

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

人類大腿骨之複合實體模型

A Composite Solid Model of Human Femur



研究生：宋麗美

指導教授：陳大潘 博士

中華民國九十四年六月

人類大腿骨之複合實體模型

研究生：宋麗美

指導教授：陳大潘

國立交通大學
機械工程學系

摘要

本論文主要目的是研究人類大腿骨幾何模型的建立，其中包括參數曲面、影像處理原理、以及空間幾何中參數曲線扭曲度的討論。

首先對於影像處理的概念作相關介紹，包括灰階轉換、平滑化、二值化與雜訊的消除、邊界的找尋，接著對不同的影像處理方式實作和討論。

其次介紹空間幾何原理，包括三次曲線、雙三次曲面的構成與交線的找法，進一步提到曲面的微分幾何應用，包括曲率的計算、表面積和體積的計算。

最後，以雞蛋幾何模型與以影像處理的方法建立大腿骨模型作為之前理論的驗證。

A Composite Solid Model of Human Femur

Student:Li-Mei Song

Advisor:Dr.Da-Pan Chen

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The aim of this research study is to apply techniques of geometric modeling to establish a human femur model. The content includes parametric modeling theory, computer graphic methods, and a discussion on how to obtain twist-free models.

First of all, an introduction is given on computer graphic methods such as gray level transformation, noise elimination and domain boundary searching. Secondly, the basis of geometric modeling is laid down. The topics discussed include cubic curves, bi-cubic surfaces, and surface-surface intersection technique. Furthermore, to mention the application of differential geometry of surfaces such as calculations of curvature, area and volume.

Finally, an egg geometric model and procedures of establishing a human femur solid model are developed and application examples are given.

誌 謝

感謝指導教授陳大潘老師的耐心指導，讓我在研究所兩年受益匪淺。也感謝徐華均學長以及劉憲鎗學長在課業上的幫助，解決許多課業上的問題，還有實驗室的同學、學弟們的加油打氣，以及同屆碩士班的同學們，雖然不同實驗室卻適時給予建議和幫助，更加深深感謝劬勞養育我的父母，感謝教過我的老師、碩士班的同學、學長及學弟和每一個支持與幫助過我的人。



目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝	
目錄.....	iv
圖目錄.....	vii
表目錄.....	ix
一、緒論.....	1
二、幾何模型原理.....	2
2-1 曲線之建立.....	2
2-2 曲線之連續.....	3
2-3 曲面之形成.....	10
2-4 Ferguson patch 扭曲之消除.....	11
2-4-1 扭曲.....	11
2-4-2 Adini's twist.....	13
2-4-3 特徵點消除扭曲.....	14
2-5 二維曲線上三個方向向量之定義.....	14
2-5-1 曲線之切線向量.....	14
2-5-2 曲線之主要法向量與次法向量.....	15
2-6 曲線之扭轉.....	15
2-7 曲面之法向量.....	16
2-8 曲面之曲率.....	17
2-9 曲面之表面積.....	19
2-10 參數曲線之體積.....	20
2-11 數值分析-高斯積分.....	20

三、曲面相交模型的建立.....	27
3-1 篩檢(Culling).....	27
3-2 尋找起始點(Starting point).....	29
3-3 找出真實交點(Refinement).....	30
3-4 尋跡(Tracing).....	32
3-5 組成參數曲線(Curve fitting).....	33
3-6 圓柱-球交線測試.....	34
3-7 曲面相交的應用.....	34
3-8 齊次座標轉換.....	34
四、影像處理.....	41
4-1 電腦影像的特性.....	41
4-1-1 掃描轉換.....	41
4-2 影像灰階化.....	42
4-3 影像平滑化.....	43
4-4 二值化.....	44
4-5 邊界偵測.....	45
4-5-1 Robert Operator.....	46
4-5-2 Sobel Operator.....	47
4-6 雜訊之消除.....	51
4-6-1 化點.....	51
4-6-2 模糊-二值化.....	51
4-7 由影像處理建立模型.....	52
4-7-1 循邊.....	55
4-7-2 座標轉換.....	56
4-7-3 曲線綴合.....	57

4-7-3 局部修改.....	57
五、大腿骨幾何模型之建立.....	59
5-1 雞蛋模型測試.....	59
5-2 特徵點之選取方式.....	66
5-3 邊界條件與奇點的處理.....	67
5-4 曲面相交原理完成作局部修改.....	68
5-5 大腿骨模型.....	68
六、結論.....	73
6-1 結論.....	74
6-2 討論與未來展望.....	74
參考文獻.....	75



一、緒論

在現代機械工業當中，電腦輔助設計為一種必然的方法與趨勢。因此，使用一種較好、較精準以及較有效率的工具軟體來改善設計過程所耗費的資源，諸如時間、經費、人力、物力等等...，是一個很重要的課題。坊間有許多關於電腦輔助設計的應用軟體問市，但這方面仍然存在著許多的發展空間值得我們去研究。在開發出處理速度更快、效果更準確的軟體之前，必須先透徹了解其理論與演算過程，才能夠針對不足的地方加以改進。

本研究著重於將計算幾何學的理论用於建立大腿骨的實體模型，循序漸進的從第三章的幾何模型原理，依照參數曲線及雙三次曲面的建構方式來產生初步的大腿骨模型。以第三章介紹的曲面相交（Surface-Surface-Intersection）演算原理用平面把初步的大腿骨模型切開，比較截面與原始圖面的準確度，並加以調整。

而為達到實體模型精準度，在尋找剖面曲線的資料點時將運用影像處理的技術來解決。

而實體模型完成後，以第八章介紹微分幾何的原理，求得大腿骨上隨意一點的曲率，並以雞蛋模型來做檢驗。

二、幾何模型原理

幾何模型的構成：先由點，而後為線，再組成面。首先由線談起，兩點之間使用三次曲線來模擬，是曲線摻合最常用的方法，稱為三次參數曲線(Parametric cubic curve)。赫米特曲線(Hermite Curve)是其中的一種，它由首尾兩個資料點的位置向量和切線向量來組成整條曲線。當曲線組成之後，再利用曲線組成曲面。若曲面模型有摺角等不連續處，則必須加入張量因子來修正我們所產生的曲線，使其彎折以符合模擬實際模型的需要。如此，便可以視情況產生任意形狀的幾何模型。



2-1 曲線之建立

當我們要建立一條曲線時，令參數為 t ，則線段上的任一點可表示為

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad (\text{座標表示法}) \quad (2-1)$$

或是

$$\bar{P}(t) = \bar{a} + \bar{b}t + \bar{c}t^2 + \bar{d}t^3 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{參數表示法}) \quad (2-2)$$

參考圖(2-1)，當 t 改變時，位置向量 $\bar{P}(t)$ 會沿著曲線的軌跡移動。

將首尾端點的位置向量及切線向量共四個邊界條件代入方程式(2-2)

$$\bar{P}(0) = \bar{a} \quad (2-3a)$$

$$\bar{P}(1) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} \quad (2-3b)$$

$$\dot{\bar{P}}(0) = \bar{b} \quad (2-3c)$$

$$\dot{\bar{P}}(1) = \bar{b} + 2\bar{c} + 3\bar{d} \quad (2-3d)$$

重新組合可以得到

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= F_0(t)\bar{P}(0) + F_1(t)\bar{P}(1) + F_2(t)\dot{\bar{P}}(0) + F_3(t)\dot{\bar{P}}(1) \\ &= [F_0(t) F_1(t) F_2(t) F_3(t)] \begin{bmatrix} \bar{P}(0) \\ \bar{P}(1) \\ \dot{\bar{P}}(0) \\ \dot{\bar{P}}(1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-4)$$

這就是赫米特曲線的幾何模式，其中

$$F_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad (2-5a)$$

$$F_1(t) = 3t^2 - 2t^3 \quad (2-5b)$$

$$F_2(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad (2-5c)$$

$$F_3(t) = -t^2 + t^3 \quad (2-5d)$$



是所謂的摻合函數(Blending functions)或稱之為形狀函數(Shape

functions)，如果用矩陣表示方程式(2-3)，而成為

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}(0) \\ \bar{P}(1) \\ \dot{\bar{P}}(0) \\ \dot{\bar{P}}(1) \end{bmatrix} \\ &= [t] [M] [\bar{P}] \end{aligned} \quad (2-6)$$

2-2 曲線之連續

接著探討線段間的連續性，由於每一線段都是首尾相接，相接兩線段在連接點的關係，決定了曲線模型是否平順。當連接點的一次微分向量相等稱為 C^1 連續，且二次微分向量相等稱為 C^2 連續。若只有一次微分向量方向相同，稱為 G^1 連續，且二次微分向量有一項分量在切線方向、另一項分量在法線方向，則稱為 G^2 連續。

前後兩條赫米特曲線可用方程式(3-4)表示為

$$\bar{P}_i(t) = F_0(t)\bar{P}_i + F_1(t)\bar{P}_{i+1} + F_2(t)\dot{\bar{P}}_i + F_3(t)\dot{\bar{P}}_{i+1} \quad (2-7a)$$

$$\bar{P}_{i+1}(t) = F_0(t)\bar{P}_{i+1} + F_1(t)\bar{P}_{i+2} + F_2(t)\dot{\bar{P}}_{i+1} + F_3(t)\dot{\bar{P}}_{i+2} \quad (2-7b)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1, n$$

上式共有 n 條的赫米特曲線， $n+1$ 個連接點，其中 \bar{P}_i 是資料點的位置向量，可由實物測量或經由適當的設計來當已知值， $\dot{\bar{P}}_i$ 是資料點的切線向量，是我們要求的未知數。

C^1 連續(First-degree parametric continuity)是前後兩條赫米特曲線的一次微分相等，也就是切線向量在連接點處相等，即

$$\bar{P}_{i+1}(0) = \bar{P}_i(1) \quad \dot{\bar{P}}_{i+1}(0) = \dot{\bar{P}}_i(1) \quad (2-8)$$

C^2 連續(Second-degree parametric continuity)除了一次微分相等，更達到連接點的二次微分相等，所以

$$\begin{aligned} \bar{P}_{i+1}(0) &= \bar{P}_i(1) \\ \dot{\bar{P}}_{i+1}(0) &= \dot{\bar{P}}_i(1) \\ \ddot{\bar{P}}_{i+1}(0) &= \ddot{\bar{P}}_i(1) \end{aligned} \quad (2-9)$$

由方程式(2-7)(2-9)可以得到

$$\dot{\bar{P}}_i + 4\dot{\bar{P}}_{i+1} + \dot{\bar{P}}_{i+2} = 3(\bar{P}_{i+2} - \bar{P}_i) \quad (2-10)$$

C^2 連續的條件下， n 條赫米特曲線得到 $n-1$ 條類似方程式(2-10)

的方程式，將這些方程式以矩陣方式寫成 $[\mathbf{M}^*][\mathbf{P}] = [\mathbf{R}^*]$ 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{P}}_0 \\ \dot{\bar{P}}_1 \\ \dot{\bar{P}}_2 \\ \dots \\ \dot{\bar{P}}_{n-1} \\ \dot{\bar{P}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\bar{P}_2 - \bar{P}_0) \\ 3(\bar{P}_3 - \bar{P}_1) \\ \dots \\ \dots \\ 3(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-2}) \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

這就是 C^2 連續條件下，求取曲線資料點切線向量的公式。觀察方程式(2-11)，可以發現 $[\mathbf{M}^*]$ 是 $(n-1) \times (n+1)$ 矩陣， $[\mathbf{R}^*]$ 是 $(n-1) \times 1$ 矩陣，而 $[\dot{\bar{p}}]$ 是 $(n+1) \times 1$ 矩陣，方程式有 $n-1$ 條，未知數卻有 $n+1$ 個，必須再有兩條方程式才能求解，所以考慮曲線模型首尾兩端點的邊界條件，有以下的三種情形：

(1) 固定端點(Fixed ends)

$$\dot{\bar{P}}_0 = a, \dot{\bar{P}}_n = b \quad a, b \text{ 已知} \quad (2-12a)$$

(2) 自由端點(Free ends)

$$\ddot{\bar{P}}_0(0) = 0, \ddot{\bar{P}}_n(1) = 0 \quad (2-12b)$$

(3) 循環端點(Cyclic ends)

$$\bar{P}_n = \bar{P}_0, \dot{\bar{P}}_n = \dot{\bar{P}}_0 \quad (2-12c)$$

自由端點的邊界條件可以導出

$$2\dot{\bar{P}}_0 + \dot{\bar{P}}_1 = 3(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$2\dot{\bar{P}}_n + \dot{\bar{P}}_{n-1} = 3(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}) \quad (2-12b')$$

故 C^2 連續條件，求取曲線資料點切線向量的公式，可整理成

(1) 固定端點(Fixed ends)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{P}}_1 \\ \dot{\bar{P}}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dot{\bar{P}}_{n-2} \\ \dot{\bar{P}}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\bar{P}_2 - \bar{P}_0) - \dot{\bar{P}}_0 \\ 3(\bar{P}_3 - \bar{P}_1) \\ \dots \\ \dots \\ 3(\bar{P}_{n-1} - \bar{P}_{n-3}) \\ 3(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-2}) - \dot{\bar{P}}_n \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

(2) 自由端點(Free ends)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{P}}_0 \\ \dot{\bar{P}}_1 \\ \dot{\bar{P}}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dot{\bar{P}}_{n-1} \\ \dot{\bar{P}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\bar{P}_1 - \bar{P}_0) \\ 3(\bar{P}_2 - \bar{P}_0) \\ 3(\bar{P}_3 - \bar{P}_1) \\ \dots \\ \dots \\ 3(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-2}) \\ 3(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

(3) 循環端點(Cyclic ends)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{P}}_0 \\ \dot{\bar{P}}_1 \\ \dot{\bar{P}}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dot{\bar{P}}_{n-2} \\ \dot{\bar{P}}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\bar{P}_1 - \bar{P}_{n-1}) \\ 3(\bar{P}_2 - \bar{P}_0) \\ 3(\bar{P}_3 - \bar{P}_1) \\ \dots \\ \dots \\ 3(\bar{P}_{n-1} - \bar{P}_{n-3}) \\ 3(\bar{P}_0 - \bar{P}_{n-2}) \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

G^1 連續(First-degree geometric continuity)是一次微分向量的方向

相同，也就是連接點前後切線向量的方向一樣。

如圖(2-2)， l 是弧長，曲線參數是 t 但物理意義不一定是弧長，隨著 t 的改變， $\bar{P}(t)$ 將在曲線軌跡上移動而掃出整條線段。

$$\frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta t} = \frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta l} \frac{\delta l}{\delta t} = \frac{\delta l}{\delta t} \bar{T} \quad (2-16a)$$

其中 T 是單位切線向量(Unit tangent vector)， $\frac{\delta l}{\delta t}$ 是向量大小，當 t 物理意義是弧長時

$$\frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta t} = \frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta l} = \mathbf{T} \quad (\text{when } t = l) \quad (2-16b)$$

如果各線段的弧長不同，即各節點的之間距不等距時，欲得到精確之曲線，參數 t 應除弧長 l ，則令 $\xi = \frac{t}{l}$ 、 $\delta \xi = \frac{\delta t}{l}$ 、 $\bar{P}^*(\xi) = \bar{P}(t)$ ，方程式(2-16)變成

$$\frac{\delta \bar{P}^*(\xi)}{\delta \xi} = \frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta \xi} = \frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta t} \frac{\delta t}{\delta \xi} = l \frac{\delta \bar{P}(t)}{\delta t} = l \bar{T} \quad (2-17)$$

所以相接的兩條線段如果弧長不一樣，則切線向量必然不等，但單位切線向量 \bar{T} 一樣，所以定義 G^1 連續的條件為

$$\bar{P}^*_{i+1}(0) = \bar{P}^*_i(1) \quad (2-18a)$$

$$\dot{\bar{P}}^*_{i+1}(0) = \beta_i \dot{\bar{P}}^*_i(1) \quad (2-18b)$$

模仿方程式(2-4)的做法，利用方程式(2-17)可以推得

$$\begin{aligned} & \bar{P}^*(\xi) \\ &= \bar{P}(t) \\ &= F_0(\xi) \bar{P}^*(0) + F_1(\xi) \bar{P}^*(1) + F_2(\xi) \dot{\bar{P}}^*(0) + F_3(\xi) \dot{\bar{P}}^*(1) \end{aligned}$$

$$= F_0(\xi)\bar{P}^*(0) + F_1(\xi)\bar{P}^*(1) + F_2(\xi)\ell \frac{\delta\bar{P}(t)}{\delta t} \Big|_{t=0, \xi=0} + F_3(\xi)\ell \frac{\delta\bar{P}(t)}{\delta t} \Big|_{t=\ell, \xi=1}$$

$$= \begin{bmatrix} F_0(\xi)F_1(\xi)F_2(\xi)F_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^*(0) \\ \bar{P}^*(1) \\ \ell\dot{\bar{P}}(0) \\ \ell\dot{\bar{P}}(1) \end{bmatrix} ; \quad 0 \leq \xi = \frac{t}{\ell} \leq 1$$

(2-19)

前後相連的赫米特曲線可仿照方程式(2-7)寫成

$$\bar{P}^*_i(\xi) = F_0(\xi)\bar{P}_i + F_1(\xi)\bar{P}_{i+1} + F_2(\xi)\ell_i\dot{\bar{P}}_i + F_3(\xi)\ell_i\dot{\bar{P}}_{i+1} \quad (2-20a)$$

$$\bar{P}^*_{i+1}(\xi) = F_0(\xi)\bar{P}_{i+1} + F_1(\xi)\bar{P}_{i+2} + F_2(\xi)\ell_{i+1}\dot{\bar{P}}_{i+1} + F_3(\xi)\ell_{i+1}\dot{\bar{P}}_{i+2} \quad (2-20b)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

其中 ℓ 是各段的弧長， \bar{P}_i 是資料點的位置向量， $\dot{\bar{P}}_i$ 是資料點的單位切線向量，是要求的未知數。將方程式(2-20)對 ξ 微分，前後兩段赫米特曲線的連接點處

$$\dot{\bar{P}}^*_i(1) = \ell_i\dot{\bar{P}}_{i+1} \quad (2-21a)$$

$$\dot{\bar{P}}^*_{i+1}(0) = \ell_{i+1}\dot{\bar{P}}_{i+1} \quad (2-21b)$$

可以寫成底下的關係

$$\dot{\bar{P}}^*_{i+1}(0) = \frac{\ell_{i+1}}{\ell_i}\dot{\bar{P}}^*_i(1) \quad (2-22)$$

它們的切線方向一樣，切線的大小與弧長成反比。

方程式(2-10)變成

$$\frac{1}{\ell_i}\bar{P}_i + 2\dot{\bar{P}}_{i+1}\left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}}\right) + \frac{1}{\ell_{i+1}}\dot{\bar{P}}_{i+2} = \frac{3}{\ell_{i+1}^2}(\bar{P}_{i+2} - \bar{P}_{i+1}) + \frac{3}{\ell_i^2}(\bar{P}_{i+1} - \bar{P}_i) \quad (2-23)$$

