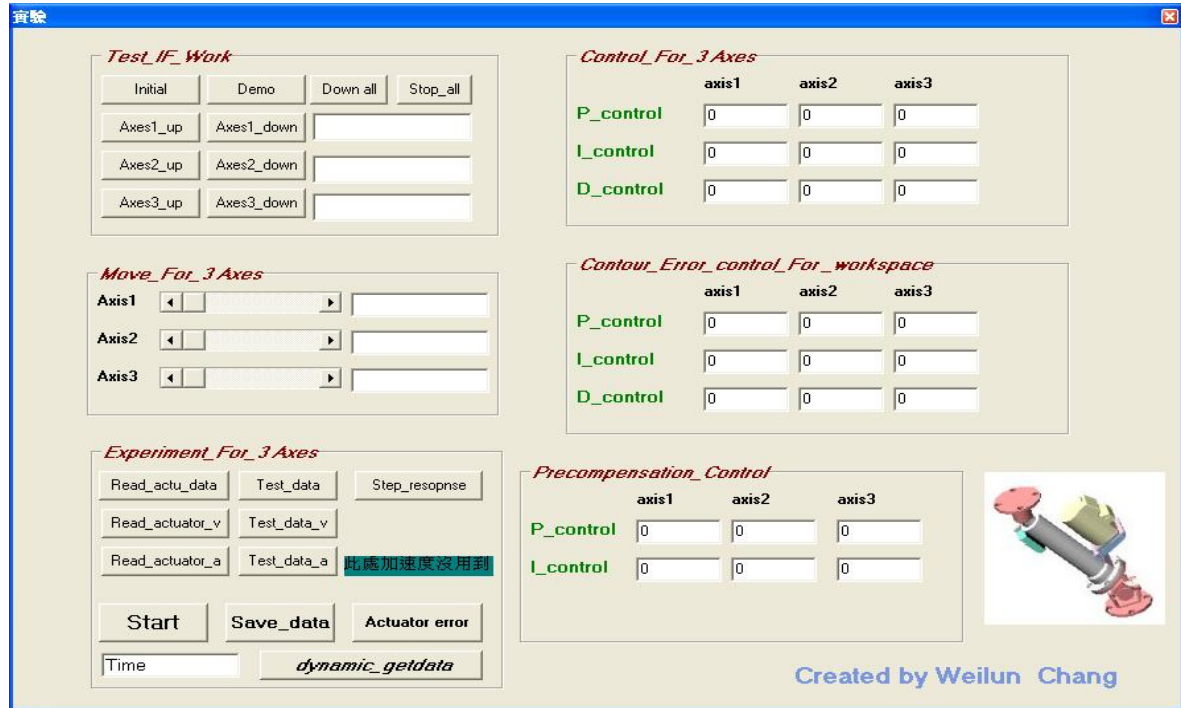


圖 4.21 Borland C++ 實驗人機介面圖

以下所做的實驗主要有第二章軌跡二、第二章軌跡四、具尖角軌跡、漩渦狀軌跡四組，以用來比較模擬與實驗上的差別，並可驗證出模擬的正確性，在軌跡執行時的起始點為由第二章所規劃的軌跡當  $t = 0$  時為初始運動點，而實驗過程中控制器所用的參數值是用第三章 3.4 節模擬所用的參數值，以下為實驗數據與圖形。



(1)、軌跡二（第二章）實驗

Structure 1：交叉耦合控制(CCS，圖 3.3)

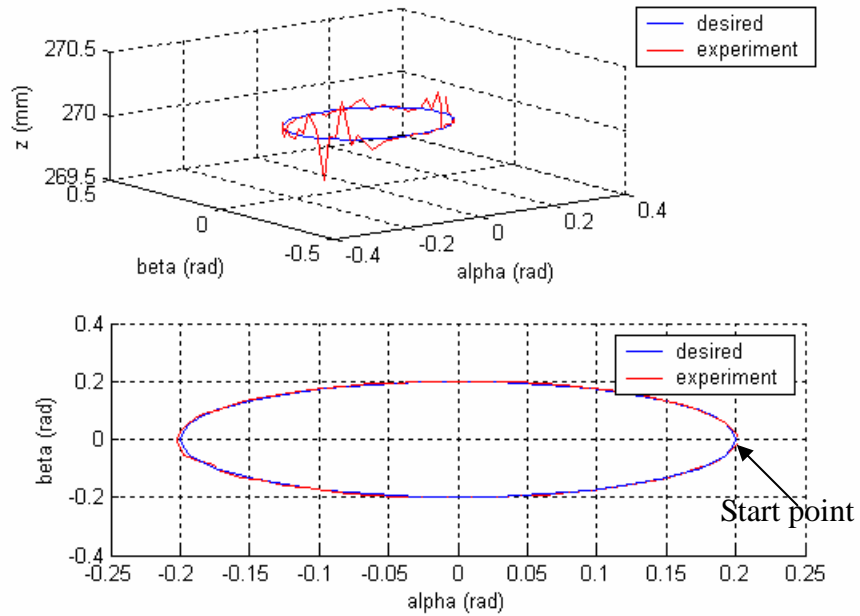


圖 4.22 軌跡二實驗交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖

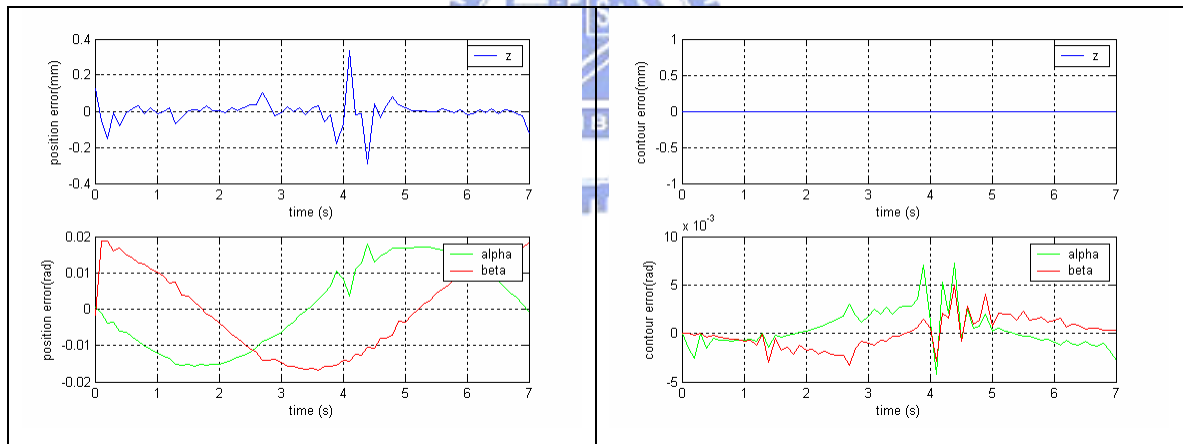


圖 4.23 軌跡二實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

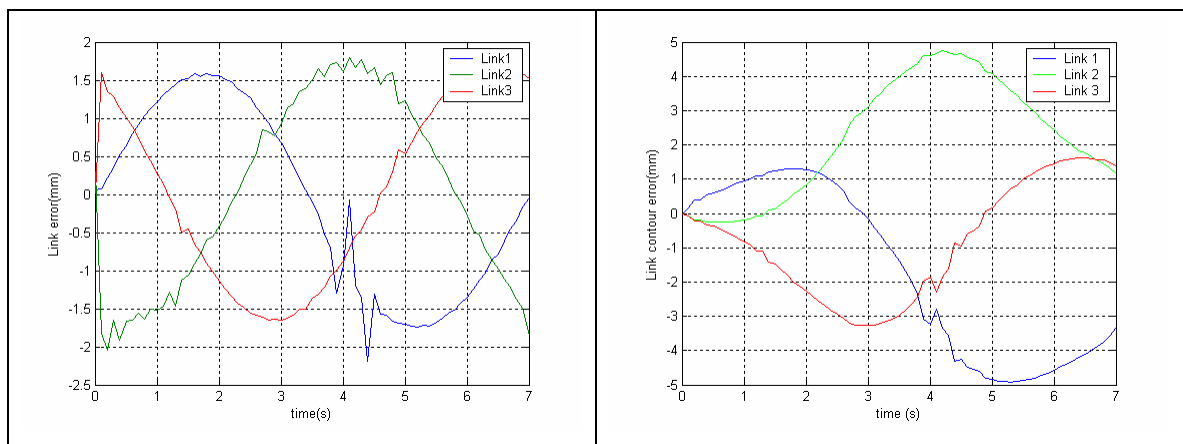


圖 4.24 軌跡二實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

Structure 2 : 交叉耦合預補償控制(CCPM, 圖 3.4)

