

利用多孔性介質增強活塞頂面之熱傳效率

研究生：連信宏

指導教授：傅武雄

國立交通大學機械工程學系

摘要

本文主要目的在以數值方法探討活塞內部加裝一有多孔性介質的冷卻渠道，觀察此渠道在近進口流、活塞做往復運動下以及浮力效應作用下，渠道內部流場和溫度場的變化，並討論冷卻流體對活塞高溫壁面的熱傳增益。

本研究採用葛拉金有限元素法，配合 Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) 座標描述方法，首先探討冷卻流體受到管道內多孔性介質的影響，在往復運動下的流場和溫度場之變化，以瞭解這類問題的運動機制，並比較加入多孔性介質對活塞高溫壁面的熱傳增益。



Enhancement of Heat Transfer On a Oscillating Piston Head with Porous Media

Student: Sin-Hong Lian

Advisor: Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

The aim of this study is to investigate heat transfer effect of a cooling channel adding porous media on a oscillating piston numerically.

This research uses Galerkin finite element method with Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) coordinates description method. Firstly the change of flow field and temperature field that yields from the coolant affected by porous media in the tunnel is discussed to understand the mechanics reaction about this kind of problems, and then compares the heat transfer gain on the high temperature surface after adding porous media.

Due to oscillating motion of the piston, this study could be categorized into a kind of moving boundary problem, then an Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method is adopted to solve the governing equation. Parameters of porous media, buoyancy force, Raynolds number and frequency of oscillating motion are taken into consideration. The results show that the effects of porous media are remarkable and under certain situations the buoyancy force is disadvantageous to heat transfer.

致 謝

衷心的感謝指導老師傅武雄教授兩年來給予課業上以及論文上的指導，以及在生活各方面上的關心與教誨，在此謹致最高的謝忱與敬意。同時也感謝機械系諸師長在課業方面的指導，以及同門的同學黃東億、鄭滄棋、楊志偉在數值模擬上的協助，使本研究可以順利完成。

更要感謝父母含辛茹苦的養育之恩，與家人、親友的支持與關懷，今日方能順利完成學業。最後謹將此喜悅與所有關心我的人共同分享。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號說明	xi
第一章 緒論	1
第二章 ALE 座標描述方法之運動學理論與數學模式	11
2.1 網格描述與座標系統	11
2.2 ALE 中的統馭方程式	14
2.3 格點速度	16
第三章 物理模式	18
3.1 物理模式	18
3.2 統馭方程式	19
3.2.1 內流場之統馭方程式	20
3.3.2 外流場之統馭方程式	22
3.3 無因次化	22
3.3.1 內流場	23
3.3.2 外流場	23
3.4 初始條件與邊界條件	24
3.5 紐塞數計算	26
第四章 數值方法	31

4.1 流場溫度場數值計算	31
4.2 格點測試	40
第五章 結果與討論	50
5.1 穩態下 $Re=200$, $Gr/Re^2=1$, 重力方向與進口流速度方向相反, 加入多孔性介質對流場及溫度場的影響	50
5.2 穩態下 $Re=200$, $Gr/Re^2=1$, 重力方向與進口流速度方向相同, 加入多孔性介質對流場及溫度場的影響	52
5.3 活塞往上、往下移動對流場及出口質量流率的影響	63
5.4 $Re=200$, $Gr/Re^2=1$, 重力方向與進口流速度方向相反, 活塞開始振盪後對流場及溫度場的影響	54
5.5 $Re=200$, $Gr/Re^2=1$, 重力方向與進口流速度方向相同, 活塞開始振盪後對流場及溫度場的影響	62
第六章 結論	97
參考文獻	98
附錄	102



表目錄

表 3-1、無因次幾何長度·····	29
表 3-2、各種參數組合表·····	30
表 4-1、高溫面紐塞數 Nithiarasu[43]·····	49



圖目錄

圖 1-1、Sulzer RTA90 機形之活塞冠斷面示意圖	9
圖 1-2、歷年 Sulzer 柴油引擎動力輸出圖	10
圖 2-1、ALE 運動學示意圖	17
圖 3-1、引擎活塞機構示意圖	27
圖 3-2、物理模式圖	28
圖 4-1、元素節點排列方式示意圖	42
圖 4-2、程式架構圖	43
圖 4-3、截面 A-B 與截面 C-D 示意圖	44
圖 4-4、不同網格數之網格測試	45
圖 4-5、渠道出口速度分佈圖	46
圖 4-6、賴[36]之穩態 Nu_x 分佈圖與本文之穩態 Nu_x 分佈圖	47
圖 4-7、通過充滿多孔性介質管道後之 U 速度分佈	48
圖 5-1、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向和進口流方向相反之穩態流場流線圖 與溫度場分布圖	51
圖 5-2、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ，重力方向和進口流方向相反之穩態流場流線 圖與溫度場分布圖	52
圖 5-3、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1、40$ ，重力方向和進口流相反穩態流場高溫面局 部 Nu_x 分布圖	54
圖 5-4、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向和進口流相反，有加入多孔性介質和 未加入多孔性介質之穩態流場高溫面局部 Nu_x 分布圖	55
圖 5-5、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ，重力方向和進口流方向相反之穩態流場流 線圖與溫度場分布圖	56
圖 5-6、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ，重力方向和進口流方向相反之穩態流場流線	

圖與溫度場分布圖	57
圖 5-7、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16、6.4$ ，重力方向和進口流相反穩態流場高溫面局部 Nu_x 分布圖	59
圖 5-8、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1、40$ ， $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16、6.4$ ，重力方向和進口流相反穩態流場高溫面局部 Nu_x 分布圖	60
圖 5-9、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向和進口流方向相同之穩態流場流線圖與溫度場分布圖	61
圖 5-10、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向和進口流相同及相反之穩態流場高溫面局部 Nu_x 分布圖	63
圖 5-11、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，一穩定週期及活塞固定不動的出口質量隨時間變化圖	64
圖 5-12、不同時間之出口速度分布圖	65
圖 5-13、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖	68
圖 5-14、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之溫度場分佈圖	69
圖 5-15、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， $1/4、2/4、3/4、4/4$ 週期瞬間之局部紐塞數比較圖	70
圖 5-16、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖	71
圖 5-17、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖	74
圖 5-18、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之溫度場分佈圖	75
圖 5-19、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，	

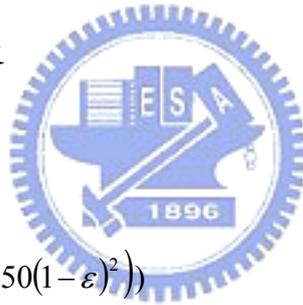
1/4、2/4、3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖·····	76
圖 5-20、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1、40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖·····	77
圖 5-21、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 移動邊界移動一週期之流場流線圖·····	80
圖 5-22、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 移動邊界移動一週期之溫度場分佈圖·····	81
圖 5-23、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 1/4、2/4、3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖·····	82
圖 5-24、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ； $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重 力方向和進口流相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖·····	83
圖 5-25、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 移動邊界移動一週期之流場流線圖·····	86
圖 5-26、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 移動邊界移動一週期之溫度場分佈圖·····	87
圖 5-27、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反， 1/4、2/4、3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖·····	88
圖 5-28、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16、6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流 相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖·····	89
圖 5-29、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，移 動邊界移動一週期之流場流線圖·····	93
圖 5-30、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，移 動邊界移動一週期之溫度場分佈圖·····	94
圖 5-31、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，1/4、 2/4、3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖·····	95

圖 5-32、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，高
溫面之平均紐塞數隨時間變化圖…………… 96



符號說明

C_p	比熱	[kJ kg ⁻¹ K ⁻¹]
Da	Darcy 數($Da = K/w_1^2$)	
d_p	多孔性介質顆粒直徑	[m]
f_c	活塞的振盪頻率	[s ⁻¹]
F_c	無因次活塞的振盪頻率($F_c = f_c w_1 / v_0$)	
F	慣性參數($F = 1.75 / (\sqrt{150} \varepsilon^{1.5})$)	
g	重力加速度	[m s ⁻²]
h	渠道長度	[m]
h_l	移動界面至出口長度	[m]
k_f	流體熱傳導係數	[W m ⁻² K]
k_e	等效熱傳導係數	[W m ⁻² K]
K	滲透率($K = \varepsilon^3 d_p^2 / (150(1-\varepsilon)^2)$)	[m ²]
l_b	活塞位置(在 y 方向)	
l_c	活塞振幅	[m]
L_c	無因次活塞振幅($L_c = l_c / w_1$)	
n	表面法向量	
\overline{Nu}	平均紐塞數	
Nu_x	局部紐塞數	
p	壓力	[N m ⁻²]
p_∞	參考壓力	[N m ⁻²]
P	無因次壓力($P = (p - p_\infty) / \rho v_0^2$)	
Pr	普朗特數 ($Pr = \nu / \alpha$)	



Re	雷諾數($Re = \rho_f v_0 w_1 / \mu$)	
Gr	Grashof 數($Gr = g\beta\Delta T w_1^3 / \nu^2$)	
t	時間	[s]
T	溫度	[K]
T_h	高溫壁面溫度	[K]
T_0	進口流體溫度	[K]
u, v	x 和 y 方向速度	[m s ⁻¹]
U, V	X 和 Y 方向之無因次速度	
v_0	進口流體速度	[m s ⁻¹]
V_0	無因次之進口流體速度	
v_b	活塞振盪速度	[m s ⁻¹]
V_b	無因次之活塞振盪速度	
\hat{u}, \hat{v}	x 和 y 方向之網格移動速度	[m s ⁻¹]
\hat{U}, \hat{V}	無因次之 X 和 Y 方向網格移動速度	
w	渠道高溫壁面長度	[m]
w_1	渠道入口寬度	[m]
w_2	入口渠道和出口渠道之間隔寬度	[m]
x, y	卡式座標	[m]
X, Y	無因次卡式座標	

希臘符號

α	熱擴散係數	[m ² s ⁻²]
β	熱膨脹係數	[K ⁻¹]
ε	孔隙率	

θ	無因次溫度	
λ	處罰函數	
ν	動黏滯係數	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$
ρ	密度	$[\text{kg m}^{-3}]$
τ	無因次時間	
ω	角速度	$[\text{Rad. S}^{-1}]$
Φ	計算變數	

上標

(e)	主元素
m	疊代次數



下標

e	等效值
f	工作流體
fp	多孔性介質內的流體
s	固體相態，在此為銅

其他

$ $	絕對值
$[]$	矩陣

第一章 緒論

近年來為因應許多工程上的需要，機械元件所需承受的熱負載不斷增加，為解決此一現象所衍生的元件損害與故障，熱機構熱傳效應的提昇一直是重要的研究課題。

船舶的引擎為船舶推進的動力來源，一旦引擎發生故障，將造成船舶無法正常繼續航行。而位於引擎燃燒室附近之機械元件，因長期處在高溫高壓的熱負載狀態下，容易且經常發生故障。燃燒室內之活塞，其頂部直接與汽缸內之火焰接觸，除了承受爆炸瞬間的極大壓力外，亦從燃氣中吸收了大量的熱量，若活塞頂部溫度過高，又不能及時冷卻，使用日久，將造成活塞燒損或龜裂，這不只使引擎無法正常運轉，發揮其最大效率，也會使維修營運成本增加。

為因應全球石油危機，節約能源政策已在全世界所有國家努力下執行。因此為了降低燃油成本在航運成本所佔的高比例，船舶引擎的發展將朝向低引擎轉速、高溫高壓之熱力循環等方向邁進。為了使船舶的引擎效率提昇，以最少的消耗油量產生最大的輸出動力，勢必要提高燃燒壓力，也因此增加了燃燒溫度。目前船舶柴油主機推進引擎，其內部燃燒室之最大循環壓力與溫度 (Maximum cycle pressure and temperature) 已高達 120 bar 及 1500°C，活塞在此高溫高壓工作環境下，經常會有損壞的情形。為因應船舶引擎的馬力輸出再提高，所造成引擎活塞熱負載增高的問題，活塞之冷卻技術必須配合提昇，以便能將瞬間達到高溫的部分熱量帶走，降低其溫度，使得活塞材料能夠承受更高的溫度與壓力。因此對活塞內更有效之冷卻系統熱傳性能的研究，實為現代造船工業朝向低耗油率、輸出馬力大等發展趨勢之重要研究焦點。

目前船舶用柴油主機的活塞冷卻系統種類繁多，以蘇撒 (SULZER) 的大型柴油主機為例，如圖 1-1，其活塞的冷卻大多採用孔道式冷卻系統。圖 1-2 為從 1968 至 1998 年，蘇撒之大型柴油機每單位活塞面積上所能承受的引擎最大輸出功

率，與其相對應時間之活塞內部的冷卻系統發展過程。如圖裡所示，在這 30 年期間，柴油機內之每單位活塞面積所能負載的最大功率由 0.34 增加至 0.78 ($\text{kW}/\text{cycle cm}^2$)，除了表示活塞內部冷卻系統更有效率外，也因此使得其設計逐年複雜。在 1969 至 1979 年間，蘇撒大型柴油機的冷卻系統主要為在活塞冠內之冷卻室設計一些冷卻孔道，當活塞作往復運動時，加壓的冷卻流體經由在冷卻室下方的伸縮管進入此孔道內，俟其完成熱交換後，再藉由另一伸縮管將冷卻流體送出引擎外，完成冷卻系統的循環。為了能使活塞承受更大的輸出功率，1980 年後，蘇撒採用了另一種冷卻系統。此種冷卻系統保留之前的冷卻室，但額外在活塞冠下方加裝少許的密封管道，稱之為往復運動熱管，即是利用其往復運動的特性來增加冷卻效果，又因此冷卻管道可盡量接近受熱表面，使冷卻效果大增。在最近幾年，更出現以衝擊噴射 (jet impingement) 來提昇活塞內的熱傳性能，雖然此技術有助於冷卻效率的提昇，卻也因此無形中增加了製造上的困難。

由於活塞冷卻通道內之冷卻流體會隨活塞作往復運動，其流場與其熱傳特性除與管道的幾何形狀有關外，也會受系統往復運動時所產生的往復力影響，形成流場邊界隨往復運動移動之特殊流場，可歸屬於移動邊界的問題。相關此類的研究文獻並不多見。

在過去，Grassmann and Tuma [1] 在 1979 年以實驗量測一受脈動力之平滑管流，於紊流狀態下之質傳特性。結果證明其 Sh. no. (Sherwood number) 可增加至一般穩態管流的 250%。Patera and Mikic [2] 指出此現象是因為流體受脈動力影響，自壁面處產生分離 (separation) 及回流 (flow reversal) 兩種混合 (mixing) 現象，進而增加了流場的不穩定性 (hydrodynamics instability) 所造成的效果。Kim [3] 等人更利用數值模擬方法，發現受脈動力影響之流場，其熱傳特性也會受其所施的脈動力大小不同而有所差異。Bergles [4] 在 1996 年的美國國家熱傳會議邀請演講中，指出近年來工業界提昇熱傳性能的技術有環形管流 (coiled tubes)、表面粗糙法 (rough surface)、衝擊噴射 (jet impingement) 等實用技術。其中以表面粗糙法之內設凸起物 (rib) 較被廣泛採用，於工業應

用中，很多熱交換器及燃器渦輪葉片內，即利用各種不同形式之凸起物來提昇熱傳性能，因為凸起物本身穿透流場次邊界層（sub-layer），並引生渦流（eddy）及增加紊流強度（turbulence intensity），使得熱傳性能得以提昇。而自 60 年代即有許多有關此方面的研究，例如 Webb [5]，Lewis [6] 等人，以實驗量測或數值模擬來探討於平滑管中加裝凸起物對熱傳性能的影響，結果都證明其熱傳效果都遠比平滑管來得好。Han [7] 以雷諾數從 7000 至 9000 之紊流流場在內設凸起物之方管中進行實驗，發現因加裝凸起物所受的影響，其局部 St 數（local Stanton number）可增加至平滑管的 150% - 220%，往後持續性的研究大都朝向改變入口區的形狀、長度，以及改變凸起物的幾何形狀與裝設位置等方面進行。Bergles [8][9] 詳細地討論與整理各種增加熱傳效率的方法，並且將常見的增加熱傳效率方法略分為兩大類：一為不需另外作功的被動式（passive）方法，比如再避面加一層塗料、將壁面作表面粗糙處理、增加熱傳表面積、加裝混合流體或使流體產生旋轉流動的機構、與在流體中加入添加物等；另一類為須外加能量的主動式（active）方法，包括有以機構增加流體的擾動、使壁面振動或振動流場、增加電磁場、噴入流體、移除覆蓋熱傳面的冷凝水膜、或加裝噴嘴直接對高溫壁面噴出流體等。此外，Bergles 與 Webb [10] 進一步將過去有關提高熱傳效率的文獻，依據上述分類整理製表。Chang [11] 利用實驗量測方法，比較內設凸起物之靜止流場與受往復運動之動態流場的熱傳性能。結果發現往復運動下的熱傳效果，會隨著往復運動速度的增加而提昇，當達到其實驗中的最高往復運動速度時，熱傳效果可比在靜止流場中增加 45%。

比較上述各種增加熱傳量的方法，利用被動式方法是由於受到流場在熱傳面上形成的速度與溫度邊界層妨礙熱量傳出的影響，因此熱傳效率的增加受到限制。根據熱傳導的傅利葉定律，在溫度梯度小的情況下，熱傳量也比較小。因此，溫度邊界層的存在將限制壁面所能傳出之熱傳量。為了大幅提高高溫壁面的熱傳效率，必須移除熱傳面上的邊界層，使高溫壁面直接與低溫流體接觸，進而提高壁面與流體之間的溫度梯度，達到增加壁面熱傳量的目的。因此，Fu et al. [12]

採用在加熱壁面上裝置移動薄塊的方式，藉由薄塊在加熱壁面上快速地往復運動有效掃除壁面的邊界層，有效增加管道內的熱傳效果，結果顯示最大的熱船可以增加 98%；但是利用薄塊掃除溫度邊界層以增加熱傳效果的方法，由於受限於往復機構必須在溫度邊界層內才能達到要求的熱傳效益，因此無法有效的應用在具有凹槽、凸塊以及複雜幾何形狀外型的管道內壁。

由上述文獻得知，以數值模擬研究時，很多都是採用相對速度的觀念，假設物體為靜止不動，流體以某一相對速度流經物體，再以數值方法解析；或者是採用隨運動中的物體移動而移動的非慣性參考座標 (Non-inertial reference frame)，再以數值方法模擬這類問題。但是上述文獻所討論的引擎活塞的往復運動，或者其他如行進中的車輛受風的吹襲、流體機械的運轉、飛機起降時受側風的吹襲、無塵室中工作人員或機器的運動等，物體因為是在流動的流體中運動，物體與流體間交互作用所誘導的流場和溫度場變化是屬於動態的移動邊界問題 (moving boundary problem)。當物體在流動的流體中運動時，會有物體擠壓流體和流體填補因物體移動所產生的空洞 (vacant space) 之物理現象。因此，當以相對速度模擬這類問題時，流場和溫度場的變化機制並無法詳實、明確的表現出來。

目前在解析流體力學問題時，一般用於描述流體運動的參考座標系統可分為兩種：一為拉格朗日 (Lagrangian) 座標系統，另一為尤拉 (Eulerian) 座標系統。採用拉格朗日方法來計算流場運動時，把焦點集中在每一個流體質點上，流體質點與周遭流體質點間的交互作用所誘導的對流效應無法適當的描述；在以數值計算模擬時，其計算網格會隨著流體質點的運動而移動，因各個流體質點的運動速度不一樣，致使計算網格嚴重的變形扭曲，但此方法可適切描述流場具有自由液面 (free surface) 或移動介面 (moving interface) 之邊界。採用尤拉方法描述流場運動時，把焦點集中在流場中某一區域內，探討此一區域流場內所有流體質點的運動；在以數值方法模擬時，計算網格是固定不動的，因此允許流體質點的運動有較大的速度差與變化，但並無法適切的描述移動邊界問題。

因此對於所探討的移動邊界問題，欲以數值方法模擬時，必須考慮流體與物體間的移動介面，為了實際上的需要，理應採用拉格朗日方法，如此方能模擬這類問題，但是當移動邊界所造成的流場之外另有其他流場存在時，則容易產生誤差，乃至於無法得到收斂解。因此，單獨採用拉格朗日或尤拉方法，均無法適切的描述這類流場，為了解決此一缺點，以便能適切的模擬上述的移動邊界問題，Noh [13]提出了一種結合了拉格朗日和尤拉方法特徵的方法，稱為 Couple Lagrangian-Eulerian method，首先用於計算包含可動液體邊界之二維液動問題，證明這種方法能適切的用於描述移動邊界問題。Hirt 等人[14]則採用了 Couple Lagrangian-Eulerian method，並利用有限差分 (finite difference) 方法處理可壓縮與不可壓縮流場的移動邊界問題，並將此方法改稱為 arbitrary Lagrangian-Eulerian method (ALE)，對於 ALE 的使用方法、穩定性、準確度和網格處理方式有初步的描述。Hughes 等人[15]則率先將 ALE 應用在有限元素 (finite element) 的分析上來解決黏性不可壓縮流場之自由表面問題，對於 ALE 方法所牽涉到的座標轉換關係有著詳盡與深入的說明，並驗證了 ALE 方法使用因具有自由液面所產生的波動問題有較佳的收斂結果。

最近幾年來，利用 ALE 方法處理工程問題的參考文獻越來越多，其中包含了流體力學、材料製成與固體力學上的問題。在具有自由液面的流體力學問題上，Huerta 和 Liu [16]利用 ALE 方法，並配合網格重建的方式，探討具較大位移量的自由邊界問題，發現採用 ALE 方法可適切的模擬自由液面產生較大流體激濺 (sloshing) 的現象，較符合大位移量變化的自由表面現象。

在流體與物體的交互作用問題上，Belytchko 等人[17]採用 ALE 方法模擬流體與結構物介面間的問題，使得這一類問題得以獲得較為正確的數值模擬方法。Donea 等[18]、Huerta 和 Liu [19]、Nomura 和 Hughes [20]、以及 Nomura [21]採用 ALE 方法，同時處理流體與剛體運動方程式，模擬流體流經圓柱時，在圓柱表面產生流體漩渦剝離 (vortex shedding)，造成圓柱的振動現象。Hu [22]則採用 ALE 方法分析垂直的 Poiseuille flow 中固體粒子與流體混合流動之流場，

結果發現當所施予的壓力梯度（壓力梯度方向與重力方向相反）大到足以克服重力時，固體粒子不會靠近壁面運動，壁面附近會存在一液體層；而當雷諾數（Reynolds number）逐漸增大時，固體粒子間的交互作用也跟著變強。Masud 和 Hughes [23]採用 ALE 方法模擬物體在流體中運動具移動區域(moving domain)的問題，並以圓柱在靜止的流體中運動與潛水艇在海面下發射飛彈為例，探討物體與流體間的交互作用。楊等[24]則利用此法來計算大型結構物受風場影響所形成的振動問題，經由實際模擬發現流體與結構物的共振現象與計算結果相符。而黃[25]則利用有限元素法並配合 ALE，模擬無塵室中，因工作人員移動造成室內流場的改變所導致的塵粒擴散分佈的變化。楊[26]則採用 ALE 並以有限元素法模擬流體在穩定流動狀態下，因剛體的移動造成流場和溫度場的變化，結果發現當剛體做週期性往復運動時，能使剛體的總體平均紐塞數保持在較高的值，另外對於因剛體移動造成網格扭曲變形和疏密相差太大而使計算有發散之虞，其利用線性內差的方式求得新網格各節點的值，此種網格重建方法可避免數值計算發散，使剛體移動距離增加，較能符合實際工程應用。同樣的，楊[27]也採用 ALE 方法描述動態移動邊界內之流場與溫度場的變化，進而研究矩形柱體以垂直於流體流動方向振動所產生的漩渦剝離機制和熱傳的增益，詳細探討漩渦剝離（vortex shedding）的形成和發展過程，並針對不同的矩形柱振動速度、振幅、障礙比（blockage ratio）和展弦比（aspect ratio），比較其熱傳增益。在利用因物體在流場中振動會提昇熱傳增益，設計一種可應用於電子元件散熱的擺動式鰭片散熱裝置。

由上述可知，ALE 方法可以適當的解析移動邊界問題，同時又能避免計算網格過度的扭曲變形，這主要是將統御方程式表現在某一參考座標上，並定義網格速度，使計算網格按所定的方式移動，而網格速度與流體質點的運動速度是獨立的。基於以上這些說明，可以發現，ALE 方法確實可以適切解析移動邊界問題。因此廖[35]對於活塞內側頂部高溫面散熱的分析研究採用 ALE 方法，並針對不同噴入氣流的雷諾數，活塞震盪頻率，活塞振幅，比較其熱傳效益。其結果顯示當

雷諾數愈高，流體可以帶走愈多的熱；另外當活塞振動頻率愈高時，隨時間的平均熱傳率會增高；當振幅增高時，一個週期內的最高熱傳率會增高。

賴[36]的研究認為，實際的活塞頂部受到引擎室爆炸的影響溫度非常之高，該區流場受溫度效應影響的比例非常大，因此自然對流效應不容忽視。因此賴模擬的過程中，加入了溫度對於自然對流的影響，並針對不同噴入氣流的雷諾數、活塞震盪頻率、活塞振幅、重力方向，比較其熱傳效益。其結果顯示當重力方向和進口流相反時，活塞頂部的流體容易由於高溫而形成溫度層化，導致活塞頂部熱傳效率降低；當進口流體雷諾數變大時，除了導致流體衝擊高溫壁面的現象更加明顯外，流體隨活塞做往復運動期間，流道內部流場的擾動也會隨著雷諾數增加而變大，因此活塞頂部高溫壁面的熱傳效益會明顯的隨著流體雷諾數的增加而增加；而當重力方向和流體的進口方向相同時，由於浮力效應會將高溫流體帶離高溫壁面，因此增加了管道內冷流體接觸高溫壁面的機會，而有使熱傳效率增加的情形。

目前使用多孔性介質以增強熱傳效果的方式已經是眾所皆知，且在電腦的發熱源加裝多孔性介質來加強散熱上也是慣用的手法了，但是關於使用在引擎散熱管道上的相關文獻或是實驗卻仍為罕見。因此本研究的主要目的為，在有浮力效應的影響下，探討於活塞內側流域加入多孔性介質對散熱效果的影響。劉[40]、黃[41]指出，流場中加入多孔性介質可以增加流體的熱傳效果，改善壁面的熱傳效率，因此本文將在流道的高溫面加入多孔性介質，以期可以增強高溫面的熱傳效率，並有效降低活塞的工作溫度。

本研究對於移動邊界問題採 ALE 的方法，描述流場和溫度場的變化，主要內容分成三個部份：首先利用葛拉金有限元素法 (Galerkin finite element method) [30] 搭配 ALE 座標系統，計算穩態在有強制進口流影響的狀況下，加入多孔性介質對於系統內部流場及溫度場的影響；第二部份則為計算加以一固定振幅及頻率的擾動，觀察其穩定周期內的流場、溫度場變化；第三部分則利用上述的分析結果，計算管道內流體之熱傳係數，比較多孔性介質對高溫面熱傳效率、

平均時間熱傳率的影響，並針對賴[36]的分析結果作比較，以增加活塞頂部熱傳分析研究的完整性。希望藉由此分析結果，對工業界實務應用上有所幫助，並提供活塞內部冷卻系統設計的參考。



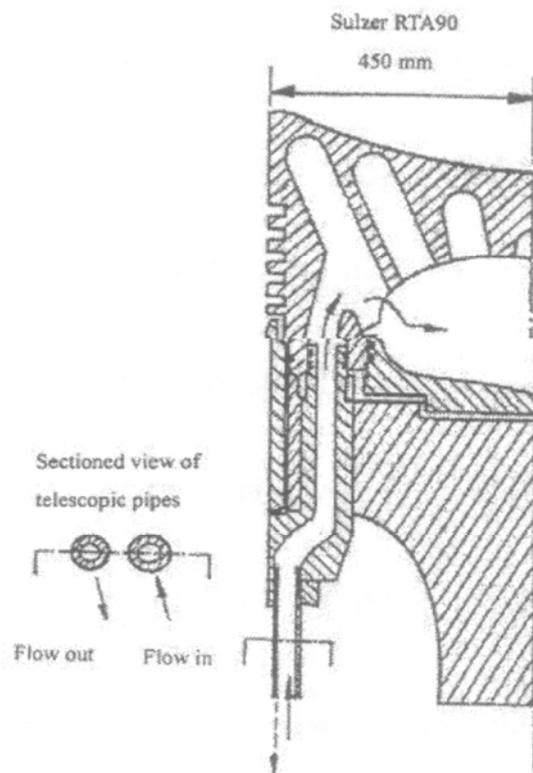


圖 1-1、Sulzer RTA90 機型之活塞冠斷面示意圖[36]