如果前後弧長 $\ell_{i+1} = \ell_i$ ，方程式(2-23)又會跟方程式(2-10)一樣。

同樣的，利用 G^1 連續的方法將會找到 $n-1$ 條類似的方程式，再考慮曲線模型首尾的邊界條件，以循環式端點邊界條件為例，將會有底下的結果

$$\begin{bmatrix}
 2\left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_0}\right) & \frac{1}{l_0} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{l_{n-1}} \\
 \frac{1}{l_0} & 2\left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_1}\right) & \frac{1}{l_1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
 0 & \frac{1}{l_1} & 2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) & \frac{1}{l_2} & 0 & \cdot & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{l_{n-3}} & 2\left(\frac{1}{l_{n-3}} + \frac{1}{l_{n-2}}\right) & \frac{1}{l_{n-2}} \\
 \frac{1}{l_{n-1}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{l_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{l_{n-2}} + \frac{1}{l_{n-1}}\right)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \dot{\bar{P}}_0 \\
 \dot{\bar{P}}_1 \\
 \dot{\bar{P}}_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \dot{\bar{P}}_{n-2} \\
 \dot{\bar{P}}_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{3}{l_0^2}(\bar{P}_1 - \bar{P}_0) + \frac{3}{l_{n-1}^2}(\bar{P}_0 - \bar{P}_{n-1}) \\
 \frac{3}{l_1^2}(\bar{P}_2 - \bar{P}_1) + \frac{3}{l_0^2}(\bar{P}_1 - \bar{P}_0) \\
 \frac{3}{l_2^2}(\bar{P}_3 - \bar{P}_2) + \frac{3}{l_1^2}(\bar{P}_2 - \bar{P}_1) \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \frac{3}{l_{n-2}^2}(\bar{P}_{n-1} - \bar{P}_{n-2}) + \frac{3}{l_{n-3}^2}(\bar{P}_{n-2} - \bar{P}_{n-3}) \\
 \frac{3}{l_{n-1}^2}(\bar{P}_0 - \bar{P}_{n-1}) + \frac{3}{l_{n-2}^2}(\bar{P}_{n-1} - \bar{P}_{n-2})
 \end{bmatrix}
 \quad (2-24)$$

G^2 連續 (Second-degree geometric continuity) 是除了連接點兩端的一次微分向量方向相同外，連接點後端的二次微分向量必有一分量在前端的切線方向上、一分量在前端的法線方向上。

$$\dot{\bar{P}}_{i+1}(0) = \beta_i \dot{\bar{P}}_i(1) \quad (2-25a)$$

$$\ddot{\bar{P}}_{i+1}(0) = \beta_i^2 \ddot{\bar{P}}_i(1) + N_i \dot{\bar{P}}_i(1) \quad (2-25b)$$

其中， β 與 N 兩者皆為調整曲線形狀的控制參數。至於相關的曲線公式將於 3-4 張量的控制一節中詳細討論。

2-3 曲面之形成

考慮綴面外形，三條參數曲線所組成的稱為三角綴面(Triangular patch)、四條參數曲線組成的稱為四角綴面(Rectangular patch)。孔氏(Coons)綴面是處理組合曲面的方法之一，可用圖(2-3)解釋，取 u 、 v 兩個獨立參數，對應某 u 值，就有一等 u 值的赫米特曲線，而且

$$\bar{P}_0(u) = F_0(u)\bar{P}_{00} + F_1(u)\bar{P}_{10} + F_2(u)\bar{P}_{00}^u + F_3(u)\bar{P}_{10}^u \quad (2-26a)$$

$$\bar{P}_1(u) = F_0(u)\bar{P}_{01} + F_1(u)\bar{P}_{11} + F_2(u)\bar{P}_{01}^u + F_3(u)\bar{P}_{11}^u \quad (2-26b)$$

$$\bar{P}_0^v(u) = F_0(u)\bar{P}_{00}^v + F_1(u)\bar{P}_{10}^v + F_2(u)\bar{P}_{00}^{uv} + F_3(u)\bar{P}_{10}^{uv} \quad (2-26c)$$

$$\bar{P}_1^v(u) = F_0(u)\bar{P}_{01}^v + F_1(u)\bar{P}_{11}^v + F_2(u)\bar{P}_{01}^{uv} + F_3(u)\bar{P}_{11}^{uv} \quad (2-26d)$$

式中加了上標的向量 \bar{P} 是沿所標示變數方向的切線向量。必須有四個角點的資料點，其中 $F(u)$ 是赫米特摻合函數，根據上面章節對曲線模型的討論，可以組成一條以 v 為參數的赫米特曲線

$$\bar{P}(u, v) = F_0(v)\bar{P}_0(u) + F_1(v)\bar{P}_1(u) + F_2(v)\bar{P}_0^v(u) + F_3(v)\bar{P}_1^v(u)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \bar{P}_{00} & \bar{P}_{01} & \bar{P}_{00}^v & \bar{P}_{01}^v \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} & \bar{P}_{10}^v & \bar{P}_{11}^v \\ \bar{P}_{00}^u & \bar{P}_{01}^u & \bar{P}_{00}^{uv} & \bar{P}_{01}^{uv} \\ \bar{P}_{10}^u & \bar{P}_{11}^u & \bar{P}_{10}^{uv} & \bar{P}_{11}^{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} F_0(u) & F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{00} & \bar{P}_{01} & \bar{P}_{00}^v & \bar{P}_{01}^v \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} & \bar{P}_{10}^v & \bar{P}_{11}^v \\ \bar{P}_{00}^u & \bar{P}_{01}^u & \bar{P}_{00}^{uv} & \bar{P}_{01}^{uv} \\ \bar{P}_{10}^u & \bar{P}_{11}^u & \bar{P}_{10}^{uv} & \bar{P}_{11}^{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{bmatrix} \\
& = [F(u)][Q][F(v)]^T \tag{2-27}
\end{aligned}$$

這是孔氏綴面的數學模式，又稱張量積雙三次綴面 (Tensor-product bicubic patch)，由三次參數曲線所建立，符合 C^2 的連續條件，必須有四個資料點共計 16 個已知向量來組合。



$$[Q] = \begin{bmatrix} \textit{Position} & \textit{v-direction} \\ \textit{vectors} & \textit{tangent vectors} \\ \textit{u-direction} & \textit{twist} \\ \textit{tangent vectors} & \textit{vectors} \end{bmatrix} \tag{2-28}$$

在此採用 Ferguson patch，各角點之扭轉向量為零，可使綴面平坦連接。在邊界位置向量與 u 、 v 方向切線向量，依不同曲線接點邊界條件求得後，可完整表示各綴面之 $[P]$ ，代回(2-27)定義各綴面。

2-4 Ferguson patch 扭曲之消除

2-4-1 扭曲

在建立曲面時，由(2-27)可知須有 16 個已知量才能完整描述一個

綴面。然而，若有 $M \times N$ 個點要組成一四角複合曲面，點向量為已知，兩個方向的斜率可以由邊界條件求得。並且，由連續條件可以算出

因為

$$\mathbf{r}_{u,m-1,n} + 4\mathbf{r}_{u,mn} + \mathbf{r}_{u,m+1,n} = 3(\mathbf{r}_{m+1,n} - \mathbf{r}_{m-1,n}) \quad (2-29)$$

所以

$$\mathbf{r}_{uv,m-1,n} + 4\mathbf{r}_{uv,mn} + \mathbf{r}_{uv,m+1,n} = 3(\mathbf{r}_{v,m+1,n} - \mathbf{r}_{v,m-1,n}) \quad (2-30)$$

$$\mathbf{r}_{vu,m,n-1} + 4\mathbf{r}_{vu,mn} + \mathbf{r}_{vu,m,n+1} = 3(\mathbf{r}_{u,m,n+1} - \mathbf{r}_{u,m-1,n}) \quad (2-31)$$

給定 $u=0$ 、 $u=M$ 、 $v=0$ 、 $v=N$ 上的值，則可以解出除了端點所有點的

扭曲向量值，即要有以下的條件才可以完整描述一複合曲面：

x_{00}	s_{00}	s_{01}	s_{0N}	x_{0N}
t_{00}	r_{00}	r_{01}	r_{0N}	t_{0N}
t_{10}	r_{10}	r_{11}	r_{1N}	t_{1N}
.
.
.
t_{M0}	r_{M0}	r_{M1}	r_{MN}	t_{MN}
x_{M0}	s_{M0}	s_{M1}	s_{MN}	x_{MN}

其中 $s = \mathbf{r}_u$ 、 $t = \mathbf{r}_v$ 、 $x = \mathbf{r}_{uv}$

但是，必須增加許多計算量，降低運算效率，故一般都將 r_{uv} 設為 0，

或使用Adini's twist。但是又會造成曲面變形。

2-4-2 Adini's twist

此為一估算 twist 的方法。由線性 Coons patches 對 u, v 偏微分，

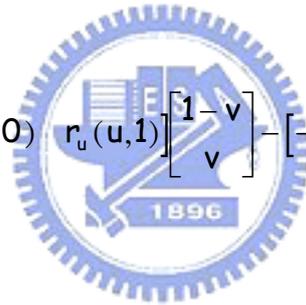
依據“Computational Geometry for Design and Manufacturing” p.200

(7.4) :

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0, v) \\ r(1, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(u, 0) & r(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0, 0) & r(0, 1) \\ r(1, 0) & r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

對 u 偏微分：

$$r_u = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0, v) \\ r(1, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u(u, 0) & r_u(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0, 0) & r(0, 1) \\ r(1, 0) & r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$



再對 v 偏微分：

$$r_{uv} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_v(0, v) \\ r_v(1, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u(u, 0) & r_u(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0, 0) & r(0, 1) \\ r(1, 0) & r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

整理：

$$\begin{aligned} r_{uv}(u, v) &= \begin{bmatrix} -r_v(0, v) + r_v(1, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_u(u, 0) + r_u(u, 1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r(0, 0) + r(1, 0) & -r(0, 1) + r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -r_v(0, v) + r_v(1, v) - r_u(u, 0) + r_u(u, 1) - [r(0, 0) - r(1, 0) - r(0, 1) + r(1, 1)] \end{aligned}$$

所以：

$$r_{uv}(0,0) = -r_v(0,0) + r_v(1,0) - r_u(0,0) + r_u(0,1) - [r(0,0) - r(1,0) - r(0,1) + r(1,1)]$$

$$r_{uv}(1,0) = -r_v(0,0) + r_v(1,0) - r_u(1,0) + r_u(1,1) - [r(0,0) - r(1,0) - r(0,1) + r(1,1)]$$

$$r_{uv}(0,1) = -r_v(0,1) + r_v(1,1) - r_u(0,0) + r_u(0,1) - [r(0,0) - r(1,0) - r(0,1) + r(1,1)]$$

$$r_{uv}(1,1) = -r_v(0,1) + r_v(1,1) - r_u(1,0) + r_u(1,1) - [r(0,0) - r(1,0) - r(0,1) + r(1,1)]$$

而：

$$\text{Adini's twist} = \begin{bmatrix} r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

2-4-3 特徵點消除扭曲

因為如果曲面的特徵點對稱或於同一平面，則 $r_{uv}=0$ ，故可以選擇共面的點當特徵點，使 $r_{uv}=0$ ，則所產生的Ferguson patch會符合實際所處理的模型。因為以影像處理的方法獲得的截面是完整的曲線，所以只要將截面曲線對一空間平面求交點即可獲得滿足要求的點，並且，因為一元三次方程式有真實解，更可以降低計算時的誤差。

2-5 三維曲線上三個方向向量之定義

2-5-1 曲線之切線向量

如圖(2-4)， $\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \bar{r}}{\delta s} = \bar{T}$ 是與曲線相切的方向上的單位長度向

量，稱為單位切線向量。

對於一般參數 u ， $\frac{d\bar{r}}{du}$ 和 \bar{T} 成比例關係，因此

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{du} \bigg/ \left| \frac{d\bar{r}}{du} \right| \quad (2-32)$$

再者， $\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{du} \bigg/ \frac{ds}{du}$ 且 $\frac{ds}{du} = \left| \frac{d\bar{r}}{du} \right|$ ，因此可以得到 $\dot{\bar{r}} = \dot{s}\bar{T}$ 且 $\ddot{\bar{r}} = \ddot{s}\bar{T} + \dot{s}\dot{\bar{T}}$ 。

2-5-2 曲線之主要法向量與次法向量

對於三維曲線，任何垂直於切線向量 \bar{T} 的向量是為法向量，因為 \bar{T} 是單位向量，因此 $\dot{\bar{T}} = (d\bar{T}/du)$ 和 \bar{T} 成正交，在 $\dot{\bar{T}}$ 方向上的單位向量 \bar{N} 為主要法向量(principal normal vector)，見圖(2-5)。

當參數為弧長 s ，可以寫成

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N} \quad (2-33)$$

k 為曲線的曲率，規定 $k > 0$ ， \bar{T} 便可以向量 \bar{N} 來定義

$$\dot{\bar{T}} = \frac{d\bar{T}}{du} = \dot{s}k\bar{N} \quad (2-34)$$

$\bar{T} \times \bar{N}$ 定義為垂直於 \bar{T} 和 \bar{N} 的第三個單位向量，稱為次法向量

\bar{B} (binormal vector)。

又

$$\rho = \frac{\dot{s}^3}{|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}|} = \frac{\dot{s}^3}{\dot{s} k} = \frac{1}{k} \quad (2-35)$$

ρ 為曲線上 P 點之曲率半徑。

2-6 曲線之扭轉

\bar{B} 為單位向量， $\frac{d\bar{B}}{ds} \cdot \bar{B} = 0$ ， $\frac{d\bar{B}}{ds}$ 垂直於 \bar{T} 和 \bar{B} ，因此 $\frac{d\bar{B}}{ds}$ 是在 \bar{N} 的方向，可以表示成

$$\frac{d\bar{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\bar{\mathbf{N}} \quad (2-36)$$

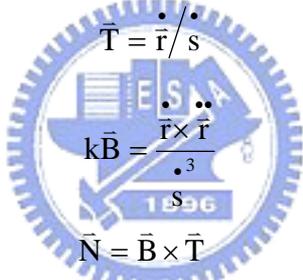
τ 為曲線的扭轉(torsion)。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{N}}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{T}}) = \frac{d\bar{\mathbf{B}}}{ds} \times \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{B}} \times \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{ds} \\ &= \frac{d\bar{\mathbf{B}}}{ds} \times \bar{\mathbf{T}} - k\bar{\mathbf{T}} \\ \frac{d\bar{\mathbf{N}}}{ds} &= \tau\bar{\mathbf{B}} - k\bar{\mathbf{T}} \end{aligned}$$

因此當曲線之法向量轉到 $\bar{\mathbf{B}}$ 的正方向時，曲線之扭轉為正值。

處理曲線 $\bar{\mathbf{r}}(u)$ 時，對 u 微分會比對 s 微分做運算來的方便，因此

將上面所列方程式重新整理如下



$$\bar{\mathbf{T}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} / s \quad (2-37)$$

$$k\bar{\mathbf{B}} = \frac{\dot{\bar{\mathbf{r}}} \times \ddot{\bar{\mathbf{r}}}}{s^3} \quad (2-38)$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{T}} \quad (2-39)$$

$$\tau = \frac{\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot (\ddot{\bar{\mathbf{r}}} \times \dddot{\bar{\mathbf{r}}})}{s^6 k^2} \quad (2-40)$$

$$s = |\dot{\bar{\mathbf{r}}}| \quad (2-41)$$

2-7 曲面之法向量

參數曲線 $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(u, v_0)$ ，其中 v_0 為常數，其切線向量表示為 $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u}$ ；同

樣地，曲線 $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(u_0, v)$ 的切線向量為 $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v}$ ，這些曲線的交點 $\bar{\mathbf{r}}(u_0, v_0)$ ，其

切平面包含這兩個切線向量，因此可以得到曲面的單位法向量 $\bar{\mathbf{n}}$ ，見

圖(2-6)

$$\bar{n} = \pm \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) / \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \quad (2-42)$$

參數曲面 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 上有一曲線，圖(2-7)，可用參數方程式

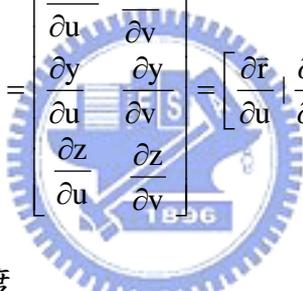
$u = u(t)$ ， $v = v(t)$ 來表示此曲線，可以概括成

$$u = u(t)$$

其中 $u = [u(t), v(t)]^T$ ， $\bar{r}(u, v)$ 代表曲面上的點，而用 $\bar{r}(t)$ 來代表曲線上的點。

$\dot{\bar{r}}$ 為曲線的切線向量，用鏈鎖律展開可以得到

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \dot{v} = A \dot{u}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]$$


可以得到切線向量的長度

$$s^2 = |\dot{\bar{r}}|^2 = \dot{\bar{r}}^T \dot{\bar{r}} = \dot{u}^T A^T A \dot{u} = \dot{u}^T G \dot{u}$$

其中 $G = A^T A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \end{bmatrix}$ ， G 為曲面的第一基礎矩陣 (first

fundamental matrix)。

2-8 曲面之曲率

一般空間曲線 $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ，對 $\bar{r}(t)$ 微分兩次就可得到曲率 k ，如此 $\dot{\bar{r}} = s \bar{T}$

$$\text{且 } \ddot{\bar{r}} = \ddot{s} \bar{T} + s^2 k \bar{N} \text{。}$$

曲面 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 上有一曲線 $u = u(t)$ ，

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{s} \bar{T} + \dot{s}^2 k \bar{N} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2} \dot{v}^2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \ddot{u} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \ddot{v}$$

得到在曲面法向量 \bar{n} 方向上的分量

$$\ddot{\bar{r}} \cdot \bar{n} = \dot{s}^2 k \bar{N} \cdot \bar{n} = \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} \dot{u}^2 + 2 \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} \dot{u} \dot{v} + \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2} \dot{v}^2$$

因為 \bar{n} 垂直 \bar{T} ， $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ 以及 $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ 。曲率以矩陣來表示可得下式

$$\dot{s}^2 k \bar{N} \cdot \bar{n} = \dot{u}^T D \dot{u} \quad (2-43)$$

$$\text{其中 } D = \begin{bmatrix} \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} & \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} \\ \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v \partial u} & \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2} \end{bmatrix},$$

D 為曲面的第二基礎矩陣(second fundamental matrix)，為一對稱矩陣。

曲面在 $A\dot{u}$ 方向的正向曲率 k_n ，為曲面和包含曲面法向量及切線向量 $\dot{\bar{r}} = A\dot{u}$ 之平面，兩者相交曲線的曲率。對於此曲線， \bar{n} 會和 \bar{N} 垂直，如此便可以定義正向曲率 k_n

$$k_n = \frac{\dot{u}^T D \dot{u}}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{u}^T D \dot{u}}{\dot{u}^T G \dot{u}} \quad (2-44)$$