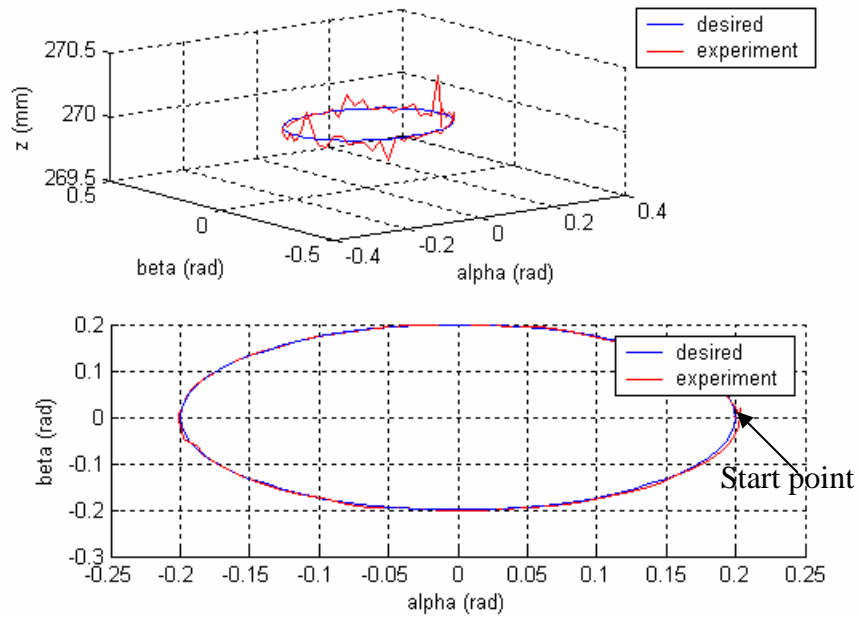


圖 4.25 軌跡二實驗交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖

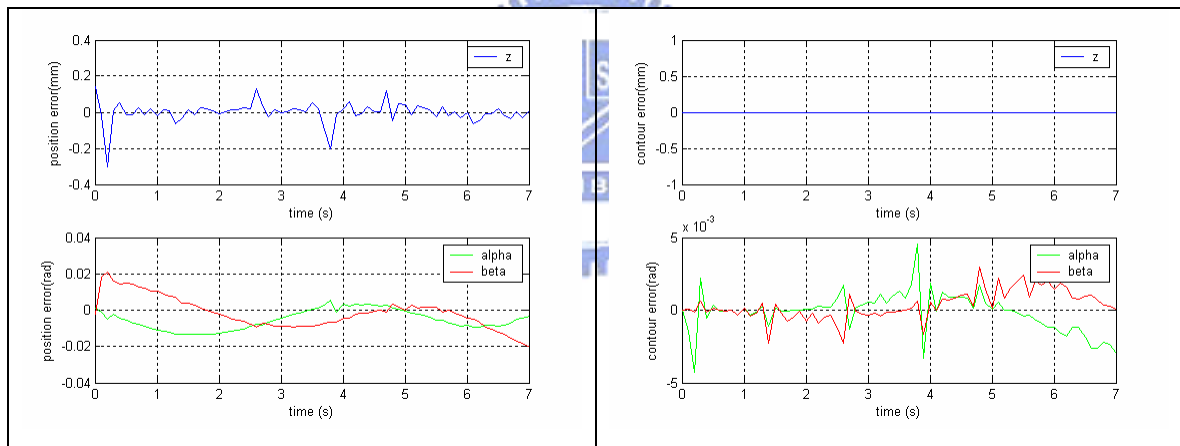


圖 4.26 軌跡二實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

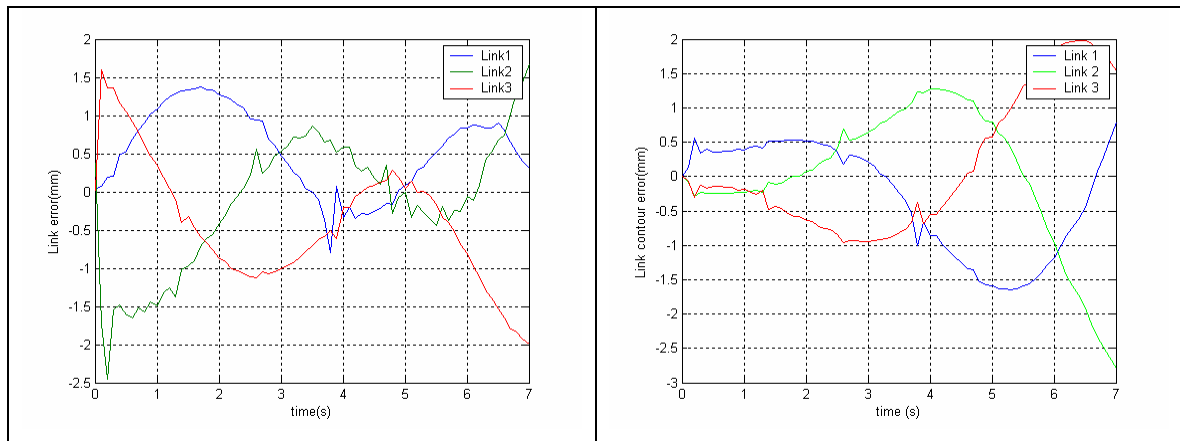


圖 4.27 軌跡二實驗驅動桿進給誤差輪廓誤差示意圖(CCPM)

表 4.8 軌跡二實驗 CCS 與 CCPM IAE 比較表

實驗 IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.037326	0.020889	2.7e-008	0.0026498	3.2247	6.2458
CCPM	0.033585	0.013257	3e-008	0.0017019	2.0485	2.2471

(2)、軌跡四 (第二章) 實驗

Structure 1 : 交叉耦合控制(CCS, 圖 3.3)