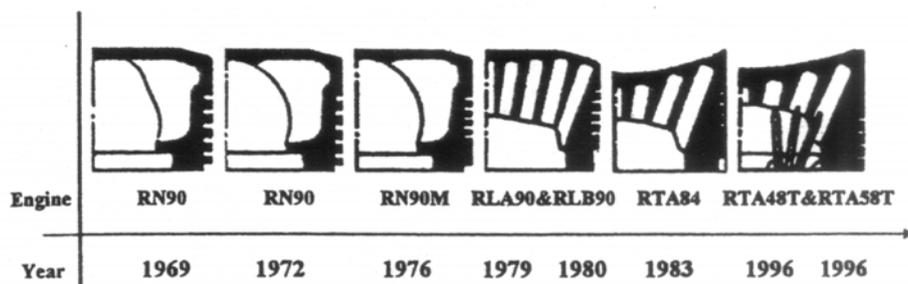
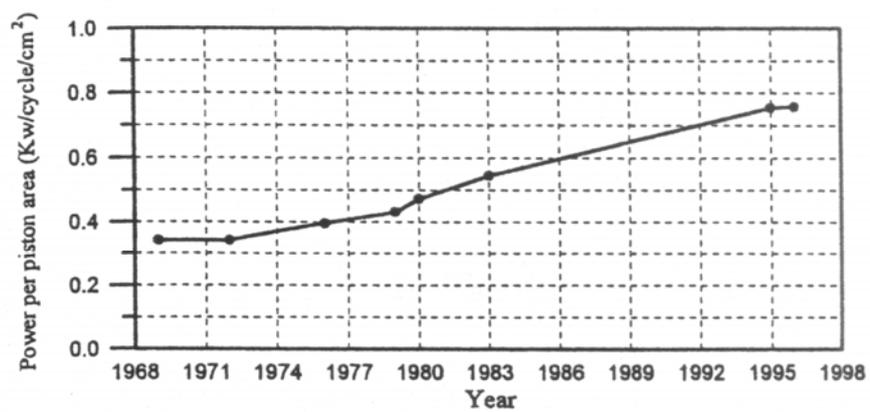


圖 1-2、歷年 Sulzer 柴油引擎動力輸出圖[36]

第二章 ALE 座標描述方法之運動學理論

現今，不論利用有限差分法(finite difference method)或有限元素法(finite element method)離散計算區域，其描述流體運動問題的座標系統分為兩種，一為拉格朗日(Lagrangian)座標系統，另一為尤拉(Eulerian)座標系統。利用拉格朗日座標系統描述流場時，觀察流場的焦點集中在各個流體質點上；在數值計算的過程中，計算網格將隨流體質點的運動而移動。反之，尤拉座標系統觀測流場的焦點固定在空間中，計算網格也固定在計算區域的空間中，不隨流體質點運動。

2.1 網格描述與座標系統

在使用 ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法計算移動邊界的問題中，有三種座標定義域的關係存在，分別敘述如後，或參考圖 2-1 之描繪[15, 20]：

1、空間定義域 (Spatial Domain, Ω_y):

代表一般流體力學問題所陳述的定義域，在探討移動邊界問題的領域中，此定義域會移動，而在數值方法的格點劃分上，此定義域即為節點座標，因此又稱為「Eulerian」座標系統。

2、物質定義域 (Material Domain, Ω_z):

代表流體粒子所佔有的定義域且亦會移動，而在數值方法的計算中，此定義域即為流體本身，其座標系統稱之為「Lagrangian」座標系統。

若是存在某物質定義域座標點 z_i ，則其與空間定義域之座標點 y_i 的關係可由函數 f_1 轉換如下：

$$y_i = f_1(z_i, t) = f_{1r}(z_i) \quad (2-1a)$$

3、參考定義域 (Referential Domain, Ω_x):

代表固定不動的定義域，因此在數值方法中為絕對的座標系統，通常稱之為「Referential」座標系統。

若是存在某座參考定義域標點 x_i ，則其與空間定義域之座標 y_i 的關係可由函數 f_2 轉換如下：

$$y_i = f_2(x_i, t) = f_{2t}(x_i) \quad (2-1b)$$

而任一物質座標點 z_i 與參考座標點 x_i 的關係可由函數 f_3 轉換為：

$$x_i = f_3(z_i, t) = f_{3t}(z_i) \quad (2-1c)$$

且

$$f_{3t} = f_{2t}^{-1} \cdot f_{1t} \quad (2-2)$$

根據上列所述的三種座標系統，ALE 法因此產生了三種速度的存在：

1、流體速度 (Material Velocity, u)

$$u = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-3a)$$

2、節點速度 (Mesh Velocity, \hat{u})

$$\hat{u} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} \quad (2-3b)$$

3、對流速度 (Convective Velocity, \hat{c})

$$\hat{c} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-3c)$$

且

$$\hat{c} = u - \hat{u} \quad (2-4)$$

另外，由三種不同的座標定義域可以獲得如下的座標轉換關係[24]：

1、Referential 座標與 Lagrangian 座標之轉換

根據微分定理可知

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-5)$$

若是把函數 Φ 以座標函數 y 代入，可得

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i}$$

也就是

$$u = \hat{u} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{z_i}$$

則

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{z_i} = (u - \hat{u}) \frac{\partial x_i}{\partial y_i}$$

再將上述的式子代入原式 (2-5) 即可得到最後之座標轉換式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{x_i} + (u - \hat{u}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2-6)$$

2、Eulerian 座標與 Lagrangian 座標之轉換

同理，根據微分定理可知

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} \Big|_{z_i} \quad (2-7)$$

而最後之時間微分項由前面之流體速度定義式 (2-3a) 可知其恰好為

u ，故可直接獲得轉換關係式如下

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y_i} + u \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (2-8)$$

3、Referential 座標與 Eulerian 座標之轉換

同理，根據微分定理可知

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{y_i} \quad (2-9)$$

把函數 Φ 以座標函數 y 代入，可得

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} \Big|_{y_i} = \frac{\partial y_i}{\partial t} \Big|_{x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{y_i}$$

也就是

$$0 = \hat{u} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{y_i}$$

則

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{y_i} = -\hat{u} \frac{\partial x_i}{\partial y_i}$$

將上式代入式 (2-9) 即可獲得 Referential 座標與 Eulerian 座標之轉換關係式

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x_i} - \hat{u} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (2-10)$$

2.2 ALE 中的統御方程式

在流場中，多孔性介質以外的區域使用的統馭方程式為：

連續方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-11)$$

動量方程式：

x 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-12)$$

y 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2-13)$$

能量方程式：

$$\rho_f C p_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-14)$$

根據轉換公式 (2-10)，將 Eulerian 座標之統御方程式 (2-11) ~ (2-14)

轉換為 ALE 形式之統御方程式，即可得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-15)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial u}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-16)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial v}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2-17)$$

$$\rho_f C p_f \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial T}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-18)$$

另一方面在多孔性介質中流動之統馭方程式為：

連續方程式

$$\frac{\partial u_{fp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{fp}}{\partial y} = 0 \quad (2-19)$$

動量方程式

x 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial u_{fp}}{\partial t} + u_{fp} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{fp}}{\varepsilon} \right) + v_{fp} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_{fp}}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_{fp}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{fp}}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} u_{fp} - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| u_{fp} \quad (2-20)$$

y 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial v_{fp}}{\partial t} + u_{fp} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{fp}}{\varepsilon} \right) + v_{fp} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_{fp}}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_{fp}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{fp}}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_{fp} - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| v_{fp} + \rho g \varepsilon \quad (2-21)$$

能量方程式

$$\rho_f C p_f \left(\frac{\partial T_{fp}}{\partial t} + u_{fp} \frac{\partial T_{fp}}{\partial x} + v_{fp} \frac{\partial T_{fp}}{\partial y} \right) = k_e \left(\frac{\partial^2 T_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{fp}}{\partial y^2} \right) \quad (2-22)$$

根據轉換公式 (2-10)，將 Eulerian 座標之統御方程式轉換為 ALE 形式之統御方程式，即可得到：

$$\frac{\partial u_{fp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{fp}}{\partial y} = 0 \quad (2-23)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial u_{fp}}{\partial t} + (u_{fp} - \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{fp}}{\varepsilon} \right) + (v_{fp} - \varepsilon \hat{v}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_{fp}}{\varepsilon} \right) \right] \\ = -\frac{\partial p_{fp}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{fp}}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} u_{fp} - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| u_{fp} \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial v_{fp}}{\partial t} + (u_{fp} - \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{fp}}{\varepsilon} \right) + (v_{fp} - \varepsilon \hat{v}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_{fp}}{\varepsilon} \right) \right] \\ = -\frac{\partial p_{fp}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{fp}}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_{fp} - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| v_{fp} + \rho g \varepsilon \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$\rho_f C p_f \left(\frac{\partial T_{fp}}{\partial t} + (u_{fp} - \hat{u}) \frac{\partial T_{fp}}{\partial x} + (v_{fp} - \hat{v}) \frac{\partial T_{fp}}{\partial y} \right) = k_e \left(\frac{\partial^2 T_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{fp}}{\partial y^2} \right) \quad (2-26)$$

2.3 格點速度

Hughes [15, 20] 等對於 ALE 的運動學理論有詳細的探討，並定義了三種座標定義域：在 ALE 法中，參考座標系統的移動速度是可以任意給定的，因此計算網格的移動速度與流體速度間彼此獨立，可以根據計算的需要給定適當的網格速度。本研究依據不同的物理邊界條件，將網格速度分為三種區域：

1. 固定邊界上，網格速度為 0。
2. 移動邊界上，網格速度等於壁面速度，亦與移動邊界上的流體等速。
3. 在固定邊界與移動邊界間，網格速度可以依需求設定，以避免網格過度扭曲導致計算發散。此網格速度可以是定值，也可以是隨時間而變化的變數。在本研究中則根據格點與壁面間的距離，使網格速度成線性分佈。



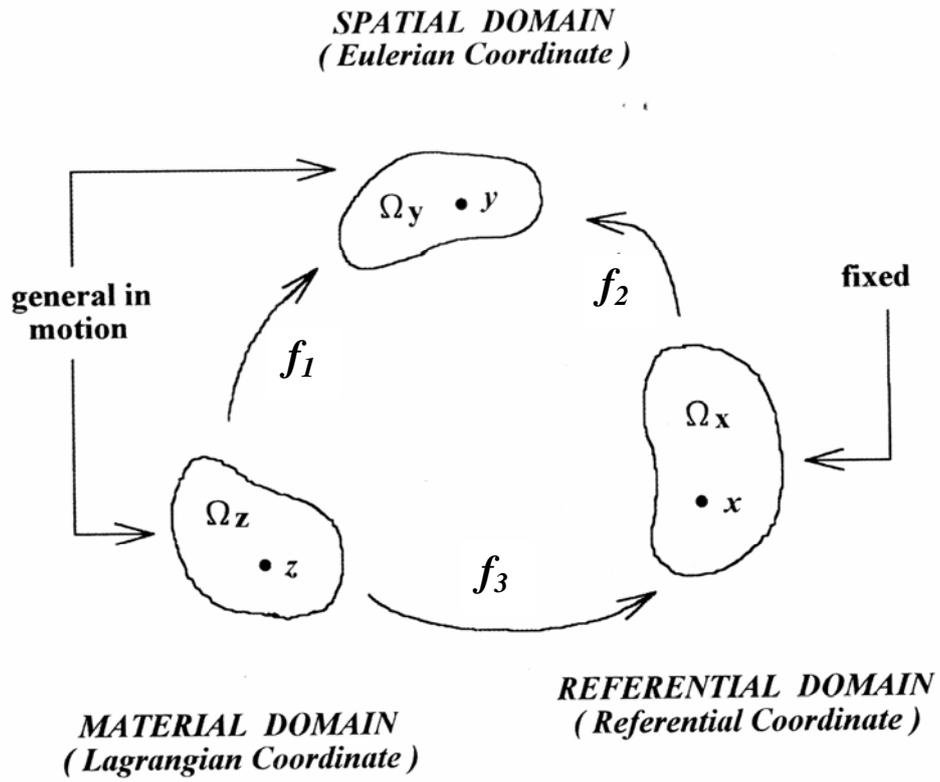


圖 2-1、ALE 運動學示意圖

第三章 物理模式

3.1 物理模式

本研究探討加入多孔性介質之後，混合對流現象對於活塞做往復運動時，活塞內側流場及溫度場變化的影響。為了符合實際情況，將設計邊界會隨活塞做往復運動而移動的渠道模組，其中圖 3-1 即為渠道模組隨活塞在汽缸內做往復運動之示意圖。在分析上，本研究有進口流速度和重力方向同向及反向的兩種狀況，物理模式圖如圖 3-2 所示。流場入口寬度為 w_1 ，高度為 h ， \overline{MN} 為高溫面，恆保持等溫 T_H 。低溫、恆溫面將設在進口 \overline{AB} 處，且 $T_0 < T_H$ 。管道中多孔性介質的高 h_p 。而進口有一均勻垂直方向的速度分佈，且水平方向速度分佈為零，出口 \overline{CD} 則將溫度及速度設定梯度為零。本研究中 $MNLI$ 是以活塞運動速度上下移動且網格大小均勻之區塊，其中活塞的位置及運動速度隨時間變化為

$$\begin{aligned} l_b(t) &= -\frac{w_1}{2} \cdot \text{Cos}(\omega t) + 51.5w_1 \\ v_b(t) &= \frac{dl_b}{dt} = \frac{w_1}{2} \cdot \omega \cdot \text{Sin}(\omega t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

活塞在時間 $t=0$ 時位於下始點，且速度為 0；當 $t>0$ 時，活塞開始以速度 v_b 移動，並且隨時間呈現一簡諧運動。

而 $IJEF$ 、 $KLHG$ 為網格移動線性分佈區塊，為的就是要分別對下接合固定不動網格區 $EFBA$ 、 $KLDC$ ，以及對上接合 $MNLI$ 網格移動最高速區塊。因此，模式圖中 $IJEF$ 、 $KLHG$ 這兩個區塊皆以饒性軟管的圖形顯示，表示為網格伸縮區。 $IJEF$ 、 $KLHG$ 分別對 $EFBA$ 、 $KLDC$ 的接合面 \overline{EF} 、 \overline{GH} 為網格速度為零的介面，而在 $IJEF$ 、 $KLHG$ 區塊內，網格速度在 y 方向由 0 開始往上作線性的分佈，到達 $IJEF$ 、 $KLHG$ 和 $MNLI$ 之接合面 \overline{IJ} 、 \overline{KL} 的活塞瞬間移動速度。在時間 $t=0$ 時，所有網格固定不動，且高溫面持續以 T_H 等溫加熱，另外流體以等速 v_0

和等溫 T_0 ，由 \overline{AB} 流進管道，再由 \square 形管道，經由 \overline{CD} 流出渠道，此時流場為穩態流場。當時間 $t > 0$ 時，伸縮區間 $IJEF$ 、 $KLHG$ 及最高速區間 $MNLI$ 開始以隨時間弦波變化的速度做往復運動。由於流場邊界隨時間作往復運動，此移動邊界與流場具交互作用，流場和溫度場的變化屬於隨時間而變化的移動邊界問題，因此可以以 ALE 法適切的描述。

本文研究分析中在出口邊界條件設定其出口速度梯度等於零，計算流域內因為網格向上移動內部空間變大囤積進口強制流流入的流體，或向下移動內部空間減少而大量的排出流體，梯度邊界的設定隨活塞向上或向下運動做出口 \overline{CD} 面流量的調整。也就是說，當活塞往上移動到最快速度時，進口強制流的流量有可能在瞬間無法完全填補計算流域新增加的空間，而導致在出口處，也就是設定梯度邊界為零的地方，有將流體由外往內吸的趨勢。同樣的，當活塞往下運動，計算流域的空間減少，在進口設定的固定邊界無時不刻的把流體灌入的同時，出口設定的梯度為零邊界則會增加流出的流量，即增加流出速度，以符合連續方程式，達到計算流域中的質量守衡。這樣簡易渠道的設計，加上自然對流效應，再配合合理的邊界條件設定，將可以將活塞頂部熱傳分析更推向實際化的目的。

3.2 統御方程式

為了簡化分析，本研究做了以下的假設：

- (1) 工作流體為空氣，流場除浮力項外，為二維不可壓縮層流流場。
- (2) 在溫差不大的狀況下，工作流體各項性質除重力項的密度外皆為常數。
- (3) 重力為 $-y$ 方向，並以 Boussinesq Approximation 簡化之。
- (4) 流體與物體之界面滿足無滑動條件 (no-slip condition)，亦即移動面之流體速度等於渠道壁面之運動速度。
- (5) 多孔性介質為不可變形，且與流體不起化學作用。
- (6) 多孔性介質具有等向性。

(7) 多孔性介質之固相與流體在熱平衡狀態，且不考慮熱輻射及黏滯損耗。

基於以上的假設，整個流場可以區分為多孔性介質內部之流場（簡稱內流場），多孔性介質以外的流場（簡稱外流場）。

3.2.1 內流場之統御方程式

連續方程式：

$$\frac{\partial u_{fp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{fp}}{\partial y} = 0 \quad (3-2)$$

動量方程式：

x 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial u_{fp}}{\partial t} + u_{fp} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{fp}}{\varepsilon} \right) + v_{fp} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_{fp}}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_{fp}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{fp}}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} u_{fp} - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| u_{fp} \quad (3-3)$$

y 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial v_{fp}}{\partial t} + u_{fp} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{fp}}{\varepsilon} \right) + v_{fp} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_{fp}}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_{fp}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{fp}}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_{fp} - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| v_{fp} + \rho_f g \varepsilon \quad (3-4)$$

能量方程式：

$$\rho_f C p_f \left(\frac{\partial T_{fp}}{\partial t} + u_{fp} \frac{\partial T_{fp}}{\partial x} + v_{fp} \frac{\partial T_{fp}}{\partial y} \right) = k_e \left(\frac{\partial^2 T_{fp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{fp}}{\partial y^2} \right) \quad (3-5)$$

其中

$$k_e = k_e^0 + k_i^* \quad (3-6)$$

k_e^0 為停滯熱傳導係數 (Stagnant conductivity)，由[40]可得

$$\frac{k_e^0}{k_f} = 1 - \sqrt{(1-\varepsilon) + \frac{2\Lambda\sqrt{1-\varepsilon}}{\Lambda-B_0}} \times \left[\frac{B_0\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-B_0)^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{B_0}\right) - \frac{B_0+1}{2} - \frac{\Lambda(B_0-1)}{\Lambda-B_0} \right] \quad (3-7)$$

$$\Lambda = \frac{k_s}{k_f}$$

$$B_0 = 1.25 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{10/9}$$

k_t^* 為熱散逸傳導係數 (thermal dispersion conductivity)，由[40]可得

$$\frac{k_t^*}{k_f} = D_T \text{Pr} \text{Re}_p \left| \bar{v}_p \right| l \quad (3-8)$$

D_T ：經驗常數

Pr：流體的 Prandtl Number

$$\text{Re}_p = \frac{\bar{u}_p d_p}{\nu_f}, \quad \bar{u}_p : \text{多孔介質內的平均流速}$$

l : Van Driest' s wall function, 由[40]可得 $l = 1 - \exp\left(-\frac{\Delta s}{C_1 d_p}\right)$

C_1 為一經驗常數, Δs 為距牆面的最小距離。

式(3-3)及(3-4)等號右邊第二項為擴散項, 此乃為了符合壁面上之不滑移條件, 並且此項會影響壁面上之熱傳效果。右邊第三項為達西阻力, 其代表因多孔介質存在而造成的壓力損失, 右邊第四項為慣性阻力, 此項為在高流速時孔隙間流體混合所造成的額外阻力。孔隙率 ε (無因次)、滲透率 K ($[m^2]$)、慣性參數 F (無因次) 之經驗式如下列所示, 此為 Vafai[42]所建議的 Ergun 模式。

$$\varepsilon = \varepsilon_e \quad (3-9)$$

$$K = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (3-10)$$

$$F = \frac{1.75}{(\sqrt{150} \varepsilon^{1.5})} \quad (3-11)$$

其中：

ε_e ：多孔性介質之等效孔隙率

d_p ：顆粒直徑

3.2.2 外流場之統御方程式

連續方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3-12)$$

動量方程式：

x 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3-13)$$

y 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3-14)$$

能量方程式：

$$\rho_f C p_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3-15)$$

3.3 無因次化：

本研究分別以進口速度 v_0 、外界溫度 T_0 和渠道寬度 w_1 為特徵速度、溫度和長度，無因次參數群可表示如下：

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{w_1}, \quad Y = \frac{y}{w_1}, \quad U = \frac{u}{v_0}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad V_b = \frac{v_b}{v_0}, \quad U_{fp} = \frac{u_{fp}}{v_0}, \quad V_{fp} = \frac{v_{fp}}{v_0} \\ P_{fp} &= \frac{p_{fp} - p_\infty}{\rho_f v_0^2}, \quad P = \frac{p - p_\infty}{\rho_f v_0^2}, \quad \tau = \frac{t v_0}{w_1}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_0}, \quad \theta_{fp} = \frac{T_{fp} - T_0}{T_H - T_0} \\ \text{Re} &= \frac{v_0 w_1}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha_f}, \quad \text{Pr}_e = \frac{\nu}{\alpha_e}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta (T_H - T_0) w_1^3}{\nu^2}, \quad \text{Sr} = F_c = \frac{f_c w_1}{v_0} \\ \text{Da} &= \frac{K}{w_1^2}, \quad |\bar{U}| = \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} \end{aligned} \quad (3-16)$$

其中 V_b 是代表活塞 *MNLI* 的瞬間移動速度，因此寫成：

$$\begin{aligned} V_b(\tau) &= \frac{v_b(t)}{v_0} = \frac{1}{v_0} \frac{w_1}{2} \omega \cdot \text{Sin}(\omega t) \\ &= 2\pi f_c \frac{1}{v_0} \frac{w_1}{2} \cdot \text{Sin}\left(2\pi f_c \frac{w_1}{v_0} \tau\right) = \pi F_c \cdot \text{Sin}(2\pi F_c \tau) \end{aligned}$$

表 3-1 為各項參數無因次化後的數值列表。

根據上述的假設和無因次化之參數，經整理後可得無因次化之 ALE 型式的流場統御方程式，表示如下：

3.3.1 內流場：

連續方程式：

$$\frac{\partial U_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} = 0 \quad (3-17)$$

動量方程式：

X 方向：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{fp}}{\partial \tau} + (U_{fp} - \varepsilon \hat{U}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}}{\varepsilon} \right) + (V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_{fp}}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_{fp}}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} U_{fp} - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} |\bar{U}_{fp}| U_{fp} \end{aligned} \quad (3-18)$$

Y 方向：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{fp}}{\partial \tau} + (U_{fp} - \varepsilon \hat{U}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_{fp}}{\varepsilon} \right) + (V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_{fp}}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} V_{fp} - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} |\bar{U}_{fp}| V_{fp} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \varepsilon \theta_{fp} \end{aligned} \quad (3-19)$$

能量方程式：

$$\frac{\partial \theta_{fp}}{\partial \tau} + (U_{fp} - \hat{U}) \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}_e \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial Y^2} \right) \quad (3-20)$$

3.3.2 外流場：

連續方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3-21)$$

動量方程式：

X 方向：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (3-22)$$

Y 方向：

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta \quad (3-23)$$

能量方程式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3-24)$$

其中 \hat{U} ($\hat{U} = \frac{\hat{u}}{v_0}$) 和 \hat{V} ($\hat{V} = \frac{\hat{v}}{v_0}$) 分別為計算網格在 x 方向和 y 方向之移動速度。

對於上述的網格移動速度，由於本研究所探討的問題為移動邊界在垂直渠道中向上或向下運動，因此並不需要 x 方向之網格速度，設定 $\hat{U} = 0$ ；而在 y 方向的網格速度，根據前一章 ALE 法對網格速度的描述，在渠道 EFJI、GHLK 中的網格移動速度 \hat{V} 則在 y 方向採用線性分佈的方式，這樣是為了避免靠近移動界面 \overline{EH} 往上附近的網格過度變形，造成在計算上發散。靠近移動界面 \overline{EH} 附近的網格移動速度較慢，而愈往上速度愈快，渠道 MNIL 在 y 方向的速度即為該瞬間之活塞運動速度。

3.4 初始條件與邊界條件

初始條件：

針對本文的分析，穩態的流場皆由流場內計算值為零開始。而對於較高的 Re 及 Gr，皆以較低的 Re 及 Gr 數值解為初始值，以求得更高的網格不移動穩態流場、溫度場解。另外對於暫態的分析，皆是由穩態分析結果為初始值開始計算，亦即在執行暫態流場計算之前，必須先求得穩態流場內之速度場、溫度場分佈。

邊界條件：

在壁面邊界 \overline{AE} 、 \overline{BF} 、 \overline{CG} 、 \overline{DH} ：

$$\begin{aligned}
 U &= V = 0 \\
 \frac{\partial \theta}{\partial X} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-25}$$

在移動壁面 \overline{EI} 、 \overline{FJ} 、 \overline{GK} 、 \overline{HL} 、 \overline{IM} 、 \overline{LN} ：

$$\begin{aligned}
 U &= 0 \\
 V &= \begin{cases} 0 & \tau = 0 \\ V_b & \tau > 0 \end{cases} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial X} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-26}$$

在移動邊界 \overline{MN} ：

$$\begin{aligned}
 U &= 0 \\
 V &= \begin{cases} 0 & \tau = 0 \\ V_b & \tau > 0 \end{cases} \\
 \theta &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3-27}$$

在移動邊界 \overline{JK} ：

$$\begin{aligned}
 U &= 0 \\
 V &= \begin{cases} 0 & \tau = 0 \\ V_b & \tau > 0 \end{cases} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-28}$$



在流體入口面 \overline{AB} ：

$$\begin{aligned}
 U &= 0 \\
 V &= 1 \\
 \theta &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-29}$$

在流體出口面 \overline{CD} ：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial Y} &= \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \\
 \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-30}$$

在內外流場交界面 \overline{OP} ：

$$\begin{aligned}
U &= U_{fp} & V &= V_{fp} & \theta &= \theta_{fp} \\
\frac{\partial U}{\partial Y} &= \frac{\partial U_{fp}}{\partial Y} & \frac{\partial V}{\partial Y} &= \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} & k_f \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= k_e \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y}
\end{aligned} \tag{3-31}$$

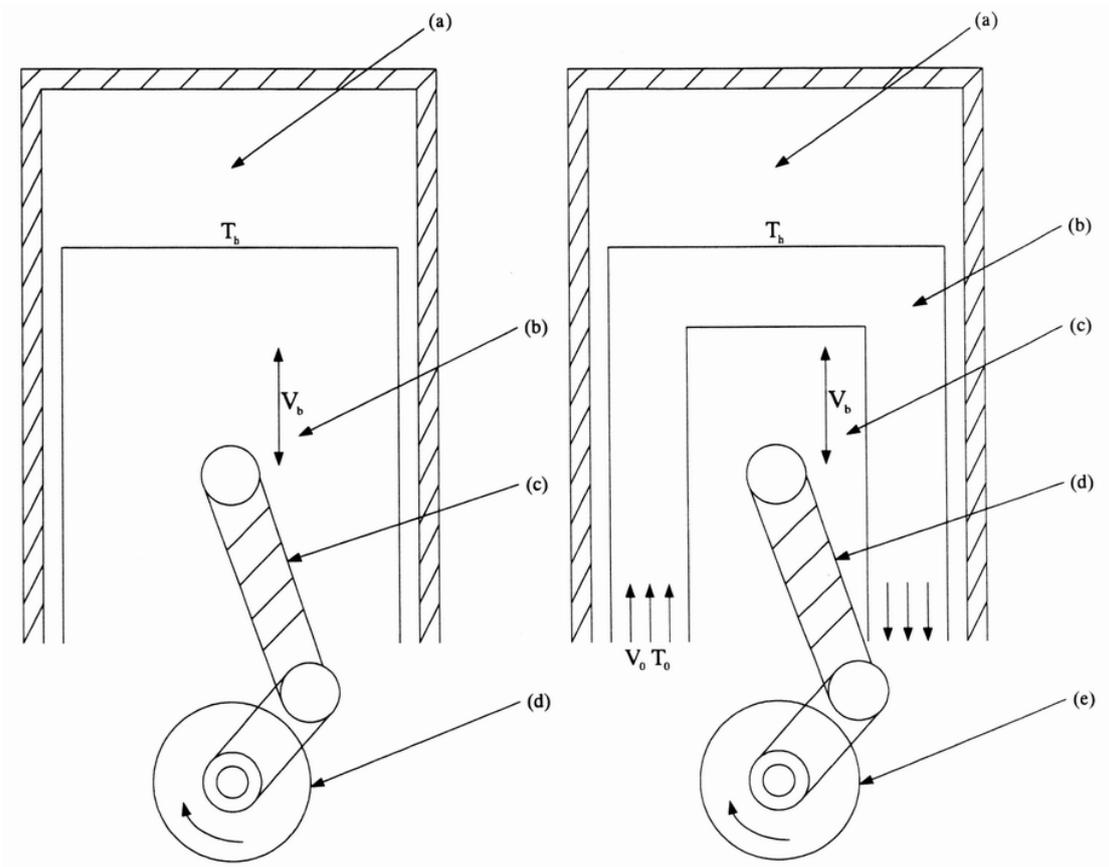
3.5 紐塞數計算

本研究所採用之工作流體為空氣，其普朗特常數為 $Pr = 0.7108$ 。此外，本文將在穩態狀況下及暫態振盪振幅 $L_c = \frac{w_1/2}{w_1} = 0.5$ 、振盪頻率 $F_c = 0.2$ ，針對 Re 固定為 200、500 下， Gr 及重力方向各種不同參數改變狀況下的流場與溫度場分佈做深入的探討與比較，各種狀況之參數組合如表 3-2 所示。本文將 Gr 維持在 $Gr = 40000$ 及 $Gr = 1600000$ ，因此會有不同的 Gr/Re^2 比值。