以此定義，當曲線轉向曲面法向量為負的方向時，曲率 k_n 是為負值。

在 \dot{u} 方面， k_n 出現最大值及最小值的方向，稱為正向曲率的主方向，

可以從上式推演，當出現最大、最小值時

$$(D - k_n G) \dot{u} = 0$$

$$\Rightarrow (d_{11} - k_n g_{11})u + (d_{12} - k_n g_{12})v = 0$$

$$(d_{21} - k_n g_{21})u + (d_{22} - k_n g_{22})v = 0$$

消掉 u 和 v ，得到

$$|G|k_n^2 - (g_{11}d_{22} + d_{11}g_{22} - 2g_{12}d_{12})k_n + |D| = 0$$

由上式可以解得最大曲率 k_1 和最小曲率 k_2 ，而兩者的乘積即為曲面的高斯曲率 K (Gaussian curvature)，從二次方程式的根的特性，可以得到下式：

$$K = \frac{|D|}{|G|} = k_1 k_2 \quad (2-45)$$

而平均曲率(mean curvature) $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ 。

曲面上一點的正向曲率的最大值 k_1 和最小值 k_2 稱為主要曲率，主要曲率在測量一般曲面上每一點的最大和最小彎曲。

若高斯曲率的值為正，表示曲面有局部的高起或低凹；若為負值表示曲面局部有鞍點；若高斯曲率值為零表示曲面至少在一個方向上是平坦的，如平面和圓柱的高斯曲率就有零值。

2-9 曲面之表面積

參數曲線 $u = u_0$ ， $u = u_0 + \delta u$ ， $v = v_0$ 及 $v = v_0 + \delta v$ 圍成的面積，如圖(2-8)所示，其表面接近平行四邊形平面，因此可以得到近似面積

$$\delta S \cong \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \delta u \delta v$$

其中

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = |\mathbf{G}|$$

g_{ij} 為第一基礎矩陣 \mathbf{G} 的元素。

因此曲面的邊界區域的面積對應 $u-v$ 平面上的區域 R ，可以積分來得到

$$S = \iint_R (|\mathbf{G}|)^{1/2} du dv \quad (2-46)$$

2-10 參數曲線之體積

因為三角錐的體積等於基底面積乘以垂直高度，所以 $ABCD$ 對原點 O 的體積為 $\frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)$ ，見圖(2-9)，因此 $u-v$ 平面上的區域 R

對應的總體積近似於

$$V = \frac{1}{3} \iint_R \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \quad (2-47)$$

2-11 數值分析-高斯積分

高斯積分法是在積分區間 $[a, b]$ 中選取 x_1, x_2, \dots, x_n 諸值以及常數 c_1, c_2, \dots, c_n 以使得對任意函數 f 的下列近似

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2-48)$$

可得到最小的誤差。為了量度此準確性，通常是假設這些值得最佳選擇乃為使公式的精確度最大。

由於 c_1, c_2, \dots, c_n 諸值是任意的，而 x_1, x_2, \dots, x_n 等諸值則只是限制欲求其近似積分值的函數必須定義在這些點上，因此總共含有 $2n$ 個參數，其中 n 個是得自常數 c_1, c_2, \dots, c_n ，而另外 n

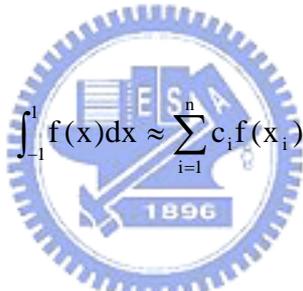
個則得自 x_1, x_2, \dots, x_n 。

如果將多項式的係數亦視為參數，則最多為 $2n-1$ 次的多項式乃含有 $2n$ 個參數，而且是(2-48)式能完全吻合的最大群多項式。如果能適當地選擇這些值及常數，則可得到完全吻合的此組多項式，也就是(2-48)式可設計至具有 $2n-1$ 的精確度。

首先用簡單的線性變換 $t=[1/(b-a)](2x-a-b)$ 轉移任何的區間 $[a,b]$ 成 $[-1,1]$ ，其中 $b>a$ ，則勒讓德多項式(Legendre polynomial)可用以近似

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt \quad (2-49)$$

而積分法則



$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2-50)$$

其中

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx \quad (2-51)$$

對於每個 n ，勒讓德多項式 f_n 具有 n 個皆位於 $(-1,1)$ 內的相異根 x_1, x_2, \dots, x_n 。

積分法則所需的常數 c_i 可由(2-51)式產生，但這些常數以及勒讓德多項式的根可廣泛地由表格列出。表(5-1)所列者乃 $n=2, 3, 4$ ，以及 5 時的這些值。

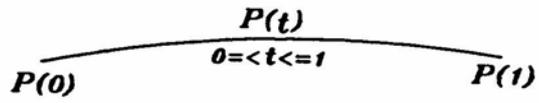


圖 2-1 Hermite Curve $P(t)$ 的幾何圖

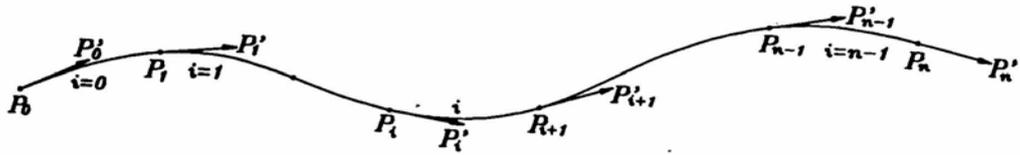


圖 2-2 n 條 Hermite Curve 幾何圖

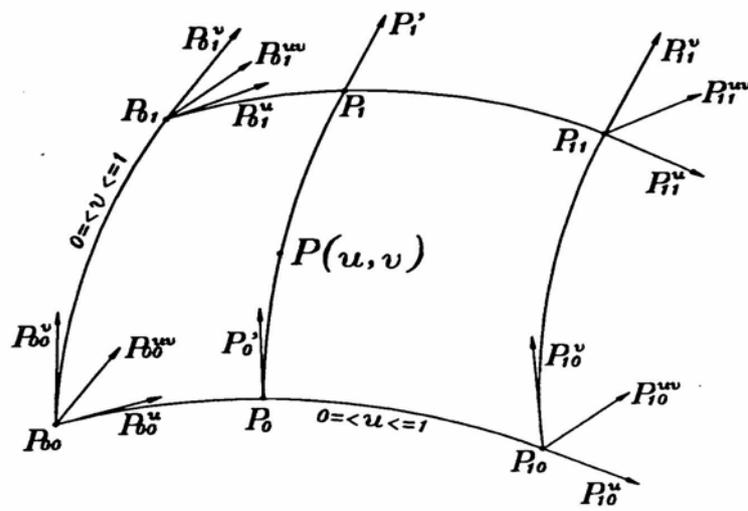


圖 2-3 四角孔氏綴面

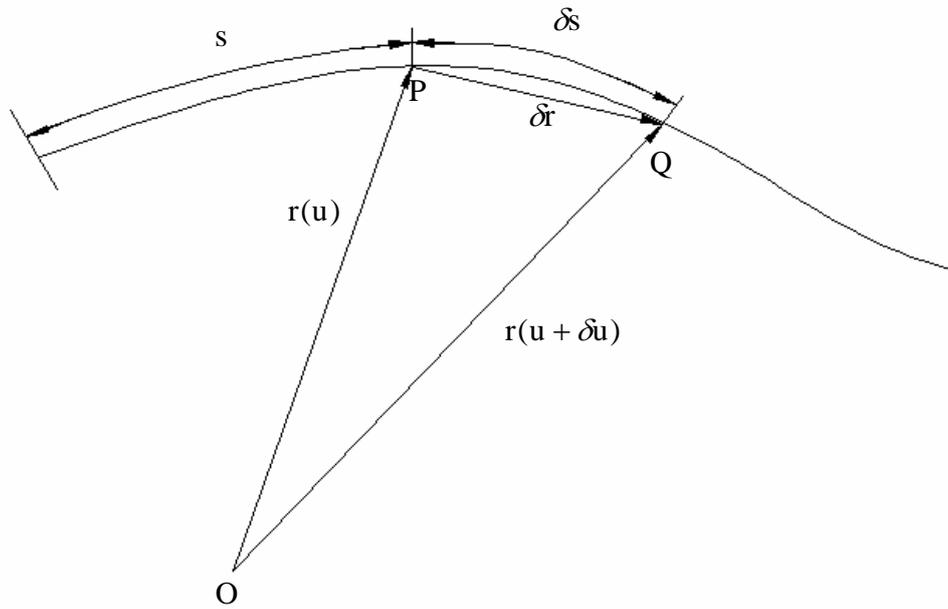


圖 2-4 曲線之切線向量

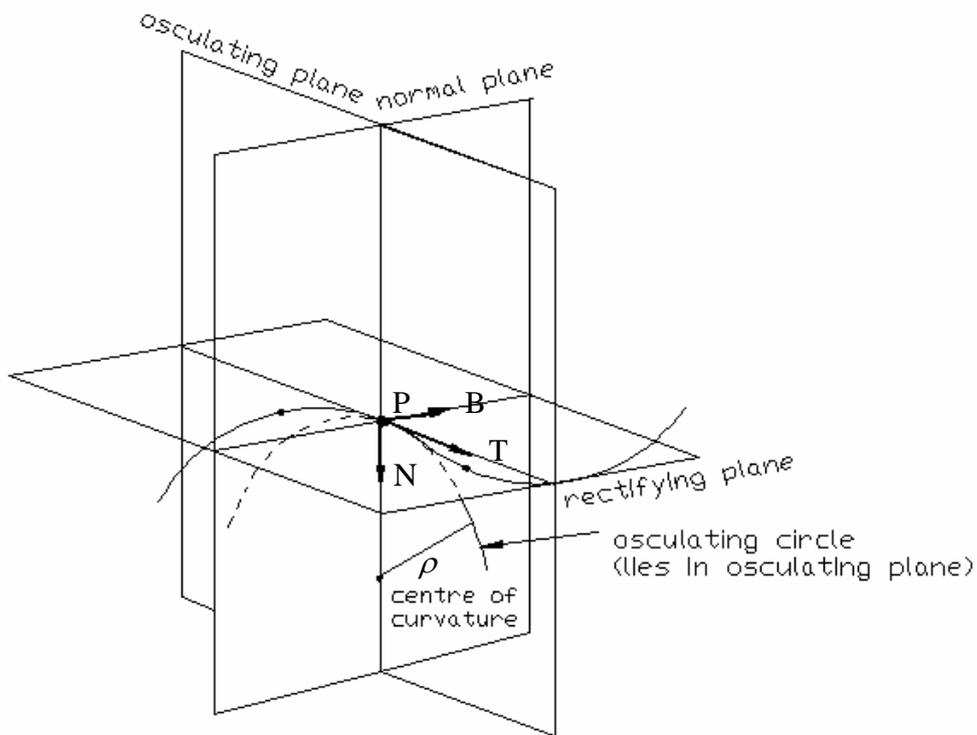


圖 2-5 三維曲線上三個方向向量

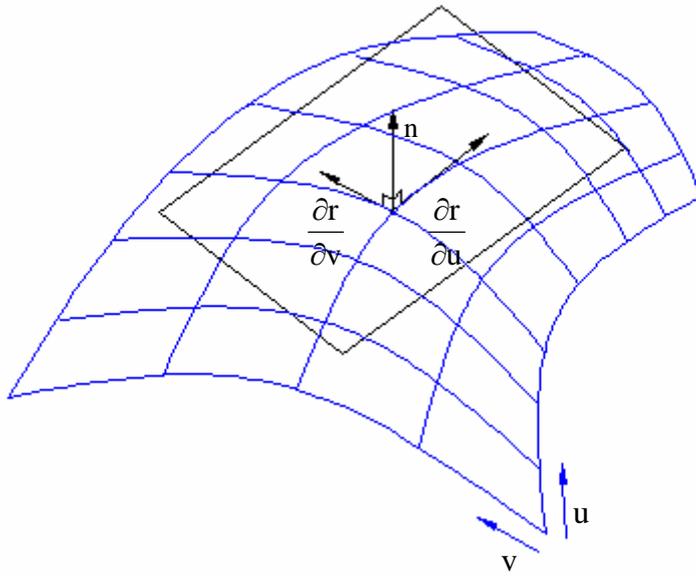


圖 2-6 曲面之法向量

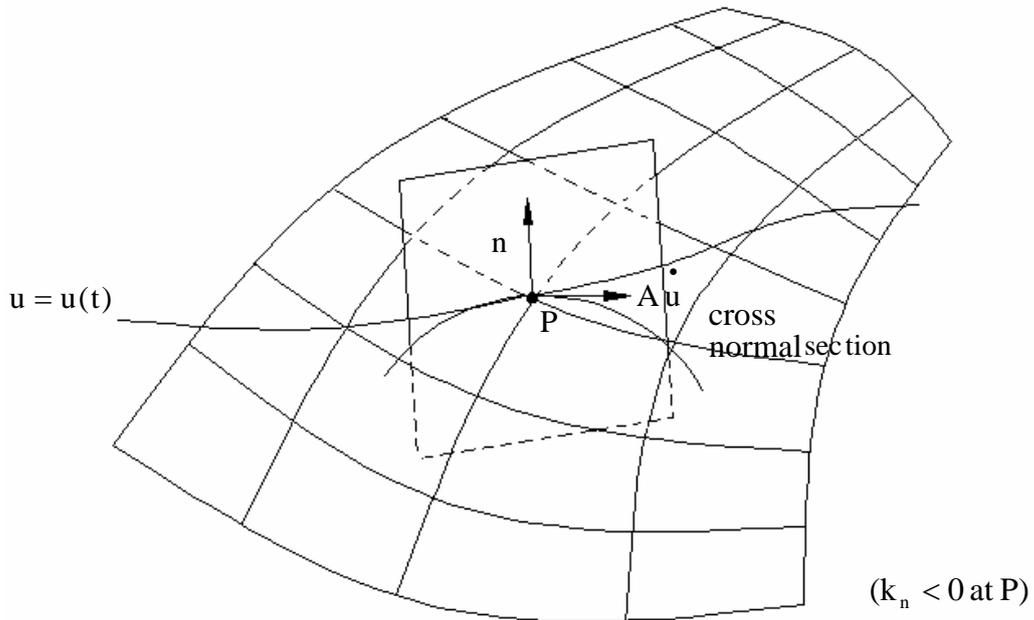


圖 2-7 曲面之曲率

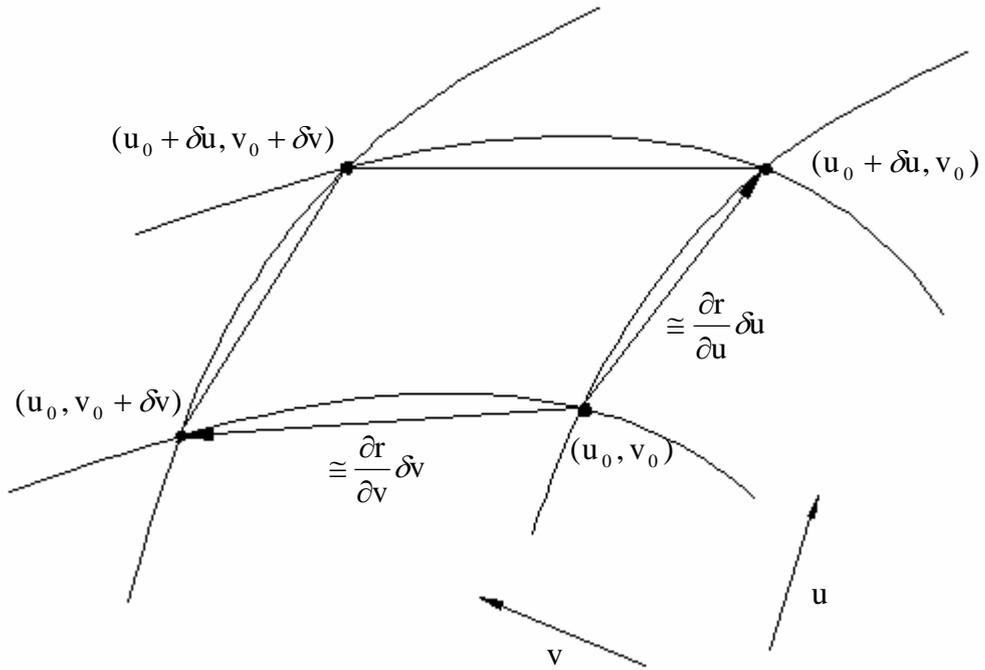


圖 2-8 曲面之表面積

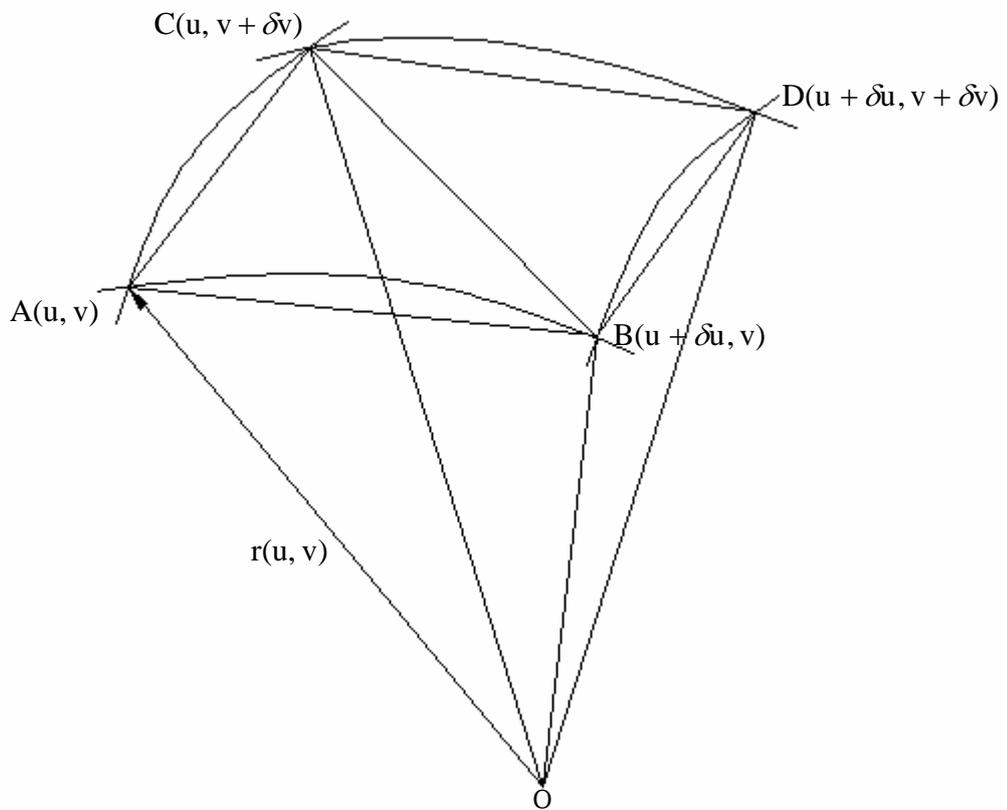


圖 2-9 曲面之體積

n	根	權量係數
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286750
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286750
	-0.9061798459	0.2369268850
6	0.9324695142	0.1713244924
	0.6612093865	0.3607615730
	0.2386191861	0.4679139346
	-0.9324695142	0.4679139346
	-0.6612093865	0.3607615730
	-0.2386191861	0.1713244924