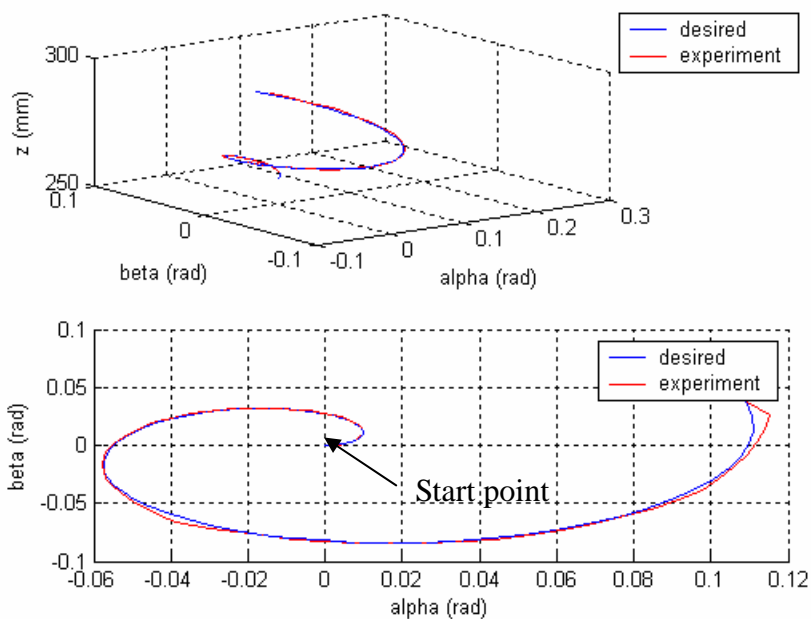


圖 4.28 軌跡四實驗交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖

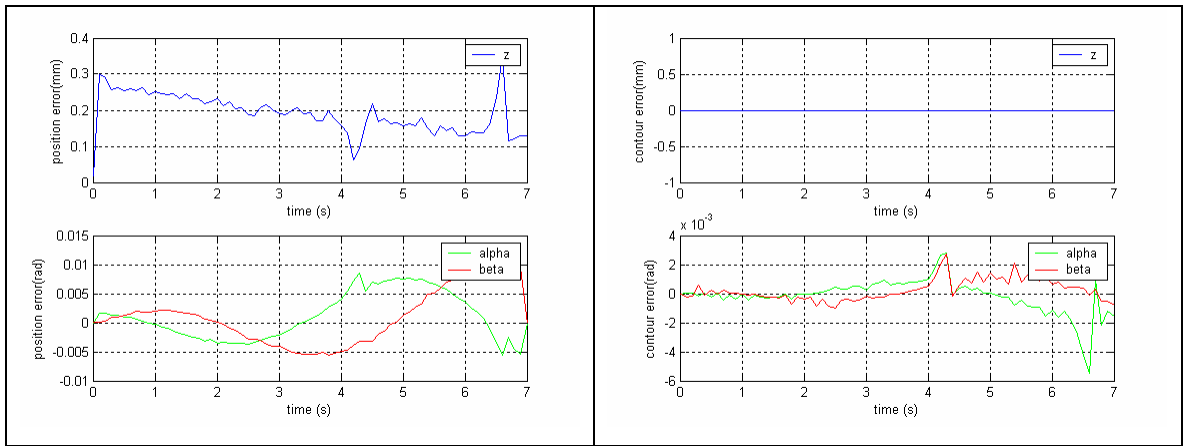


圖 4.29 軌跡四實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

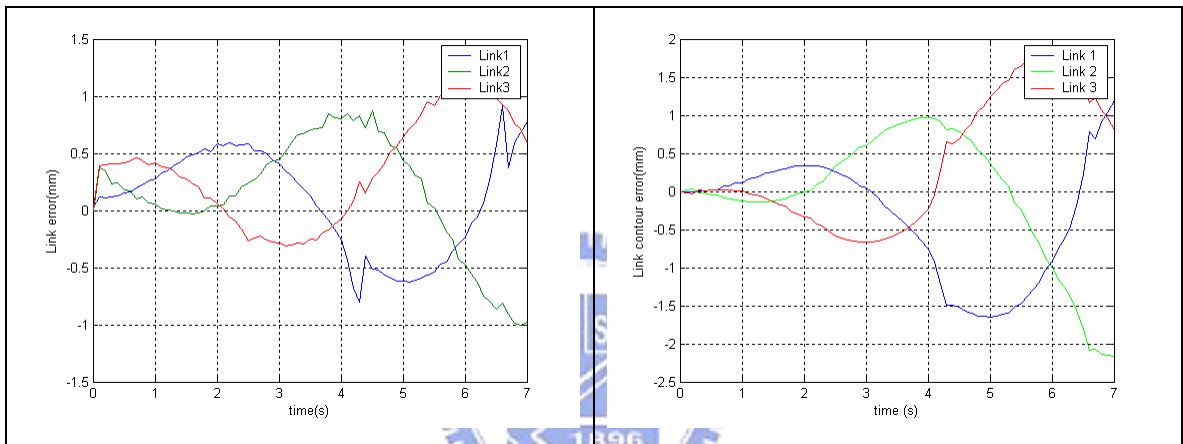


圖 4.30 軌跡四實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

**Structure 2 : 交叉耦合預補償控制(CCPM, 圖 3.4)**

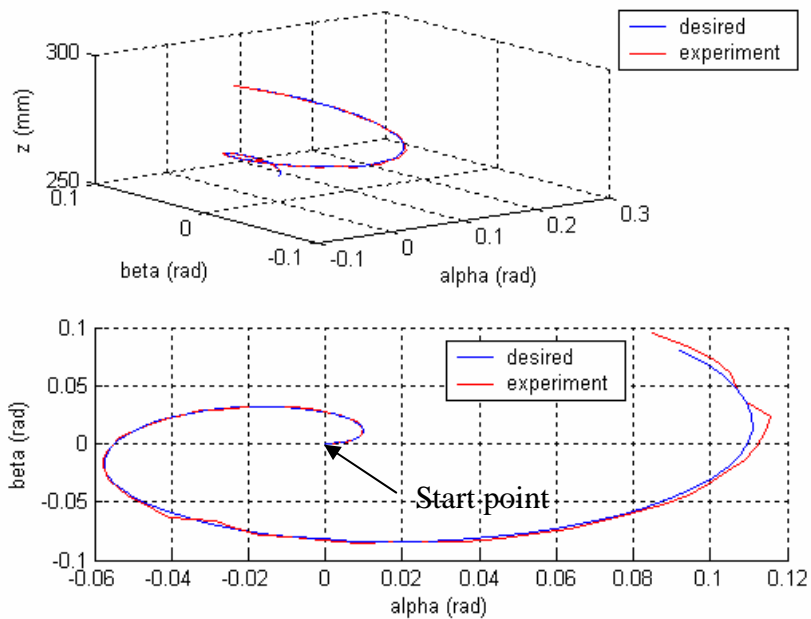


圖 4.31 軌跡四實驗交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖

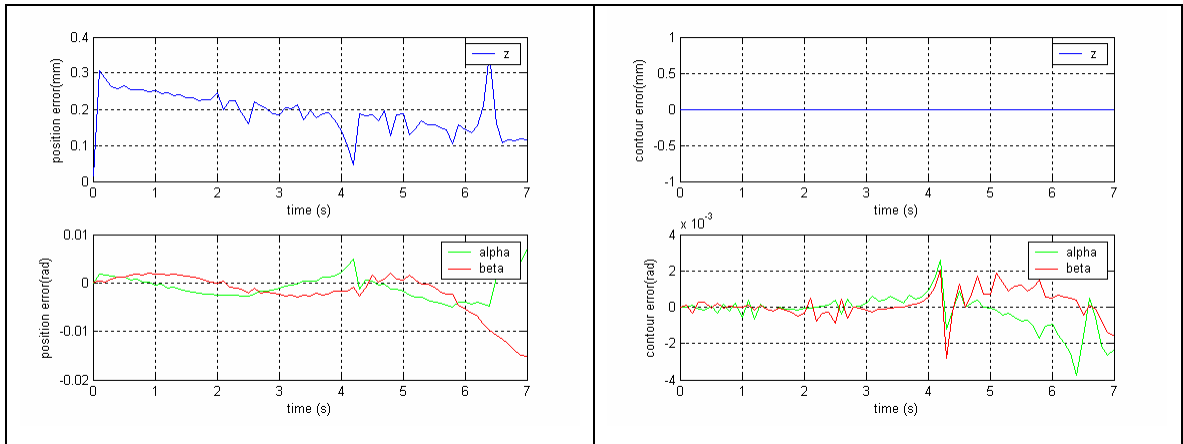


圖 4.32 軌跡四實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

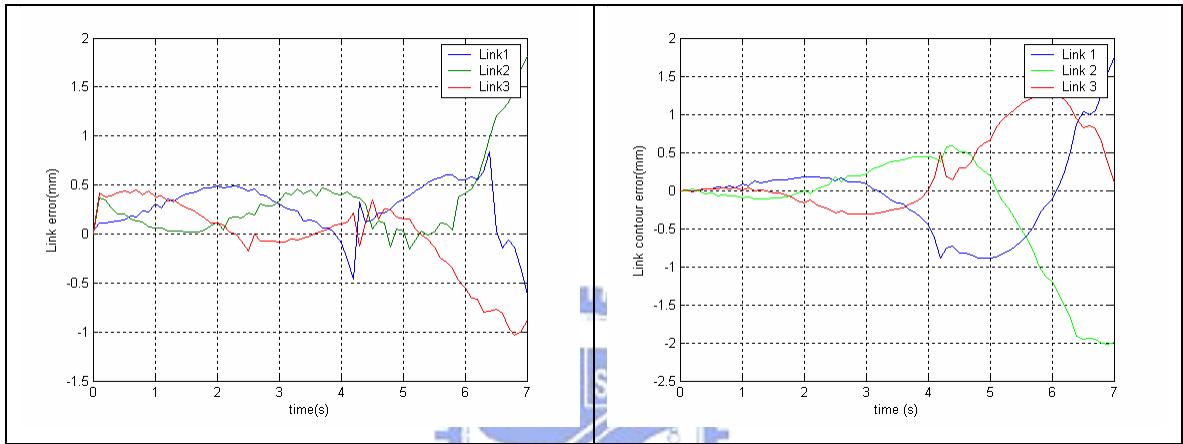


圖 4.33 軌跡四實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

表 4.9 軌跡四實驗 CCS 與 CCPM IAE 比較表

實驗 IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.1905	0.0071266	1.2e-009	0.0012953	1.2721	1.928
CCPM	0.18945	0.0049557	1.1e-09	0.0010713	0.94861	1.285

### (3)、具尖角軌跡實驗

在具尖角軌跡實驗中，規劃之軌跡與第三章 case3 一樣，而上平板速度

$$v = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = [0 \quad 0.1 \quad 0.1]^T, \text{ 換算成桿件的進給速率圖如下，實驗結果如圖 4.35 所示：}$$

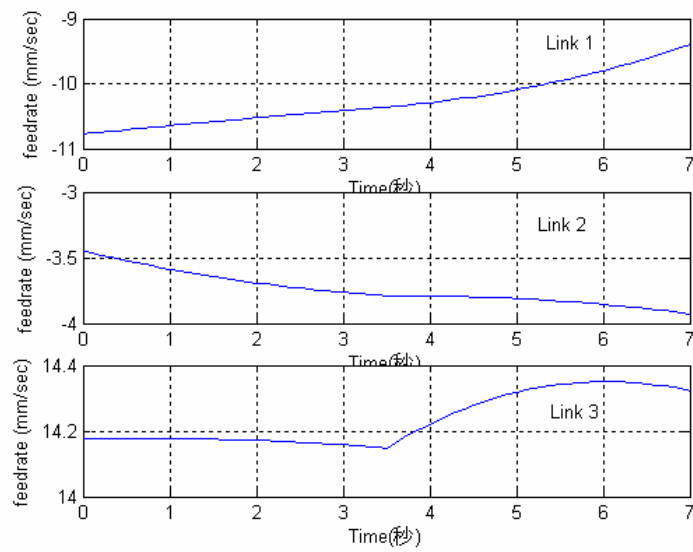
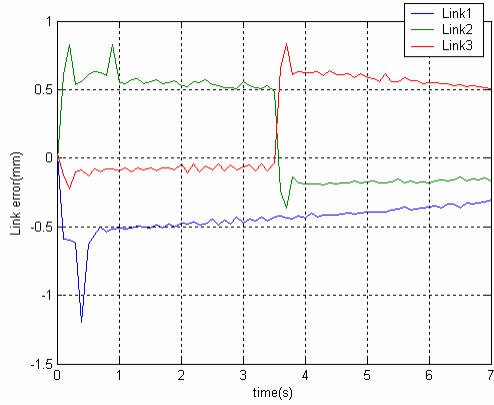