高溫面表面之局部紐塞數 Nu_x (local Nusselt number) 和平均紐塞數 \overline{Nu} (average Nusselt number) 分別定義如下：

$$Nu_x(n_{Surface}, \tau) = -\frac{k_e}{k_f} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial n} \tag{3-32}$$

$$\overline{Nu}(\tau) = \frac{1}{n_{Surface}} \int_{Surface} Nu_x dX \tag{3-33}$$



(a) 汽缸燃燒室 (b) 活塞
(c) 曲柄軸 (d) 飛輪

(a) 汽缸燃燒室 (b) 冷卻渠道
(c) 活塞 (d) 曲柄軸
(e) 飛輪

A. 一般引擎示意圖

B. 加裝冷卻渠道示意圖

圖 3-1 引擎活塞機構示意圖

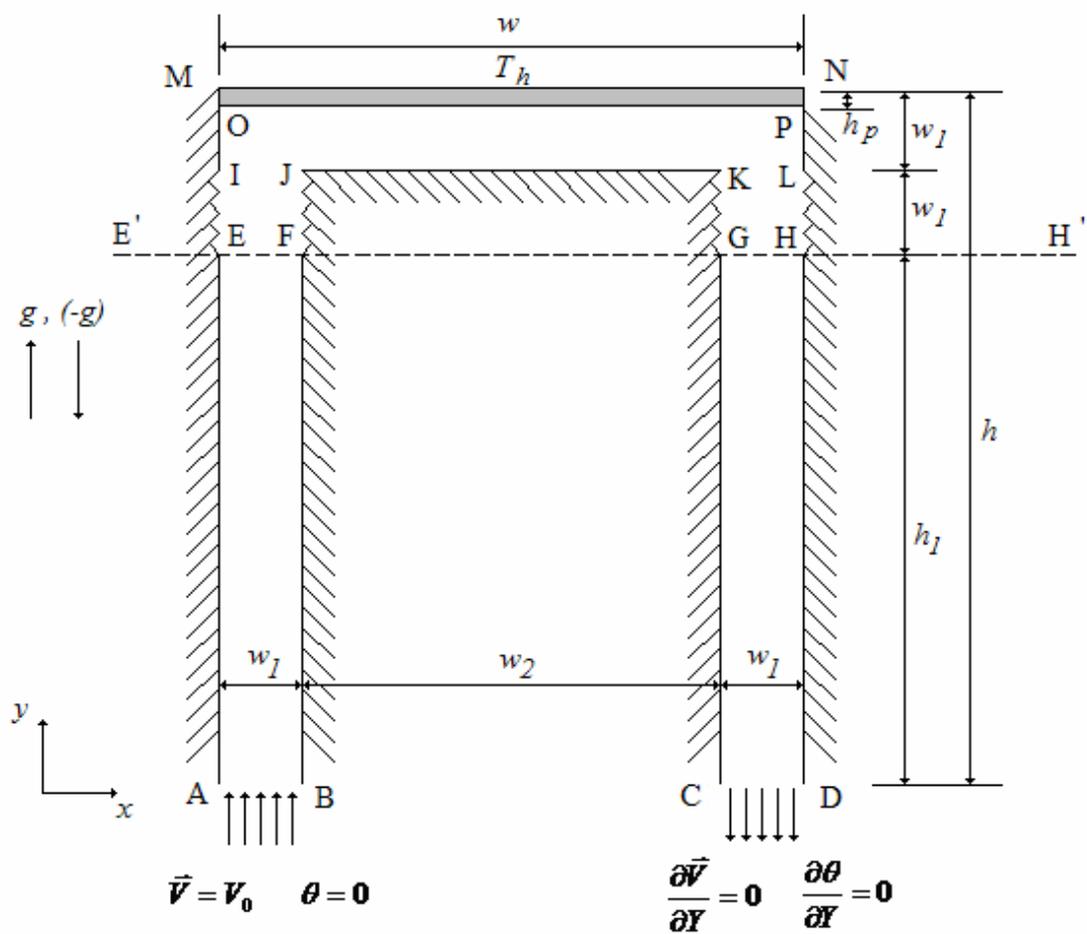


圖 3-2 物理模式圖

w	7
w_1	1
w_2	5
h	51
h_1	49
h_p	0.3

表 3-1 無因次幾何長度

	Dimensionless Variable	Gravity & Inlet Flow State	Flow Field State
Case1	Re = 200 $Gr/Re^2 = 1$	Same	Steady State
	Re = 200 $Gr/Re^2 = 40$	Same	Steady State
	Re = 500 $Gr/Re^2 = 0.16$	Same	Steady State
	Re = 500 $Gr/Re^2 = 6.4$	Same	Steady State
	Re = 200 $Gr/Re^2 = 1$	Opposite	Steady State
Case2	Re = 200 $Gr/Re^2 = 1$	Same	Transient Sr=0.2 Lc=0.5
Case3	Re = 200 $Gr/Re^2 = 40$	Same	Transient Sr=0.2 Lc=0.5
Case4	Re = 500 $Gr/Re^2 = 0.16$	Same	Transient Sr=0.2 Lc=0.5
Case5	Re = 500 $Gr/Re^2 = 6.4$	Same	Transient Sr=0.2 Lc=0.5
Case6	Re = 200 $Gr/Re^2 = 1$	Opposite	Transient Sr=0.2 Lc=0.5

表 3-2 各種參數組合表

第四章 數值方法

本研究的數值方法採用葛拉金有限元素法 (Galerkin finite element method)。所有元素均為八節點二次等參元素，並引入處罰函數 (penalty function) [28] 處理壓力項和連續方程式，使所需計算的變數僅為 U 、 V 和 θ ，對於時間項則採用後向差分隱式法 (backward different implicit method)。此外，應用牛頓拉斐遜 (Newton-Raphson) 迭代法 [29] 處理動量方程式中的非線性項。速度和溫度均採用四邊形八節點二次等參元素，其節點排列方式如圖 4-1 所示。

4.1 流場溫度場數值計算

統御方程式為

內流場：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{fp}}{\partial \tau} + U_{fp} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}}{\varepsilon} \right) + (V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_{fp}}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_{fp}}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} U_{fp} - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} |\bar{U}_{fp}| U_{fp} \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{fp}}{\partial \tau} + U_{fp} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_{fp}}{\varepsilon} \right) + (V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_{fp}}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} V_{fp} - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} |\bar{V}_{fp}| V_{fp} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \varepsilon \theta_{fp} \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial \theta_{fp}}{\partial \tau} + U_{fp} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}_e \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial Y^2} \right) \quad (4-3)$$

外流場：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (4-4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4-6)$$

採用葛拉金有限元素法，並使用形狀函數 N_i 為加權函數，則原統御方程式可以轉換

成如下之積分形式：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial U_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial U_{fp}}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P_{fp}}{\partial X} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial Y^2} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} U_{fp} + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} U_{fp} \right] d\Omega = 0 \quad (4-7)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial V_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P_{fp}}{\partial Y} - \frac{Gr N_i \theta_{fp}}{\text{Re}^2} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial Y^2} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} V_{fp} + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} V_{fp} \right] d\Omega = 0 \quad (4-8)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} \right) - \frac{N_i}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (4-9)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (4-10)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{Gr N_i \theta}{\text{Re}^2} \right] d\Omega = 0 \quad (4-11)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) - \frac{N_i}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (4-12)$$

再將二次項及壓力項利用高斯積分定理加以化簡，

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P_{fp}}{\partial X} d\Omega = \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_x d\Gamma - \int_{\Omega_e} P_{fp} \frac{\partial N_i}{\partial X} d\Omega \quad (4-13a)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P_{fp}}{\partial Y} d\Omega = \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_y d\Gamma - \int_{\Omega_e} P_{fp} \frac{\partial N_i}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13b)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_{fp}}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U_{fp}}{\partial X} d\Omega \quad (4-13c)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U_{fp}}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_{fp}}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U_{fp}}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13d)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_{fp}}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V_{fp}}{\partial X} d\Omega \quad (4-13e)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V_{fp}}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13f)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} d\Omega \quad (4-13g)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 \theta_{fp}}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13h)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P}{\partial X} d\Omega = \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma - \int_{\Omega_e} P \frac{\partial N_i}{\partial X} d\Omega \quad (4-13i)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P}{\partial Y} d\Omega = \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma - \int_{\Omega_e} P \frac{\partial N_i}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13j)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} d\Omega \quad (4-13k)$$

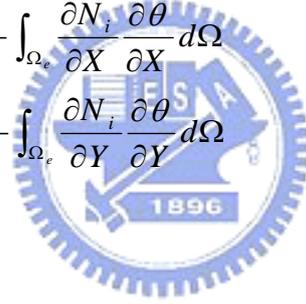
$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13l)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} d\Omega \quad (4-13m)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13n)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} d\Omega \quad (4-13o)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} d\Omega \quad (4-13p)$$



則原積分式可以改寫如下：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial U_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial U_{fp}}{\partial Y} \right) - P_{fp} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U_{fp}}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} U_{fp} + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} U_{fp} \right] d\Omega \\ = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_{fp}}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_x d\Gamma \quad (4-14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial V_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} \right) - P_{fp} \frac{\partial N_i}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V_{fp}}{\partial Y} \right) - \frac{Gr N_i \theta_{fp}}{\text{Re}^2} + N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} V_{fp} + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} V_{fp} \right] d\Omega \\ = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_{fp}}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_y d\Gamma \quad (4-14b) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re Pr}_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{RePr}_e} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta_{fp}}{\partial n} d\Gamma \quad (4-14c)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - P \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - \frac{GrN\theta}{\text{Re}^2} \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma \quad (4-14d)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - P \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - \frac{GrN\theta}{\text{Re}^2} \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma \quad (4-14e)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{RePr}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial n} d\Gamma \quad (4-14f)$$

利用處罰函數可將壓力項以速度關係式代入：

$$P = -\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right)$$

$$P_{fp} = -\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial Y} \right) \quad (4-15)$$

則 (4-8a) 與 (4-8b) 式變為：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} U_{fp} + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} U_{fp} \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_x d\Gamma \quad (4-16a)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial \tau} + N_i \left(U_{fp} \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial X} + (V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial Y} \right) - \frac{GrN\theta_{fp}}{\text{Re}^2} + N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} V_{fp} + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} V_{fp} \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}_{fp}}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_y d\Gamma \quad (4-16b)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\ = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma \end{aligned} \quad (4-17a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} + N_i \left(U \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - \frac{Gr N_i \theta}{\text{Re}^2} \right] d\Omega \\ = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (4-17b)$$

為了計算處理上的方便，我們可以把原本非線性積分方程式加以線性化，

其中 $\Phi^{m+1} = \Phi^m + \delta\Phi$ 則

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial S} &= \Phi^{m+1} \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} \approx \Phi^m \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} + \delta\Phi \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} \\ &= \Phi^m \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} + \Phi^{m+1} \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} - \Phi^m \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} \end{aligned} \quad (4-18)$$

上式中省略了 $\delta\Phi \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial S}$ 項，其中 Φ 可表為 U 、 V 、 U_{fp} 、 V_{fp} ， S 可表為 X 或 Y ，

若是將上述之推導加上格點速度 (mesh velocity) 一項，則線性化結果變為

$$\begin{aligned} (V - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y} &= (V^{m+1} - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} = V^{m+1} \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} - \hat{V} \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} \\ &= \left(V^m \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} + V^{m+1} \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial Y} - V^m \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial Y} \right) - \hat{V} \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} \\ &= (V^m - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} + V^{m+1} \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial Y} - V^m \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial Y} \end{aligned} \quad (4-19)$$

同理， Y 方向之線性化亦可推導而得：

$$(V - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} = (V^m - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial X} - V^m \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial X} \quad (4-20)$$

內流場的 X 、 Y 方向：

$$\begin{aligned}
(V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}}{\varepsilon} \right) &= (V_{fp}^m - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}^{m+1}}{\varepsilon} \right) + V_{fp}^{m+1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}^m}{\varepsilon} \right) - V_{fp}^m \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}^m}{\varepsilon} \right) \\
(V_{fp} - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}}{\varepsilon} \right) &= (V_{fp}^m - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}^{m+1}}{\varepsilon} \right) + V_{fp}^{m+1} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}^m}{\varepsilon} \right) - V_{fp}^m \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}^m}{\varepsilon} \right)
\end{aligned} \quad (4-21)$$

同時，(4-16a)、(4-16b) 中的慣性阻力可以表示成：

$$\begin{aligned}
\sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} U_{fp} &= \sqrt{(U_{fp}^m)^2 + (V_{fp}^m)^2} U_{fp}^{m+1} \\
\sqrt{U_{fp}^2 + V_{fp}^2} V_{fp} &= \sqrt{(U_{fp}^m)^2 + (V_{fp}^m)^2} V_{fp}^{m+1}
\end{aligned} \quad (4-22)$$

另外，對於時間項 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 的處理方式，則採用上述之後向差分隱式法，其微分式可以表示成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\Phi_{\tau+\Delta\tau}^{m+1} - \Phi_{\tau}^m}{\Delta\tau} \quad (4-23)$$

由上述之推導，最終即可獲得線性化之有限元素方程式，如下所示：

內流場：

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_{fp, \Delta\tau+\tau}^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left(U_{fp}^m \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}^{m+1}}{\varepsilon} \right) + (V_{fp}^m - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_{fp}^{m+1}}{\varepsilon} \right) + U_{fp}^{m+1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_{fp}^m}{\varepsilon} \right) + V_{fp}^{m+1} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_{fp}^m}{\varepsilon} \right) \right) \right. \\
&+ \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U_{fp}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V_{fp}^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U_{fp}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U_{fp}^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{N_i \varepsilon}{\text{Re Da}} U_{fp}^{m+1} + \frac{N_i F \varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{(U_{fp}^m)^2 + (V_{fp}^m)^2} U_{fp}^{m+1} \left. \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_{fp, \tau}^m}{\Delta\tau} + N_i \left(U_{fp}^m \frac{\partial U_{fp}^m}{\partial X} + V_{fp}^m \frac{\partial U_{fp}^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_{fp}^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_x d\Gamma \quad (4-24a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_{fp, \Delta\tau+\tau}^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left(U_{fp}^m \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_{fp}^{m+1}}{\varepsilon} \right) + (V_{fp}^m - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}^{m+1}}{\varepsilon} \right) + U_{fp}^{m+1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_{fp}^m}{\varepsilon} \right) + V_{fp}^{m+1} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_{fp}^m}{\varepsilon} \right) \right) - N_i \frac{Gr}{\text{Re}^2} \varepsilon \theta_{fp} \right. \\
&+ \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_{fp}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V_{fp}^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V_{fp}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V_{fp}^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{N_i \varepsilon}{\text{Re Da}} V_{fp}^{m+1} + \frac{N_i F \varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{(U_{fp}^m)^2 + (V_{fp}^m)^2} V_{fp}^{m+1} \left. \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_{fp, \tau}^m}{\Delta\tau} + N_i \left(U_{fp}^m \frac{\partial V_{fp}^m}{\partial X} + V_{fp}^m \frac{\partial V_{fp}^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_{fp}^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_y d\Gamma \quad (4-24b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta_{fp}^{m+1}}{\Delta \tau} + N_i \left(U_{fp}^{m+1} \frac{\partial \theta_{fp}^{m+1}}{\partial X} + (V_{fp}^m - \hat{V}) \frac{\partial \theta_{fp}^{m+1}}{\partial Y} + U_{fp}^{m+1} \frac{\partial \theta_{fp}^m}{\partial X} + V_{fp}^{m+1} \frac{\partial \theta_{fp}^m}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re Pr}_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta_{fp}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta_{fp}^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta_{fp,\tau}}{\Delta \tau} + N_i \left(U_{fp}^m \frac{\partial \theta_{fp}^m}{\partial X} + V_{fp}^m \frac{\partial \theta_{fp}^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re Pr}_e} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta_{fp}^m}{\partial n} d\Gamma \quad (4-24c)
\end{aligned}$$

外流場：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U^{m+1}}{\Delta \tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial X} + (V^m - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial Y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_\tau}{\Delta \tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma \quad (4-25a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V^{m+1}}{\Delta \tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial X} + (V^m - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial Y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_\tau}{\Delta \tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma \quad (4-25b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta^{m+1}}{\Delta \tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial X} + (V^m - \hat{V}) \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial \theta^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial \theta^m}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta_\tau}{\Delta \tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \theta^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial \theta^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta^m}{\partial n} d\Gamma \quad (4-25c)
\end{aligned}$$

上式中含上標「m」或「m+1」之各項，其下標均為「 $\tau + \Delta\tau$ 」。

將上述步驟所得之兩個方程式利用矩陣形式表示，且

$$U^{(e)} = [N] \{U\}^{(e)} \quad (4-26a)$$

$$V^{(e)} = [N] \{V\}^{(e)} \quad (4-26b)$$

$$\theta^{(e)} = [N] \{\theta\}^{(e)} \quad (4-26c)$$

$$[N]_{1 \times 8} = [N_1, N_2, \dots, N_8] \quad (4-27)$$

$$\{U\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_8 \end{Bmatrix} \quad (4-28a)$$

$$\{V\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \end{Bmatrix} \quad (4-28b)$$

$$\{\theta\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_8 \end{Bmatrix} \quad (4-28c)$$



而其中的形狀函數（shape function）採用八節點二次等參元素，其函數則如下所述：

$$N_1 = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (4-29a)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (4-29b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \quad (4-29c)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (4-29d)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad (4-29e)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad (4-29f)$$

$$N_7 = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \quad (4-29g)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (4-29h)$$

如此即可獲得單一元素之矩陣方程式

$$([C]^{(e)} + [K]^{(e)} + \lambda [L]^{(e)}) \{q\}^{(e)} = \{f\}^{(e)} \quad (4-30)$$

其中 $\{q\}^{(e)} = [U_1, U_2, \dots, U_8, V_1, V_2, \dots, V_8, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8]^T$

$[C]^{(e)}$ 表非線性迭代 U 與 V 所組成之矩陣，

$[K]^{(e)}$ 表純由幾何形狀函數與時間項所組成之矩陣，

$[L]^{(e)}$ 表帶有處罰函數 λ 項所組成之矩陣，

$\{f\}^{(e)}$ 表右半部已知向量之矩陣。

若是將計算區域內的所有元素結合成單一矩陣方程式，則上式變為

$$([C] + [K] + \lambda [L]) \{q\} = \{f\} \quad (4-31)$$

至於各矩陣的詳細內容可以參考附錄 A 所示。

由於 (4-34) 式為一組非常龐大的聯立方程組，為減小計算所需的記憶體空間，本研究採用鋒面法 (frontal method) [44-46] 並配合高斯喬登消去法來求解。另外，程式的收斂條件則定為

$$\text{MAX} \left| \frac{\{q\}^{m+1} - \{q\}^m}{\{q\}^{m+1}} \right| < 10^{-3} \quad (4-32)$$

而為避免數值計算中所造成的發散現象，求解高雷諾數的流場時，是利用所求得的低雷諾數之流場作為初始值，再用此穩態流場之計算結果，當作求解暫態流場之初始值。

數值計算流程圖如圖 4-2 所示。詳細的步驟如下：

1. 在穩態流場下，經由網格測試決定最佳的計算網格分佈和元素數量。

2. 求得穩定流場下之流場與溫度場，作為暫態解的初始值；純自然對流的狀況下直接以流域內所有速度溫度為零開始作暫態分析。
3. 計算各網格點的網格速度，並檢查初始條件與邊界條件有無錯誤。
4. 求得所需的各項參數（矩陣、形狀函數等）。
5. 反覆解聯立方程組求速度場，直到每一格點的速度及溫度值滿足下列收斂條件。

$$\left| \frac{\phi^{m+1} - \phi^m}{\phi^{m+1}} \right| < 10^{-3} \quad , \text{ 式中 } \phi \text{ 表示 } U、V \text{ 及 } \theta。 \quad (4-33)$$

7. 繼續下一個時間的運算，直到達到預設的時間。
8. 此外，在每個計算時間內，均檢查每一個元素和整個計算域之連續方程式之殘值，

$$\text{Residual} = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \leq 10^{-3} \quad (4-34)$$

以確保在整個計算過程中均能滿足質量守恆定律。



4.2 格點測試

對於格點的疏密分佈，本文採用三種不同的網格密度作比較，第一種元素數為 13200（節點數為 40781），第二種元素數為 14400（節點數為 44393），第三種元素數為 15200（節點數為 46801），其中網格均為非均勻分佈，在高溫壁面和移動邊界附近，因考慮到邊界移動後，網格會扭曲變形，所以取較密之網格分佈。在雷諾數 $Re = 200$ 、 $Gr = 40000$ 之混合對流穩態流場下，採用上述三種不同網格數做比較，沿著 A-B 和 C-D 截面（A-B 和 C-D 之截面位置如圖 4-3 所示）之 U、V 分佈和高溫面之 Nu_x 分佈如圖 4-4 所示，網格數目對於 A-B 或 C-D 截面上的速度分佈影響不大，但是在高溫面局部紐塞數方面，計算元素為 13200 時所得到的結果，和元素數目 14400 及 15200 有一段差距，因此元素數目 13200 所得到的結果是不能採用的。而為了增加計算之準確性、並使計算能較快地收斂、以及後處理的方便性，本研究採用 15200 個元素之計算網格。

在渠道長度的測試方面，本文以 Fox&McDonald[38]敘述圓管流場達到完全發展雷諾數、管徑及管道長度的關係。其式為 $L/D \cong 0.06Re$ ，以本文預計測試最高的雷諾數 500 來計算，可得渠道長需 30 倍特徵長度的無因次長度，測試結果如圖 4-5。但考慮到浮力效應的影響，出口面必須要達到均溫，因此要將該面設定成溫度梯度為零的邊界才較為合理；再加上本文物理模型渠道轉彎及振動對流場的影響，來做流道長度測試，並以不影響流場觀測區為原則，測試後發現當 $h=51$ 時可以讓管道水平部分的觀測區不受流道長度影響。

本文以賴[36]作為數值模擬測試的比對，引用的文獻是使用有限元素法，計算活塞內部散熱管道穩態及暫態流場之高溫面局部 Nu_x 分佈。本文所使用的網格數目和賴[36]相同，並將相關無因次參數設定為 $Re=200, Gr/Re^2=1$ 。圖 4-6 即為高溫面局部紐塞數 Nu_x 的比對結果，其中虛線的部份為本文所計算的結果，經比對後發現本文與文獻的結果相差甚微。

在多孔性介質的數值模擬比對部份，本文對照黃[41]以及 Nithiarasu[43]的計算結果，並將所計算的結果詳列在圖 4-7 和表 4-1。圖 4-7 為模擬流體 ($Pr=10$) 流經一填滿多孔性介質管道，管道長 $100D$ ，流體流經管道後形成完全發展流，其出口端之速度分佈即為該圖所示，可以看到本計算方法所得到的計算結果和文獻相當一致。表 4-1 為一充滿多孔性介質的正方形空穴，空穴的右端為高熱面，左端為低溫面，在純自然對流的情況下，計算達到穩態之高溫面紐塞數，並列出如表所示，且本數值方法和 Nithiarasu[43]的計算結果都相當的符合。

在暫態分析中，時間間隔採 $d\tau = \frac{5}{48}$ ；以 $F_c = 0.2$ 為例，需要 48 步來完成一個活塞運動週期，也就是 5τ 。

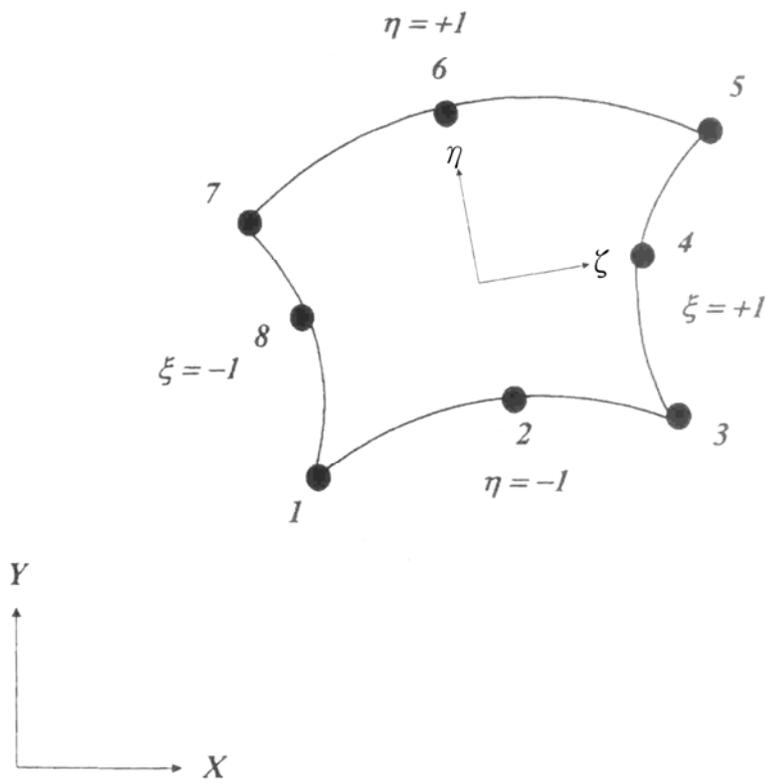


圖 4-1、元素節點排列方式示意圖

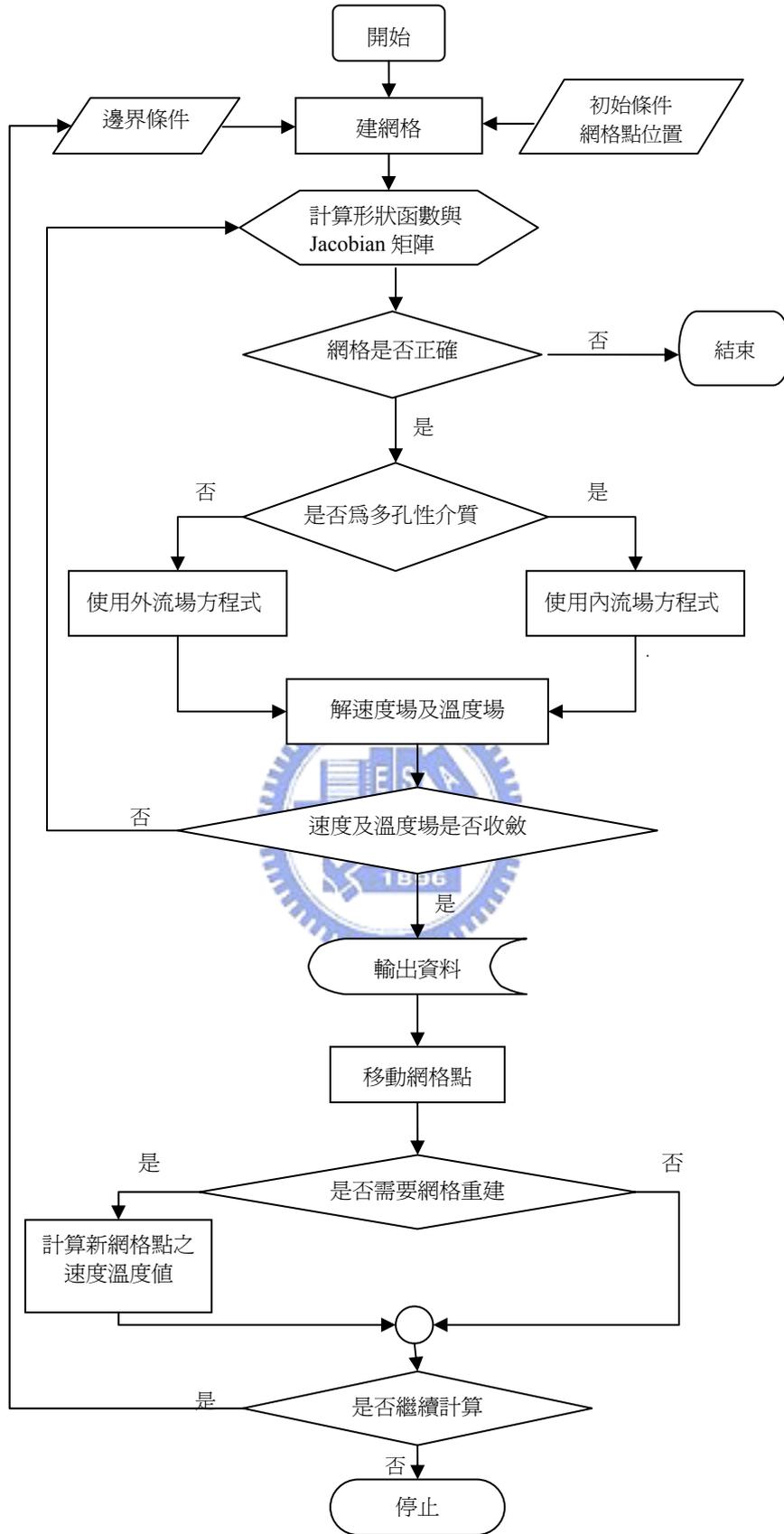


圖 4-2、程式架構圖

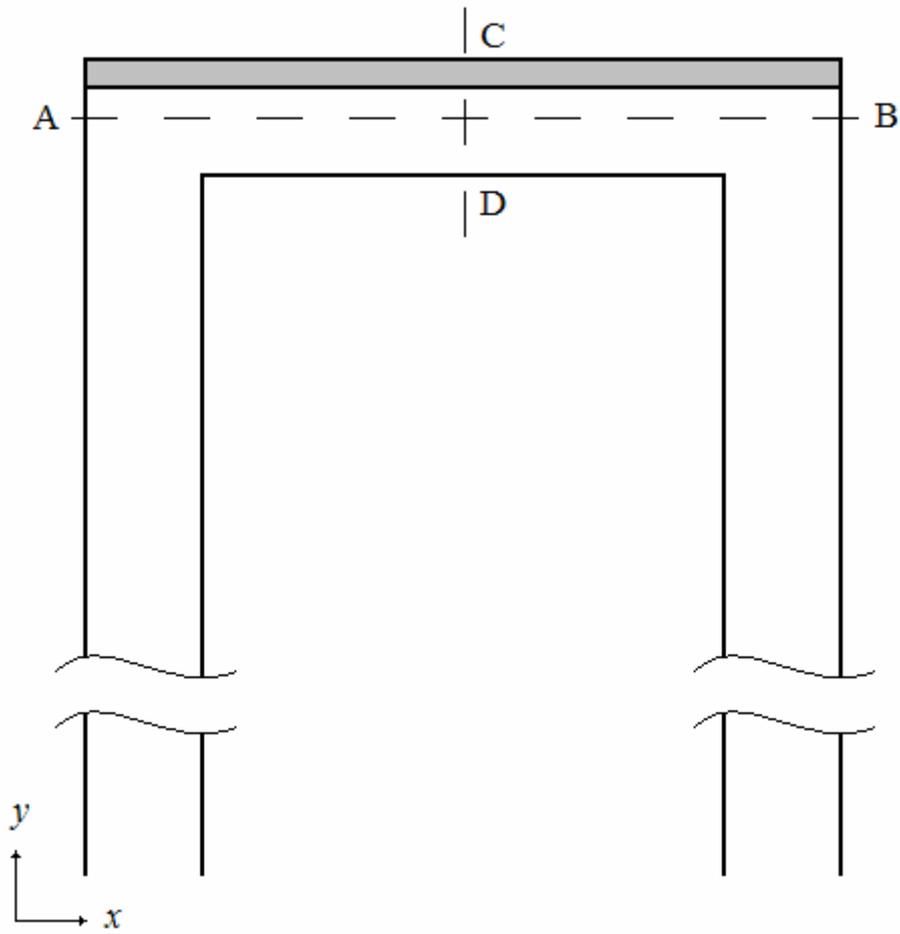
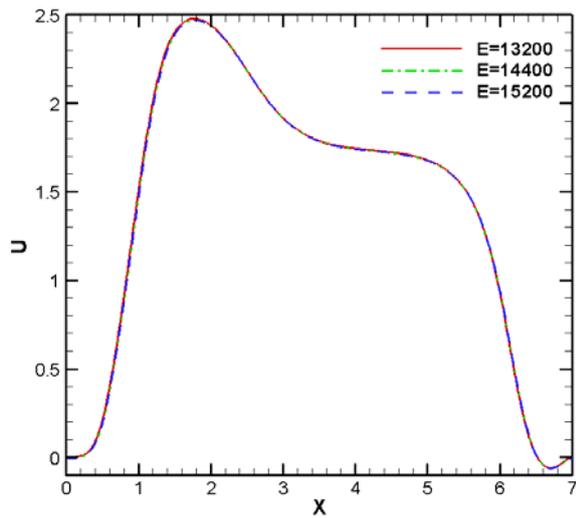
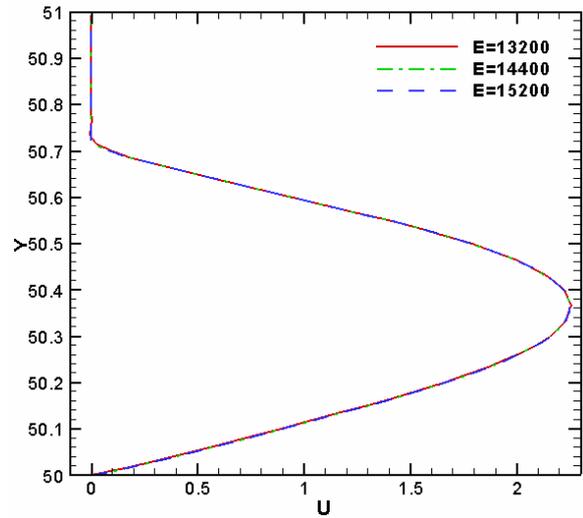