表 2-1 高斯積分法之權量係數及根

三、曲面相交模型的建立

在建立大腿骨模型時，為求建立之截面精準度，必需以一平面與大腿骨相交，並且知道相交的位置，所以求取交線是建立模型重要的一環，而在大腿骨的模型建立時，情形並不那麼複雜，且我們都可以預料大略的相交情形為一封閉曲線，故本章的 SSI以相交出一個封閉

曲線為依據。所使用的演算法則介紹如下：

Bernhill於1989年對解決SSI問題的技巧提出了一套演算法則，那是一種步進法 (Marching Method)。這種演算原理也包含了五種不同的步驟：



- (1) 篩檢 (Culling)
- (2) 尋找起始點 (Starting point)
- (3) 找出真實交點 (Refinement)
- (4) 循跡 (Tracing)
- (5) 組成參數曲線 (Curve fitting)

3-1 篩檢(Culling)

將曲面模型先分割成彼此相連的四角綴面 (patch)，並將其按行列編號，使其在整個曲面模型當中有一明確位置，而此分割的粗細將會嚴重的影響到往後的速度，及尋找相交曲線的完整性。以往的分割

幾乎是隨設計者個人的喜好，但一般的分法是在曲面變化較大的部份採取較密的分割，因曲面變化大的地方僅以一四角綴面的四個角點之位置向量及 u, v 方向切線向量來描述，可能過於粗糙，所以將其細分使各綴面之曲面變化小於一定範圍以下，可使 SSI 過程更精確而快速，但也需注意不可太過嚴格，否則可能導致反效果增加運算時間，此一檢查工作，在一開始劃分綴面時就需進行，否則 SSI 進行至一半再回頭重新分割會增加相當長的運算時間，而要達到上述要求，則對各綴面進行下列檢查：

$$1 - T_i \cdot T_j < \text{linearity}$$

$$1 - N_i \cdot N_j < \text{flatness}$$

(3-1)



T_i 、 T_j 分別代表不同曲面點之切線向量 (包含 u 、 v 兩方向)，而 N_i 、 N_j 則代表法線向量，上式需要決定的是 *linearity* 及 *flatness*，這兩個數控制了整體的表現，檢查的方式是將各綴面之角點代入(3-1)式測試，若不合則進行細分，直到各綴面合於要求開始進行篩檢。

篩檢的目的在於以 *box test* 之方式，先找出不相交的綴面加以剔除，不用進行以下的計算以節省不必要的計算時間，先對各綴面找出一六面體可以完全涵蓋此綴面，稱之為 *bounding box*，而 *box* 之求取方式影響了是否會有相交誤判之現象發生 (即實際不相交而 *box test* 相交)，故 *box* 應在能完全包含綴面之條件下儘量減少其大小，如圖

(3-1)。首先選擇 V_1-V_0 ， V_3-V_0 為 box兩軸，再將此兩軸外積得出第三軸，再沿 $u,0$ 兩軸取出適當長度包含 V_2 ，再來決定 a軸上之邊長，其邊長為 $2H_a$ ，而 H_a 由圖(3-6)定義，其中 L_a 為 $\|V_2-V_1\|$ 及 $\|V_3-V_1\|$ 中較大者，而a為(4-1)式中linearity與 flatness較大者， H_a 定義如下：

$$H_a = \frac{L_a}{2} \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (3-2)$$

由上式可完整定出box，而若由於linearity及 flatness的限制夠嚴，使曲面不致變化曲度過大，則亦可採取產生較容易的極大極小法(Max/Min bounding box)進行檢查。

box 建立好之後，再來是做相交測試，方法是先將曲面一的box之十二個邊與曲面二的box 之六個面做線與面之相交測試，如有相交則停止此一對綴面之測試並記錄其編號，如無相交則對調兩曲面角色再進行試驗，若仍無相，交則剔除此對編號，直到兩兩綴面都進行完篩檢再將相交的綴面對進行以下的程序。

3-2 尋找起始點(Starting point)

針對上述得到的數對(pair)之四角綴面，以一定之參數間隔做出均佈於綴面參數域的參數點，於曲面一之綴面相鄰兩點連一線段，曲面二之綴面每四點間連成兩個三角形，對所有的線段與三角形找交點，首先需判斷線段是否與三角形所在平面相交，即線段兩端點在平面兩側，再判斷交點是否落於三角形內，即交點是否在三邊與其對頂

點所形成之三組平行線內，此一測試需投影至 xy, yz, zx 三平面分別測試，若以上測試皆通過，則可找到一起始點，則記錄此點位置及兩綴面上之參數值做為下面refinement中Newton-Raphson法的初值。

因為起始點只是在很接近曲面的平面上，故需以refinement將其逼近回兩曲面上，另每一綴面數對找到一起始點後，即可停止繼續進行下一數對，因為我們現在是簡單曲面相交，在每對綴面相交情形會有一條相交曲線。而每個數對皆求出一一起始點可用來檢查循跡出的相交曲線是否通過各refine後的起始點，藉此判斷是否找出了完整的相交曲線，若通所有數對，則SSI 結束，否則需對尚未經過的起始點進行以下相同的步驟。



另外因我們可預估飛機模型上的相交情形應只有一條封閉曲線，故為了節省計算時間，可以只求出一個起始點，就開始進行以下步驟，因可由這一點沿封閉曲線方向找出完整曲線，但如此曲線是否通過原起始點，與tolerance的取決有關，否則可能因為循跡的誤差使交線並未真正通過起點而使循跡無法中止，亦可能值太大而誤判曲線已通過原始點使相交曲線不完整。

3-3 找出真實交點(Refinement)

由3-2之步驟所找到的起始點，並非真正位於曲面交線上的點，因前述的線段及三角形都共通過參數點所構成之平面而非曲面，故起

始點與曲面的距離，隨所取之參數間隔以及(3-1)式所決定的linearity和flatness而定，所以似需要利用refinement來將前述之起始點逼近回曲面上得到真實之起始曲面點，才能進行循跡工作並且在循跡時會產生猜測點 (guess point)，這些點也並非曲面點，同樣的也需以refinement逼近回真實點，所以本步驟對SSI 整體的準確性及速度影響甚鉅。

Refinement之詳細做法是參考Houghton所提之方法，首先需有一起點與兩綴面足夠接近但不位於綴面上，先由此點對兩綴面找出最近點，即找出曲面上何者之法線向量通過起始點，找出這兩個最近點與起始點後再分別求通過此點對綴面之切平面，再做通過兩最近點與起始點之平面，三平面交於一點，見圖(3-4)，再以此點為起始點重覆上述步驟，直至前後兩次所求出之起始點距離小於一誤值時，即代表此點已逼近到距曲面某一微小範圍內，則refinement完成。

上述步驟中，最重要也最困難的部份是求綴面上之最近點， $(N-P) \times (N^u \times N^v) = 0$ 可依求解，其中 $(N^u \times N^v)$ 即為欲求之最近點之曲面法向量，未知數為 N 之 u, v 參數，兩個未知數，有三個非線性方程式可選取其中兩個方程式利用Newton-Raphson法求解，會遇到的問題是牛頓法需要一足夠接近解的起始值，我們在求起始點時已有記錄 u, v 起始值，但記錄的是相交測驗時的端點參數值，可能會因前項步驟所取的參數間隔過大而造成起始值不夠接近真實解，而使牛頓法發散無法

得致變歛值，首先可先做起始點與附近四個參數點的距離測試，因可能不用重新細分間隔，只要選擇的起始參數值是距起始點最近的就可使牛頓法收斂，而不必多花時間重做細分及找尋起始點的工作，但若此一方法仍無法改善發散情形，則只好重新細分再重覆之前的工作，等到refinement步驟完成我們即找到一實際位於曲面交線上（或十分接近）的起始點，再開始下面循跡的步驟。

3-4 循跡(Tracing)

由前節所得到的真實起始點開始以trace 的方式，可將一系列的相交曲線點找出，得到一完整的相交曲線。

首先我們必須先找出trace 的方向，先在起始點上對兩綴面做切平面，再以此兩切平面之相交直線的方向向量，做為我們循跡的方向，詳細求法是先求起始點在兩綴面上的法線向量 $S_1'' \times S_1^v$ 、 $S_2'' \times S_2^v$ 再由此兩法線向量外積得到交線之方向向量，因為在兩切平面上只有交線會同時垂直兩法向量，故循跡方向，見圖(3-5)。

方向決定後再來需選取一適當的步長(Stepsize)，步長若過長，則接下來的refinement工作，可能導致牛頓法無法收斂，但若取太短又會影響整體的速度表現，所以在此採用適應性步長(Adaptive Step Length)的方法，即根據起始點之曲率(curvature)來決定步長，因在trace 時會發生牛頓法發散的情形通常是在曲率較大而步長又過長時，使得

猜測點(guess point) 偏離曲面過遠所致，步長可依照 $L = \rho\Delta\theta$ 決定， ρ 是曲率半徑，而 $\Delta\theta$ 則為一固定的角度常數，首先欲求曲率半徑，先由起始點沿交線正負方向各取一微小距離得兩鄰近點，將此兩點以 refinement 方式逼近回相交曲線上，由此三點構成一緊密圓(osculating circle)可求出曲率半徑 ρ ，再定出 $\Delta\theta$ ，即可依此適應性步長，繼續循跡的工作。

將起始點沿交線方向取一步長長度，得一猜測點，再將猜測點逼近回曲線，再將新的曲線點定為起始點重覆以上 trace 動作，直到遇到曲面邊緣(非封閉曲線)，再由原起始點沿反方向循跡，直到遇到另一個曲面邊緣為止，完成一序列之曲線點，或者是循跡又再遇到原始起點(封閉曲線)，若我們做的是曲面簡單相交(即只有一條相交曲線)則 trace 結束，否則就需要檢查原先各數對中所存之所有起始點，針對尚未通過的起始點，做相同的循跡工作，直到所有的起始點都被通過為止。

3-5 組成參數曲線(Curve fitting)

循跡完畢後，所得到的是一序列的點，但為了便於應用，需組成曲線參數方程式，便於以後定義平滑接面(fairing patch)之邊界，採取的方式是在循跡時若曲面點越過邊界則將之前屬於同一個綴面的曲面相交點，以一三次曲線參數式來表示，方法是將一序列的相交點，

由一端開始計算出相鄰點間的距離，再將各點的參數值以此點之前的距離總合除以全部距離（即由 $t=0$ 到這點的曲線長度除以總曲線長）表示，則將各點代入三次曲線參數式，利用最小平方法(least square method)可找出這曲線的兩端切線向量，再配合起終點的位置可表示出一完整的曲線，即為最適合曲線，來表示兩曲面的相交曲線，由於我們在循跡時，取的點夠密集，所以可以各點間的距離和來表示曲線長度，求得最適合曲線。

3-6 圓柱-球交線測試

以4個例子測試:

(1)側面相交:圖(3-6)

(2)頂部相交:圖(3-7)

(3)頂部相交:圖(3-8)

(4)貫穿相交:圖(3-9)



3-7 曲面相交的應用

為求所建大腿骨外型的精準度，所以利用曲面相交模型的演算解決這個問題。首先建構一平面，讓平面與初步所建的大腿骨相交，以取得截面形狀，將相交截面與原始圖形做比對，若精準度差，則進一步用(4-7-3)節所述方法做調整，直到截面形狀與原始圖形契合。

3-8 齊次座標轉換

齊次座標乃是將n維座標T向量以(n+1)維表示，使轉換公式更加

簡單。以三維為例，特性如下

$$\mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ l & m & n & h \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

其中 T_h

旋轉

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & i & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

縮放

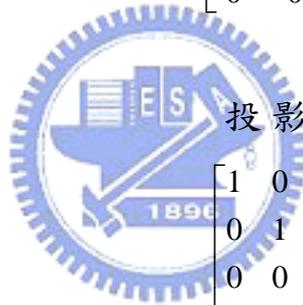
$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平移

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

投影

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



其中

對z軸旋轉 θ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對x軸旋轉 γ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對 y 軸旋轉 β

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



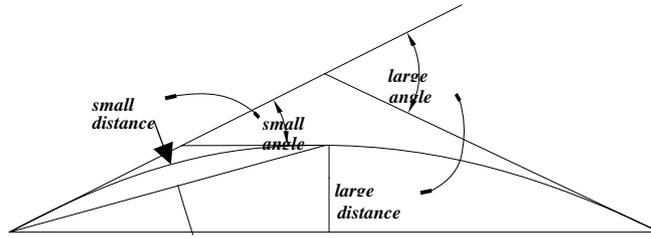


圖3-1 曲面平坦度限制

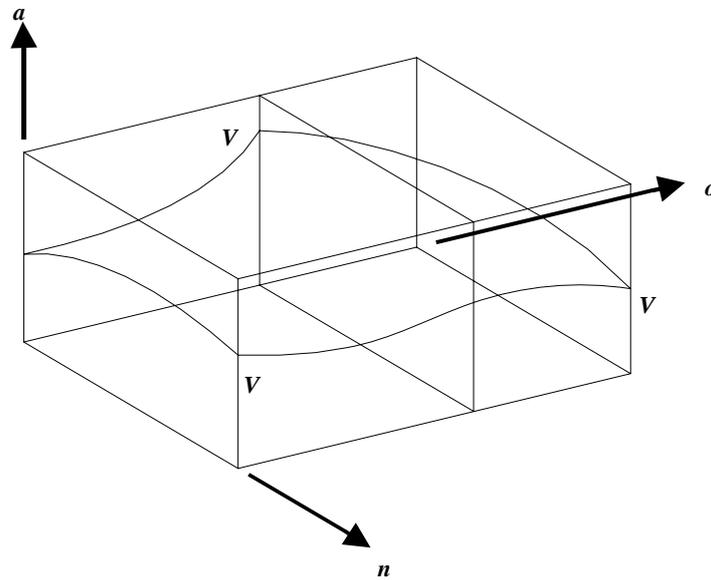


圖3-2 bounding box

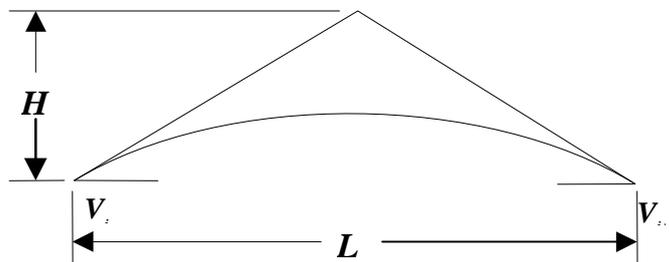


圖3-3 box之邊長決定方式

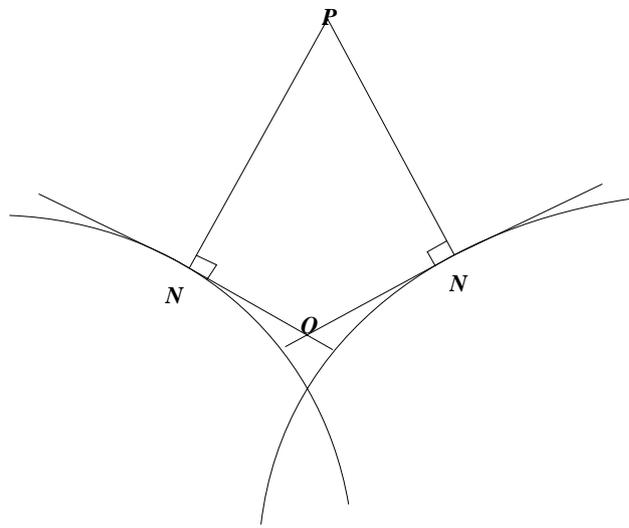


圖3-4 refinement

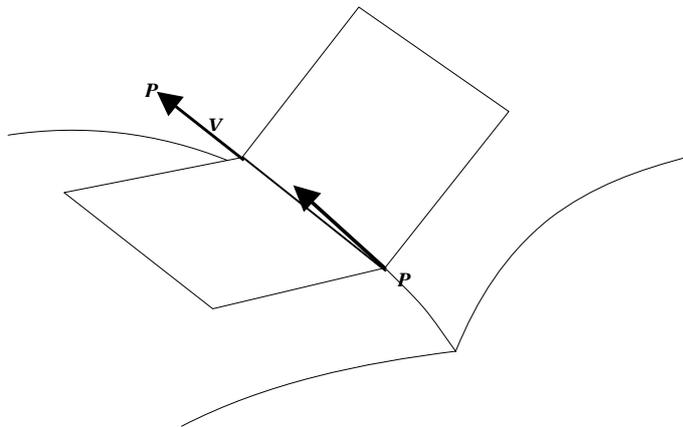


圖3-5 tracing

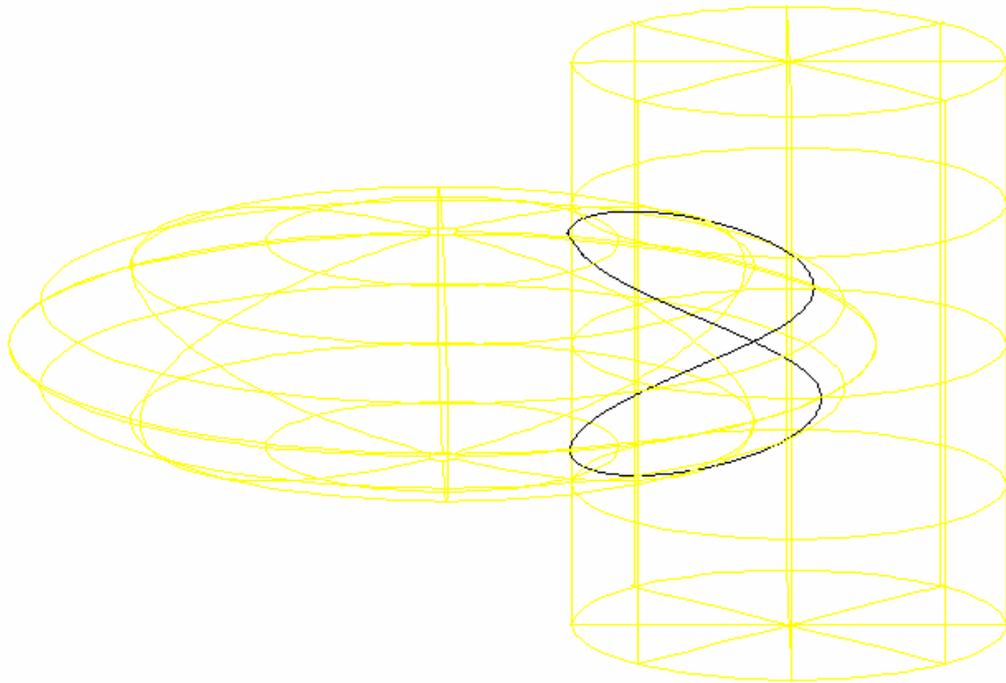


圖3-6 圓柱-球相交測試(側面相交)