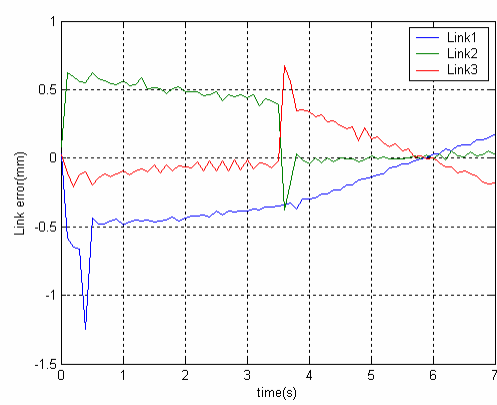
圖 4.34 具尖角軌跡實驗桿件進給速率圖

### CCS 實驗

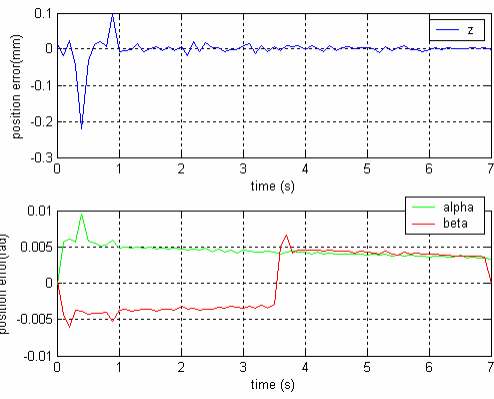


尖角實驗 CCS 桿件誤差圖

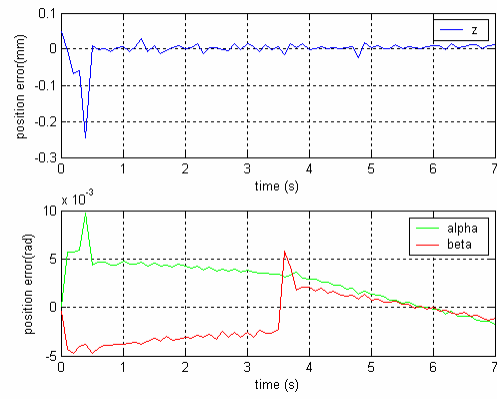
### CCPM 實驗



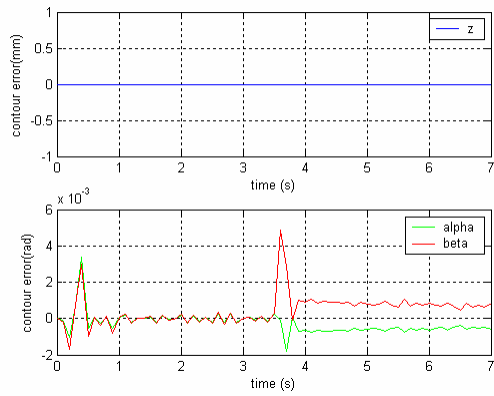
尖角實驗 CCPM 桿件誤差圖



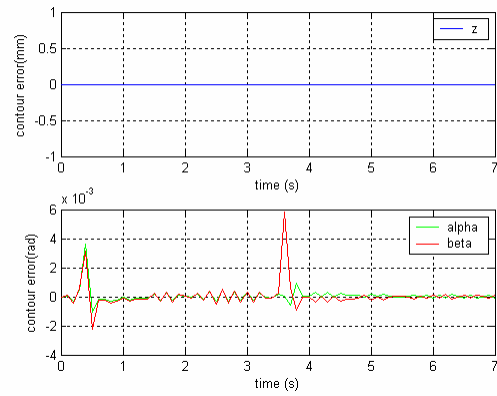
尖角實驗 CCS 工作空間誤差圖



尖角實驗 CCPM 工作空間誤差圖



尖角實驗 CCS 輪廓誤差圖



尖角實驗 CCPM 輪廓誤差圖

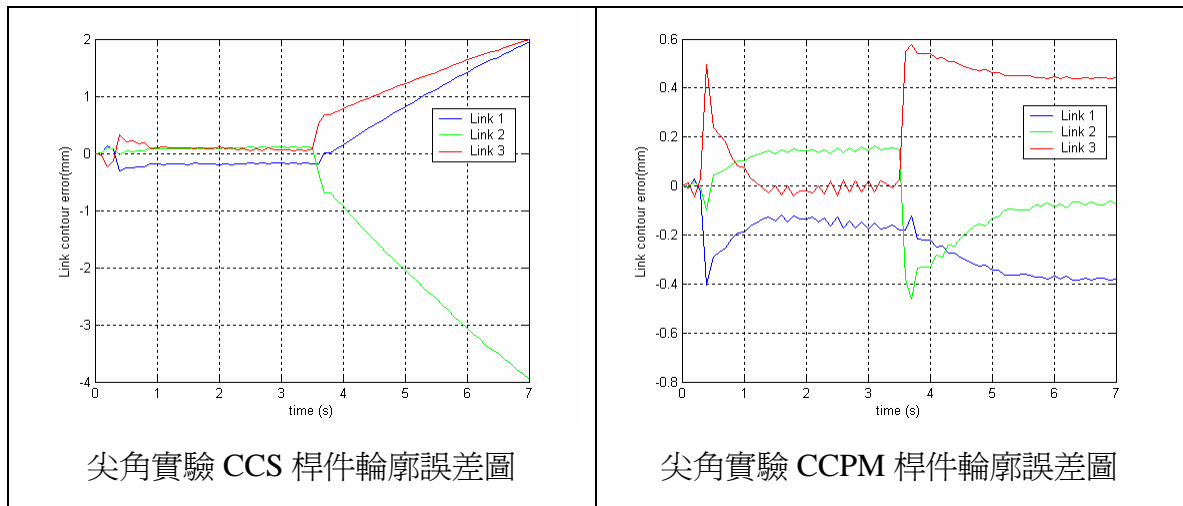


圖 4.35 具尖角軌跡實驗 CCS 與 CCPM 比較圖

表 4.10 具尖角軌跡實驗 CCS 與 CCPM IAE 比較表

實驗 IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.011934	0.0082209	4.33e-10	0.0010897	1.1415	2.4547
CCPM	0.013032	0.0051493	2.3e-10	0.0005801	0.7006	0.63756

#### (4)、漩渦狀軌跡實驗

軌跡規劃如下：

$$p = \begin{pmatrix} 270 \\ 0.03 \times t \times \cos(1/2 \times \pi \times t) \\ 0.03 \times t \times \sin(1/2 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}, \quad \text{整體時間為 } t = 0 \sim 7 \text{ 秒，起始運動點為}$$

$p = \begin{pmatrix} 270 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，其工作空間及各桿件位置示意圖如圖 4.36 所示，表 4.11 為各控制器參數增益值

表 4.11 漩渦狀軌跡實驗控制器增益值表

	PID for Position Error			PI for Contour Error		PI for Precompensation	
	P gain	I gain	D gain	P gain	I gain	P gain	I gain
CCS	60	30	0.8	10	5	0	0
CCPM	60	60	0.8	10	5	0.5	0.3