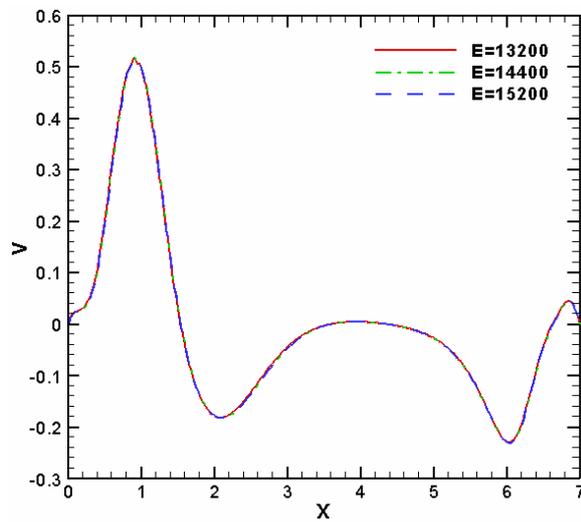
圖 4-3、截面 A-B 與截面 C-D 示意圖



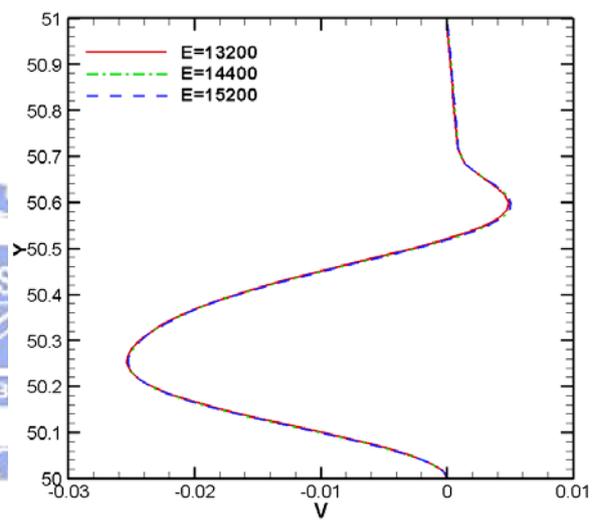
(a) AB 截面之 U 速度分佈



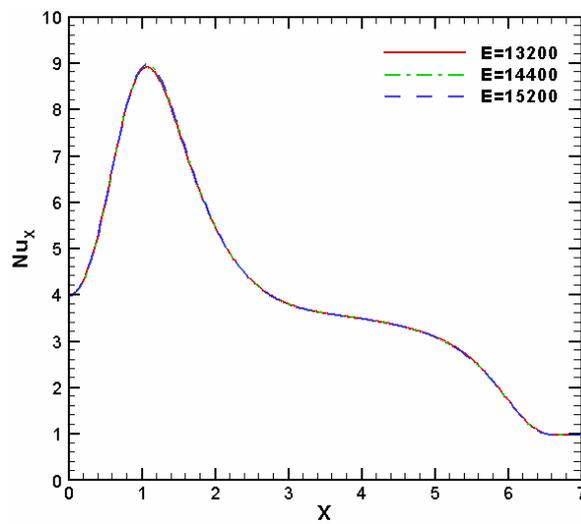
(b) CD 截面之 U 速度分佈



(c) AB 截面之 V 速度分佈



(d) CD 截面之 V 速度分佈



(e) 高溫面之 Nu_x 分佈

圖 4-4、不同網格數之網格測試

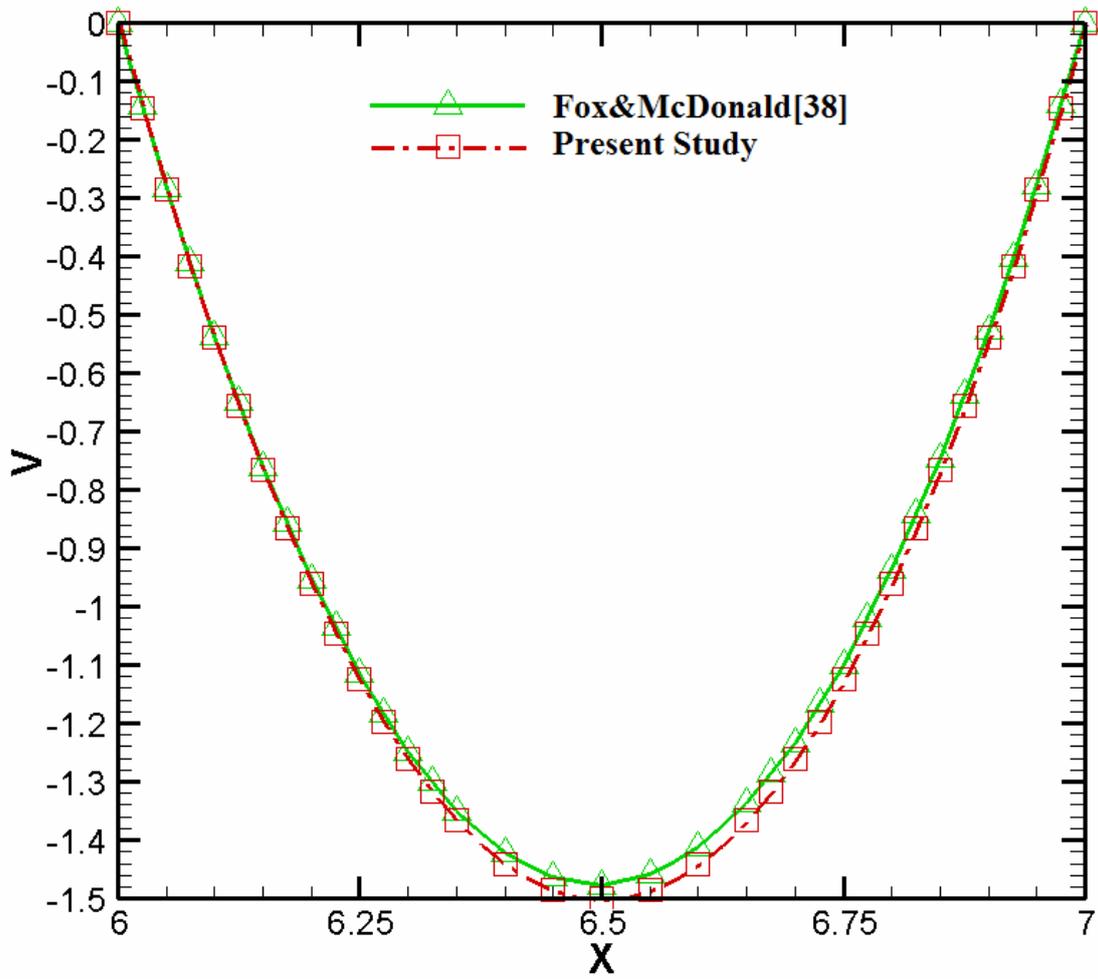


圖 4-5、渠道出口速度分佈圖

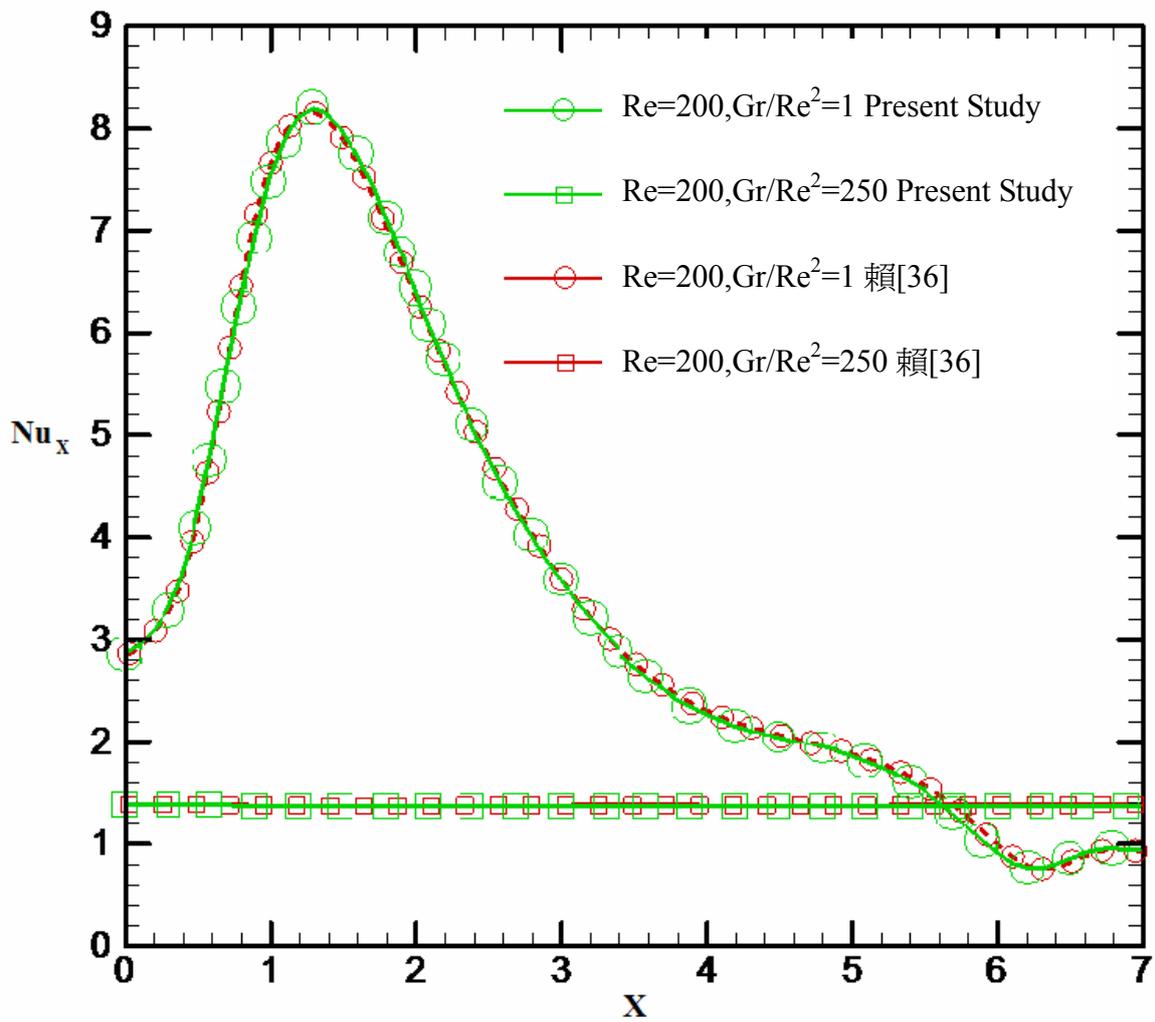


圖 4-6、賴[36]之穩態 Nu_x 分佈圖與本文之穩態 Nu_x 分佈圖
 (Re=200, Gr/Re²=1、Gr/Re²=250)

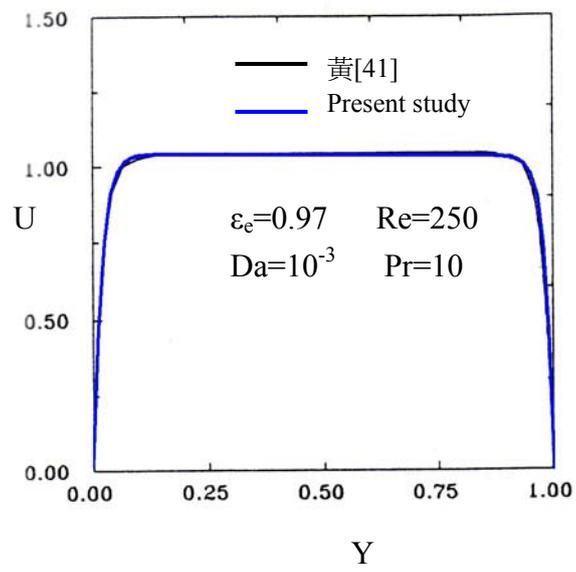


圖 4-7、通過充滿多孔性介質管道後之 U 速度分佈

Darcy Number	Rayleigh Number	Nusselt Number								
		$\varepsilon=0.4$			$\varepsilon=0.6$			$\varepsilon=0.9$		
		[43]	Author's result	error (%)	[43]	Author's result	error (%)	[43]	Author's result	error (%)
10^{-4}	10^5	1.067	1.066	0.09	1.071	1.069	0.19	1.072	1.071	0.10
	10^6	2.55	2.605	2.11	2.725	2.718	0.26	2.740	2.808	2.42
	10^7	7.81	7.824	0.18	8.183	8.659	5.50	9.202	9.450	2.62
10^{-2}	10^3	1.01	1.009	0.10	1.015	1.014	0.10	1.023	1.019	0.39
	10^4	1.408	1.3619	3.38	1.530	1.493	2.48	1.64	1.634	0.37
	10^5	2.983	2.9959	0.43	3.555	3.442	3.28	3.91	3.921	0.28

表 4-1、高溫面紐塞數 Nithiarasu[43]

第五章 結果與討論

5.1 穩態下 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向與進口流速度方向相反，加入多孔性介質對流場及溫度場的影響：

圖 5-1(a)、圖 5-1(b)分別為流場 $Re = 200$ ， $Gr/Re^2 = 1$ ，重力方向與流體進口速度相反，活塞靜止固定不動的流線、溫度場分佈圖。如圖 5-1(a)所示，由於 $Y=50.7\sim 51$ 之間為多孔性介質，流體在此區域間較不易流動，因此冷卻流體從左側的管道流入後，大部份的冷卻流體都在多孔性介質的下方向右流動，直接穿過多孔性介質而衝擊高溫壁面的流體較少。進口流進入水平管道後，因為衝擊多孔性介質而反彈，造成 \overline{JK} 壁面上的迴流，且在多孔性介質內造成微弱的迴流。在水平管道轉彎進右管的出口端時，也會因為直接衝擊右壁面而產生迴流。

圖 5-1(b)為流場等溫線圖，水平管道左邊有一因為冷卻流體直接衝擊而產生密集的等溫線分佈，且等溫線越向右邊越稀疏。在多孔性介質內則因為傳導係數較高，因此等溫線的變化較小，只有在冷卻流體直接衝擊的部分有較大的梯度變化。

圖 5-2(a)、圖 5-2(b)分別為流場 $Re = 200$ ， $Gr/Re^2 = 40$ ，重力方向與流體進口速度相反，活塞靜止固定不動的流線、溫度場分佈圖。如圖 5-2(a)所示，受到浮力效應的影響，高溫的流體佔據水平管道的上方，因此強迫流體向下流動， \overline{JK} 壁面上的迴流尺寸也相對的變小，而多孔性介質內的迴流也變得較大，形成流速較慢的高溫迴流區域。由圖中也可以清楚的看出，流體在右側出口管道靠近 \overline{KG} 面流動較快，管道右方 \overline{LH} 面流動較慢，這是因為 Gr/Re^2 的比值較高，因此高溫流體所受的浮力較大，在冷卻流體向下轉彎進入出口管道時也會順便帶走一些靠近高溫面的高溫流體，而這些高溫流體通常被牽引入出口管道沒多久就因為浮力而脫離出口流，較高溫的流體就會佔據出口管道右方，因此可以看到出口流被擠向 \overline{KG} 面且高溫流體佔據 \overline{LH} 面的現象

圖 5-2(b) 為流場等溫線圖，靠近多孔性介質的區域已經出現溫度層化區，進口流在水平管道入口處直接衝擊溫度層化區的底部，因此該處等溫線較密集。在多孔性介質中，溫度梯度因為熱傳導係數較高而顯得較小，且在進口處因為冷

卻流體的衝擊，使得該區域的熱傳效率提高。在出口處附近則會有因強制對流的關係，而出現被帶向出口的高溫流體。

圖 5-3 為 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1、40$ ，重力方向與流體進口速度相反，活塞靜止固定不動的高溫面局部紐塞數分佈圖。當浮力效應較低時($Gr/Re^2=1$)，進口流體可以直接衝擊高溫壁面以及多孔性介質，在 $X=1.2$ 附近有較高的熱傳效果，隨後流體越向右流，熱傳效率越低。在此圖中可以發現，在有較高的浮力效應時($Gr/Re^2=40$)，左上角的熱傳效果卻越好，這是因為當浮力效應升高時，剛流進水平管道的冷卻流體不易向右流動，因此造成冷卻流體直接衝擊 $X=0\sim 1$ 之間的壁面，而使得該區域的熱傳效果顯著上升。但根據賴[36]的結果，如果浮力效應再繼續升高的話，局部紐塞數的峰值會漸漸向 $X=0$ 靠近，且會越來越小而使局部紐塞數呈現一定值的情況。

圖 5-4 為 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向與流體進口速度相反，比較有加入多孔性介質和沒有加入多孔性介質之高溫面局部紐塞數分佈圖。當流道中加入多孔性介質時，高溫面的紐塞數會有顯著的提升，這也意味著加裝多孔性介質的確會對散熱有所幫助。在圖中也可以看到除了紐塞數峰值有增加以外，紐塞數峰值的位置也向左邊移動一段距離，這是由於管道加裝了多孔性介質以後，水平管道的寬度也跟著減小，而冷卻流體由入口管道向右轉彎進入水平管道時，會較早碰到多孔性介質，因此紐塞數的峰值出現在較左邊的位置。

圖 5-5(a)、圖 5-5(b)為流場 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ，重力方向與進口流速度相反，活塞靜止固定不動的流線、溫度場分佈圖。如圖 5-5(a)所示，由於 Re 變大，進口流體衝擊高溫壁面的現象較 $Re=200$ 的狀況強烈。 \overline{JK} 壁面上的迴流比 $Re=200$ 時還要長，多孔性介質內的迴流也較 $Re=200$ 時要大。圖 5-5(b)為流場等溫線圖，流道左上角因進口速度變快，所以流進多孔性介質內的流體也跟著變多，左方多孔性介質內的溫度因而下降；至於右方的多孔性介質因為流入的冷卻流體還是較少，所以溫度仍然偏高。

圖 5-6(a)、圖 5-6(b)為流場 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ，重力方向與進口流速度相反，活塞靜止固定不動的流線、溫度場分佈圖。如圖 5-6(a)所示，由於浮力效應增強，如前述多孔性介質附近的流體發生溫度層化現象，進口流不易直接衝擊多孔性介質與高溫壁面，只能夠在層化區下方向右流動。多孔性介質因處

與溫度層化區內，因此會出現和圖 5-2(b)相似的微弱且長的迴流。如圖 5-6(b)等溫線圖所示，在溫度層化區左側因為進口流的衝擊，有較彎曲且密集的温度曲線，多孔性介質左側的等溫線也會較密集。

圖 5-7 為 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ 、 6.4 ，重力方向與流體進口速度相反之高溫面局部紐塞數分佈圖。由此圖可以看出，由於慣性力的加強，所以浮力效應的高低並沒有對熱傳造成很大的影響，但仍然會使局部紐塞數的峰值以及平均紐塞數下降。

圖 5-8 為 $Re = 200$ ， $Gr/Re^2 = 1$ 、 250 和 $Re = 500$ ， $Gr/Re^2 = 0.16$ 、 40 ，且重力方向和進口流速度相反的高溫面局部紐塞數比較圖。由於重力方向和進口流體速度方向相反，不論 $Re = 200$ 或 $Re = 500$ ，浮力效應較強者較容易在活塞頂部形成溫度層化區，使溫度邊界層變厚，熱傳效果變差。當浮力效應減弱時，強制對流則主導熱傳效益，冷卻流體在直接衝擊到的多孔性介質附近形成熱傳效率最大的區域，隨後向右隨著流體和高溫面及多孔性介質不斷的做熱傳遞而減小。而由於冷卻流體的反彈，在 $X=4\sim 5$ 之間會出現一小的局部紐塞數高峰，此現象會在進口速度越快、浮力效應越強時越明顯。

5.2 穩態下 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向與進口流速度方向相同，加入多孔性介質對流場及溫度場的影響：

圖 5-9(a)、圖 5-9(b)為流場 $Re = 200$ ， $Gr/Re^2 = 1$ ，重力方向與進口流速度相同（也就是將原本的物理模形倒置），活塞靜止固定不動的流線、溫度場分佈圖。由於重力和進口流速度方向相同，因此左側入口管道中浮力和流向反向，為反向抵抗流(opposing flow)，右側出口管道則浮力和流向同向，為助益流(aiding flow)。圖 5-9(a)為流場之流線圖，由於浮力效應的影響，較高溫的流體會有向上流動的趨勢，因此本來在多孔性介質裡的高溫流體會因為密度差而向上流動，而可順勢的被冷卻流體帶往出口管道，也因此多孔性介質中出現了數個迴流區。出口管道由於熱流體向上流動的助益，流線較靠近出口管道的右側壁面，碰到牆面而反彈的力道較弱。圖 5-9(b)為溫度分佈圖，在入口管道附近可以發現因為浮力效應而往上流的流體對抗入口流的情形，因此在入口處的温度變化範圍較大，和圖 5-1(b)比較，5-1(b)的温度變化範圍大約在 $Y=50.2\sim 51$ 之間，而在重力方向與進口流速度相同的情況下，變化範圍約在 $Y=49.8\sim 51$ 之間。而在

入口處附近的多孔性介質，因為浮力效應的影響，使得多孔性介質內的溫度梯度變小，該處的熱傳效率也變的較差；而在進口流直接衝擊的位置附近，因為高溫流體向上流動後，直接被冷卻流體帶走，因此該處的熱傳效率較好。

圖 5-10 為 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ 重力方向和進口流相同及相反之穩態流場高溫面局部紐塞數分佈圖。在管道倒置時，因為浮力效應的影響，在左側壁面的熱傳效果較差，但是在直接衝擊的部份熱傳效果較好。而在流經一段距離後，因為流體的溫度都已經提升到差不多的程度，所以 $X=3$ 以後位置的熱傳效率相差不大。

5.3 活塞往上、往下移動對流場及出口質量流率的影響：

由於本研究對流道中的區塊 *IJFE* 及 *KLHG*，如圖 3-2 所示，是可伸縮的，因此在 \overline{AB} 面固定的流體進口量下， \overline{CD} 面的排出量必須在流道往復運動時做適當的調整，以達到質量守衡。當活塞開始向上移動，區塊 *IJFE* 及 *KLHG* 在此時拉升，整個流域內的空間變大，因此進口流的作為是去補充這些剛形成多出來空間一些新的冷卻流體，其中的影響，就是流域整體包含出口的流速減慢；而當活塞往下移動，區塊 *IJFE* 及 *KLHG* 在此時壓縮，整個流域的空間減少，須排出容納不下的流體，其中的影響有如出口截面 \overline{CD} 的流速增加。圖 5-11 為 $Re = 200$ ， $Gr/Re^2 = 1$ ，往復運動振幅及頻率各為 $F_c = 0.2$ 、 $L_c = 0.5$ ，一個穩定週期的無因次出口切面 \overline{CD} 質流率圖。其中無因次質流率定義為 \dot{M} ，相當於 $\sum_i V(X_i) \times \Delta X$ 。

由圖 5-12 可以發現，當活塞往上移動達到最高速度，也就是 1/4 週期時，出口截面 \overline{CD} 的質流率已從向管道外排出變成向管道內回吸， \dot{M} 的值由正(向外排)轉成負(向內吸)，進口強制流單位時間的流量已不敷填補流道單位時間內新增的體積，該瞬間的流道體積增加率達到最高，從圖中也可以看出此時的體積回吸率是最大的。當活塞從 1/4 週期移動到活塞頂端，也就是 2/4 週期的時候，活塞移動的速度減緩，流道體積的增加率也減緩，流體回吸率減少，到達 2/4 週期，出口改為向外排放流體，且排放的質流率和活塞靜止不動的狀況下一樣。當活塞從 2/4 週期往下移動到 3/4 週期，也就是往下速度最高的時候，由於流道的空間減少，在進口不斷的對流道充加流體的狀況下，流體必需更大量的排出。當到達 3/4 週期時，流道的體積減少率達到最高，流體的排出率也達到了整個週期的峰值。當活塞從 3/4 週期繼續往下移動，到達 4/4 週期時，流道的速度漸漸減

緩，流道體積減少率也慢慢的減低，單位時間流體排出的量也就慢慢的又回到穩態狀況下的排出量。

圖 5-12(a)為活塞往上移動到最高速度時的 \overline{CD} 截面速度向量圖，此時的體積增加率也達到最高，因此該時間的質量流率是回吸的峰值。圖中可以發現管道左右兩側大部分面上流體流向是往內的，只有管道中間小部分的速度是往外排放的。而 \overline{CD} 邊界上所設定的速度及溫度梯度為零邊界在瞬間沒有達到完全發展流，速度分佈拋物線形狀。圖 5-12(b)為活塞達到最高點的位置，此時的體積增加率為零。圖 5-12(c)為往下移動到最高速度時出口切面 \overline{CD} 的速度向量圖，往下移動到最高速的時候流道的體積減少率也達到最高，因此該時間的質流率是排放的峰值。圖 5-12(d)為活塞達到最低點的位置，此時的體積增加率也為零。

5.4 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向與進口流速度方向相反，活塞開始振盪後對流場及溫度場的影響：