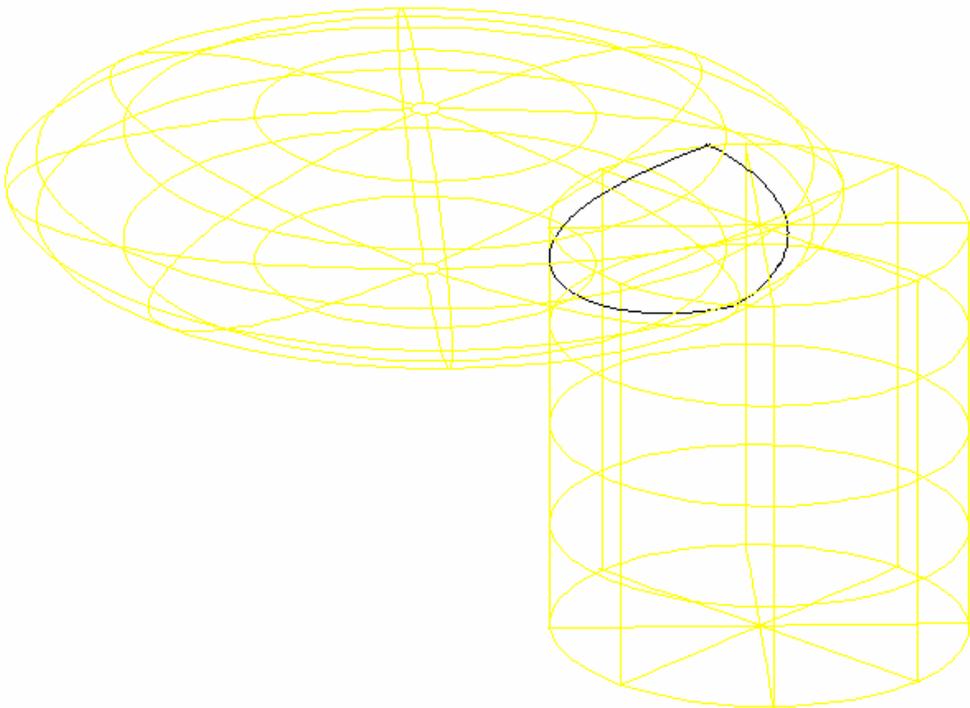


圖3-7 圓柱-球相交測試(頂部相交)

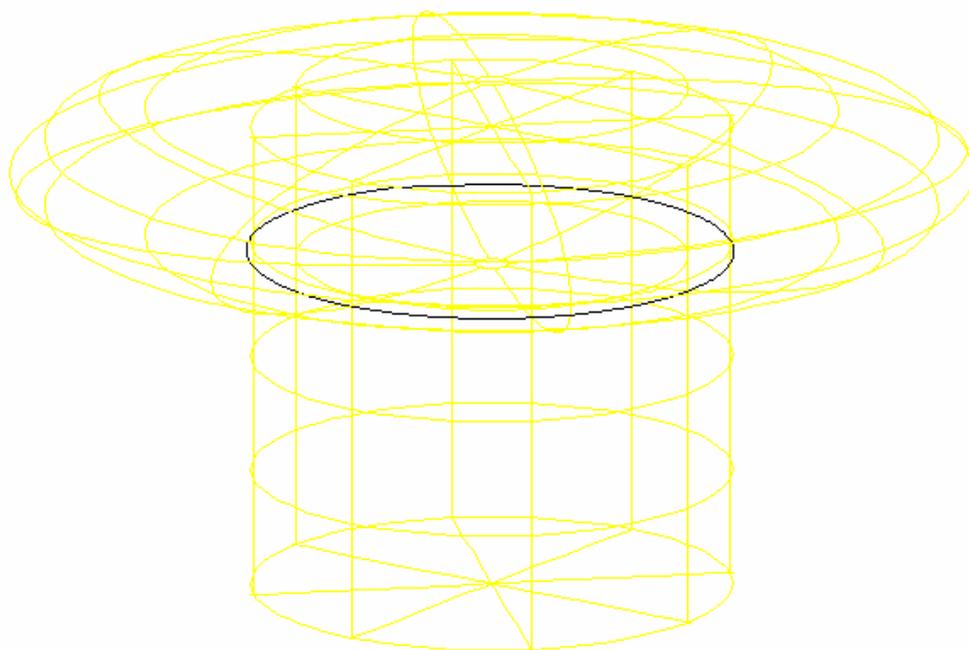


圖3-8 圓柱-球相交測試(頂部相交)

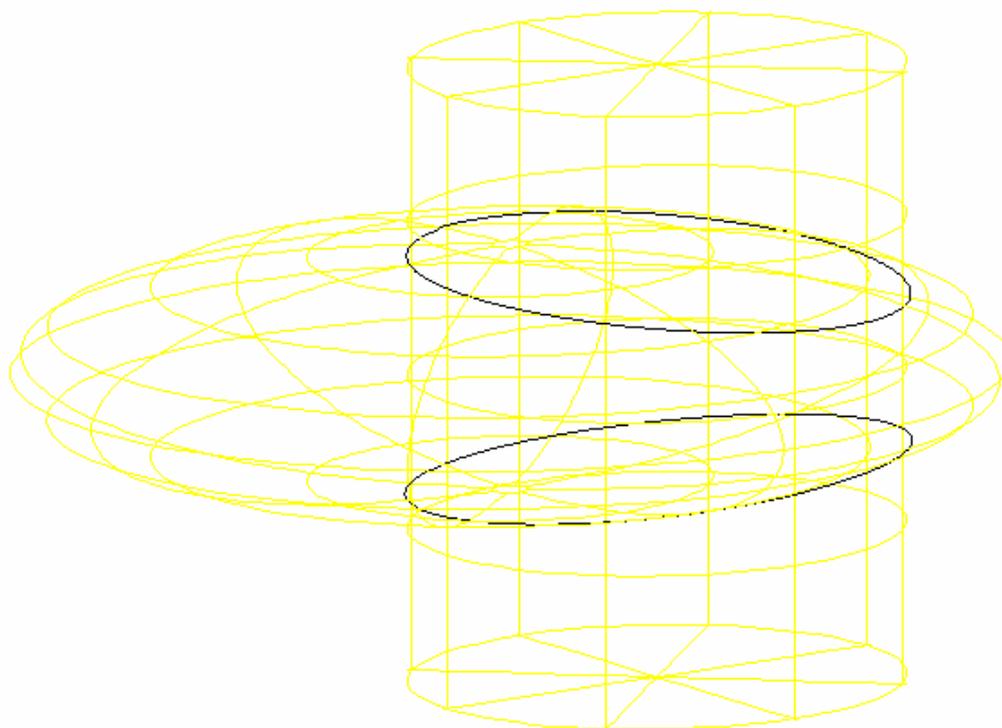


圖3-9 圓柱-球相交測試(貫穿相交)

四、影像處理

影像處理是利用計算機將從掃描器獲得的影像色彩濃淡型態予以數位化，然後可將此數位化影像視為一二維矩陣，行列決定點的位置，對應元素值決定該點顏色，一旦影像被數位化以後，便可以進一步重新安排圖面或利用圖形的資料，如此，不論是模型建立時截面資料的取得，或是工業上圖形的繪製都可以更加自動化。

4-1 電腦影像的特性

4-1-1 掃描轉換



掃描轉換 (scan conversion)，簡單來說，就是應用程式將電腦欲顯示之畫面訊息先轉換成圖像資料並儲存於圖框緩衝區 (frame buffer) 的程序。在此程序中，掃描轉換最主要的工作就是把圖形物體離散成一個個的像素，並將其訊號強度儲存起來。如圖(4-1)所示，在應用程式中，若有一畫紅色直線的繪圖指令，則在螢幕上顯示此線段前必須將此直線以最靠近此直線路徑的像素表示，並且儲存紅色訊息的強度。

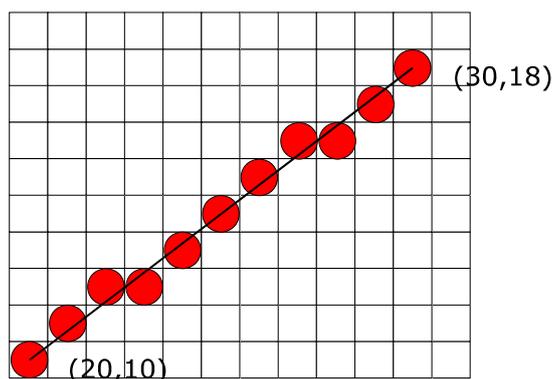


圖 4-1 數位化圖

4-2 影像灰階化

在電腦影像處理中，一般色彩的表示方式是將圖形上任一像素(將圖形離散化後最小的單位點)的紅色(R)、綠色(G)、藍色(B)三個顏色平面的值依 8、8、8 位元的順序存於一個 24 位元所構成的陣列之中，要將彩色變成灰階，就是讓 RGB 三個顏色值都化為相同，不管這個 RGB 是顏色對照表中的某一個，還是全彩影像的像素值：

在此採用以下的運算

$$\text{亮度} = 0.299 * R + 0.587 * G + 0.114 * B$$

其中

R: 紅色像素值

G: 綠色像素值

B: 藍色像素值

在處理影像時，為能把邊緣取出或要應用於工業上(如:以色差判讀應力)必須將彩色灰階化，以 RGB 形式圖檔而言，必須將所得影

像三原色分離，而一般儲存方式是以一 24 位元的位元組儲存，故必須利用前節所提之邏輯運算將 RGB 值取出，假設 RGB 值存於 T 這個位元組內，要將 RGB 一一取出，即以 8、8、8 順序拮取值出來，可以用以下的方法挑出值來，然後存於 8 位元的位元組中：

$$R = (T) \text{ AND } (0000000000000000011111111)$$

$$G = (T) \text{ AND } (0000000011111111100000000)$$

$$B = (T) \text{ AND } (1111111100000000000000000)$$

或以 16 進位表示

$$R = (T) \text{ AND } (0000FF)$$

$$G = (T) \text{ AND } (00FF00)$$

$$B = (T) \text{ AND } (FF0000)$$

4-3 影像平滑化



影像平滑化的目的在於模糊影像和減少雜訊。可用於從影像中消去小的細節，在做後續的邊界搜尋時，也可以把因為掃描時產生缺陷式的缺點加以改善；把直線或曲線的小縫隙連接起來。減少雜訊可使用一空間遮罩(Spatial Mask)使影像模糊完成。

圖(4-2)所示為用於影像平滑化得各種尺寸遮罩權重圖，遮罩中心的像素灰階值將簡化為遮罩範圍內所有像素的平均灰階，此方法又稱鄰域平均(Neighborhood Average)。圖(4-3)為利用 3×3 遮罩進行平滑化的例子。

$$\frac{1}{9} \times$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$$\frac{1}{25} \times$$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$$\frac{1}{49} \times$$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

圖 4-2 各種尺寸的平滑遮罩



國立交通大學

機械工程研究所

(a)

國立交通大學

機械工程研究所

(b)

圖 4-3 影像平滑化處理(a)原始影像 (b)使用 3×3 的遮罩

進行平滑化的結果

4-4 二值化

影像二值化是將具有灰階值的影像經過處理後，得到只具有黑白二值的影像，目的為使影像易於儲存與處理。

假設

$f(x,y)$ = 影像上座標為(x,y)的灰階值

T = 臨界值(Thresholding Value)

其中，臨界值為將像素分開的關鍵值，如果要將影像分為兩個群集(主體與背景)，其中一群集的灰階值大於臨界值；另一群集其像素的灰階值小於或等於臨界值。此方法稱為影像二值化(Bilevel Thresholding)。

可定義為

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } f(x,y) > T \\ 0 & \text{如果 } f(x,y) \leq T \end{cases}$$

以下圖(4-4)為影像二值化的例子:

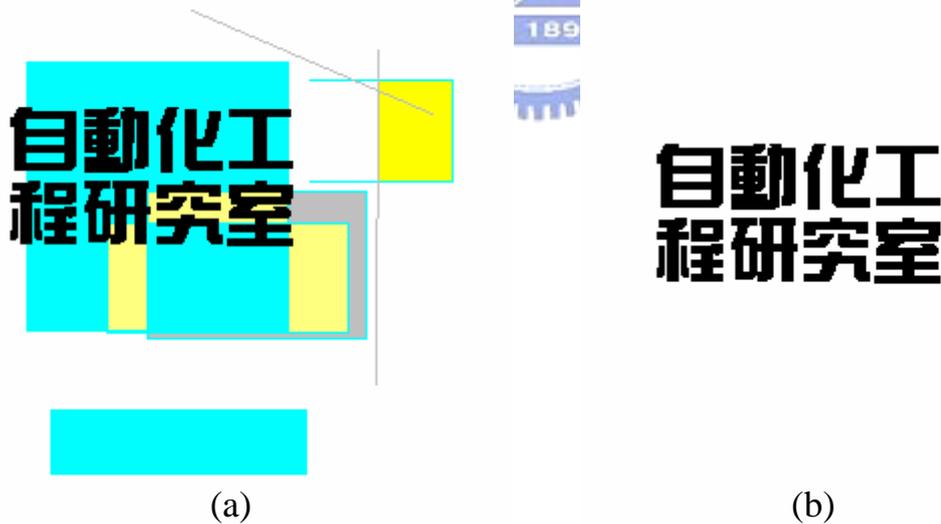


圖 4-4 影像二值化的例子(a)原影像 (b) $T=50$ 的二值化結果

4-5 邊界偵測

在影像處理中，邊界可視為灰度值的強烈變化，邊界偵測可將物

體和背景分開，並且能夠知道物體在圖面的確實位置，而常用處理方法為梯度運算(Gradient Operations)。

4-5-1 Robert Operator

定義與權重如圖(4-5)與圖(4-6)

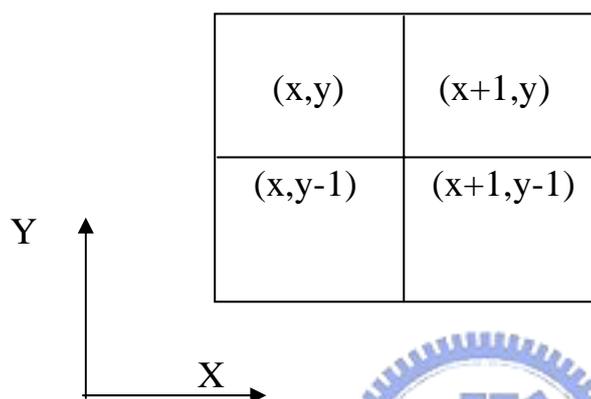


圖 4-5 2×2 方格視圖



1	1
-1	-1

圖 4-6 Robert Operator 權重圖

梯度絕對值 $G(x,y)$ 為

$$G(x, y) = \left\{ [f(x, y) - f(x+1, y-1)]^2 + [f(x+1, y) - f(x, y-1)]^2 \right\}^{1/2}$$

其中 $f(x,y)$ 為圖上座標 (x,y) 之像素灰階值

設 Θ 值為臨界值，則

$$G(x,y) > \Theta \quad (x,y) \text{ 為邊界上之點}$$

Dan,E.R 提出近似法以改善計算效率

$$G(x, y) = \max\{|f(x, y) - f(x+1, y-1)|, |f(x+1, y) - f(x, y-1)|\}$$

4-5-2 Sobel Operator

定義與權重如圖(4-7)