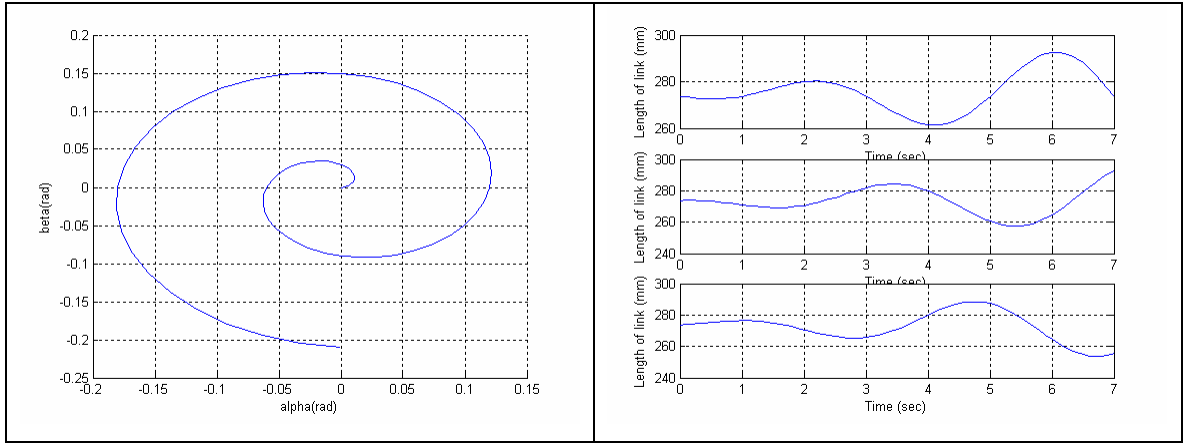


圖 4.36 漩渦狀軌跡工作空間與各桿位置圖

**Structure 1 : 交叉耦合控制(CCS , 圖 3.3)**

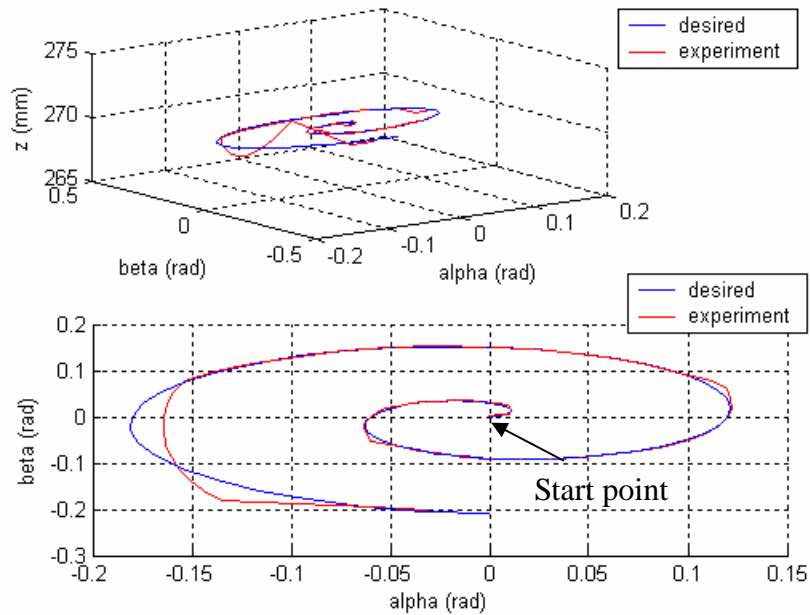


圖 4.37 漩渦狀軌跡實驗交叉耦合控制(CCS)期望與實際軌跡示意圖

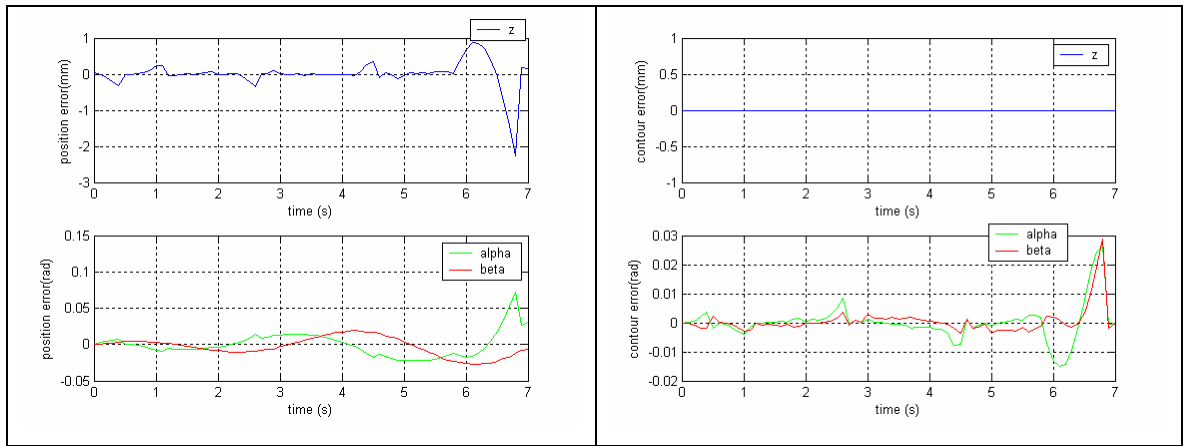


圖 4.38 漩渦狀軌跡實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

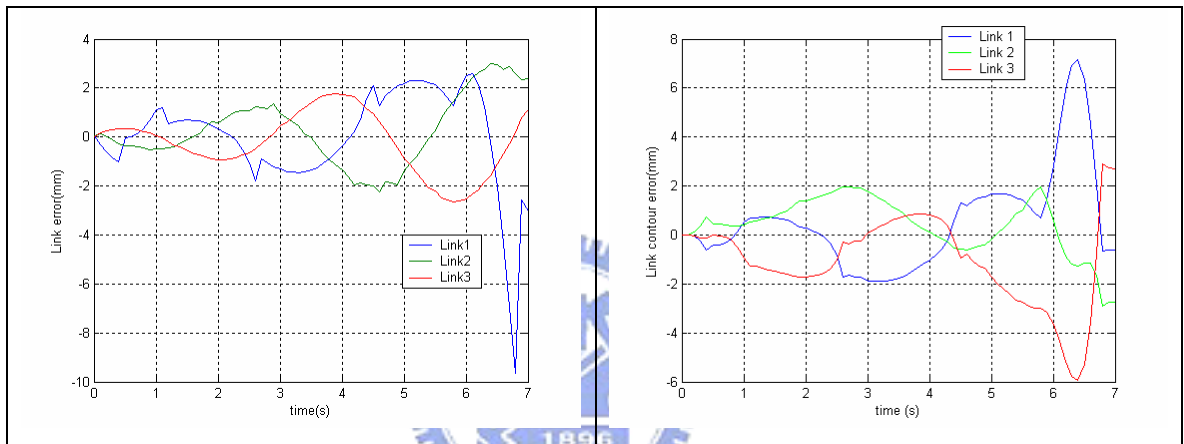


圖 4.39 漩渦狀軌跡實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

**Structure 2 : 交叉耦合預補償控制(CCPM , 圖 3.4)**

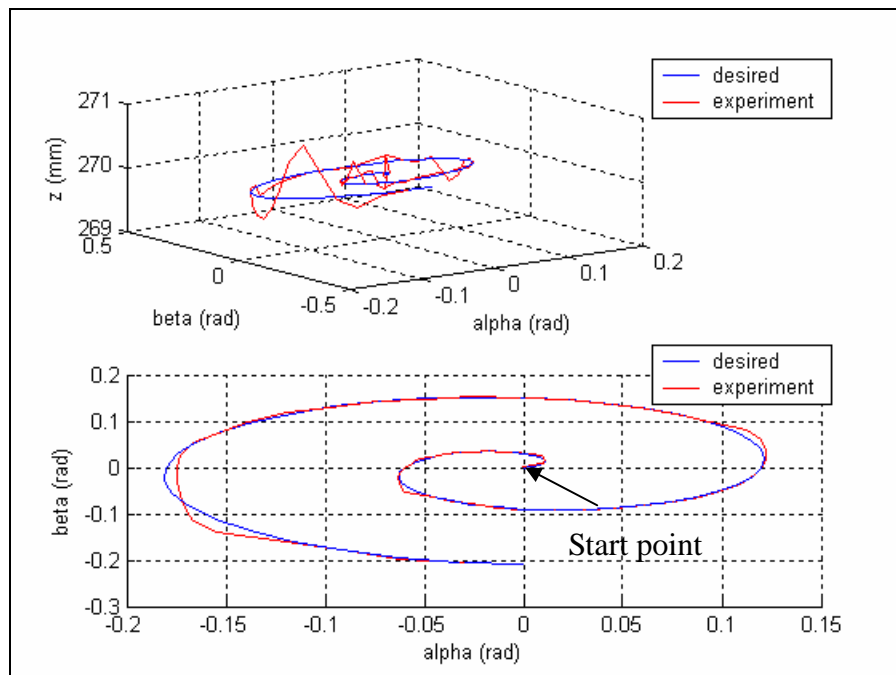


圖 4.40 漩渦狀軌跡實驗交叉耦合預補償控制(CCPM)期望與實際軌跡示意圖

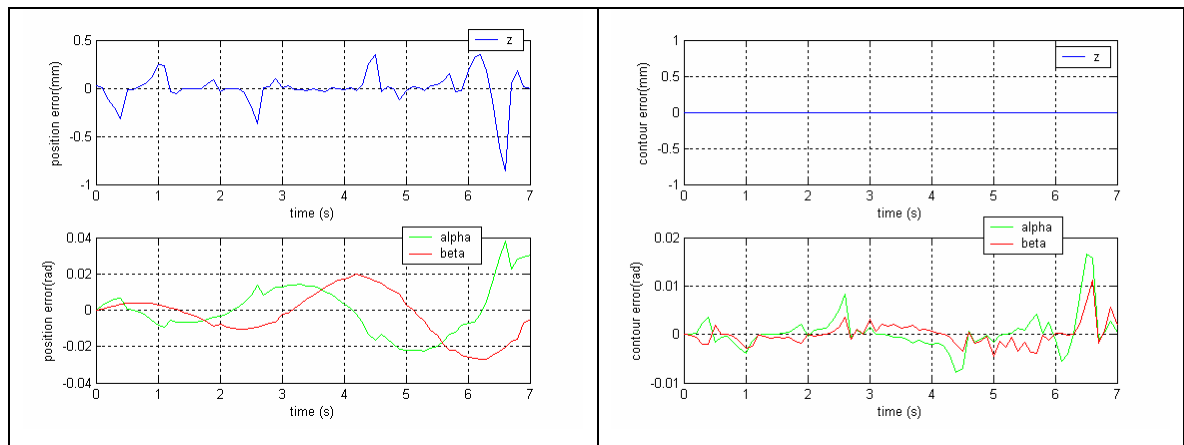


圖 4.41 漩渦狀軌跡實驗工作空間進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

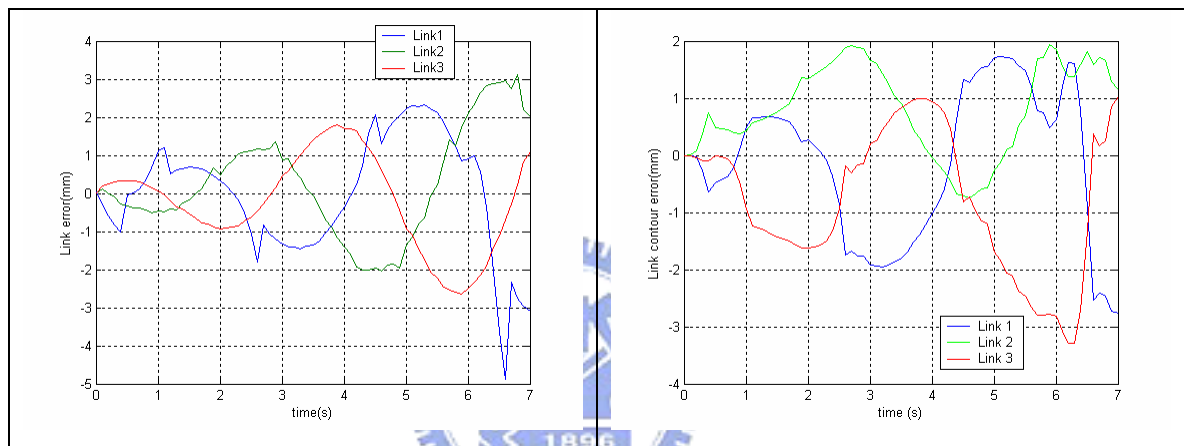


圖 4.42 漩渦狀軌跡實驗驅動桿進給誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

表 4.12 漩渦狀軌跡軌跡實驗 CCS 與 CCPM IAE 比較表

實驗 IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.17659	0.022514	3.33e-10	0.0053944	3.5047	3.8985
CCPM	0.094731	0.02124	2.6e-10	0.0036894	3.2998	3.1963