以下分析的結果為活塞頂部局部紐塞數達到週期性穩定，在振動頻率 $F_c=0.2$ 的狀況下，五個無因次時間為一週期；而活塞在經過 3 次周期後，便已達到週期性穩動，因此本文由 $\tau=15\sim 20$ 間取樣。圖 5-13、圖 5-14 為活塞在 $Re=200$ 、 $Gr/Re^2=1$ 、 $F_c=0.2$ 、 $L_c=0.5$ 及重力和進口流速度方向相反下，一個完整穩定週期分別在 $0/4$ 、 $1/4$ 、 $2/4$ 、 $3/4$ 及 $4/4$ 週期瞬間的流場流線圖及流場等溫線圖。

圖 5-13(a)為在週期為 $0/4$ 時的流線分佈圖，此時活塞的位置在下始點，其速度為 0 並正要開始往上移動，因此此時的流線分佈圖和穩態時相似。多孔性介質中的迴流範圍已經橫跨在多孔性介質和空的管道之間，這是當活塞達到下始點而停止時，內部的流體卻還因為慣性力而向下移動所造成的。 \overline{KG} 壁面上的迴流出現在較靠近下方的位置，則是活塞向下移動使得流速變快，於是就將迴流向下推擠所致。圖 5-13(b)為在 $1/4$ 週期的流線分佈圖，此時活塞向上移動達到最高速度，入口的流體已經不足以充填軟管區的體積擴張，因此可以看到液體從出口處被回吸。在水平管道中已經沒有迴流的產生，且因為液體在多孔性介質中流動

的阻力較高，冷卻流體多由下方空管道向左方流動。圖 5-13(c)為在 $2/4$ 週期的流線分佈圖，此時活塞到達上始點的位置，速度為零卻正要向下開始移動。該瞬間可以看到流線在水平管道中有些微的波動產生，且多孔性介質中的迴流消失，取而代之的是一微小的水平流動，這是由於流體的慣性力向上而抵抗了液體向外流出的阻力。圖 5-13(d)為在 $3/4$ 週期的流線分佈圖，此時活塞向下的速度達到最大，且軟管區的體積縮減率也達到最大，因此可以看到液體快速的向外流出；而多孔性介質中的流體因為流動不易，於是只能隨著活塞向下移動，水平方向的流動趨近於零。圖 5-13(e)為在 $4/4$ 週期的流線分佈圖，此時又回到週期為 0 的狀態，活塞到達下始點並準備向上移動，而上個週期所造成的擾動尚未平覆，變化情形回到圖 5-13(a)。

圖 5-14(a)為在週期為 $0/4$ 時的溫度場分佈圖，此時活塞於下始點正要開始往上移動，且該瞬間活塞速度為 0，因此溫度場的分佈和穩態時相似，但由於受到前次週期的擾動，多孔性介質內出現兩個較低溫區域，一是冷卻流體直接衝擊的區域，另一為由於活塞向下移動使得流經水平管道的流體加速，於是流體便有足夠的慣性力經由 JK 壁面反彈至 $X=3\sim 5$ 之間的多孔性介質，該區域多孔性介質的溫度因此較低。圖 5-14(b)為在週期為 $1/4$ 時的溫度場分佈圖，此時活塞達到最大的速度。圖中可以看到多孔性介質的低溫區域已經擴大，這是因為活塞向上移動時，流體必須從多孔性介質下方向上流動以補充體積，因此造成較低溫的流體流入多孔性介質內，於是使多孔性介質的溫度下降。另一方面，在此時流道的體積增加率達到最大，入口端的流體無法完全流出至右端管道，同時出口也回吸流體，所以有一部分的流體在管道中間滯留形成液體等溫迴旋區。圖 5-14(c)為在週期為 $2/4$ 時的溫度場分佈圖，此時活塞達到最頂點，液體的流入不必再用於補充軟管區所增加的體積，因此可以看到 $1/4$ 周期時的液體等溫迴旋區被向後推動。而水平管道右方的等溫線分佈較為稀疏，其原因為在 $1/4$ 及 $2/4$ 歷經了流出質量流率為 0 的時間，也就是說有一段期間在水平管道右方的液體是沒有流動的，因此該區域的流體就被高溫面以及多孔性介質持續加熱，等溫線的分佈於是變得較稀疏。圖 5-14(d)為在週期為 $3/4$ 時的溫度場分佈圖，在此瞬間活塞向下移動的速度達最高，整個管道的體積縮減率也到達最大，因此向外排出的流體速度也變快，於是便出現等溫線在多孔性介質和空的管道交界面有較密集的現象。圖 5-14(e)為在週期為 $4/4$ 時的溫度場分佈圖，此時活塞經過了一個振動循環而

回到出發點，所有的現象又回到圖 5-14(a)，等溫線的分佈和穩態時有很大的相似。

圖 5-15(a)、5-15(b)分別為 1/4、2/4 週期和 3/4、4/4 週期和穩態之局部紐塞數比較圖。從圖 5-15(a)中局部紐塞數的分佈可以發現，在 1/4 週期時有熱傳率有三個局部峰值現象，也就是有三次衝擊的狀況發生，其中一個出現在靠近右側壁面的地方。比較圖 5-3 穩態狀況下的高溫面局部紐塞數分佈圖，發現在活塞做往復運動時，高溫面會有二次以上衝擊現象發生，而穩態則沒有這樣的現象。活塞往復運動下，流道壁面移動會牽引流體，而短時間內上下移動的流道使流體無法完全沿著管道向右流動，流體會隨著管道的上下移動而上下晃動，因此會發生這種再次撞擊的現象，而當此衝擊深入多孔性介質中，就會造成該區域的局部紐塞數上升。當時間到達 2/4 周期時，這種衝擊的力道已減弱不少，所以局部紐塞數便下降，但局部紐塞數的峰值仍然維持三個。在圖 5-15(b)中可以看到局部紐塞數已經變得比穩態時還低，也就是說該時段的熱傳效率是較差的，尤其是在 3/4 周期時。從 2/4 週期~3/4 週期時，由於活塞向下移動並且持續的加速，多孔性介質中的流體不易流出，因此就被持續的加熱，直到 3/4 週期~4/4 週期時，由於活塞的持續減速，流體會因為慣性力而甩出，較冷的流體就可以適時的補充進多孔性介質中，於是該瞬間的局部紐塞數便得以稍微上升。

圖 5-16 為高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖，從圖中可以發現活塞在加裝了多孔性介質後，流場從穩態開始運動時，只需要 2 個週期流場便可以達到週期性穩定，且活塞在開始向上運動到最高點時為熱傳效率開始上升的時段；而當活塞到達上始點並開始向下運動到下始點這時段，熱傳效率會持續下降到谷底。雖然活塞在震盪時，其平均紐塞數有時會比穩態時高，有時又變得比較低，但是以時間平均來說，其熱傳效果仍然是比穩態時高，因此活塞震盪時可以提高一定的熱傳效率。

圖 5-17、圖 5-18 為活塞在 $Re = 200$ 、 $Gr/Re^2 = 40$ 、 $F_c = 0.2$ 、 $L_c = 0.5$ 及重力和進口流速度方向相反下，一個完整穩定週期分別在 0/4、1/4、2/4、3/4 及 4/4 週期瞬間的流場流線圖及流場等溫線圖。

圖 5-17(a)為在週期為 0/4 時的流線分佈圖，此時活塞速度為 0 並正要開始往上移動。由於浮力效應增強，被加熱的流體會佔據水平管道的上方，因此流體

在流入水平管道之後會被擠向 \overline{JK} 壁面。圖 5-17(b)為 1/4 週期時的流線分佈圖，受到浮力效應加強高溫流體佔據一部分水平管道的影響，水平流道下方的流體速度較快，因此流線呈現地較為彎曲。當活塞到達上始點的 2/4 週期時，如圖 5-17(c)所示，多孔性介質內的迴流已經消失，取而代之的是一微小由左端入口到右端出口的流動，且由於浮力效應加強，高溫流體在出口端的緩慢流動佔據右半部，因此將較低溫冷卻流體推向左半部，此現象和 0/4 週期以及穩態時一樣。圖 5-17(d)為 3/4 週期時的流線分佈圖，由於此時活塞向下達到最大速度，因此儲存在軟管區內的流體大量向外排出，且高溫流體佔據高溫面的影響，水平管道內的流動速度比圖 5-13(d)更快。當週期到達 4/4 時，如圖 5-17(e)所示，其流線分佈又回到和 0/4 週期一樣。

圖 5-18(a)為 0/4 週期瞬間的溫度分佈圖，可以看到由於浮力效應加強，因此高溫流體佔據水平管道的上方；而在進口處附近，由於冷卻流體直接衝擊，在加上浮力效應較高，流體進入多孔性介質時除了流體的慣性力，還有浮力加以輔助，因此在入口處附近，冷卻流體可以較為深入多孔性介質之內。圖 5-18(b)為 1/4 週期瞬間的溫度分佈圖，此時活塞的速度為向上且達到最大；另一方面高溫流體也由於浮力效應的關係而向上移動，且漂浮在水平管道上半部的高溫流體也阻隔冷卻流體向多孔性介質內的流動，因此多孔性介質內的冷卻流體被持續的加熱。當達到 2/4 週期，如圖 5-18(c)所示，此時活塞向上移動到上始點，多孔性介質內的溫度因為前述的原因而被加熱到最高。圖 5-18(d)為活塞向下移動到最大速度的瞬間，此時流體在多孔性介質內的阻力可以以慣性力及浮力來克服，因此入口管道附近的多孔性介質溫度會下降，該處的熱傳效率變好。而當活塞達到 4/4 週期時，如圖 5-18(e)所示，其等溫線分佈又回到和 0/4 週期時相同。

圖 5-19(a)、5-19(b)分別為 1/4、2/4 週期和 3/4、4/4 週期和穩態之局部紐塞數比較圖。當活塞在上升的過程中，由於浮力的關係，受熱的流體還是佔據著水平管道的上方，因此多孔性介質內的流體也一直被加熱，於是此時的紐塞數分佈會較穩態時低；又因為 2/4 週期是活塞向上移動到上始點的瞬間，在 0/4~2/4 這段期間之內，高熱面不斷的加熱多孔性介質內的流體，造成多孔性介質內的溫度不斷上升，於是熱傳效果越來越差，如圖 5-19(a)所示。在圖 5-19(b)中，由於活塞開始向下移動，入口處附近的流體由於受到入口管道流進的流體慣性力、以及多孔性介質附近高溫流體所產生的浮力，冷卻流體比較容易進入多孔性

介質之內，且活塞的向下移動也可以加強高溫面的熱傳效果，因此在圖 5-19(b) 中可以看到局部紐塞數越來越高。比較圖 5-15 及圖 5-19 時，可以發現到在活塞上升時，浮力效應的加強會使熱傳效率降低，因為在浮力效應較強時，被加熱的流體向上昇造成一較厚的溫度層化區，因此在活塞上升的這段時間裡，高溫面的熱傳效率變差；而在活塞下降時，高溫流體的浮力以及進口流體的慣性力可以克服在多孔性介質內流動的阻力，所以在活塞下降這一段期間的熱傳效率會比穩態時佳。反觀在浮力效應較低時，累積在水平管道上方的溫度層化區較薄，活塞上升時會帶動流體向多孔性介質內流動，而此時所帶入的流體都是屬於較低溫的狀態，所以該時間內的熱傳效率變高，但在下降時，由於沒有較大的浮力效應來幫助流體克服在多孔性介質內流動的阻力，所以多孔性介質內的流體會被持續加熱，使得這段期間的熱傳效率變低。

圖 5-20 為重力方向和進口流相反， $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ 、 40 的條件下，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖。可以看到由於浮力作用的加強， $Gr/Re^2=40$ 之平均紐塞數變化已經變得較小，且和 $Gr/Re^2=1$ 的變化曲線有一個相位差；在浮力效應較小的時候，活塞上升會使熱傳效果變好，但隨著浮力效應的增加，活塞上升的這段期間，反而是熱傳變差的時候，而其中的差異就是在浮力效應越高時，高溫流體佔據水平管道的區域變大，且產生的浮力也會幫助流體流進多孔性介質之中，所以浮力效應增高且活塞上升時，多孔性介質附近的流體都是較高溫的流體，於是此時的熱傳效率變得較差；但是浮力效應低且活塞上升時，在多孔性介質附近的溫度層化區不大，所以進入多孔性介質內的流體是較為低溫的狀態，所以此時高溫面的熱傳效率較好。而圖中也可以看到，雖然 $Gr/Re^2=1$ 的平均紐塞數雖然有時候會比 $Gr/Re^2=40$ 低，但是若以時間的平均來說，在浮力效應低的情況 ($Gr/Re^2=1$) 下，該高溫面的熱傳效率較好。

圖 5-21、圖 5-22 為活塞在 $Re=500$ 、 $Gr/Re^2=0.16$ 、 $F_c=0.2$ 、 $L_c=0.5$ 及重力和進口流速度方向相反下，一個完整穩定週期分別在 $0/4$ 、 $1/4$ 、 $2/4$ 、 $3/4$ 及 $4/4$ 週期瞬間的流場流線圖及流場等溫線圖。

圖 5-21(a) 為 $0/4$ 周期之瞬間流場流線圖，此時雷諾數較大 ($Re=500$)，流體所擁有的慣性力也較大，和圖 5-13(a) 比較起來，流體在衝擊到多孔性介質後，在多孔性介質內形成的微弱迴流範圍顯得較大，且由此時的流線分佈也可以發現到，在 $X=4\sim 5$ 之間冷卻流體有二次衝擊多孔性介質的情況發生。圖 5-21(b) 為

1/4 周期之瞬間流場流線圖，此時活塞向上移動到最大速度，除了入口端的流體流入以外，出口端也被大量吸入流體以補充軟管區擴張的體積，於是在水平管道內的流線變得較為紊亂，且在出口端靠近水平管道的部份也產生了不少的迴流現象。圖 5-21(c)為活塞到達上始點時的瞬間流場流線分佈圖，此時活塞速度為 0，受到前些時間震盪的影響，在入口處附近的多孔性介質表面產生小迴流，而在此圖中也可看到冷卻流體二次衝擊多孔性介質的情況發生。當周期到達 3/4 時，如圖 5-21(d)所示，此時活塞向下移動到最大速度，流體被大量向外排出，所以可看到流線都向右下偏，且流體在多孔性介質內流動不易，所以流線呈現垂直；在出口端則由於流體速度快，所以流線偏向右壁面。當時間達到 4/4 周期時，流場的現象則回到和 0/4 週期時相同。

圖 5-22(a)為 0/4 週期之瞬間流場溫度分佈圖，此時活塞速度為 0，流體的直接衝擊以及二次衝擊使得多孔性介質呈現兩個低溫區域，在這兩個低溫區域的高溫面熱傳效果較好。當活塞開始往上移動並到達最高速度時，也就是 1/4 週期，如圖 5-22(b)所示，活塞向上移動且此時的浮力效應較低，高溫流體不易形成一佔據水平管道的溫度層化區，所以冷卻流體可以被吸入多孔性介質之內；另一方面，由於此時的雷諾數較高，冷卻流體在管道內的流動較快，因此被加熱的流體很快的帶出並以低溫的流體來補充，所以進入多孔性介質內的流體和圖 5-14(b)比較起來，此時的多孔性介質偏向低溫，高溫面的熱傳效率變好。圖 5-22(c)是活塞到達上始點時的瞬間溫度場分佈，此時活塞的速度為 0，不再有大量的冷卻流體進入多孔性介質內進行熱交換，但是仍可看出多孔性介質內有兩個低溫區。圖 5-22(d)是活塞向下移動到最大速度的 3/4 周期之瞬間溫度場分佈，此時多冷卻流體只能靠慣性力來克服多孔性介質內的流動阻力，因此在多孔性介質內的流動變得較慢，流體被持續加熱，高溫面的熱傳變差。圖 5-22(e)為 4/4 週期時的溫度場分佈，此時又回到 0/4 週期時的現象。

圖 5-23(a)、5-23(b)分別為 1/4、2/4 週期和 3/4、4/4 週期和穩態之局部紐塞數比較圖。從圖 5-23(a)可以看到，當活塞向上移動到最大速度時 (1/4 週期)，由於吸入的流體較多，所以高溫面的紐塞數較高，而當活塞慢慢減速到 0 時 (2/4 週期)，吸入的冷卻流體逐漸變少，高溫面的紐塞數便下降。而圖 5-23(b)則是活塞向下移動到最大速度時，因為冷卻流體在多孔性介質內被持續加熱因此熱傳效果變差。之後由於流體會因為慣性力而甩出，較冷的流體就可以適時的補

充進多孔性介質中，於是 4/4 週期之局部紐塞數便得以稍微上升，此點和圖 5-15(b)相似。

圖 5-24 為重力方向和進口流相反， $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ 、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ 的條件下，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖。由於此時的浮力效應較低，因此隨時間分佈的曲線相當類似，都是在活塞上升時，其熱傳效率會變好，但在下降時熱傳效率變差，兩者的平均紐塞數隨時間變化曲線相位差很小；平均來說， $Re=500$ 的情況下，平均紐塞數的時間平均 ($\overline{Nu}_{avg} = \frac{1}{\tau} \int \overline{Nu}(\tau) d\tau$) 大概是 12，約是 $Re=200$ 之情況下的兩倍。

圖 5-25、圖 5-26 為活塞在 $Re=500$ 、 $Gr/Re^2=6.4$ 、 $F_c=0.2$ 、 $L_c=0.5$ 及重力和進口流速度方向相反下，一個完整穩定週期分別在 0/4、1/4、2/4、3/4 及 4/4 週期瞬間的流場流線圖及流場等溫線圖。

圖 5-25(a) 為週期 0/4 時之流場瞬間流線圖，冷卻流體由入口端進入水平管道後衝擊到多孔性介質，反彈撞擊 \overline{JK} 壁面後，再次撞擊多孔性介質；和圖 5-21(a) 不同的是，此時浮力效應較大，在水平管道進入出口端後，較熱的流體會開始往上升，因此在 $Y=49$ 開始便將流體推向左邊 \overline{KG} 壁面， \overline{KG} 壁面上的迴流顯得較小。圖 5-25(b) 為 1/4 週期瞬間之流場流線圖，此時活塞向上移動到最大速度，由於需要從入口端吸入流體來補充軟管區體積擴張的部份，所以可以看到在出口端的流線分佈較為紊亂，且在水平管道中心有一流體滯留區。當活塞運動到 2/4 週期時，此時活塞到達上始點，其運動速度為 0，如圖 5-25(c) 所示，流體二次衝擊多孔性介質的情況依然存在，但在接近出口端時 ($X=5\sim 6$)，由於此時浮力效應較大，因此會將流體向下壓，且在進入出口端後，高溫流體向上升，於是便將流體擠向出口端的左方壁面 ($Y=49$ 以下)。圖 5-25(d) 為 3/4 週期的流場流線圖，此時活塞向下移動，大量的將冷卻流體擠出管道，和圖 5-21(d) 的差別仍是在出口端的部份，高溫流體有一向上流動的趨勢，造成出口端的流體被向 \overline{KG} 壁面擠壓。圖 5-25(e) 為 4/4 週期之流線圖，其現象又回到和 0/4 週期相同。

圖 5-26(a) 為 0/4 週期之瞬間流場溫度分佈圖，此時活塞速度為 0，活塞剛向下振動到下始點的位置，流體除了入口流體的慣性力以外，還有浮力以克服多孔性介質內的流動阻力，所以此時入口處的多孔性介質溫度較低，且流體的速度較快，造成二次衝擊的現象，因此多孔性介質內有第二處低溫區。圖 5-26(b) 為

1/4 週期之瞬間流場溫度分佈圖，此時活塞向上振動到最大速度，由於浮力效應高、流體的二次衝擊現象以及從出口處回吸的冷卻流體影響，冷卻流體較易進入多孔性介質之中，造成活塞中央 ($X=3\sim 4$ 之間) 的多孔性介質呈現更低溫的狀態。圖 5-26(c) 為活塞到達上始點之瞬間溫度場分佈圖，可以看到在出口處的流體因為受到前些週期的持續加熱，溫度已經變得偏高。當活塞向下移動到最大速度時，如圖 5-26(d) 所示，由於浮力效應較高且此時流體正被大量向外排出，水平管道中的流體速度達到最快，因此會將聚集在多孔性介質表面的流體向內擠入。當活塞達到下始點時，如圖 5-26(e) 所示，溫度分佈又回到和 0/4 週期一樣；在整個運動周期中，由於浮力效應較高，活塞上升時被加熱的流體也跟著向上升，活塞下降時，溫度梯度則受到壓縮而變大，如圖 5-26 的每個時態入口端附近靠近高溫面之左壁面溫度分佈所示。當浮力效應變小，被加熱的流體向上流動的趨勢變低，如圖 5-22 的每個時態入口端附近靠近高溫面之左壁面溫度分佈所示，溫度的分佈範圍變得較廣。

圖 5-27(a)、5-27(b) 分別為 1/4、2/4 週期和 3/4、4/4 週期和穩態之局部紐塞數比較圖。從圖 5-27(a) 可以看到，當活塞上升達到最大速度時(1/4 週期)，在高溫面出現兩個局部紐塞數的峰值，和圖 5-19(a) 比較起來，雖然都是浮力效應較大 ($Gr=1.6\times 10^6$) 的情況，但此時進口流的流速較高，因此冷卻流體可以跟隨著活塞的向上運動以及被加熱流體產生的浮力而進入多孔性介質內；當活塞到達上始點而停止時，入口端附近的流體因為被持續加熱而使溫度邊界層變厚，該區域的熱傳效果變差；而二次衝擊點的位置則是因為活塞停止後，只能以前方被加熱過的流體來冷卻多孔性介質，因此該處的熱傳效率也變差。當活塞下降到最大速度時，如圖 5-27(b) 之綠虛線所示，流體被大量的向外排出，溫度邊界層也隨之減薄，於是在水平管道 $X=2$ 之後的局部紐塞數變高；而活塞到達下始點時，活塞已經不動，但流體仍擁有活塞向下移動所給予的慣性，造成二次衝擊點附近的紐塞數分佈較穩態時為高。

圖 5-24 為重力方向和進口流相反， $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16、6.4$ 的條件下，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖。在浮力效應較小時，因為流體缺乏額外的浮力來克服在多孔性介質內流動之阻力，因此在活塞下降的過程中，該平均紐塞數顯得較低。當浮力效應較高時，在一個運動週期內平均紐塞數有兩次高峰，分別為活塞上升以及向下到最大速度之瞬間，由於此時之 Gr/Re^2 比值設定為 6.4，和

Re=200 時之 $Gr/Re^2=40$ 的設定差距較大，因此所表現出來的現象較為類似浮力效應低 ($Gr/Re^2=0.16$) 的情況，也就是在活塞上升時的高溫面熱傳效率較好。

5.5 Re=200, $Gr/Re^2=1$, 重力方向與進口流速度方向相同, 活塞開始振盪後對流場及溫度場的影響：

以下分析的結果為活塞在 $Re = 200$ 、 $Gr/Re^2 = 1$ 、 $F_c=0.2$ 、 $L_c=0.5$ 及重力和進口流速度方向相同，且振動頻率 $F_c = 0.2$ 的狀況下，活塞在經過 4 次週期後，高溫面之局部紐塞數分佈便已達到週期性穩動。圖 5-29、圖 5-30 為活塞一個完整穩定週期分別在 0/4、1/4、2/4、3/4 及 4/4 週期瞬間的流場流線圖及流場等溫線圖。

圖 5-29(a) 為 0/4 週期之瞬間流場流線圖，此時活塞在上始點且速度為 0 並準備開始向下移動，由於浮力使得被加熱後的流體會有向上移動的趨勢，所以由入口處進入的冷卻流體在碰到多孔性介質後，因為被加熱而開始向衝擊點的兩邊向上流動，流向右邊的可以順勢被冷卻流體帶走，但是如果流向左邊，也就是入口端管道的正下方時，被加熱的流體向上移動和入口流體向下移動互相衝擊，造成一個迴流現象。圖 5-29(b) 為 1/4 周期時，活塞向下移動到最大速度之瞬間流場分佈圖，由於軟管區的體積膨脹率大於入口冷卻流體的流率，因此必須從出口端回吸流體來補充擴張的體積，於是該瞬間水平流道內的流場呈現一向左上偏斜之分佈。當活塞向下移動到下始點也就是 2/4 周期時，該瞬間之流場流線分佈如圖 5-29(c) 所示，可以看到在入口處附近的迴流依舊存在，其形成原因和 0/4 週期時相同，而該現象在圖 5-13(c) 中不復存在，這是因為浮力效應向上對於活塞正置時，不會有被加熱的流體向下移動干擾進口流體而形成迴流，但是當活塞反置時，被加熱的流體隨時都有向上移動的趨勢，在此時就會干擾進口流而形成一迴流現象。當活塞到達 3/4 週期，也就是向上移動到最高速度時，如圖 5-29(d) 所示，此時原本被囤積在軟管內的流體被大量向外排出，水平管道內的流線分佈因此向右上方的出口處偏斜。圖 5-29(e) 為 4/4 周期之瞬間流場流線圖，此時之流線分佈回到和 0/4 週期時相同。

圖 5-30(a) 為 0/4 週期時之流場溫度分佈，此時活塞位於上始點，運動速度剛好減至 0，在入口處附近的高溫流體因為浮力而向上移動，使得溫度分佈在左

邊壁面分佈得較廣。1/4 週期為活塞向下移動到最高速度的同時，該瞬間之溫度分佈如圖 5-30(b)所示，由於活塞向下移動與熱流體向上移動剛好為相反方向，因此可以看到在入口處附近的溫度分佈較圖 5-14(b)大，且受到這些上升的熱流體阻隔，冷卻流體不易流進多孔性介質之中，熱傳效率沒有較活塞正置時高。當活塞到達 2/4 週期，如圖 5-30(c)所示，該瞬間活塞到達下始點的位置，由圖中可以看到受加熱的流體分佈範圍相當地廣闊，尤其是水平管道中央部份的區域，溫度分佈已經接觸到水平管道上方絕熱部分的壁面。當活塞向上移動到最大速度時，如圖 5-30(d)所示，儲存在軟管區內的冷卻流體被大量向外排除，左側壁面的溫度分佈區因而變小；出口端的溫度則因為受熱的流體向上移動而順勢被冷卻流體帶走，因此在圖中顯得較高。當活塞運動到 4/4 週期時，此時的溫度場分佈又回到和 0/4 週期時相同。

圖 5-31(a)、5-32(b)分別為 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同時，活塞運動到 1/4、2/4 週期及 3/4、4/4 週期和穩態之局部紐塞數比較圖。在圖 5-31(a)中可以看到兩個週期的局部紐塞數分佈都會出現兩次高峰，第一高峰都出現在冷卻流體直接衝擊處，第二高峰則是 2/4 週期時較靠近出口的位置，這是因為在 1/4 週期時，有部份流體從出口處被吸入到水平管道中，因此在水平管道中間出現一個溫度滯留區，在滯留區的右邊是出口管道進入的冷卻流體，因此在 $X=3.7$ 的位置出現局部紐塞數高峰值；當活塞運動到 2/4 週期時，溫度滯留區被向出口處推動，滯留區右方較冷的區域也被推向出口處，因此 2/4 週期的第二高峰出現在 1/4 週期的右方。圖 5-31(b)中的綠線代表 3/4 週期的局部紐塞數分佈，此時活塞處於上升的時刻，2/4 週期時形成的左方壁面溫度滯留區被向下擠壓，所以在冷卻流體的直接衝擊點改為被這些較高溫的流體衝擊，因此此處的熱傳效率變差；另一方面剛才在直接衝擊處的冷卻流體被向後方推動，使得水平管道中央的熱傳效率變好。在 4/4 週期時，入口處的冷卻流體不再大量地帶走左方壁面高溫滯留區的高熱流體，因此此時冷卻流體可以直接衝擊多孔性介質，從圖 5-31(b)中的藍線可以看到此處的熱傳效率較 3/4 週期時佳；另一方面由於造成 3/4 週期時入口處熱傳效率變差的高溫流體已經到達後方，因此可以看到 $X=2.8$ 附近之熱傳效率較差。

圖 5-32 為 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ 下，重力方向和進口流相同及相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖，在圖中可以看到活塞倒置（重力方向和進口流相同）

時的平均紐塞數隨時間變化不大，不會如同活塞正置（重力方向和進口流相反）之平均紐塞數變異如此大。這是因為在 1/4 週期時，活塞正置不易受到左方壁面之高溫流體滯留區的影響，平均紐塞數變的較高，但在 3/4 週期且活塞倒置時，高溫流體因為浮力而向上流動，於是容易地被在管道裡流動的冷卻流體帶走，因此此時熱傳效率比活塞正置時好。