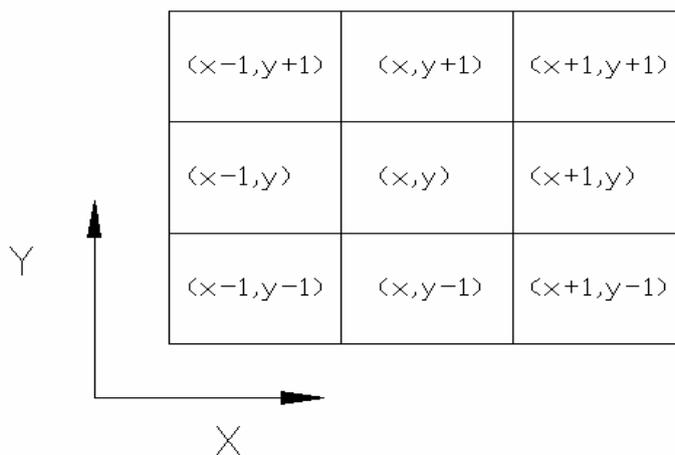


圖 4-7 3x3 方格視圖

X 方向

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Y 方向

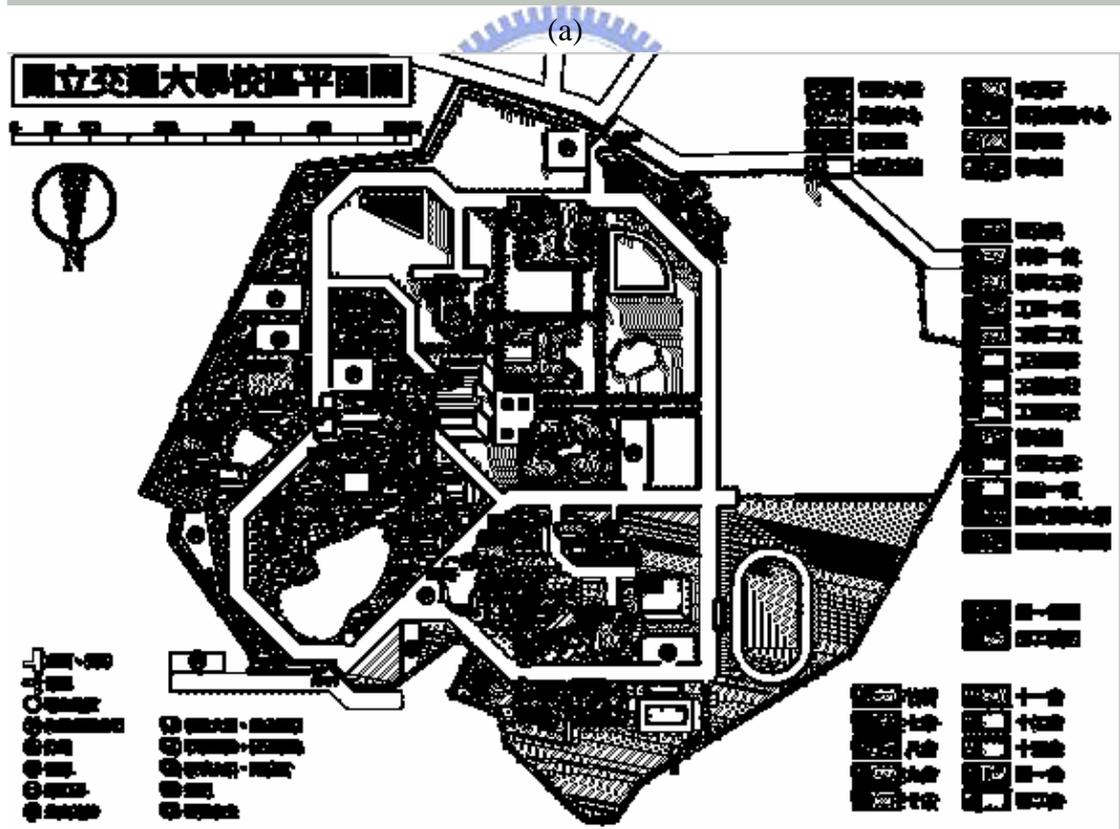
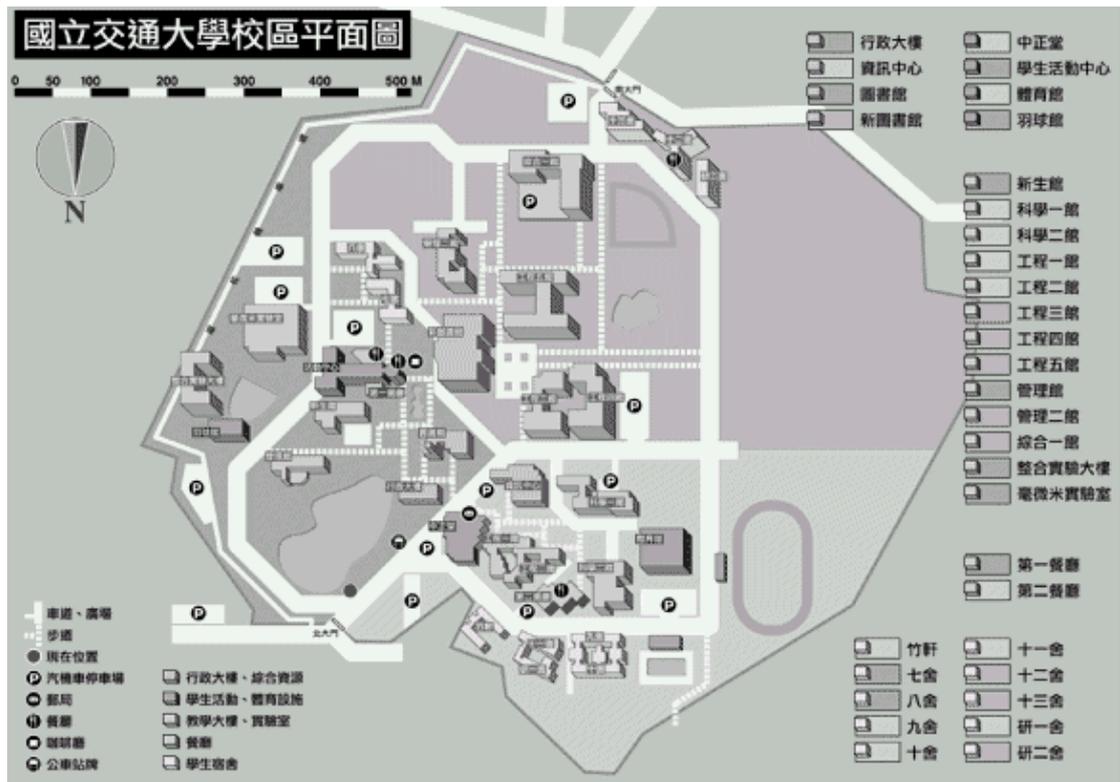
-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

圖 4-8 Sobel Operator 權重圖

梯度絕對值 $G(x,y)$ 為

$$G(x,y) = \left\{ [f(x+1,y+1) + 2f(x+1,y) + f(x+1,y-1) - f(x-1,y+1) - 2f(x-1,y) - f(x-1,y-1)]^2 + [f(x-1,y-1) + 2f(x,y-1) + f(x+1,y-1) - f(x-1,y+1) - 2f(x,y+1) - f(x+1,y+1)]^2 \right\}^{1/2}$$

以上所介紹邊界梯度運算子不管使用視窗大小，都有一權重圖，不同權重圖有不同的效果，一般來說，視窗愈大其所受雜訊愈小，但是相對的其 $G(x,y)$ 的運算愈複雜，處理速率愈慢。圖(4-9)即使用 Sobel Operator 進行影像邊界偵測之範例。



(b)

圖 4-9 影像邊界偵測範例(a)原始影像 (b)邊界偵測結果(使用 Sobel

Operator)(c)平滑-二值化結果(d)以平滑-二值化後偵測邊界結果



(c)
(d)

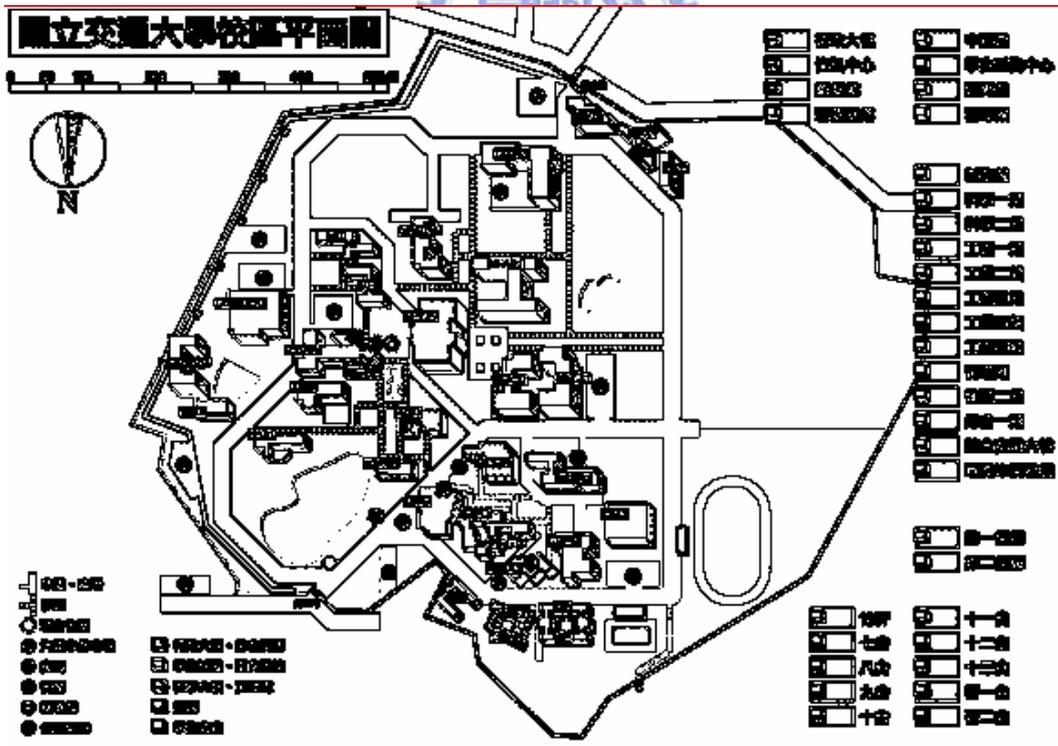


圖 4-10 影像邊界偵測範例(a)原始影像 (b)邊界偵測結果(使用 Sobel Operator)(c)平滑-二值化結果(d)以平滑-二值化後偵測邊界結果(續)

4-6 雜訊之消除

對於雜訊的消除方式有以下三種

4-6-1 化點

設定一消點圖形，如果圖形可以被完全包含，則視為雜訊，可將之刪除。如下圖所示：

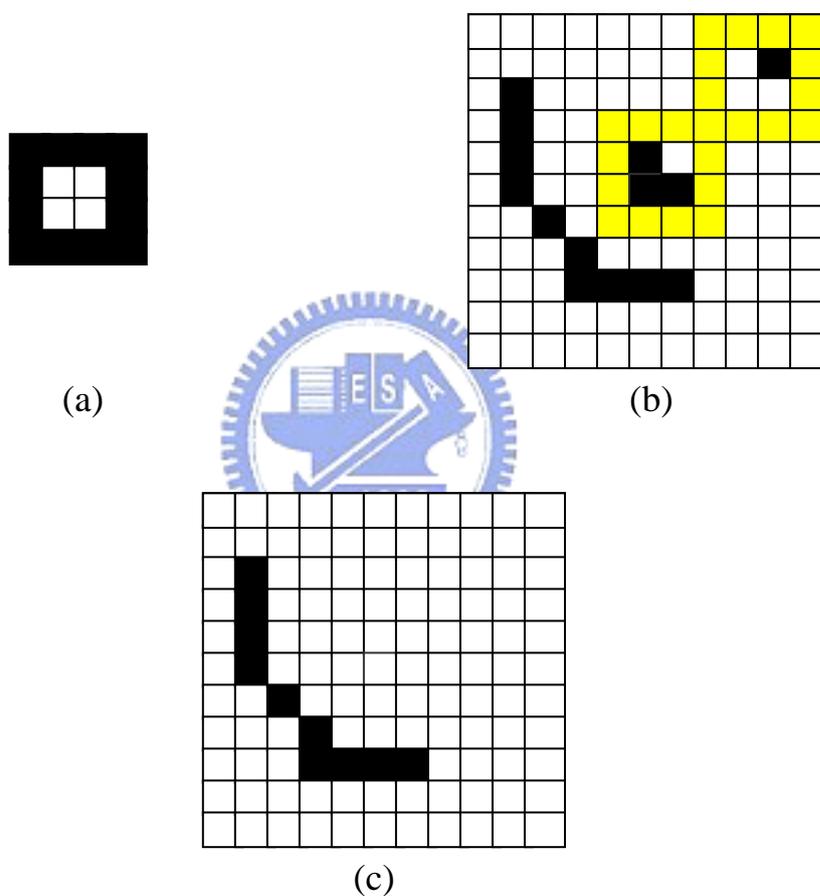


圖 4-11 化點例子(a)消點圖形(b)化點前(c)化點後

4-6-2 模糊-二值化

先將影像平滑化，再二值化，如此可消除影像中的小空點並可以對邊界進行補點的動作，惟必須慎選參數，才不致使影像產生非預期

的變化。如下圖所示：臨邊有三個以上的黑色的像素將會被轉換成黑色，反之，則被視為雜訊消除。

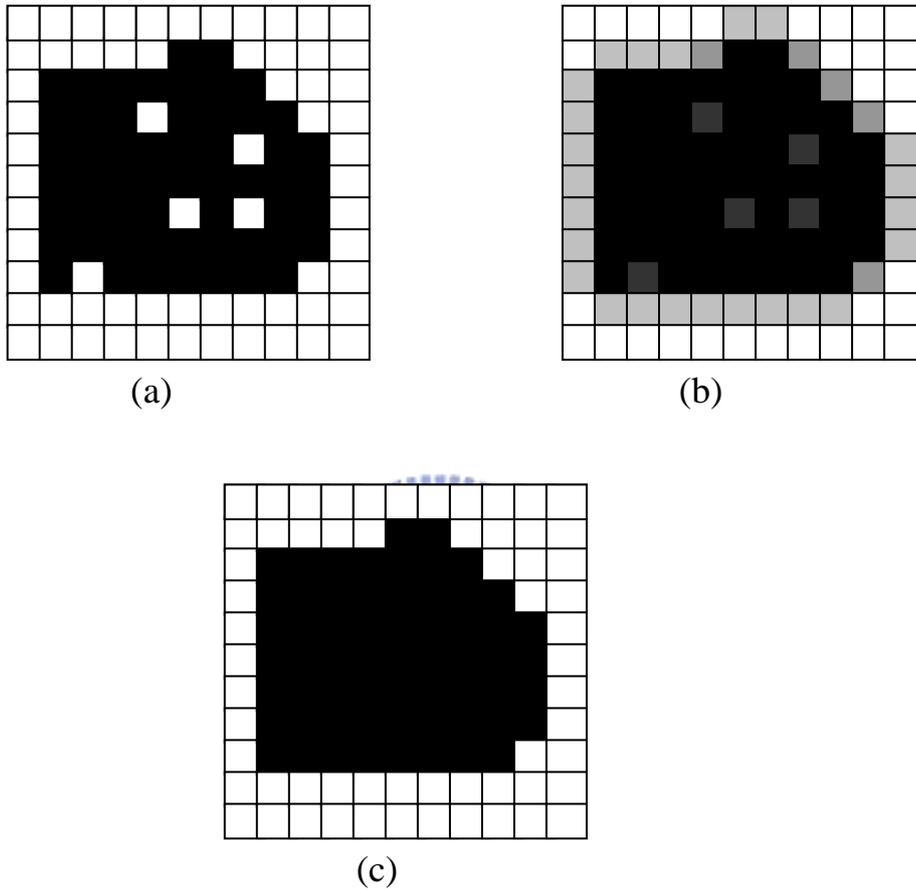


圖 4-12 模糊--二值化例子(a)原始圖形(b)模糊化(c)二值化

4-7 由影像處理建立模型

對於逆向工程而言，要對大腿骨如此不規則形狀進行量測與建立模型，如果以手動的方式進行，是非常瑣碎、耗費時間與容易出錯的，因此必須借助工具，因為獲得的是所謂的圖面，依照手動取點將會有很大的誤差，並且會有扭曲現象的問題，在此提出以影像量測的方

法，求出特徵點，如此不僅可以節省人工時間的浪費，更可以有餘力

對幾何外形進行研究，採取的作法如下：



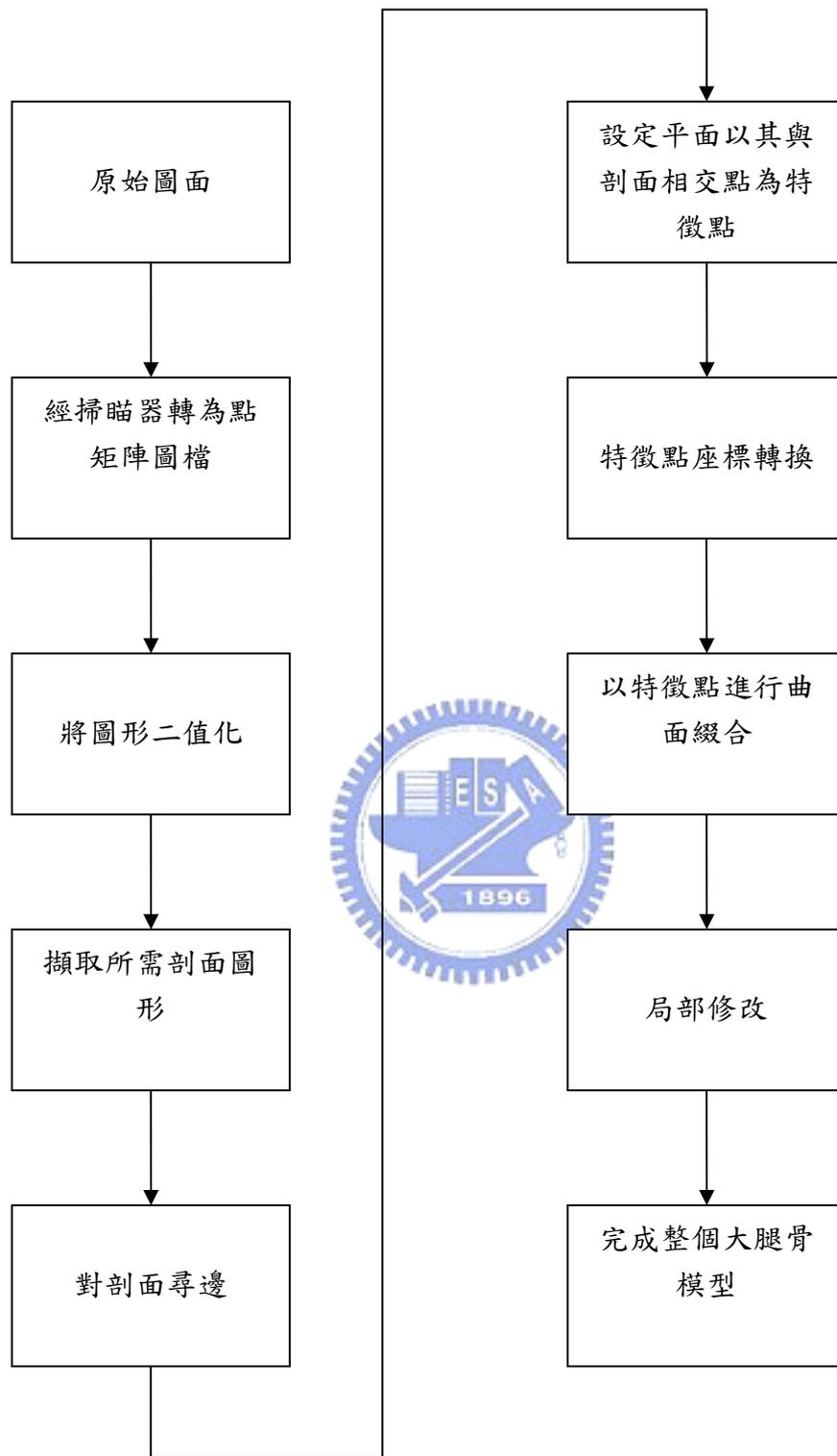


圖 4-13 由影像處理建立大腿骨模型流程圖

對於所得的影像，可以視為一個二維矩陣，必須將它進行處理，
才能得到所要的資料。

4-7-1 循邊

循邊的目的是要拈取出邊界點的串列，以便可以進一步得到剖面
邊界，演算法如下：

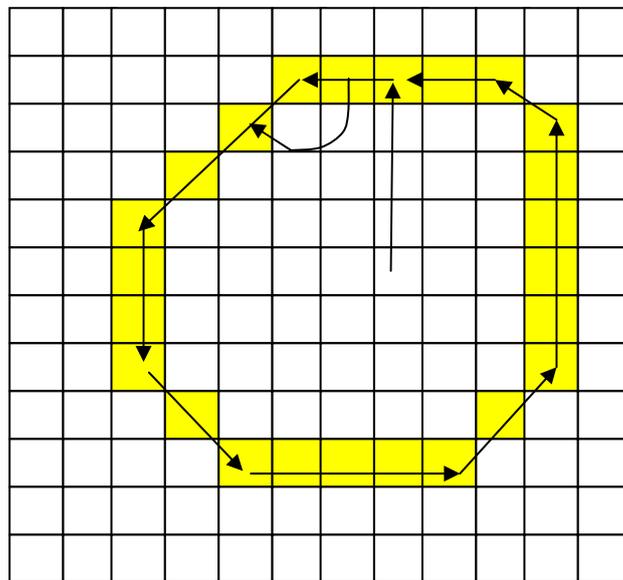


圖 4-14 循邊演算法

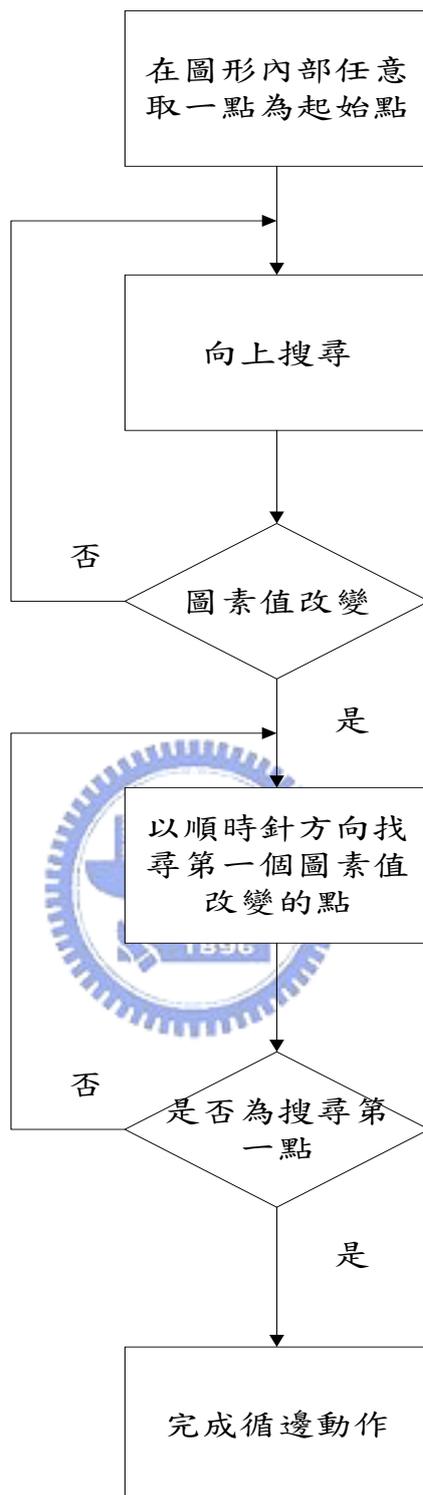


圖 4-15 循邊流程圖

4-7-2 座標轉換

在得到點的序列，會因為原始圖檔上每一個截面方向並不一致，或剖面實際座標即不同於圖面的二維座標，所以必須座標轉換。

在此，取大腿骨中間直立部份，先將其三個截面方向用座標轉換使成與近端部及遠端部截面的方向一致，再將(6-1)節所述三個截面上用來找特徵點的中心連接，使成一軸線，並且把第二個截面之中心定為座標原點，如此大腿骨近端部分就可以以此軸線和原點來做座標轉換。