### (5)、軌跡二（第二章）實驗驗證

以下將利用軌跡二來進一步的探討實驗過程的正確性，主要分析實驗是否穩定，以更加的確認系統架構，初步想法利用圓軌跡(軌跡二)跑一個圓為週期，當執行完一個圓之後再繼續讓他執行圓軌跡一次，若在第二次執行軌跡過程中，誤差有無法收斂的現象，代表系統架構有可能是錯誤的，也代表第二次所跑的圓軌跡將無法順利完成，實驗後可更進一步的驗證出第三個週期直至 N 個週期，以用來證明出系統架構的正確性。以下為實驗軌跡規劃，其中  $p$ 、 $v$ 、 $a$  分別代表上平版形心位置、速度、加速度，需注意到此

實驗已將時間調整至 14 秒來完成：

$$p = \begin{pmatrix} 270 \\ 0.2 \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \\ 0.2 \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.4/7 \times \pi \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \\ -0.4/7 \times \pi \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.8/49 \times \pi \times \cos(2/7 \times \pi \times t) \\ -0.8/49 \times \pi \times \sin(2/7 \times \pi \times t) \end{pmatrix}, \text{時間爲 } 0 \sim 14 \text{ 秒}$$

**Structure 1：交叉偶合控制(CCS，圖 3.3)**

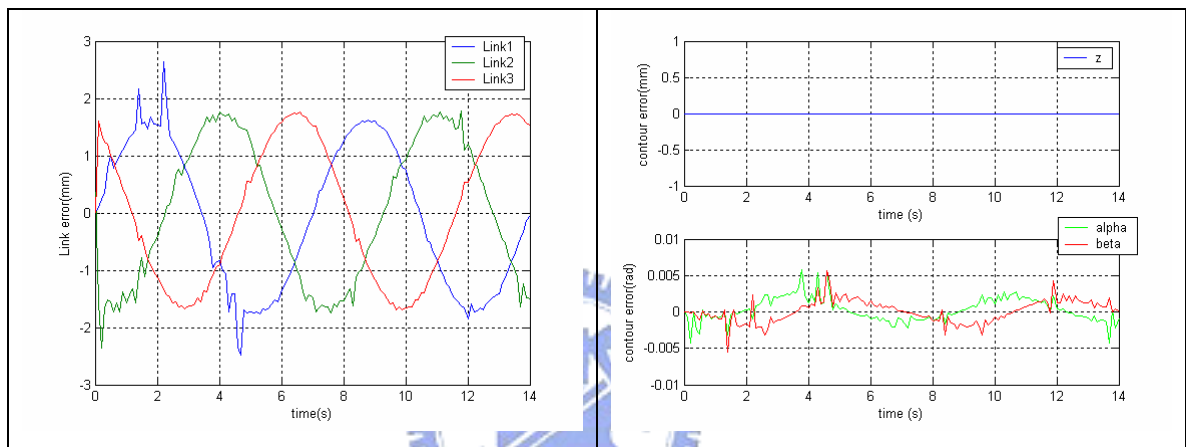


圖 4.43 驗證軌跡二實驗各桿件誤差與輪廓誤差示意圖(CCS)

**Structure 2：交叉偶合預補償控制(CCPM，圖 3.4)**

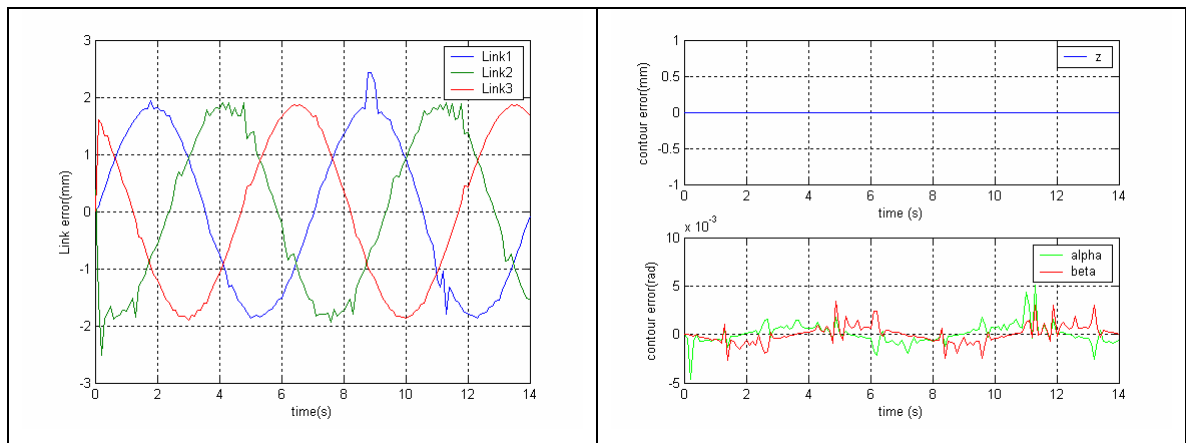


圖 4.44 驗證軌跡二實驗各桿件誤差與輪廓誤差示意圖(CCPM)

表 4.13 驗證圓軌跡實驗 CCS 與 CCPM IAE 比較表

實驗 IAE 值	工作空間位置誤差		工作空間輪廓誤差		桿件位置誤差	桿件輪廓誤差
	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$	$z$	$\alpha$ 、 $\beta$		
CCS	0.038978	0.021193	1.3e-6	0.0025128	3.2696	6.9528
CCPM	0.033402	0.023059	2.78e-7	0.0014145	3.5559	2.8153

由此實驗可以看出利用 CCS 與 CCPM 兩種控制方法，並不會使誤差越來越大，而是呈現 sin 與 cos 的穩定波形，在工作空間的輪廓誤差部分，加入預補償明顯的輪廓誤差降了許多。