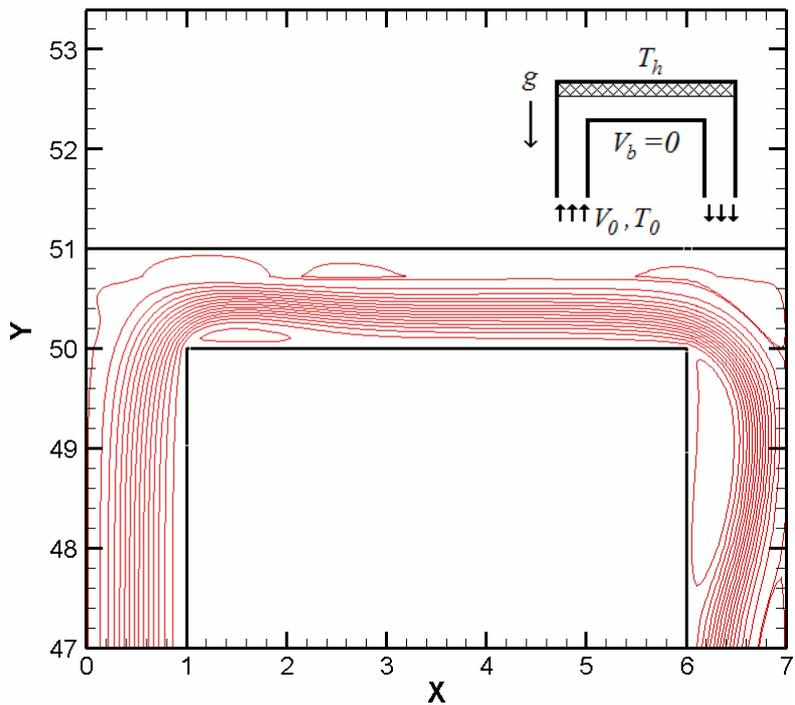


圖 5-1(a)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，穩態流場流線圖

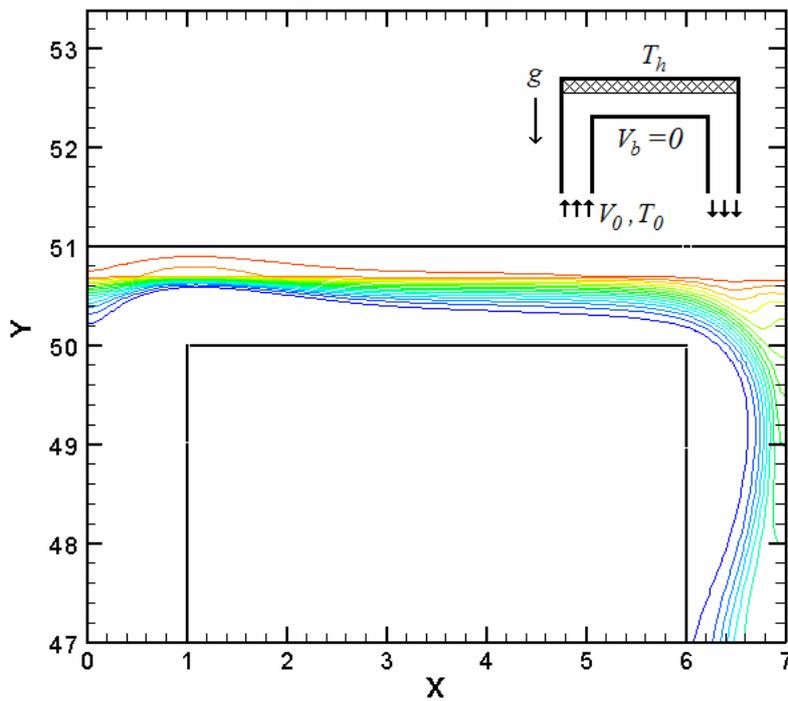


圖 5-1(b)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，穩態流場溫度分佈圖

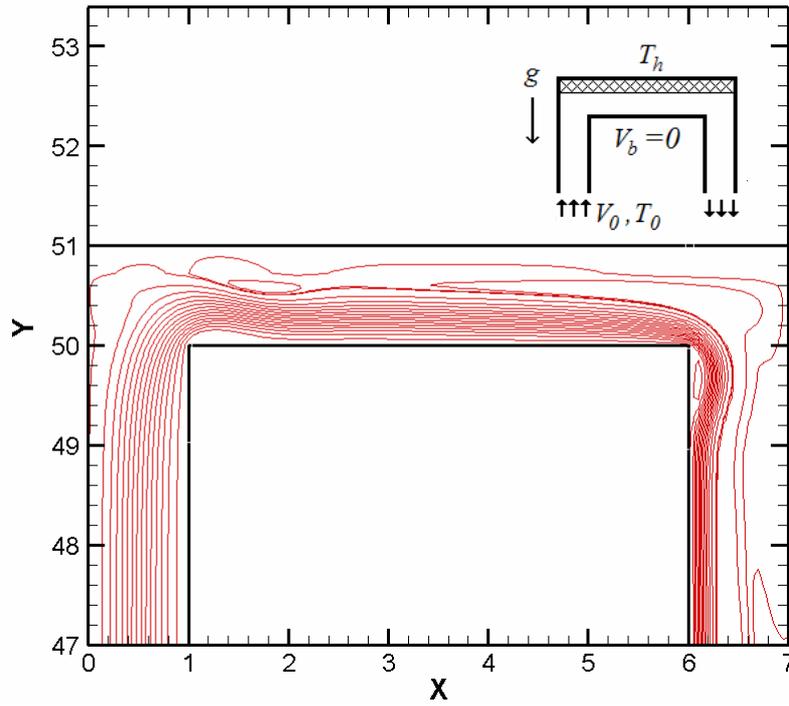


圖 5-2(a)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ，穩態流場流線圖

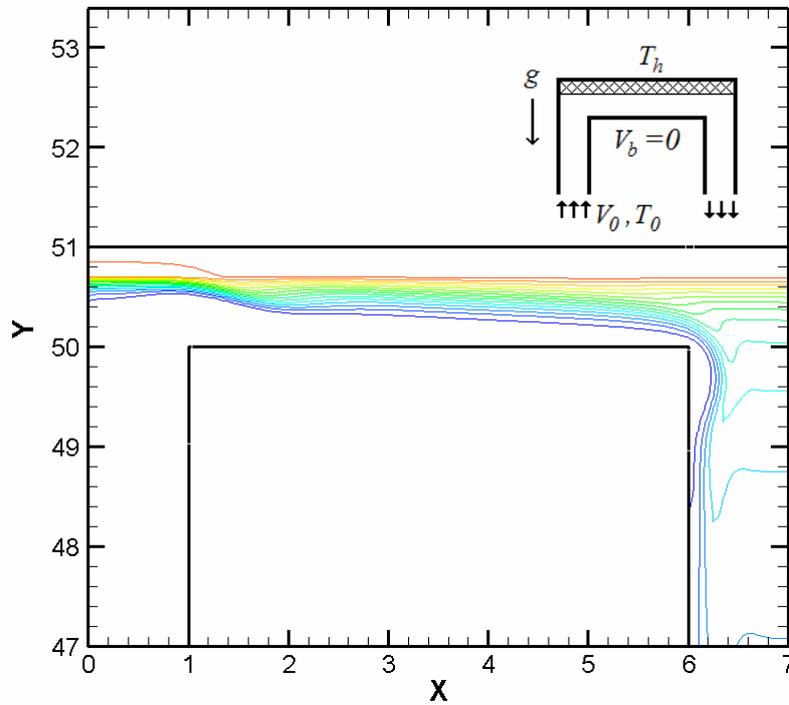


圖 5-2(b)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ，穩態流場溫度分佈圖

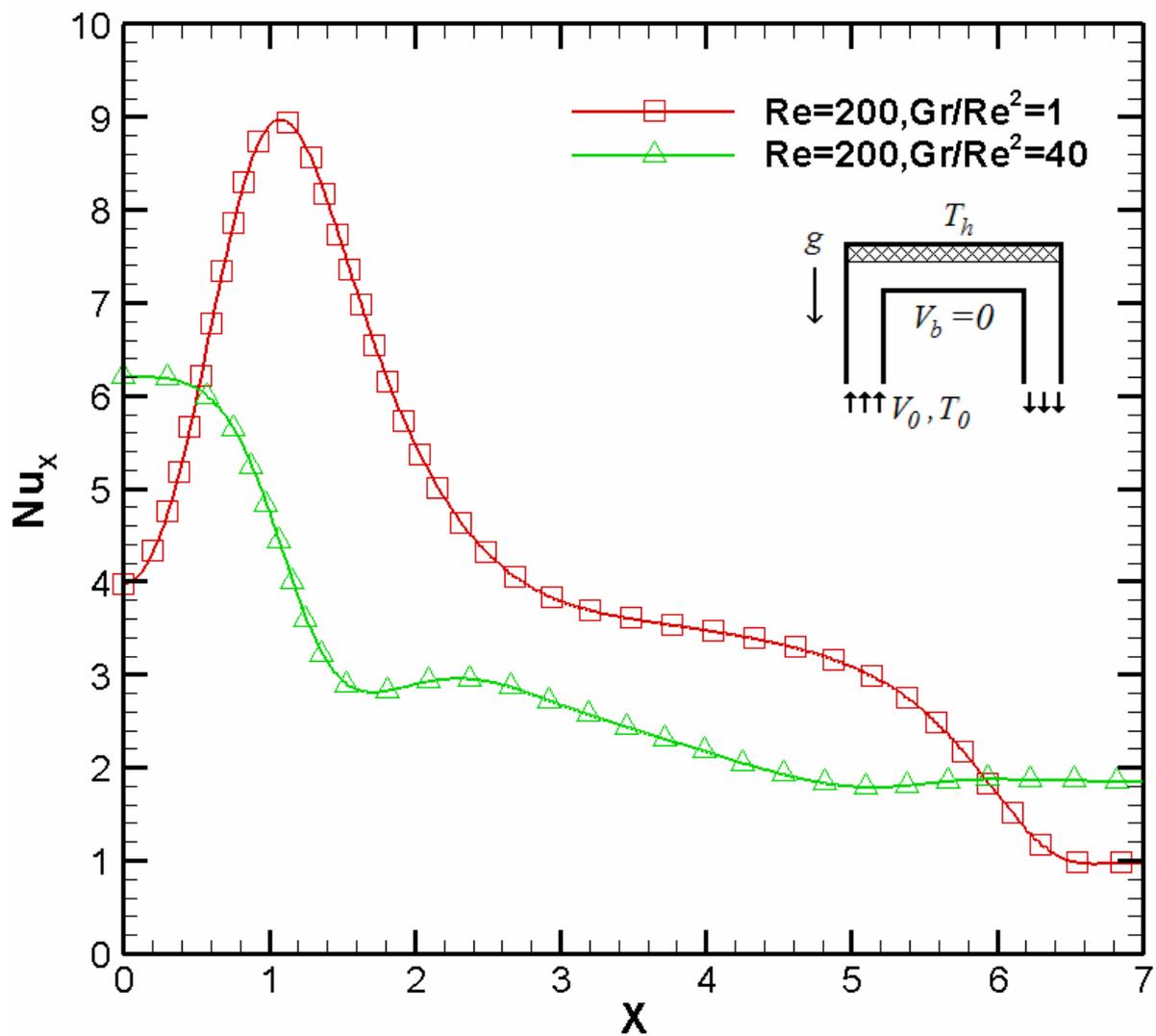


圖 5-3、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1、40$ ，重力方向和進口流相反
穩態流場高溫面局部 Nu_x 分佈圖

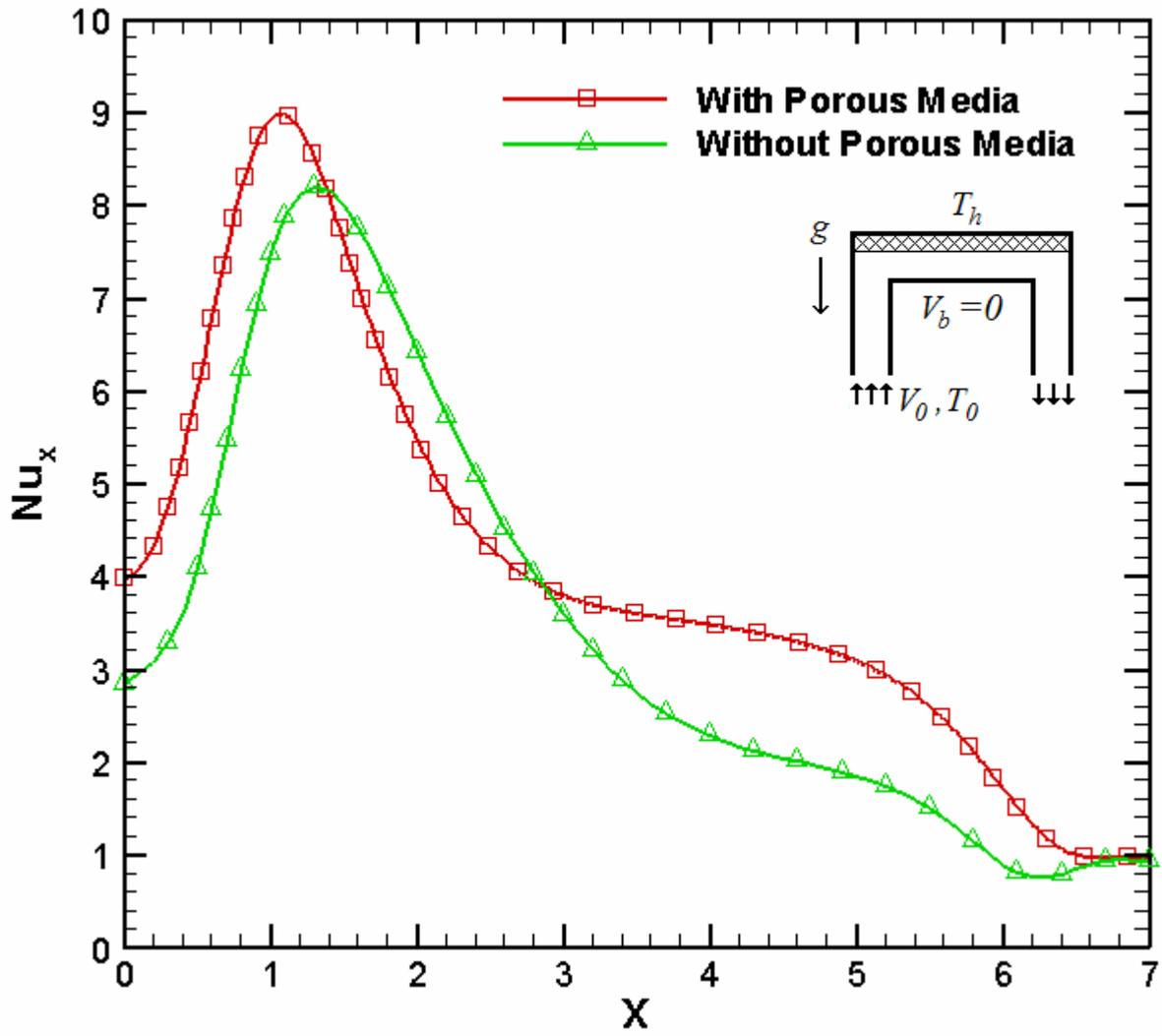


圖 5-4、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向和進口流相反，有加入多孔性介質和未加入多孔性介質之穩態流場高溫面局部 Nu_x 分佈圖

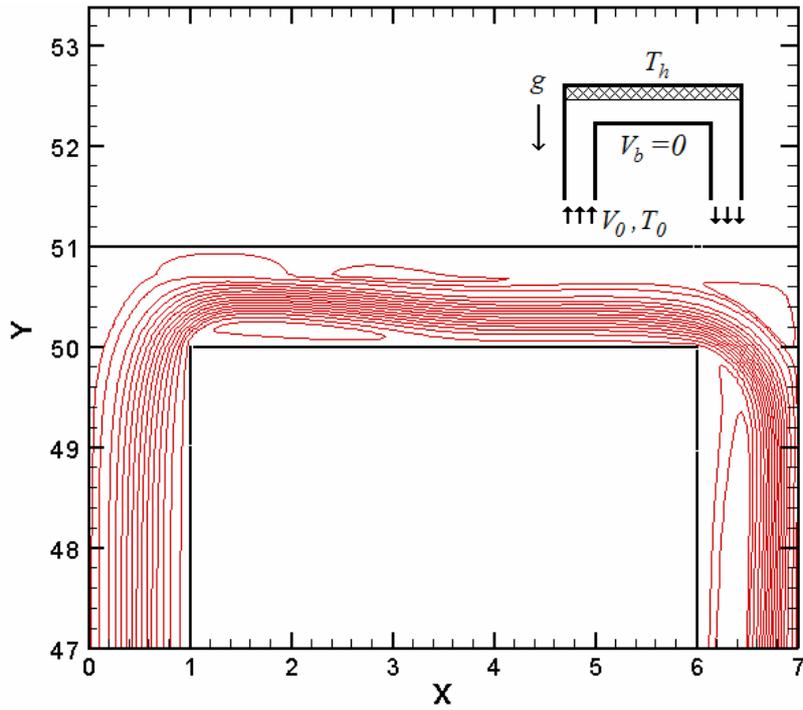


圖 5-5(a)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ，穩態流場流線圖

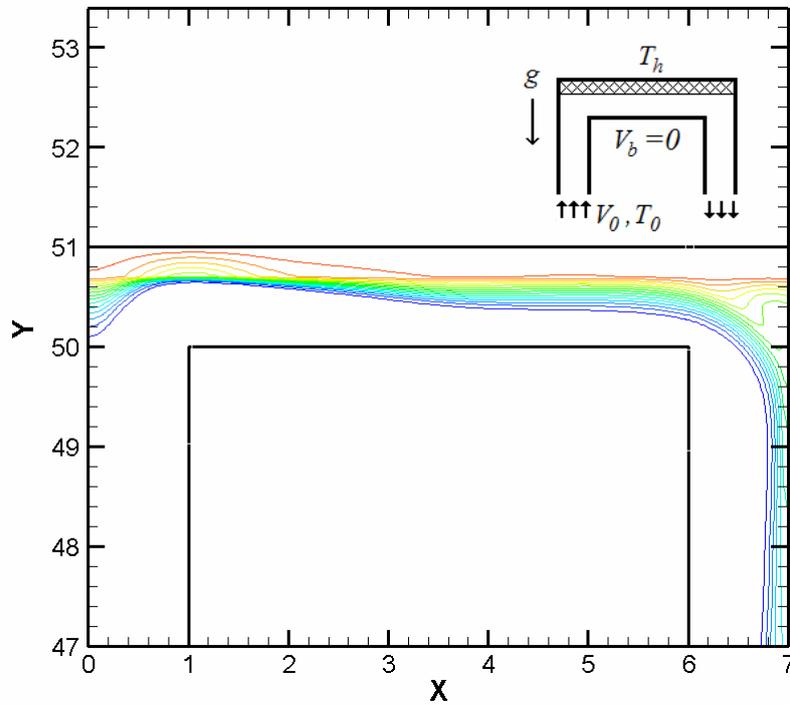


圖 5-5(b)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ，穩態流場溫度分佈圖

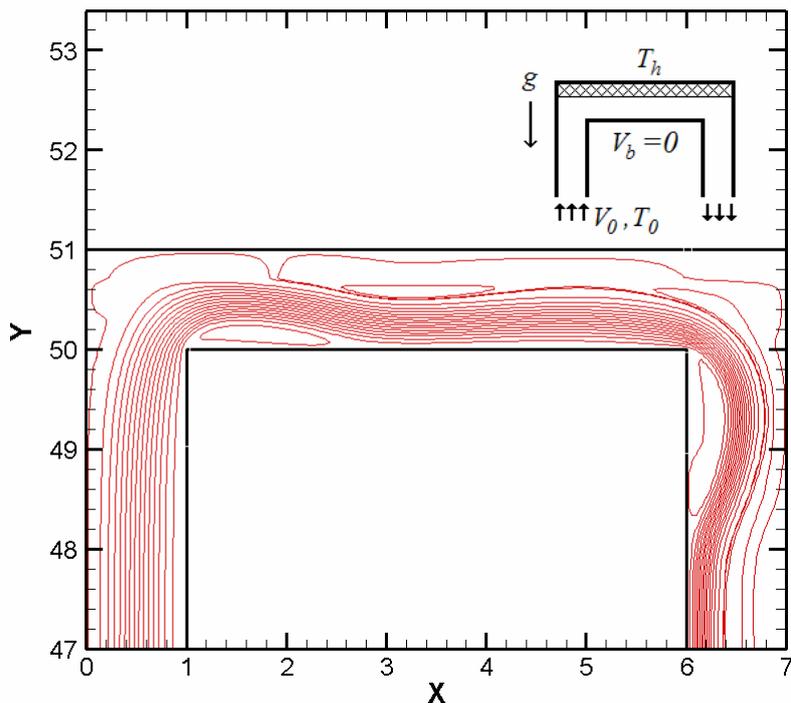


圖 5-6(a)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ，穩態流場流線圖

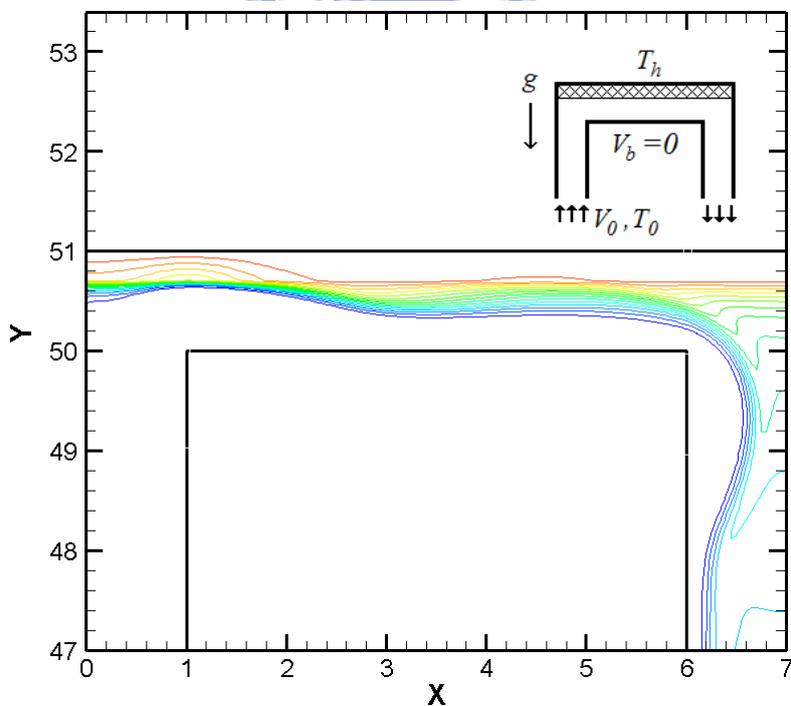


圖 5-6(b)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ，穩態流場溫度分佈圖

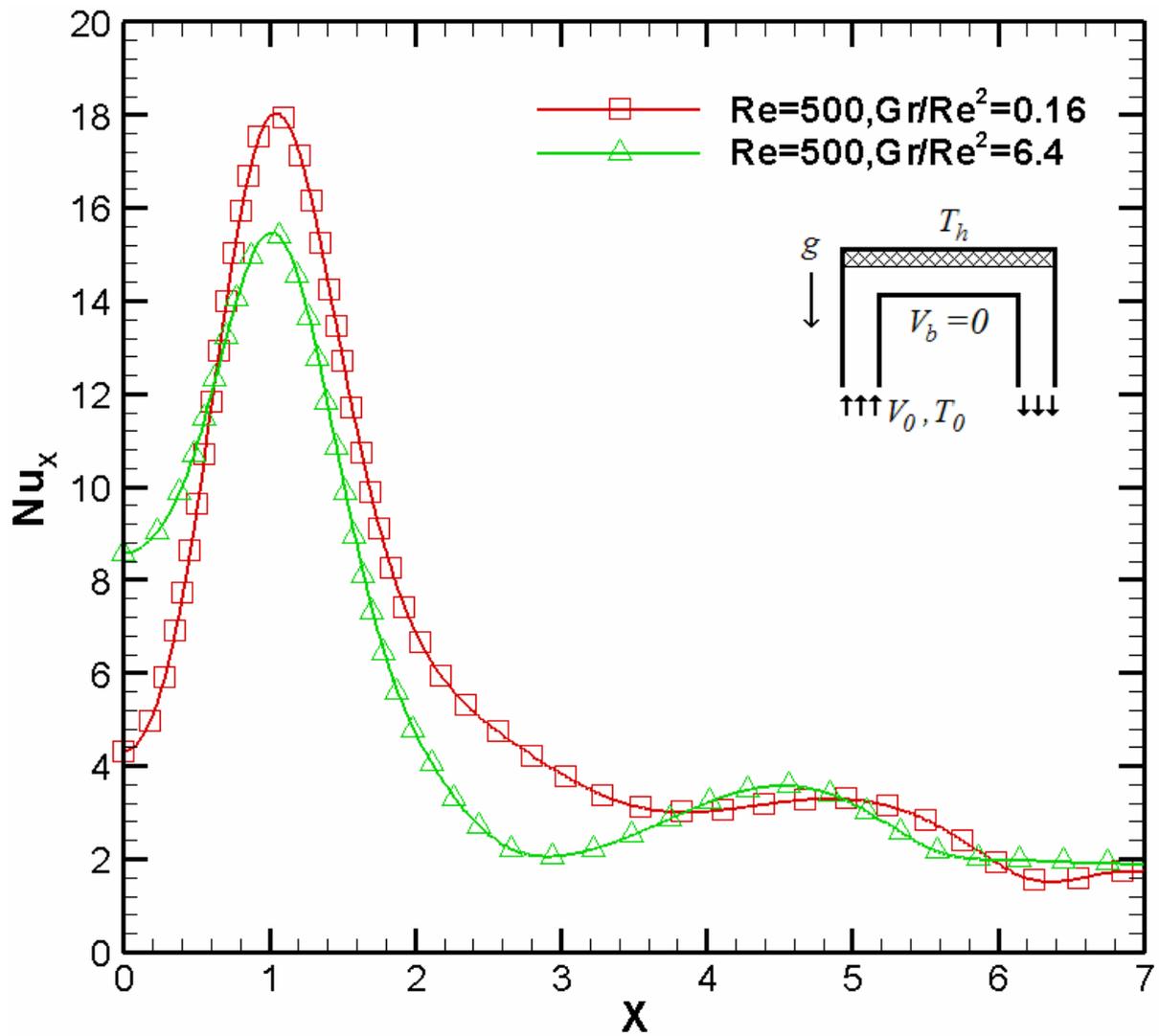


圖 5-7、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ 、 6.4 ，重力方向和進口流相反
穩態流場高溫面局部 Nu_x 分佈圖

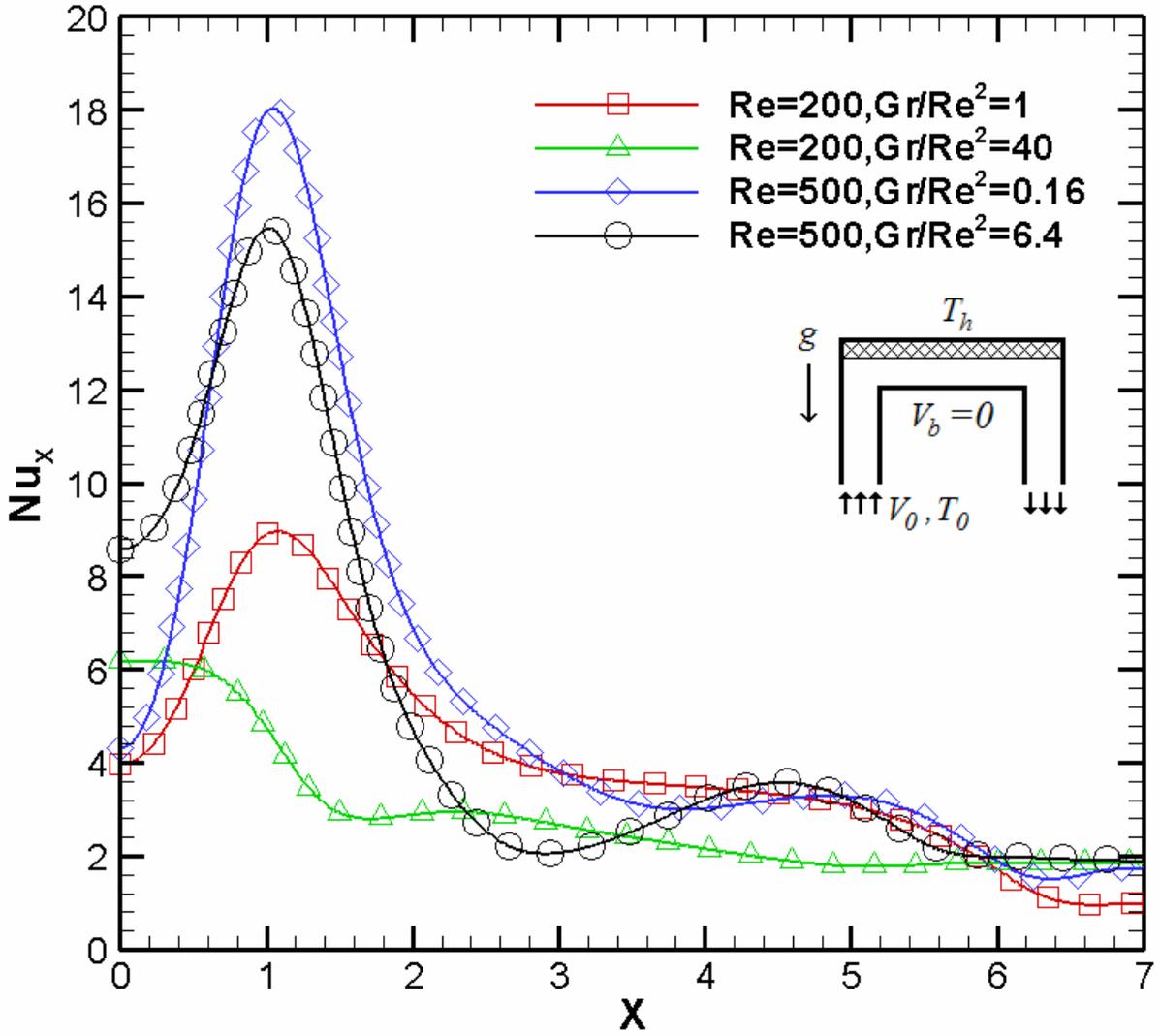


圖 5-8、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ 、 40 ， $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ 、 6.4 ，
重力方向和進口流相反穩態流場高溫面局部 Nu_x 分佈圖