4-7-3 曲線綴合

在找到原圖形輪廓的特徵點後，便可以以三次曲線綴合，理論見第三章，綴合以後即能以空間幾合的方法進行處理，可以用有效率的方法任意切割或組合，以達成所需的目的。

4-7-4 局部修改

因為大腿骨剖面形狀較複雜，如果只以三次曲線而連續條件綴合，會與原始圖面的剖面圖有所差距，為求準確度，必須要有所修正，本研究採取的方法是先將擷取的截面與原始圖面重疊，找出需要做局部修改的區間，該區間之二端點位置不移動，而改變端點的邊界條件，也就是斜率，雖然所建立之截面曲線為連續，調整端點斜率會影響到相鄰區間的圖形，若端點不為轉折點，還是可以修改至所需的圖

形，但若相鄰區間其交界點為轉折點，調整其斜率無法同時使兩相鄰區間之曲線與原始圖面契合，就必須以不連續的邊界條件來處理。

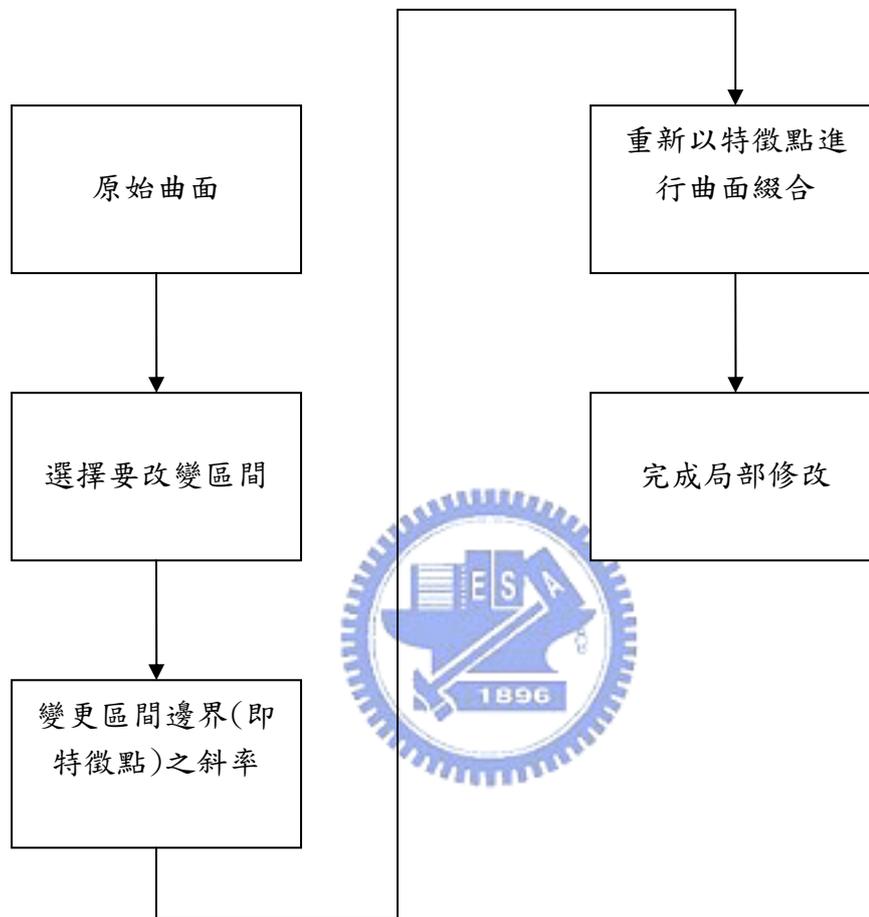


圖 4-16 局部修改流程圖

五、大腿骨幾何模型之建立

5-1 雞蛋模型測試

由於大腿骨形狀較複雜，且第二章所述之體積與表面積的計算皆為近似值，擬先用簡易模型做測試，選定以半圓球及半橢圓組合之雞蛋模型，圖(5-1)，因其外型非對稱，且正確的曲率、體積、表面積皆為已知，因此可用來與第二章之計算結果做比對，了解以曲面幾何微分方法做運算，其精準度為何。

一開始先在圓球半徑為 1，橢球長軸為 2、短軸為 1 之雞蛋模型上選定特徵點，若特徵點不在同一平面上，會造成扭曲的現象，因此經度方向每隔 22.5° 緯度方向每隔 45° 取特徵點，使用循環端點的邊界條件計算特徵點在緯度方向的切線斜率；特徵點在經度方向形成四條經度圈，如圖(5-2)，以循環端點的邊界條件計算四條經度圈的切線斜率，然而由圖(5-2)可看出此模型之 y 軸已超過 $[-1, 1]$ 的範圍，不符合原先所設定，且與長軸相鄰的曲面趨近平坦，因此需在橢球部分另設特徵點。

設定雞蛋模型右半圓球部份，以 45° 均分，移動左半橢球上之特徵點隨 θ 角移動，圖(5-3)，首先 θ 的範圍必須在 $[20^\circ, 37^\circ]$ 之間，封閉曲線上的點才會落在 X 軸 $[-2, 1]$ 和 Y 軸 $[-1, 1]$ 之間，計算此範圍內每

增加 1° 其扭曲、體積以及表面積，若繼續使用循環端點之邊界條件計算四條經度圈的切線斜率，會造成曲線扭曲，如圖(5-4)，其扭曲值與 θ 之關係參見表(5-1)，其中第二條和第四條經度圈之扭曲值必為 0，表(5-1)只列第一條和第三條經度圈之扭曲值，由表(5-1)可看出 θ 愈大，扭曲雖然會愈小，但是其值不在可接受的範圍，雖然計算之表面積很接近精確數值，然而曲線扭曲很大，須將原本的四條經度圈打開使成八條經度線，用自由端點的邊界條件去計算經度方向的切線斜率。 θ 角逐次增加 1° ，並記錄每次體積及表面積之變化，找出比較接近精確數值且扭曲較小的角度。



結果顯示無論 θ 角度如何變化，計算出來的體積與表面積定會小於精確數值，其中又以體積誤差較大，表面積則接近實際數值，對於扭曲而言，在奇點附近取的八個特徵點有扭曲，其餘特徵點扭曲值皆為 0，表(5-2)之 torsion 一欄，列出此八個點之扭曲值，由表(6-2)可以看出在 $\theta=26^\circ$ 時其扭曲為最小； $\theta=28^\circ$ 時表面積最接近精確值； $\theta=32^\circ$ 時體積最接近精確值。

再用半徑等於 1 的圓球做驗證，表(5-3)為真正數值與計算所得數值之比較，用曲面原理計算所得之體積與表面積皆會小於精確數值，又以表面積誤差最小，且不論是雞蛋模型或是圓球模型，其體積和表面積誤差百分比均在 1% 以下。

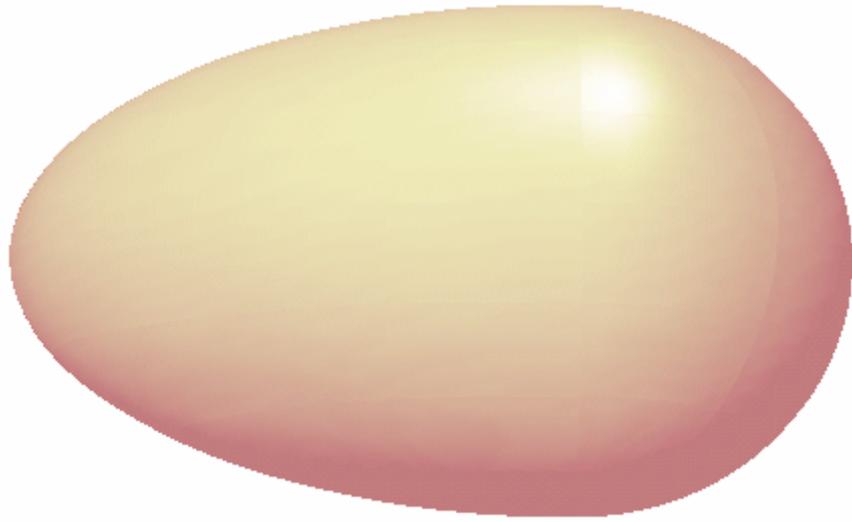


圖 5-1 雞蛋模型

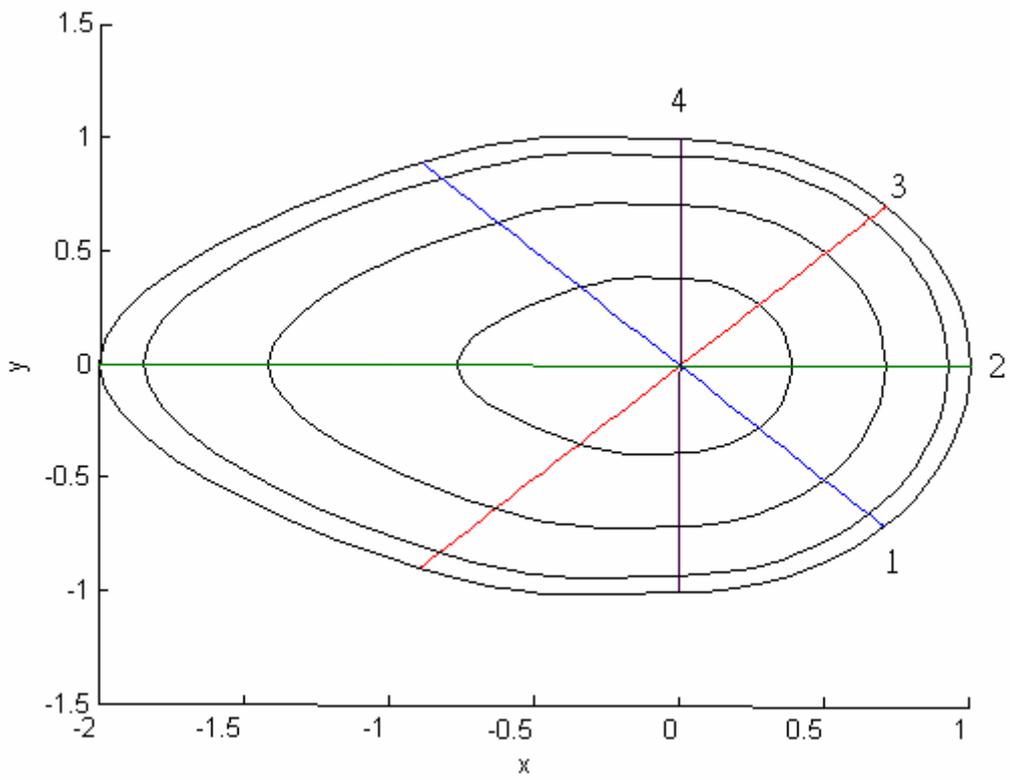


圖 5-2 特徵點形成四條經度圈

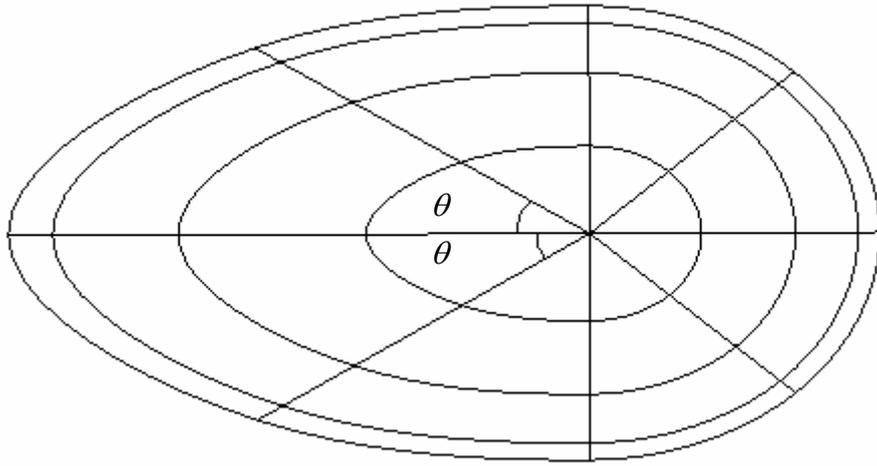


圖 5-3 以 θ 角取雞蛋模型之特徵點

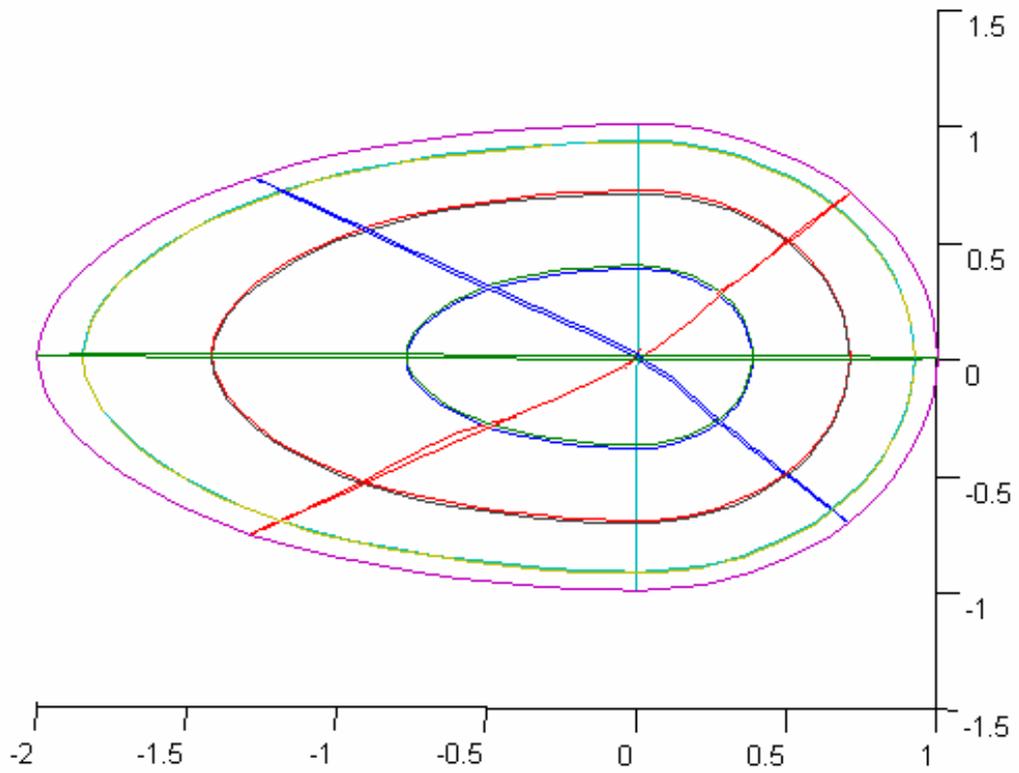


圖 5-4 循環端點邊界條件造成曲線扭曲

θ	torsion	體積	表面積
		6.2832	17.0224
20°	一 : 4.7195, -0.0185, -0.0282, -0.0056, 0.0223, -0.0198, -0.1548, -0.3451, 4.7195, 0.1027, 0.0389, -0.0673, 0.0323, -0.2359, 0.2137, 1.9141 三 : 0.1241, 0.0350, 0.0519, 0.0087, -0.0289, 0.0196, 0.1558, 0.3452, -4.7138, -0.1028, -0.0385, 0.0647, -0.0256, 0.1791, -0.1608, -1.5529	6.1494	16.9421
25°	一 : 0.5225, -0.0171, -0.0266, -0.0052, 0.0200, -0.0181, -0.1459, -0.3190, 0.5225, 0.1201, 0.0375, -0.0439, 0.0283, -0.1541, 0.2057, 2.2376 三 : 0.2347, 0.0284, 0.0437, 0.0073, -0.0245, 0.0180, 0.1466, 0.3190, -0.5224, -0.1201, -0.0372, 0.0423, -0.0235, 0.1229, -0.1629, -1.8939	6.2201	16.9958
30°	一 : 0.2451, -0.0154, -0.0245, -0.0046, 0.0172, -0.0160, -0.1345, -0.2861, 0.2451, 0.1732, 0.0358, -0.0274, 0.0235, -0.0960, 0.1966, 3.2277 三 : 3.3530, 0.0222, 0.0354, 0.0059, -0.0198, 0.0160, 0.1349, 0.2861, -0.2451, -0.1733, -0.0356, 0.0265, -0.0204, 0.0807, -0.1645, -2.8876	6.2452	16.9987
36°	一 : 0.1494, -0.0133, -0.0220, -0.0039, 0.0141, -0.0137, -0.1209, -0.2482, 0.1494, 0.6576, 0.0340, -0.0169, 0.0185, -0.0594, 0.1864, 12.2522	6.2325	16.9510

	三：-0.2680, 0.0169, 0.0280, 0.0046, -0.0154, 0.0136, 0.1212, 0.2482, -0.1494, -0.6576, -0.0339, 0.0165, -0.0169, 0.0528, -0.1653, -12.8088		
--	--	--	--