以下將對實驗結果做個討論，首先，由軌跡二、軌跡四與尖角軌跡實驗所得之輪廓誤差圖形與模擬互相比較，其示意圖整理如圖 4.45~4.47，



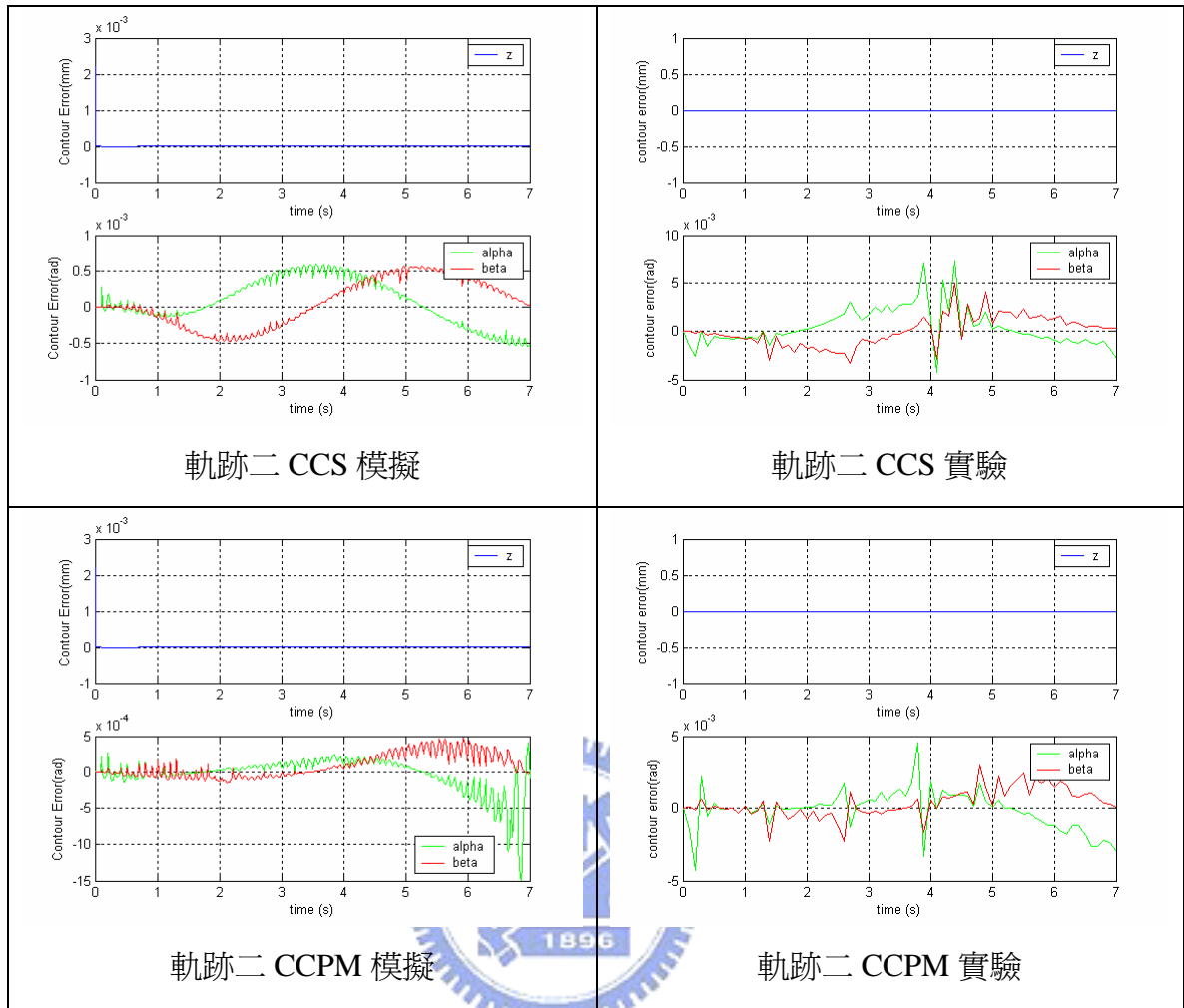


圖 4.45 軌跡二輪廓誤差實驗與模擬比較圖

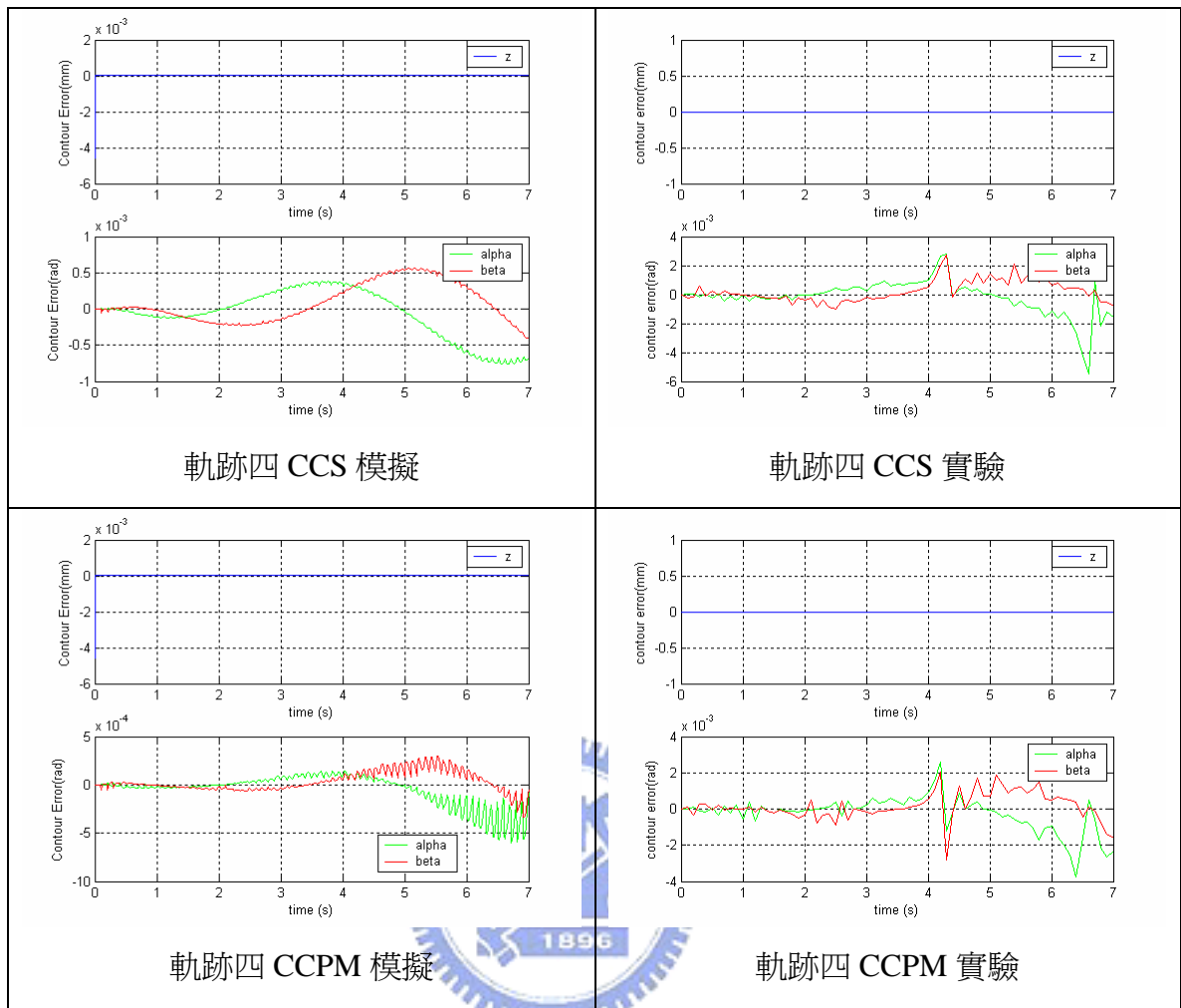


圖 4.46 軌跡四輪廓誤差實驗與模擬比較圖

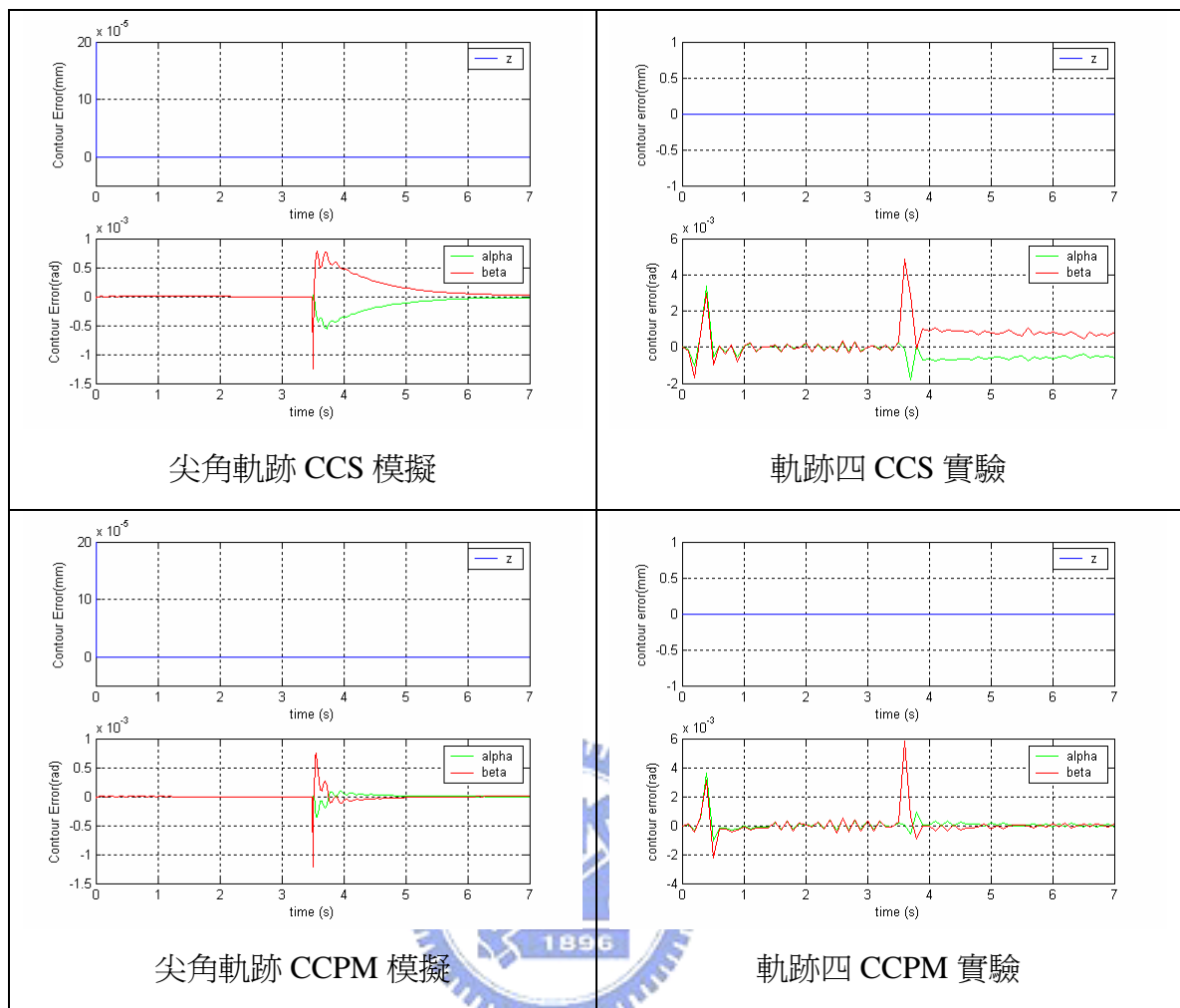


圖 4.47 尖角軌跡輪廓誤差實驗與模擬比較圖

由模擬與實驗的圖形可看出其輪廓誤差圖型非常的近似，這可說明了由模擬所建立的基本控制架構流程(控制圖 3.3, 3.4)沒有錯誤，而實驗結果也支持了模擬結果，即 CCPM 方法可以降低整體軌跡的輪廓誤差。再進一步應用於力量控制時，亦可得到 3.6 節的模擬結果，如此亦驗證了 CCPM 應用於力量控制的可行性，接下來考慮尖角軌跡實驗，由實驗圖中可看出時間在 3~4 秒之間，輪廓誤差明顯的突然放大，這是由於軌跡路線突然的變化所引起，但實驗結果亦如模擬所預期的利用 CCPM 快速的將輪廓誤差修正回來，最後考慮漩渦狀軌跡，由表 4.12 可看出 CCPM 對於輪廓誤差有明顯的降低作用，再綜合以上四組的實驗軌跡，分別由 IAE 值表可看到對於有加入 CCPM 控制除了對於輪廓誤差有降低的作用外，另外對於工作空間的追蹤誤差與桿件的位置誤差(表 4.8~表 4.10、表 4.12 之工作空間位置誤差欄)不會造成多大的影響，反到有小小的降低效應，最後說明一下桿件輪廓誤差部分，桿件輪廓誤差不具任何物理意義，其功用只是幫助上平板形



心輪廓誤差去計算所需補償的各軸量，所以桿件輪廓誤差量不具有任何誤差指標的意義，在論文中，具有誤差指標意義的只有軸空間桿件誤差，工作空間輪廓誤差與工作空間近給誤差。