表 5-1 以循環端點邊界條件計算不同 θ 角其經度方向之扭曲



θ	torsion	體積	表面積
		6.2832	17.0224
20°	0.0261, 0, -0.0261, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.1497	16.9031
21°	-0.01, 0, 0.01, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.1745	16.9241
.			
25°	-0.0332, 0, 0.0332, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2205	16.9577
26°	0.0005, 0, -0.0005, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2270	16.9611
27°	0.0268, 0, -0.0268, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2326	16.9633
28°	0.0213, 0, -0.0213, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2410	16.9645
29°	-0.0657, 0, 0.0657, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2439	16.9635
.			
31°	-0.1100, 0, 0.1100, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2468	16.9580
32°	0.0685, 0, -0.0685, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2469	16.9536
33°	-0.0028, 0, 0.0028, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2460	16.9480
34°	-0.0341, 0, 0.0341, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2415	16.9335
35°	-0.0437, 0, 0.0437, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2379	16.9246
36°	-0.0887, 0, 0.0887, 0.0344, -0.0402, 0, -0.0877, -0.0985	6.2332	16.9146

表 5-2 改變 θ 角計算扭曲、體積及表面積

圓球	實際數值	用曲面原理計算所得數值	誤差
體積	4.1888	4.1799	0.212%
表面積	12.5664	12.5513	0.120%

表 5-3 比較半徑 1 之圓球其計算值與精確值

5-2 特徵點之選取方式

經由(2-3)節曲面形成的知識,即可開始著手建立複雜曲面的模型。在建立大腿骨模型的曲面之前,首先必須得到其曲面上的特徵點。

要得到曲面上的特徵點,可由原始資料所提供之大腿骨截面來建立,見圖(6-5)。當選定每個截面之特徵點後,根據雙三次曲面原理,即可在大腿骨的表面建立四角綴面。倘若給定綴面編號及綴面上之 u 、 v 參數值,即可找出曲面模型上的點位置。

一般建立曲面模型時,會先取得模型的幾個截面外形輪廓,如圖(6-5)所示;在找特徵點時要注意:因為採用 Ferguson patch,各角點之扭轉向量為零,如果特徵點不在同一平面上,會造成扭曲的現象,所建立的模型便不會滿足所要求的形狀,因此,擬將所得截面從形心畫出放射狀的直線與輪廓線相交,當作特徵點,但如果全部截面採用原來的形心作放射線分割找特徵點時,會造成大腿骨形狀與現實不符,所以必須再找出截面較適當中心點當作分割的依據,且這些中心點必須在同一軸線上,再對原截面對切割面做交點,畫出同平面的特

徵點，如此，即可防止曲面扭曲的產生。而近端部分之軸線因傾斜 55° 角，因此還必須將近端部之特徵點依軸線作座標轉換。為防止扭曲的產生，近端頂部之奇點需在近端軸線上，在軸線之延長線上選定一適當點當作近端之奇點。

5-3 邊界條件與奇點的處理

依據第三章所提，要建立曲面必須要有點座標、及點上的切線斜率，所以必須定義邊界條件以便計算並完整描述整個大腿骨的幾何模型。

建立模型時，對近端部、直立部與遠端部剖面方向採取循環端點的邊界條件，因為近端部分頂部為圓錐狀，其錐底為幾何不連續，因此計算大腿骨之縱向切線向量時以自由端點但不連續的條件來處理，其中 $\dot{\bar{P}}_{i+1}(0) = \beta \dot{\bar{P}}_i(1)$ ，將(2-12b)式改寫

$$2\dot{\bar{P}}_0 + \beta \dot{\bar{P}}_1 = 3(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$2\dot{\bar{P}}_n + \dot{\bar{P}}_{n-1} = 3(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$$

再把上式帶入(2-14)式求取縱向曲線資料點切線向量，圖(5-6)分別為連續($\beta=1$)及不連續($\beta=3$)之結果。以上沒有把近端奇點之切線向量列入計算，近端奇點之切線向量用已知近端 level I 之切線向量以固定端點邊界條件算出即可。

在建立幾何模型時，在近端的頂點會因為兩點座標相同而有四角

綴面退化的情形發生，如果依照邊界條件會造成(2-14)矩陣行列式值為 0，解決這個問題可在奇點附近取應滿足邊界條件點數的不同位置的極靠近的點，這樣矩陣值將不會為 0，可以繼續後續的步驟。

5-4 曲面相交原理作局部修改

採取三次曲線而連續條件以特徵點去綴合的截面外型輪廓，與原始圖形會有所出入，因此初步完成的大腿骨模型還需要做截面的局部修改，首先建立一與大腿骨模型相交之平面，利用曲面相交原理找出相交曲線，將曲線與原始圖形比對，做局部修改，然後再做一次曲面相交，如此反覆動作直到相交曲線準確為止，圖(5-7)為一平面與大腿骨做曲面相交，圖(5-8)為遠端部三個截面用曲面相交作局部修改的結果，(a)為局部修改前，(b)為局部修改後，其中紅色為原始圖形，藍色為所建立之截面圖形。

5-5 大腿骨模型

將原始圖檔經過第四章及 5-1~5-3 節的處理，可以得到以下的結果，圖(5-9)為大腿骨之前視圖及後視圖，圖(5-10)為以第二章之原理計算大腿骨隨意一點曲率的結果：

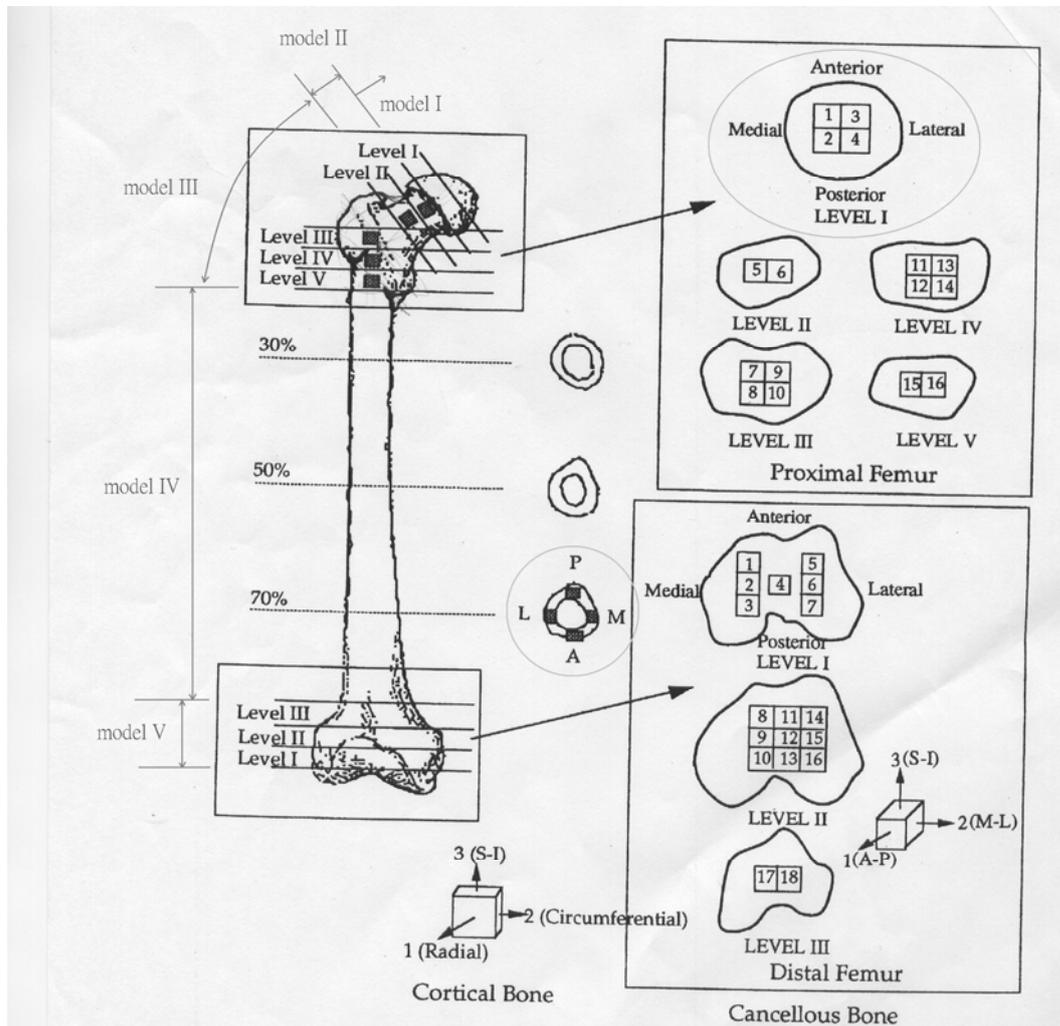


圖 5-5 大腿骨輪廓之原始資料圖形



$\beta=1$ (曲線連續)

$\beta=3$ (曲線不連續)

圖 5-6 以曲線連續及不連續條件演算之結果

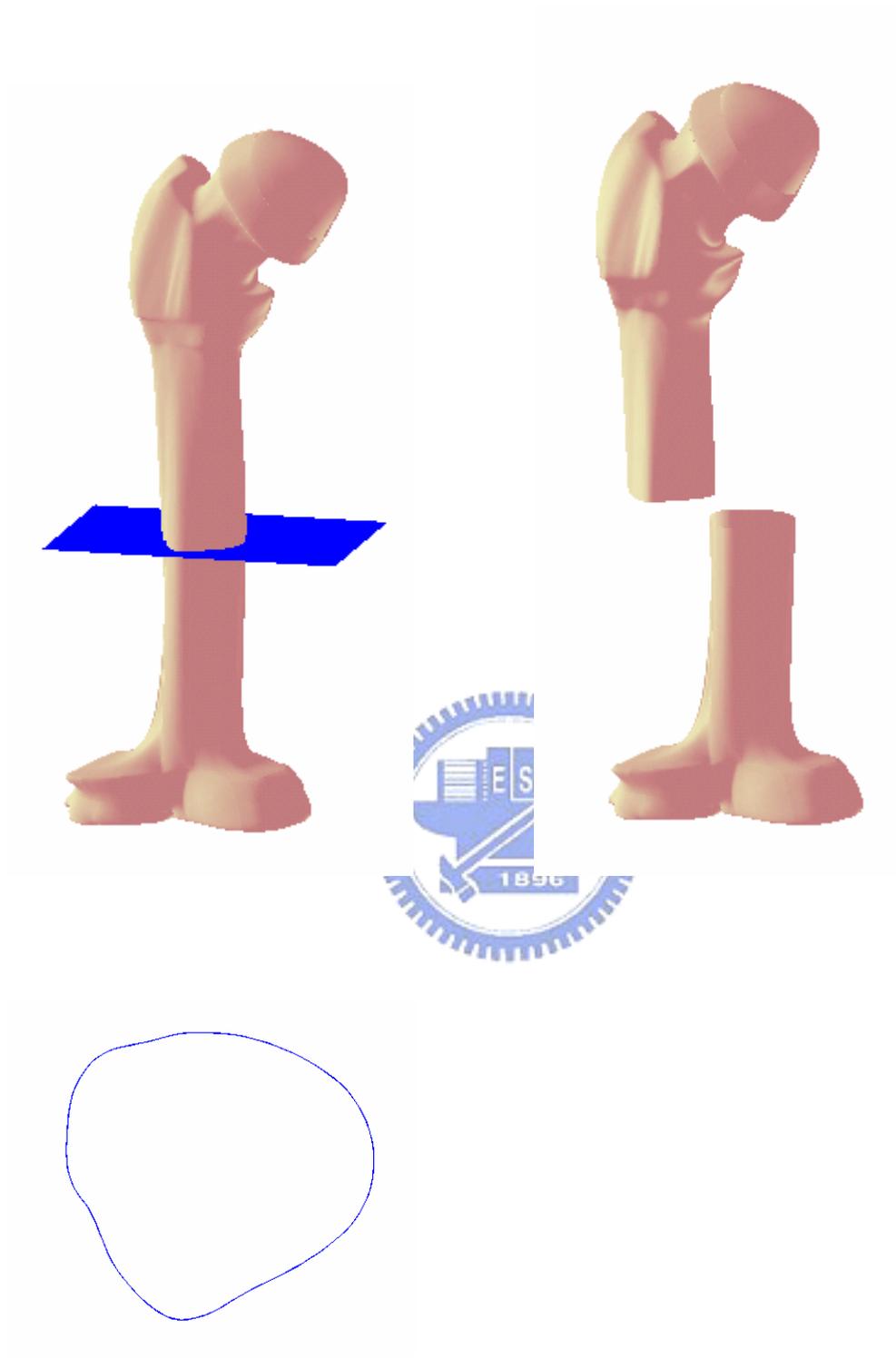


圖 5-7 以 SSI 演算法，用平面切大腿骨，取得截面圖形

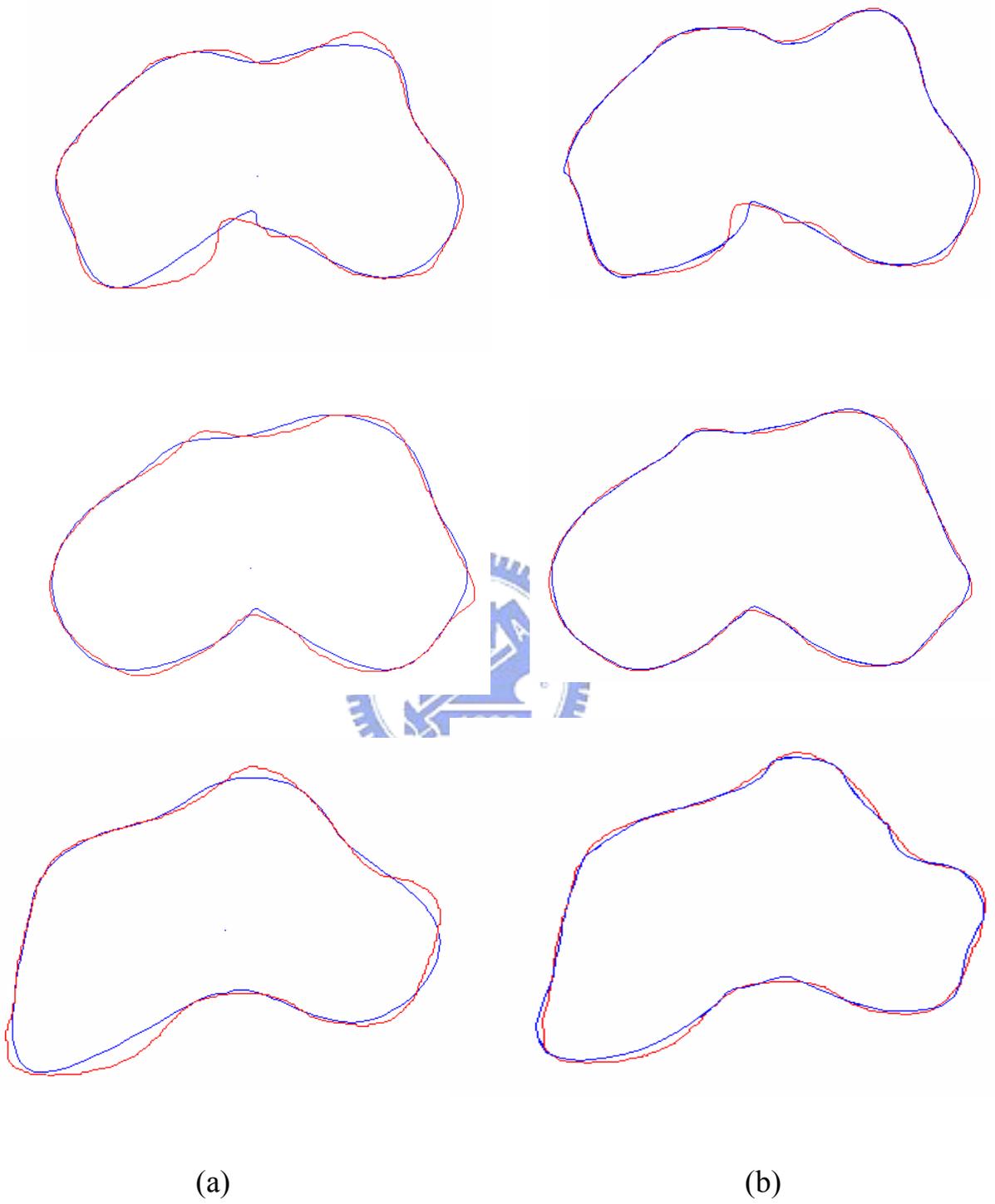


圖 5-8 由特徵點建立大腿骨截面(a)局部修改前 (b)局部修改後



圖 5-9 由影像處理建立的大腿骨模型立體圖(經過局部修改)



current_position =

53.1426 -46.2193 498.0573

Gaussian_curvature =

2.2145e-004

principal_curvature =

-0.0258

-0.0086



圖 5-10 計算大腿骨隨意一點之曲率

六、結論

6-1 結論

幾何模型的建立對於工程而言是很重要的，目前也有許多套裝軟體在輔助建立幾何模型，但是對於複雜外形的建立，仍然有許多發展的空間。並且，隨著電腦和其週邊設備的不斷進步，有越多的方法供我們使用，本研究只是一個開端，將幾何方面的理論程式化，並且用物件導向的方法寫成可以任意與其它程式搭配，或修改，提供寫作類似程式的工具與經驗，相信後續的研究可以更有效率。

6-2 討論與未來展望

本篇研究還有許多空間可以發展，包括影像處理上如何自動判別可用圖形和不可用圖形、結合網格自動產生程式、幾何模型建立後的分析等，展望未來，對於大腿骨的自動化模型建立與分析，可利用本研究一一整合，邁向自動化設計與分析之路。

參考文獻

- [1] I.D Faux and M.J. Pratt , Computational Geometry for Design and Manufacture , ELLIS HORWOOD , 1979
- [2] Michael E. Mortenson , Geometric Modeling , John Wiley and Sons , 1985
- [3] 方文聘 , “飛機之電腦輔助設計原理及實用” , 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 , 1998
- [4] 程重光 , “飛機的電腦輔助幾何設計” , 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 , 1993
- [5] 賀國旭 , “飛機幾何模型適用於 FLITE3D 之計算” , 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 , 1999
- [6] R.E. Barnhill , G. Farin , M. Jordon and B.R. Piper , “Surface/Surface Intersection ” , Computer Aided Geometric Design , Vol.4 , pp.3-16 , 1987
- [7] R.E. Barnhill , S.N. Kersey , “A marching method for parametric surface/surface intersection” , Computer Aided Geometric Design , Vol.7 , pp.257-280 , 1990
- [8] Shin-Ting Wu , Lenimar N. Andrade , “Marching along a regular surface/surface intersection with circular steps” , Computer Aided

Geometric Design , Vol.16 , pp.249-268 , 1999

[9] 林仲芬，“影像辨認技術”，全華科技圖書股份有限公司，1993

[10] 楊武智，“最新影像數位信號處理基礎”，全華科技圖書股份有限公司，1993

[11] 繆紹綱，數位影像處理-活用 MATLAB，全華科技圖書股份有限公司，1999

[12] Richard L. Burden , J. Douglas Faires , “數值分析”，東華書局，1988

[13] 陳世芳，陳昭綾，數值方法入門-使用 C 語言-，全華科技圖書股份有限公司，1995