在執行軌跡實驗時，以每 0.1 秒送出資料點會有 lag 的情況發生，這與電腦硬體效能 (Pentium4 CPU 2.8GHz 512MB 的 RAM) 設備、程式撰寫時須計算一些物理量和呼叫副程式、光學尺讀取訊要需要時間、及桿件運動時間有關，所以會造成大於 0.1 秒的時間才會送出下一點命令，未來可利用 DSP 運動控制卡及提升硬體設備，但是對於力量控制，要利用動態模型即時算出所須輸出的力，對於目前運算硬體設備而言，運算量仍將限制系統頻寬。

PCI\_8134 控制卡利用 `get_position` 函數來取得目前桿件位置，其 `sampling time` 最小只能達到 0.01 秒，無法達到 0.001 秒。

實驗過程中，每根桿件的 PID 控制參數都是用相同的數值，亦即將每根桿件視為具有相同的性能，但桿件實際上並非如此，若要達到更好的追蹤性能，需將每根桿件獨立出來，各配置適當的 PID 增益值，如此所需調整的控制參數高達 18 個，若再加上預補償控制則共有 24 個參數要調整，是很大的系統負擔。至於如何針對每根桿件的性能尋找最佳的參數，是一個獨立的研究課題[32]。

實驗時使用 `timer` 函數設定 `sampling` 取 `data` 時，所設定的 `sampling time` 與實際讀取的時間並不一定相等，大體而言會有 `delay` 的現象，且與所執行的軌跡有關。

目前的實驗係針對位置控制，對於力量控制的實驗部，由控制架構圖 3.23 與 3.24 可看出只需將 `Inverse Dynamic` 此區塊配合適當的控制卡及 C 語言寫出則可完成，其他區塊與位置控制部份大同小異。

實驗過程中，若規劃越複雜的軌跡，誤差量會越大，且延遲時間會增加。

對於混合/位置力量控制方面，必須考慮與外界環境的接觸力，所以必須加裝力感測器才能做實驗。

## 第五章 結論

---

本論文針對實驗用 3RPS 工具機做了理論與實驗的完整發展。

在理論部分，建立了 3RPS 平台機構的運動學及動力學方程式，動態模型分別用虛功法與牛頓法建立。站在運動學與動力學的基礎上，本文建置了可以追蹤連續路徑的交叉偶合法，與交叉偶合預補償方法。由模擬結果知道，在序列式機器上有效的交叉偶合法，及交叉偶合預補償法，對包含系統動態考慮的平行式機構架構，同樣有效，能夠產生優良的連續路徑追蹤效果 (表 3.8，表 3.10)，除此之外，在力量的即時控制上，本文比較了牛頓法與虛功法的執行效率(表 2.2)。在位置控制方面，構建成功的交叉偶合法，與交叉偶合預補償法(CCPM)，係以前向運動學(forward kinematic)即時算出  $z$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  的誤差來完成閉迴路控制，整體架構是一種即時(On-Line)的工作空間控制。而實驗分別證實，所建立的系統，與軌跡控制方法，能夠在即時情況下，達到預期的連續徑追蹤效果，目前已將三軸並聯式基本控制架構建立出來，可以說是亦完成了六軸具有  $(x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma)^T$  六個自由度工具機，甚至可推廣至具有  $n$  個自由度的機器人。

本論文成功發展出 3RPS 工具機連續路徑的追蹤系統，對平行式機構在工具機上的應用，有具體貢獻。

## 參考文獻

- [1] Stewart,D. “A platform with six degree of freedom” , Proc.Institute of Mechanical Engineers, Vol.108, n 3884, pp.371-386, 1965
- [2] Sarachik, P., and Ragazzini, J. R., “A two dimensional feedback control system” , Trans. AIEE, Vol. 76, pp. 55-61, 1957
- [3] Koren, Y., “Cross-coupled biaxial computer control for manufacturing systems” , ASME Trans Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Vol.102, No.4, pp. 265-272, 1980
- [4] Koren, Y., and Lo, Ch.-Ch., “Variable gain cross coupling control for contouring” , Annals of the CIRP, Vol.40, pp.371-374, 1991
- [5] Huan , J., “Bahnregelung zur Bahnerzeugung an numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen” , Dissertation, University of Stuttgart, 1982
- [6] Chin, J. H. and Tsai, H. C., “A Path algorithm for Robotic Machining” , Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 10, No. 3, pp. 185-198., 1993
- [7] Chin, J. H. and Lin, T.C., “Cross-Coupled Precompensation Method for the Contouring Accuracy of Computer Numerically Controlled Machine Tools” , Int. J. Machine Tools and Manufacture, Vol.37, No.7, pp.947-967, 1997
- [8] Chin, Jih-Hua, Cheng, Yuan-Ming and Lin, Jin- Huei, “Improving Contour Accuracy by Fuzzy Logic enhanced Cross-coupled Precompensation Method” , Robotics and Computer Integrated Manufacturing, Vol 20, pp.65-76, 2004
- [9] Lue,Chih-Wei, Cheng,Yuan-Ming and Chin, Jih-Hua, “System Structure and Contour Tracking for a Hybrid Motion Platform” , the International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol.26, pp.1388-1396,2005
- [10] K.Harib and K.Srinivasan, “Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures” , Robotica, Vol.21, pp.541-554,2003
- [11] Tsai, Lung-Wei, Robot Analysis:The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators,Wiley-Interscience Publication, 1999
- [12] Bruno Siciliano Luigi Villani, Robot Force Control, Kluwer Academic Publishers, 1999
- [13] Do,W.Q.D and Yang,D.C.H. , “Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type

- of robot” , J.Robotic Systems, Vol.5, No.3, pp.209-227, 1998
- [14] Dasgupta,B. and Mruthyunjaya,T.S., “A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator” ,Mech.Mach.Theory,Vol.33,No.8,pp.1135-1152,1998
- [15] Min-Jie Liu; Cong-Xin Li; Chong-Ni Li;, “Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator” Robotics and Automation, IEEE Transactions ,Vol.16, Issue 1, pp.94-98, 2000
- [16] Zhang, C.D. and Song, S.M., “An efficient method for inverse dynamics of manipulator based on the virtual work principle” ,J.Robotic Systems, Vol.10, No.5, pp605-627, 1993
- [17] Lung-Wei TSAI, “Solving the inverse dynamics of a Stewart – Gough manipulator by the principle of virtual work” , J.Mechanical Design Vol.122 , No.1, pp.3-9, 2000
- [18] Salisbury, J.K., “Active Stiffness Control of a manipulator in Cartesian Coordinates” , Proceedings, IEEE Conference On Decision and Control,pp.95-100, 1980
- [19] Hogan, N., “Impedance control : An approach to manipulator Part-I Theory,Part-II Implementation,Part-III An approach to manipulation” ,ASME Journal of Dynamic Systems,Measurement and control, Vol.107, pp.1-24,1985
- [20] Paul,R., B.Shimano, “Compliance and control” , Proceeding of Joint Automatic Control Conference, New York, pp.694-699, 1976
- [21] Tsuneo Yoshikawa, “Dynamic Hybrid Position/Force Control of Robot Manipulators-Description of Hand Constrains and Calculation of Joint Driving Force” , IEEE Journal of Robots and Automation, Vol.3, No.5,1987
- [22] Brnuo Siciliano Luigi Villani, “A Force/Position Regulator for Robot Manipulators Without Velocity Measurements” , IEEE Internation Conference on Robotic and Automation Minneapolis,Minnesota, 1996
- [23] Kosuge K., Takeo K., Fukuda T., “Force Control of Parallel Link Manipulator with Hydraulic Actuators” , IEEE International Conference on Robotics and Automation Minneapolis, Minnesota, 1996
- [24] Stefano Chiaverini, Lorenzo Sciavicco, “Edge-following strategies using the parallel control formulation” , in Proc, 1<sup>st</sup> IEEE Conf.Contr.Appl, Dayton, OH, Sept, pp.31-36, 1992
- [25] Shih-Chieh Weng, “Basic Strategy for Trajectory Planning for a Coordinated Stewart Platform and XY-Table” , Institute of Mechanical Engineering, National Chiao-Tung.,

- Taiwan, ROC., Master' s Thesis, 2003
- [26] Tsung-Ching Lin, “Cross-coupled Precompensation method and fuzzy control for tracking” , Institute of Mechanical Engineering, National Chiao-Tung., Taiwan, ROC., Master' s Thesis, 1995
- [27] 俞克維, 控制系統分析與設計 使用 Matlab, 新文京開發出版有限公司, 2003
- [28] 仲成儀器公司編輯部, X-Y 平台伺服機構控制, 全華, 1993
- [29] Andy Asmara, Renato A. Krohloing, and Frank Hoffmann, “Parameter Tuning of a Computed-Torque Controller for a 5 Degree of Freedom Robot Arm using Co-evolutionary Partice Swarm Optimization” , SIS.Proceedings IEEE, June 8-10, pp.162~168, 2005
- [30] Gourdeau, R, Blouin, S, and Hurteau, R , “Computed torque control of robots without joint velocity measurements ” , lectrical and Computer Engineering, IEEE Canadian Conference, Vol.3, pp. 1413 - 1418, 1999
- [31] 洪榮哲 編譯, 機構設計-精密定位法, 全華, 1998
- [32] Chin, Jih-hua, Chen, Yu-Cheng, “System gains configuration and coordination of redundant degrees of freedom by Genetic Algorithms for multi-axis machine systems in manufacturing” , manuscript submitted to Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2006