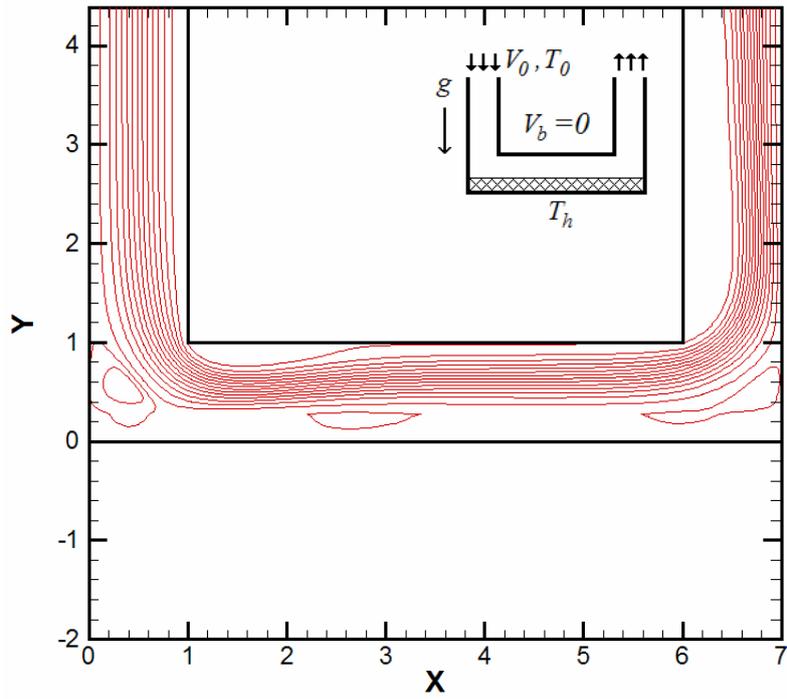


圖 5-9(a)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，活塞倒置之穩態流場流線圖

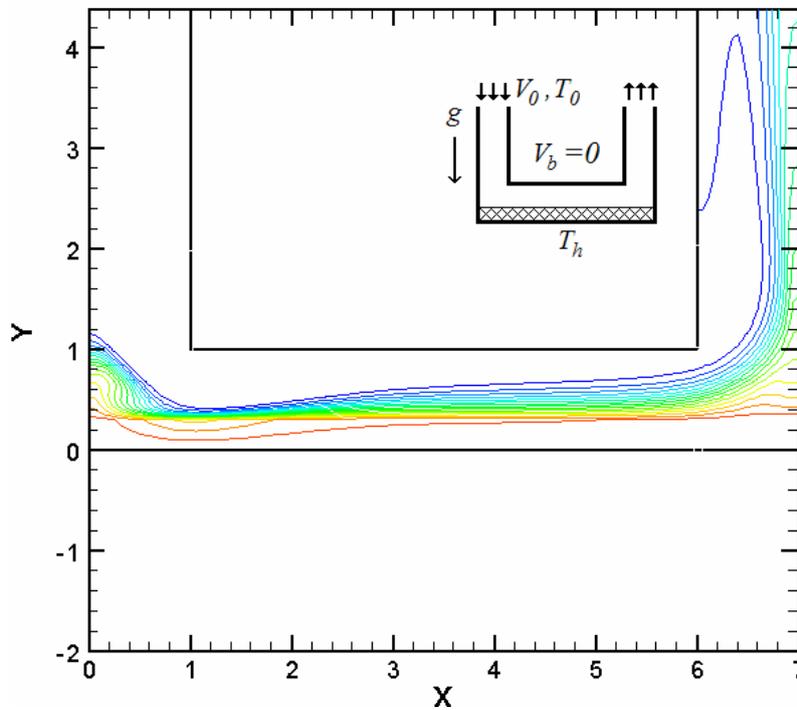


圖 5-9(b)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，活塞倒置之穩態流場溫度分佈圖

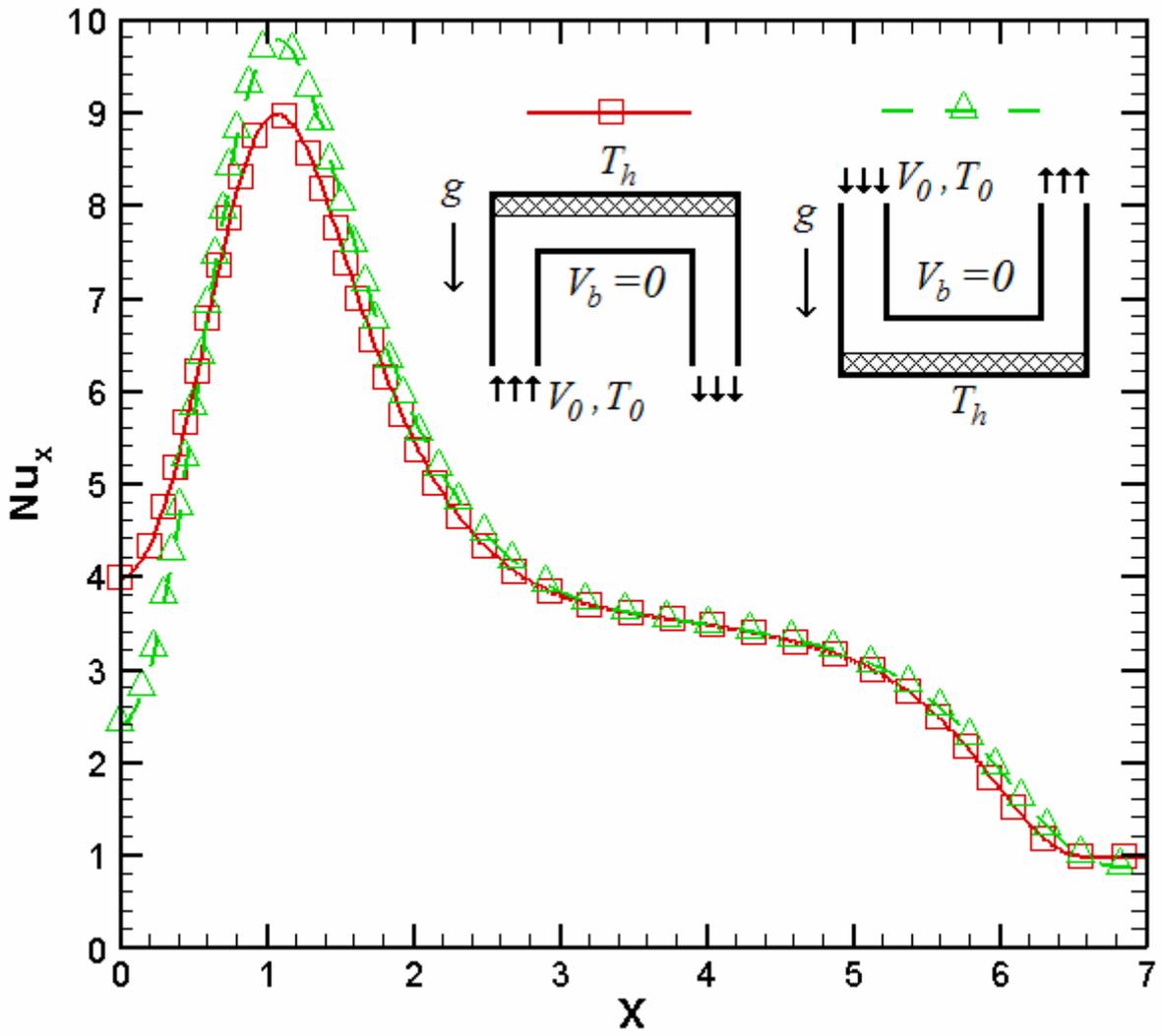


圖 5-10、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ，重力方向和進口流相同及相反之穩態流場高溫面局部 Nu_x 分佈圖

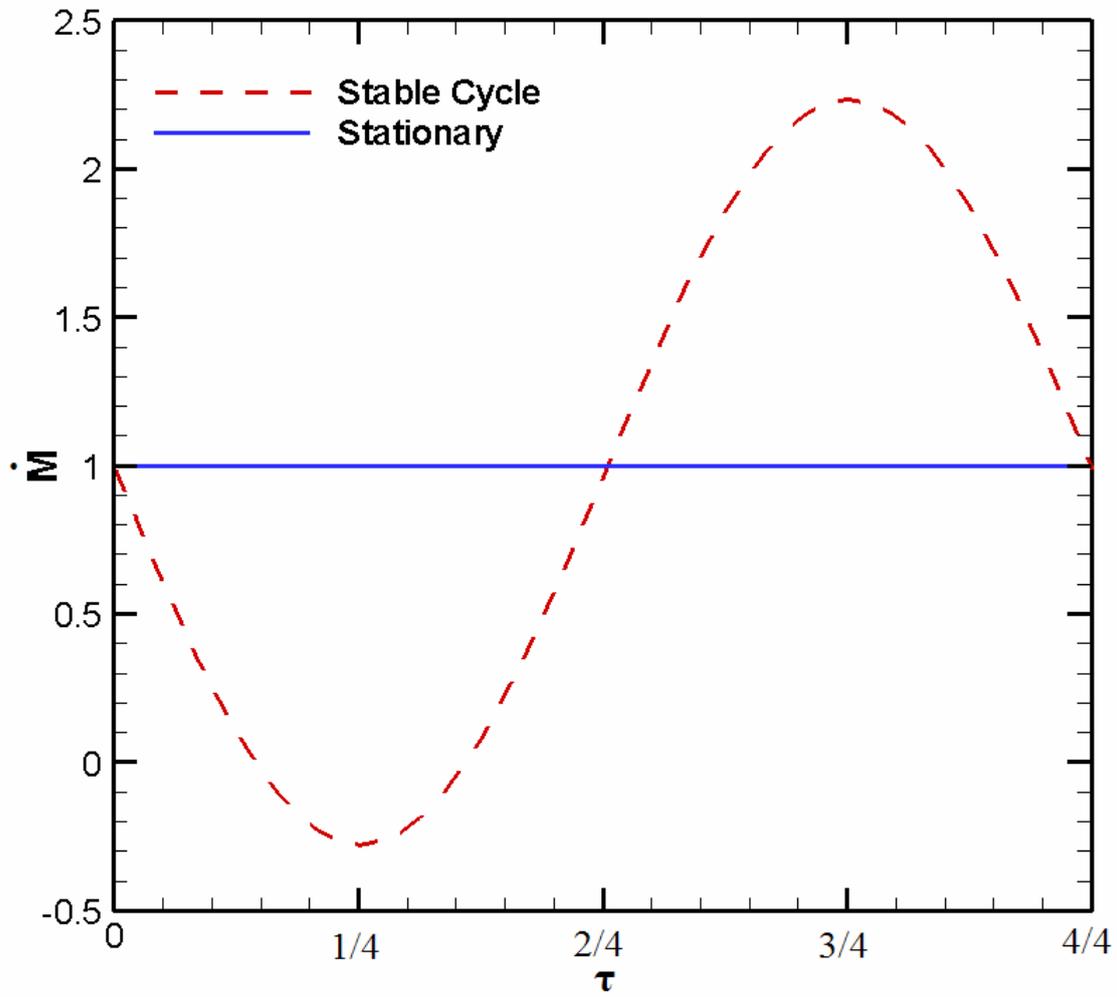
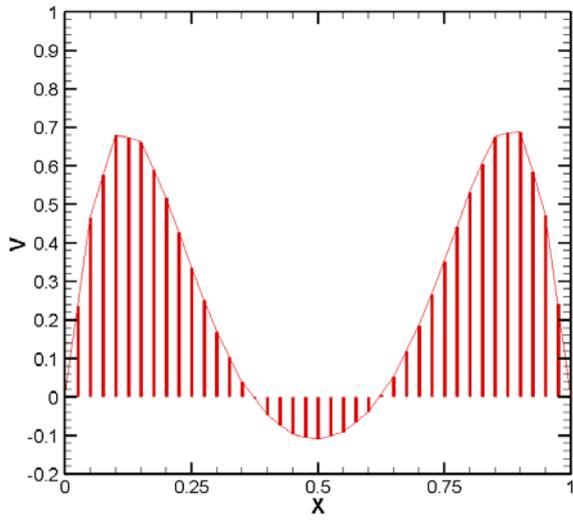
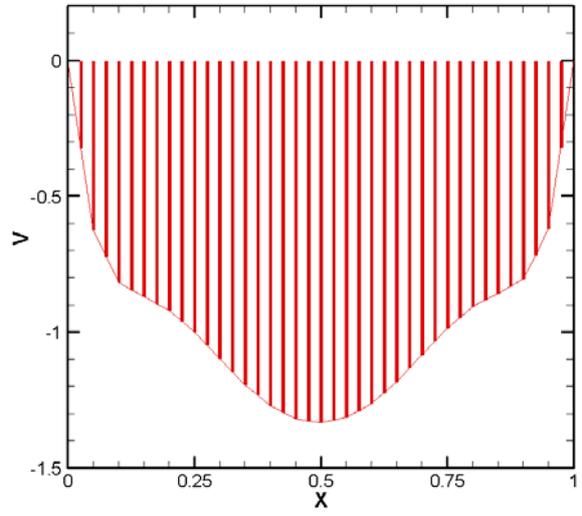


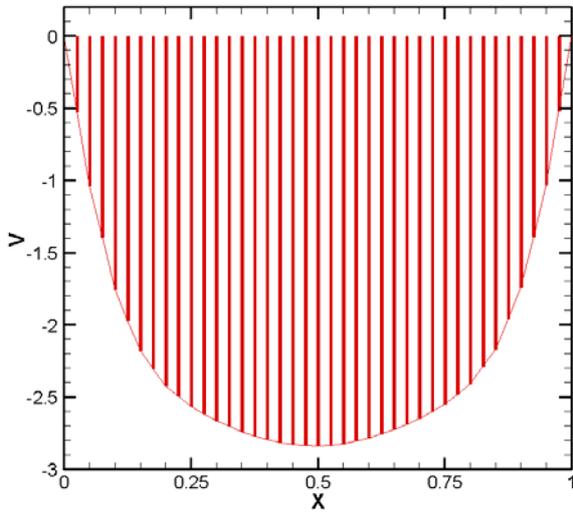
圖 5-11、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，
一穩定週期及活塞固定不動的出口質量隨時間變化圖



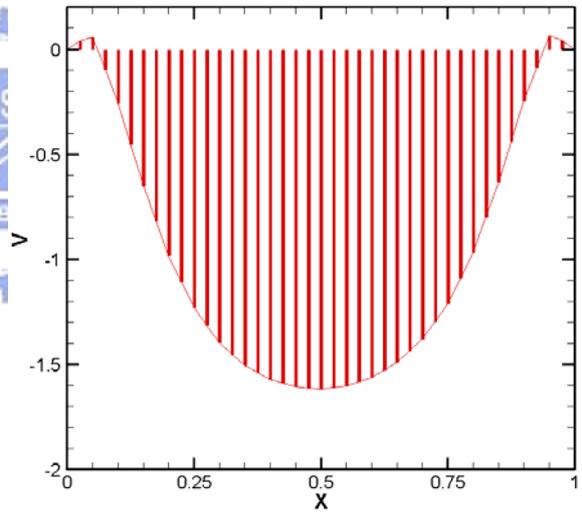
(a) $\tau=1/4$ 週期



(b) $\tau=2/4$ 週期



(c) $\tau=3/4$ 週期



(d) $\tau=4/4$ 週期

圖 5-12、不同時間之出口速度分佈圖

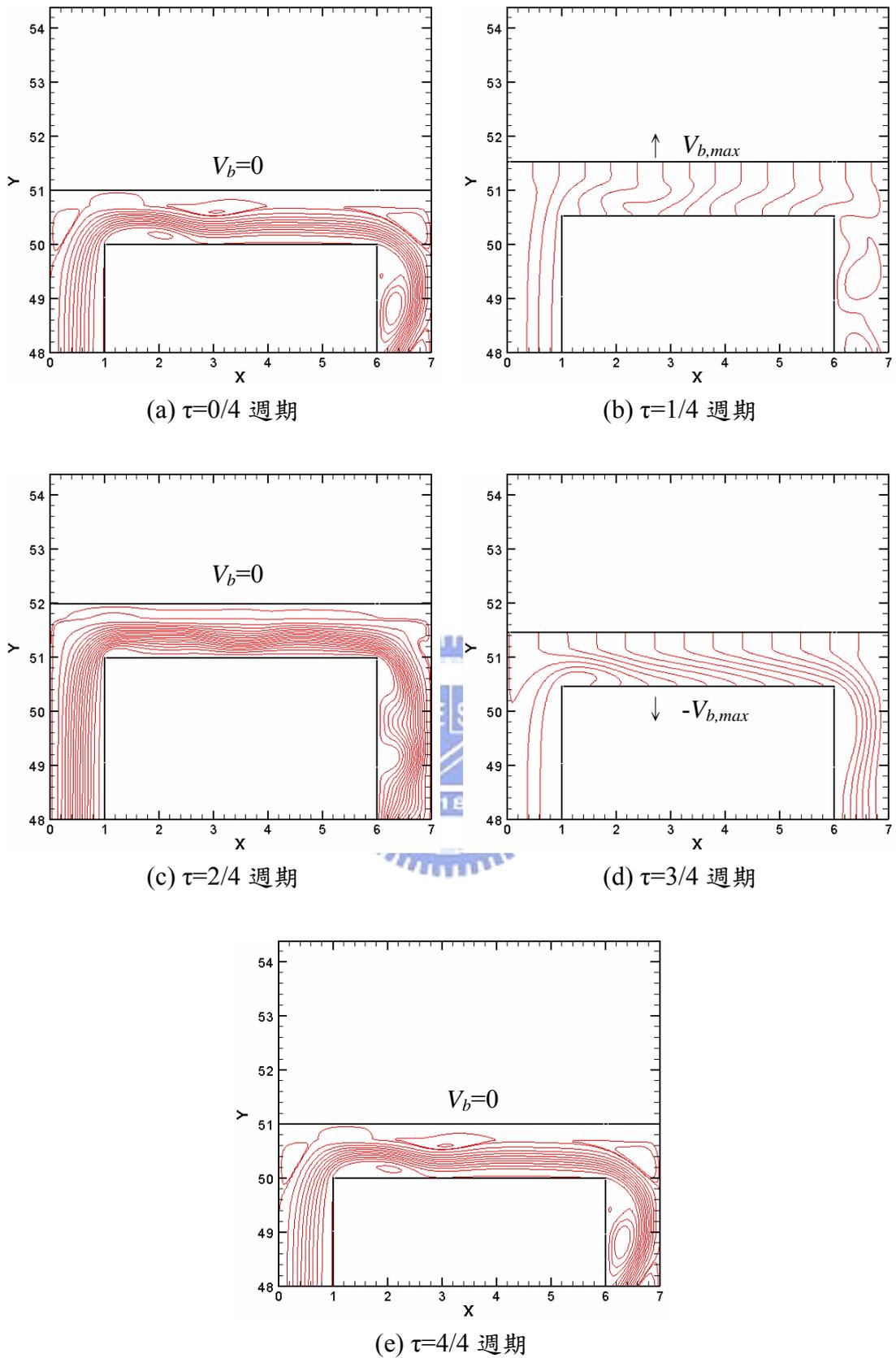


圖 5-13、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

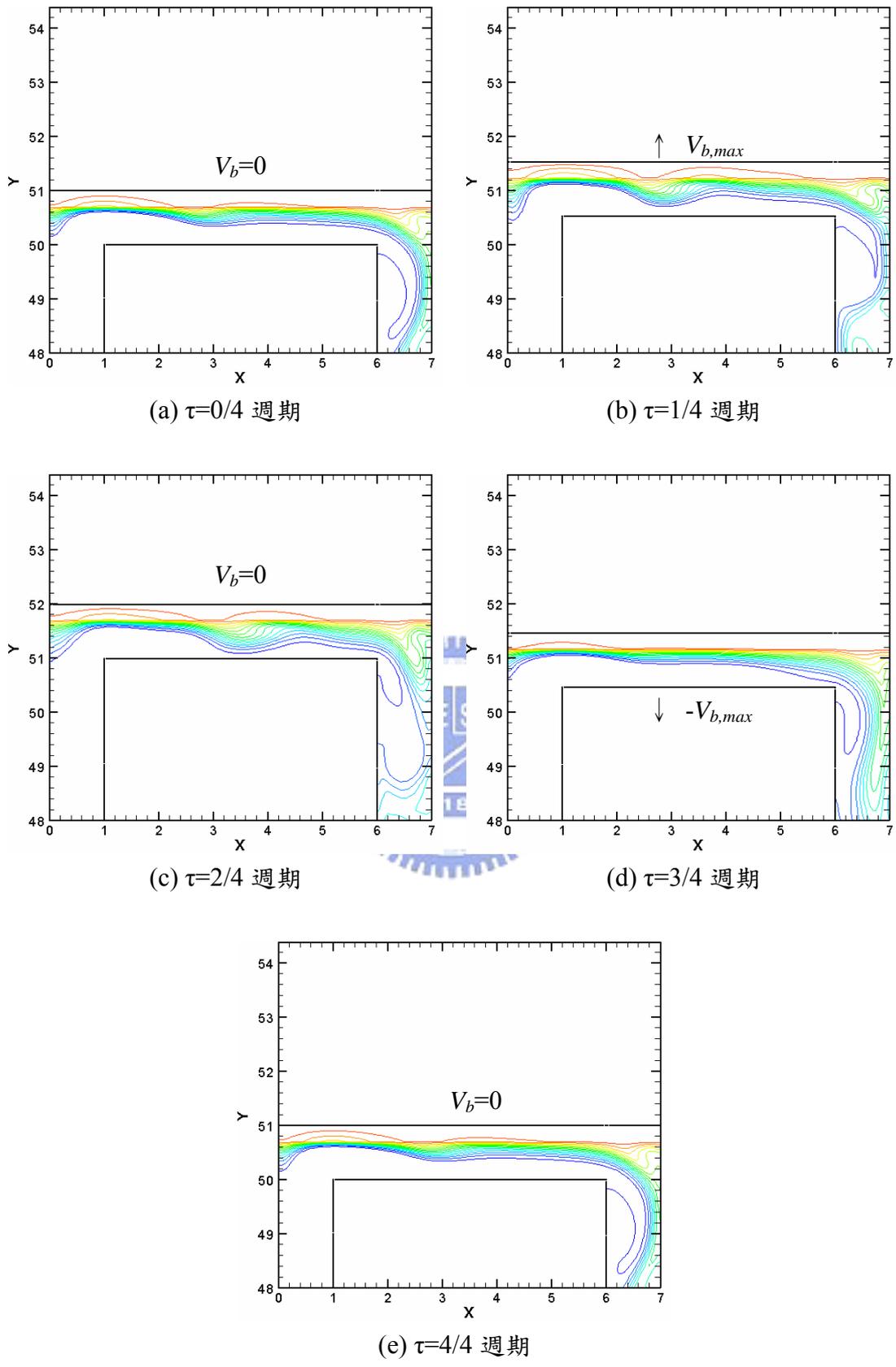


圖 5-14、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之溫度分佈圖

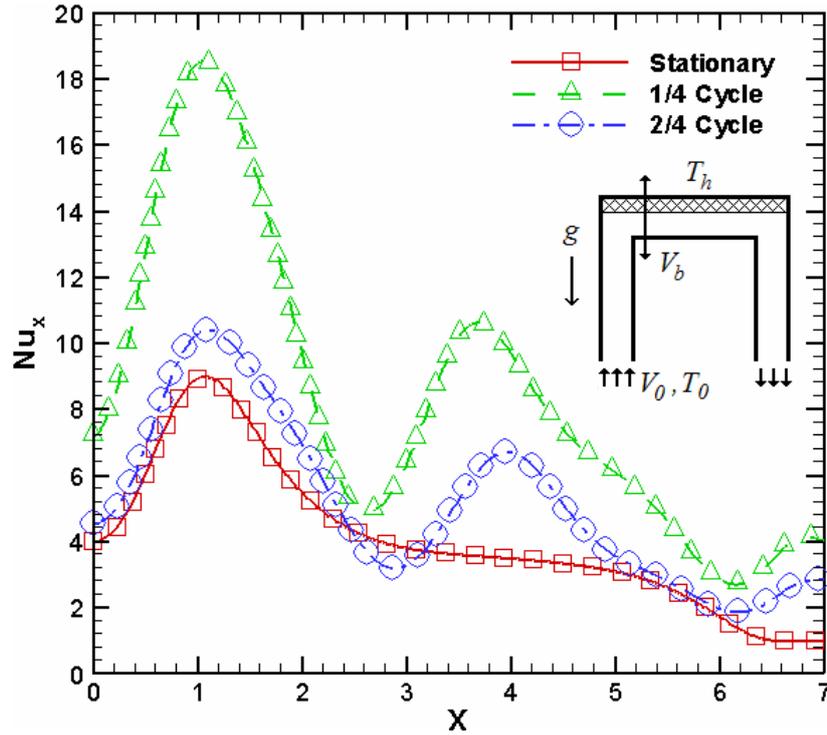


圖 5-15(a)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
1/4、2/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

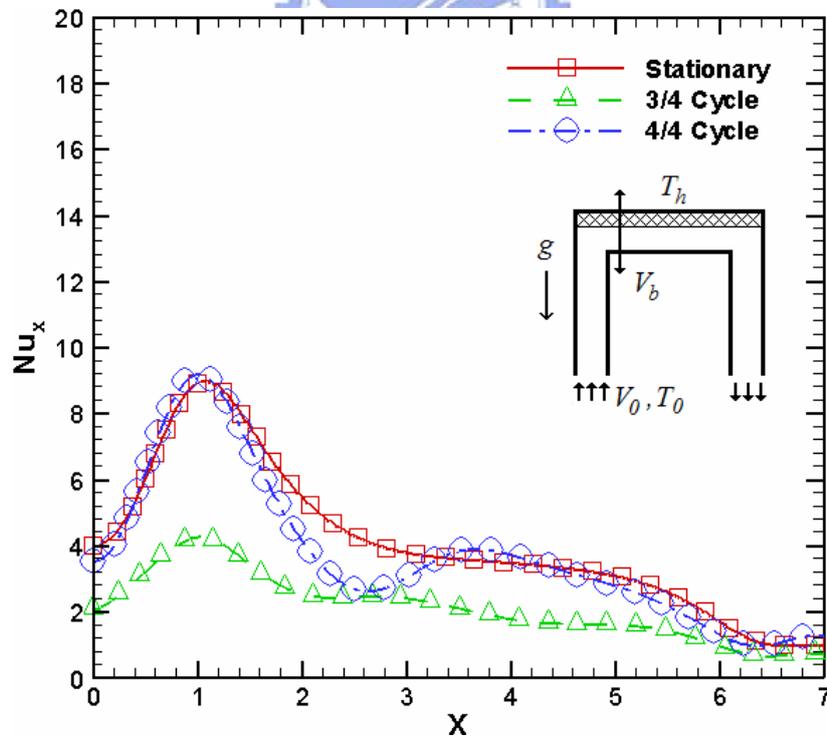


圖 5-15(b)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

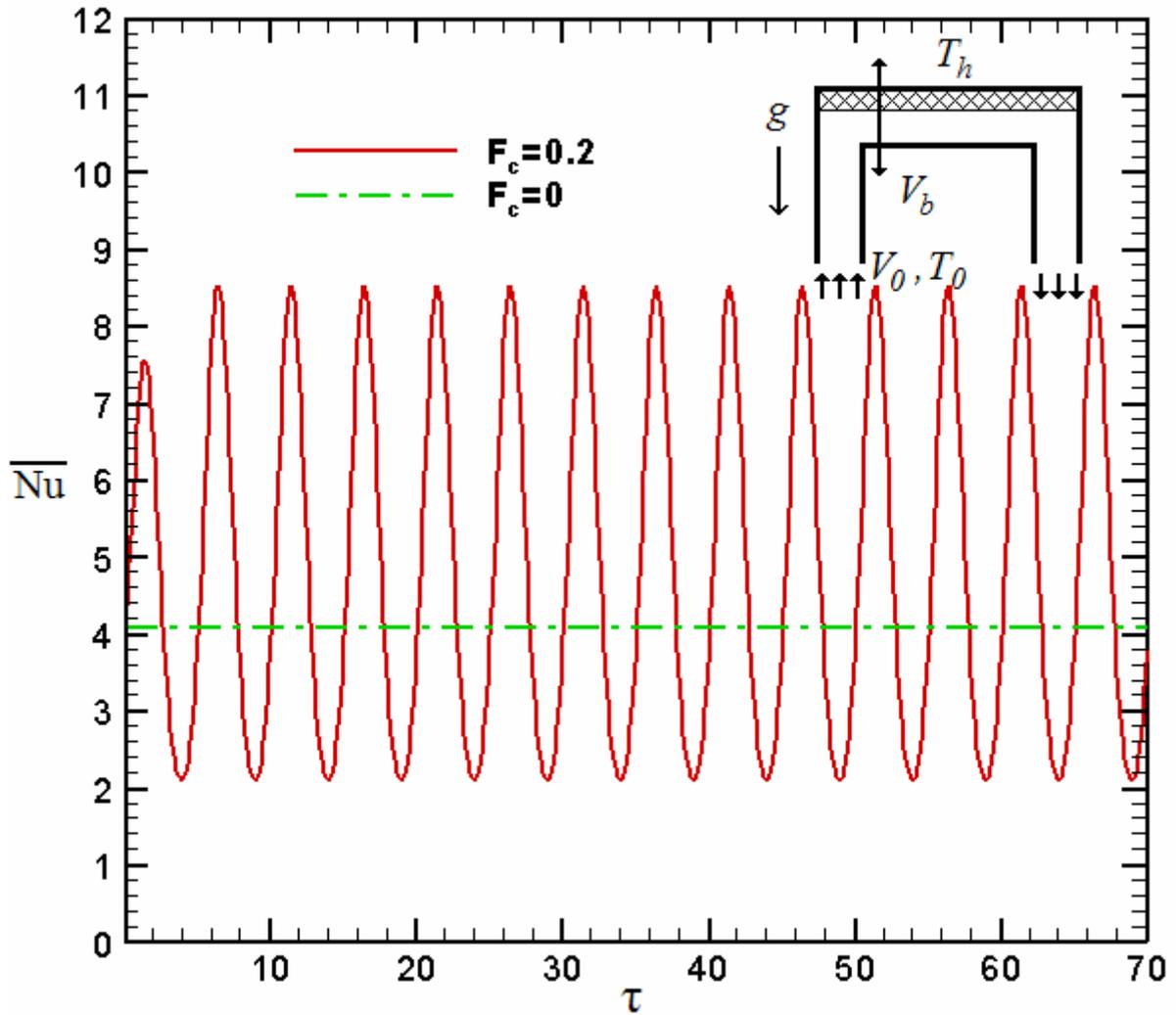


圖 5-16、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
 高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖

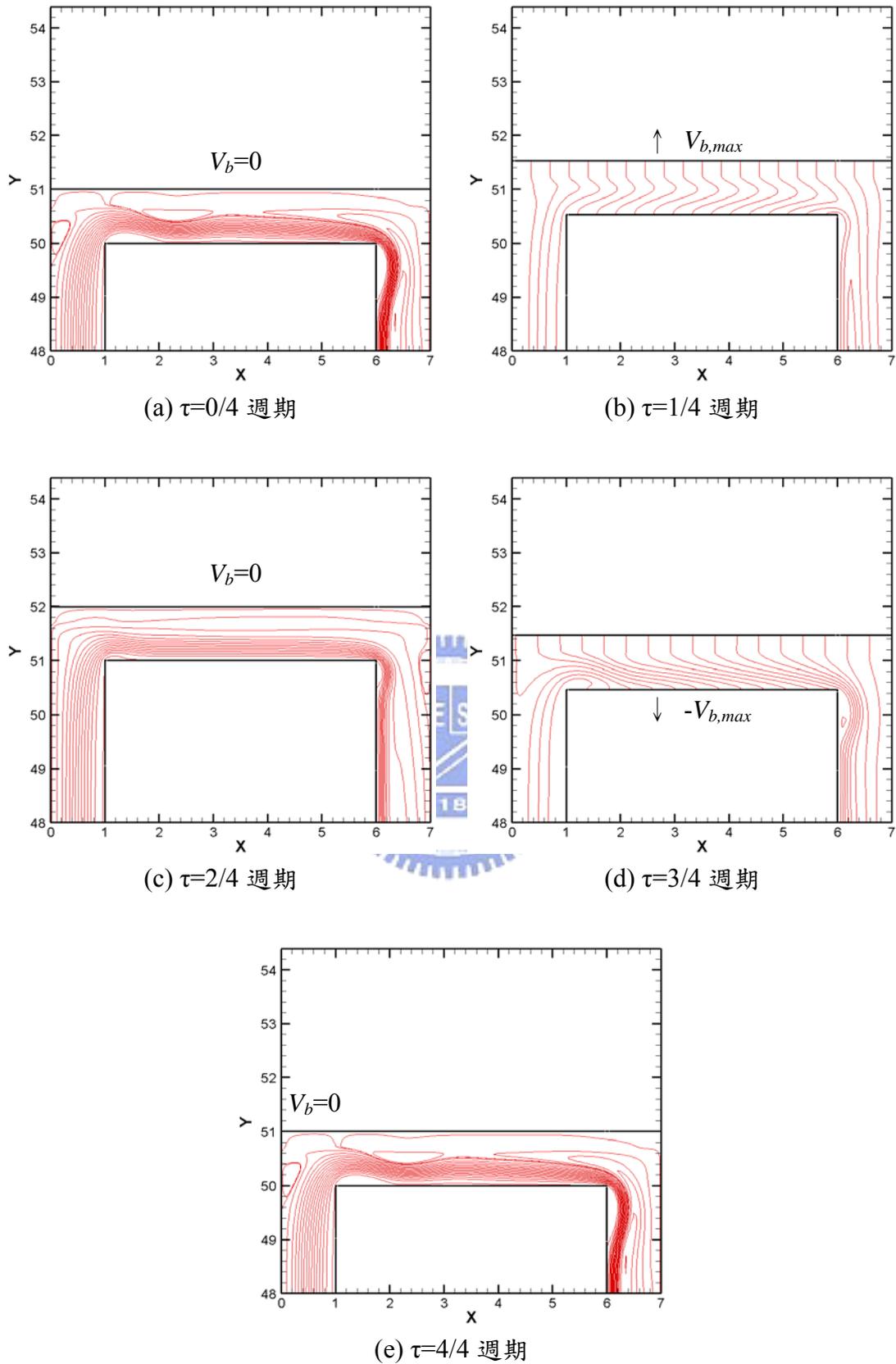


圖 5-17、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

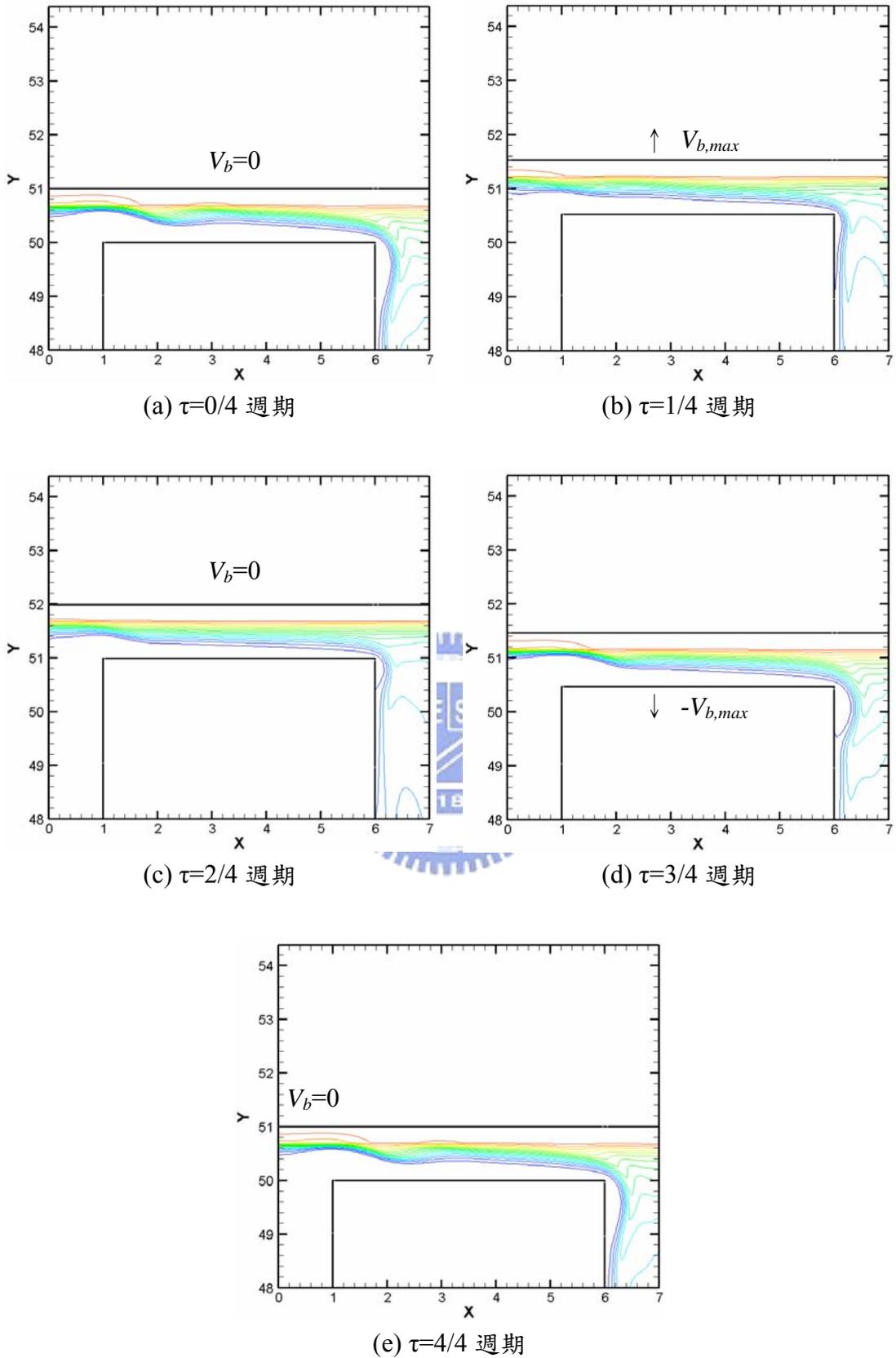


圖 5-18、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

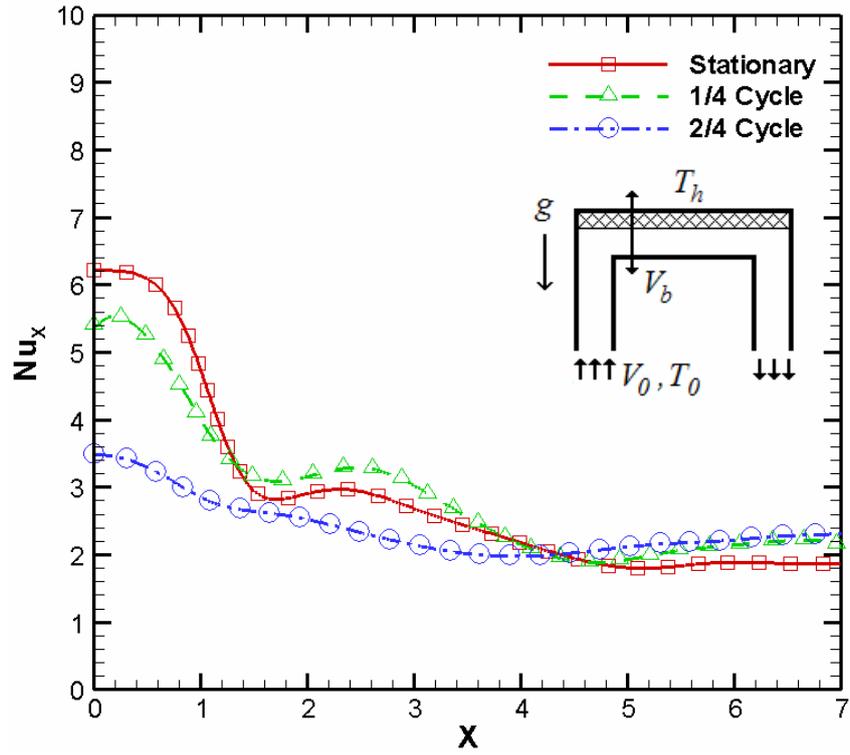


圖 5-19(a)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
1/4、2/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

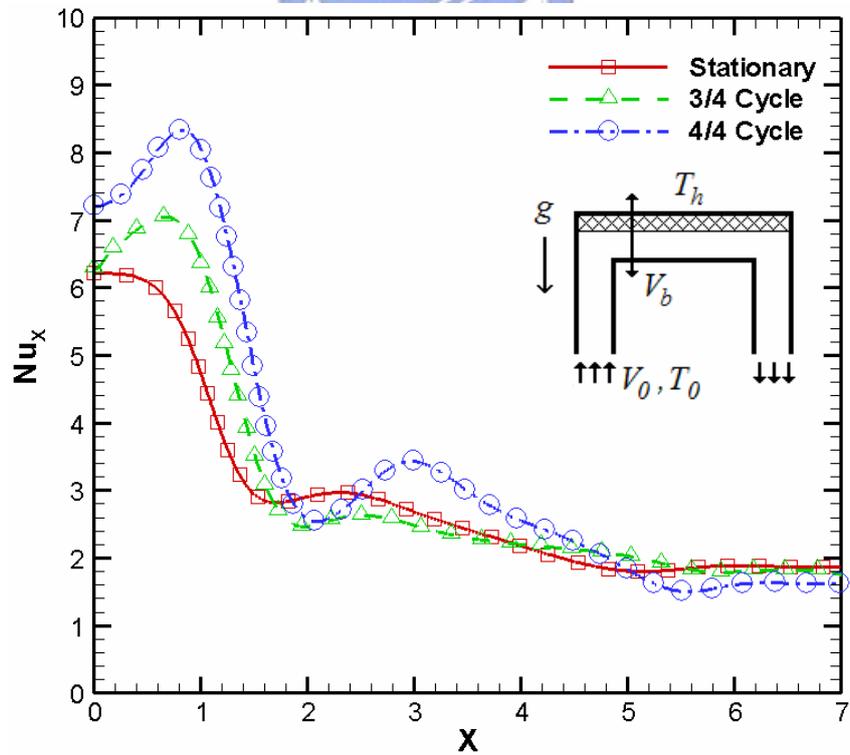


圖 5-19(b)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

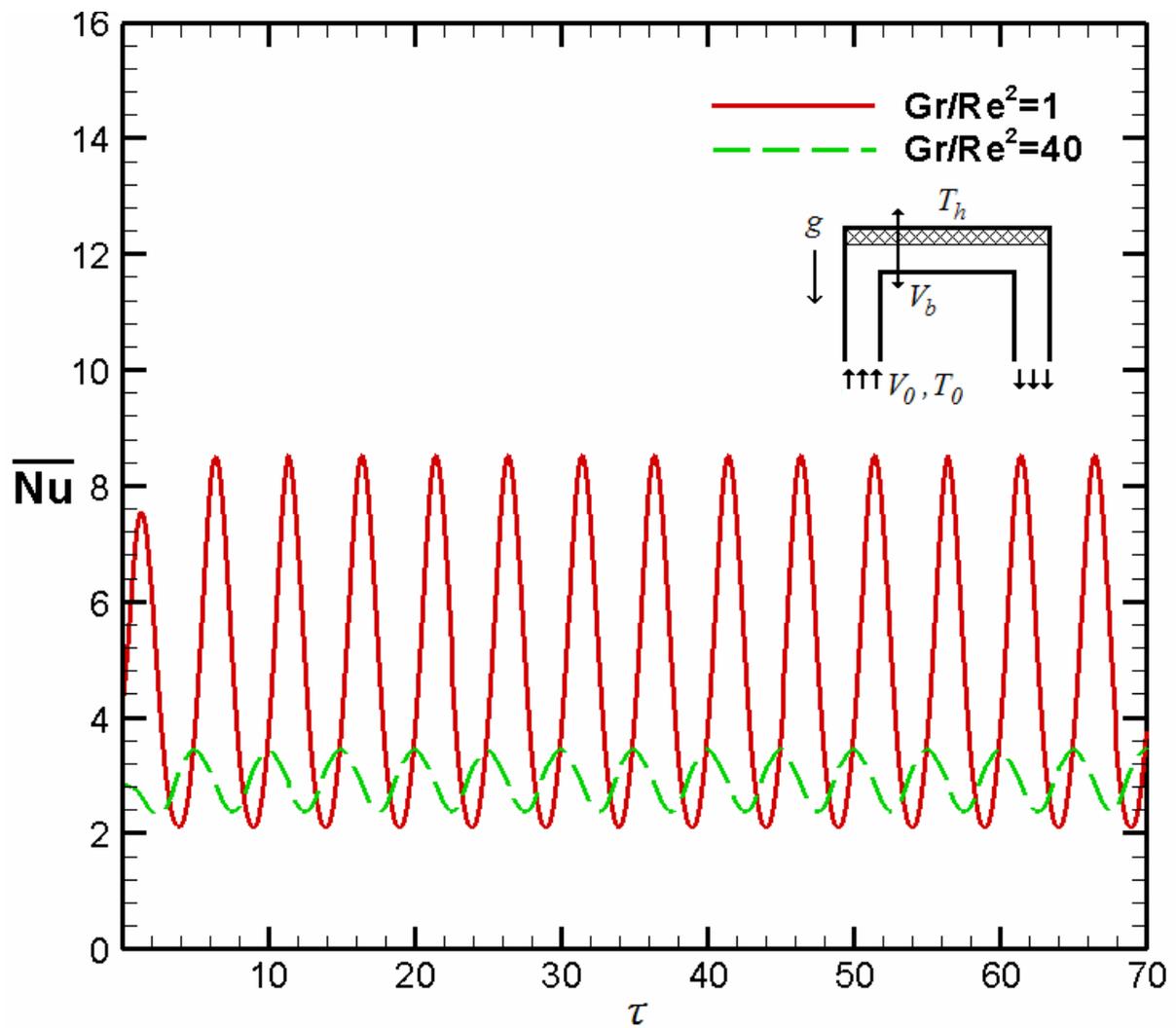


圖 5-20、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1、40$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
 高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖

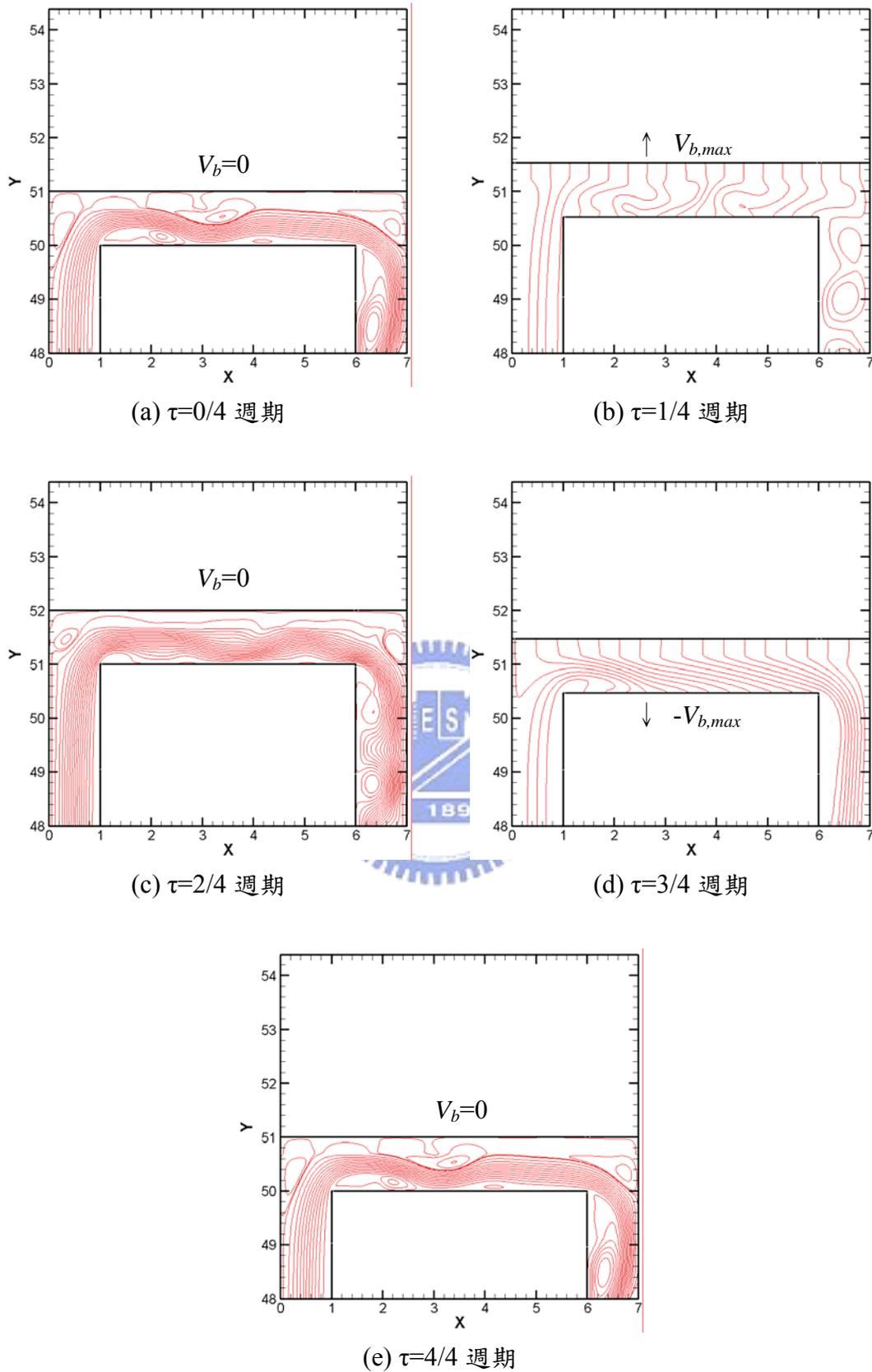


圖 5-21、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

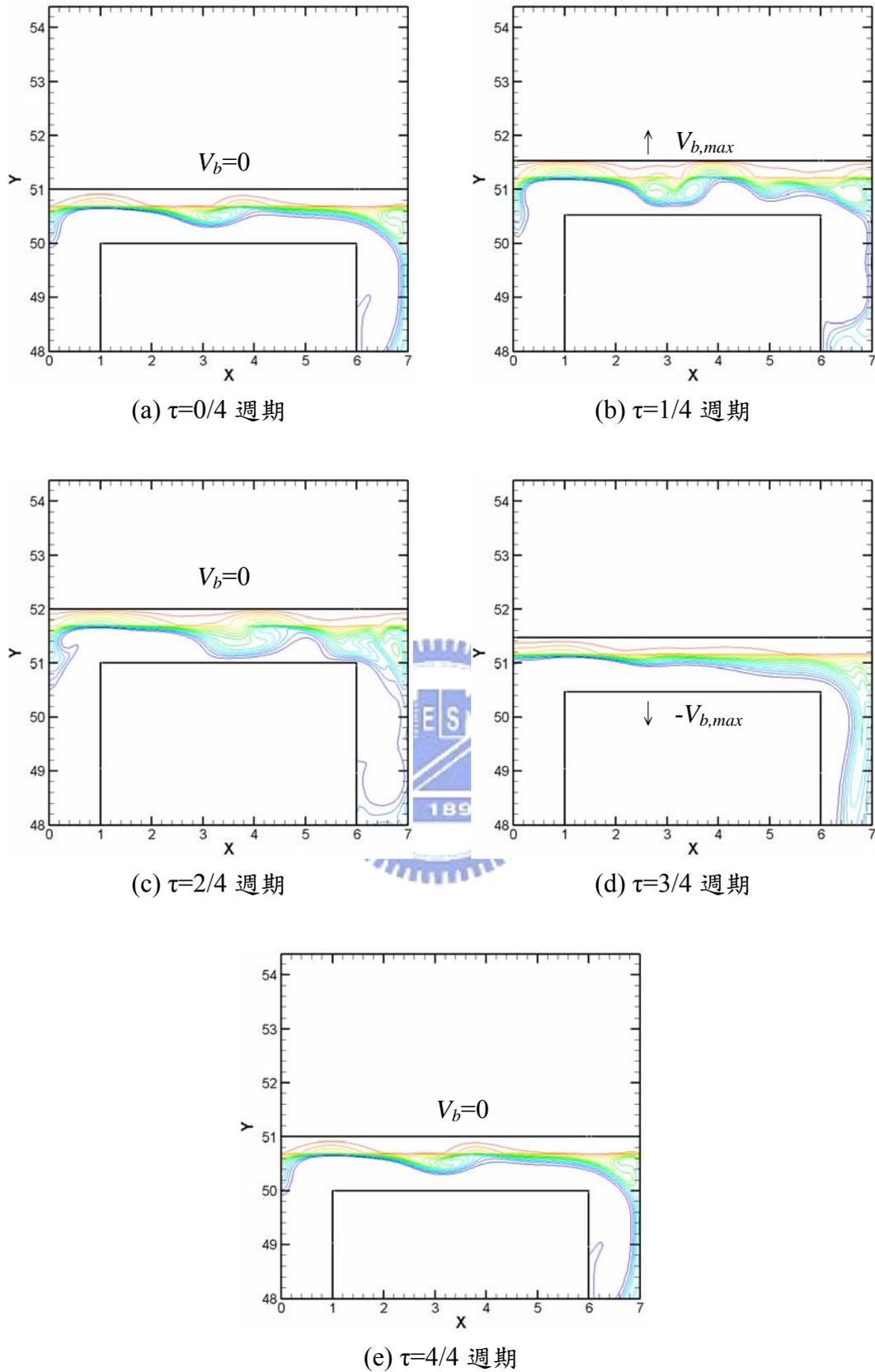


圖 5-22、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

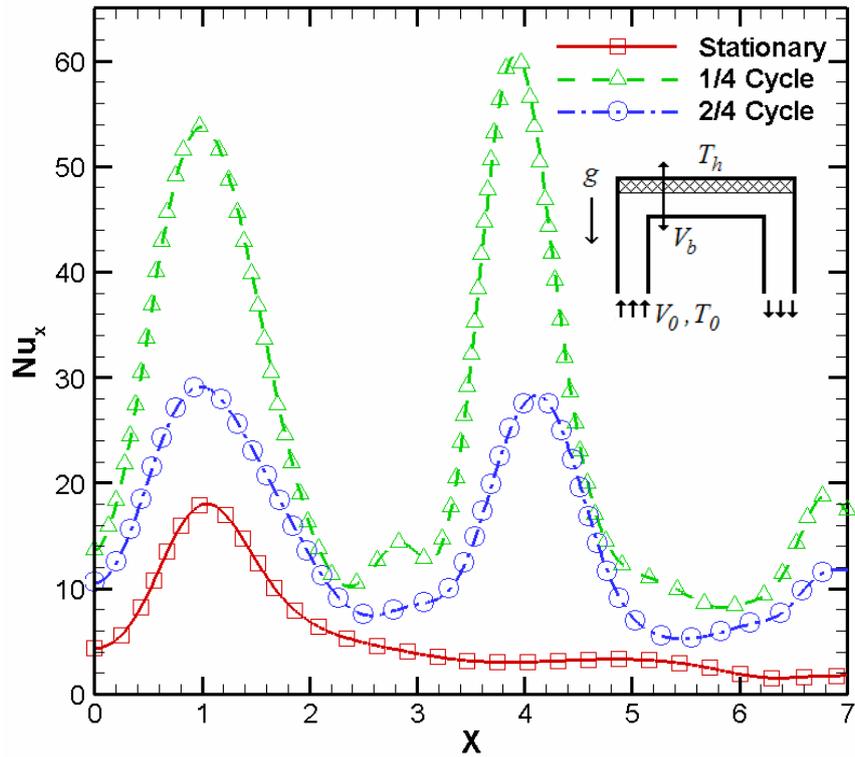


圖 5-23(a)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
1/4、2/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

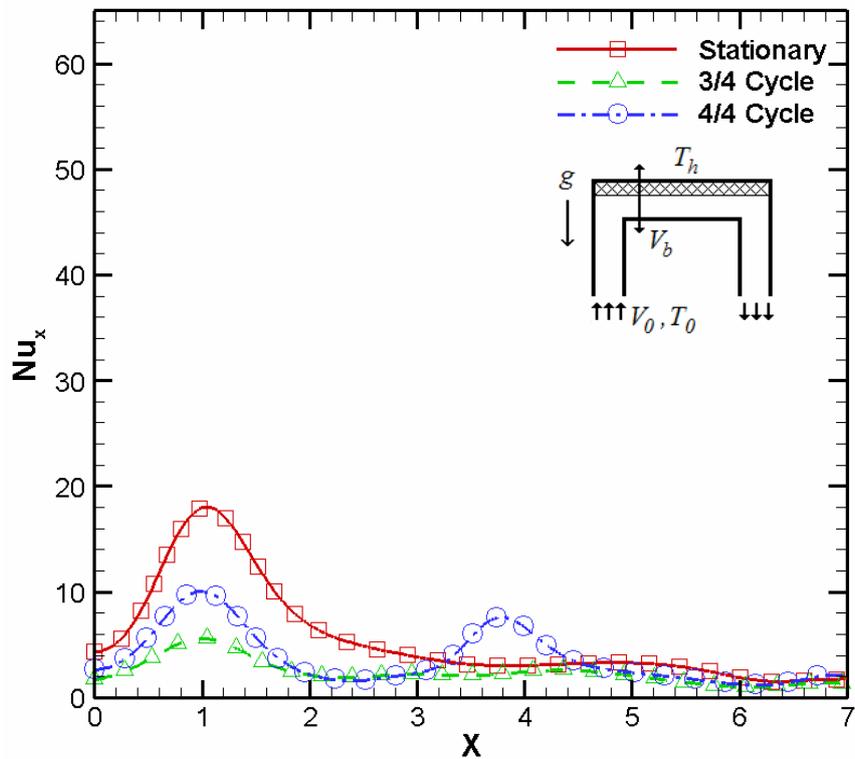


圖 5-23(b)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

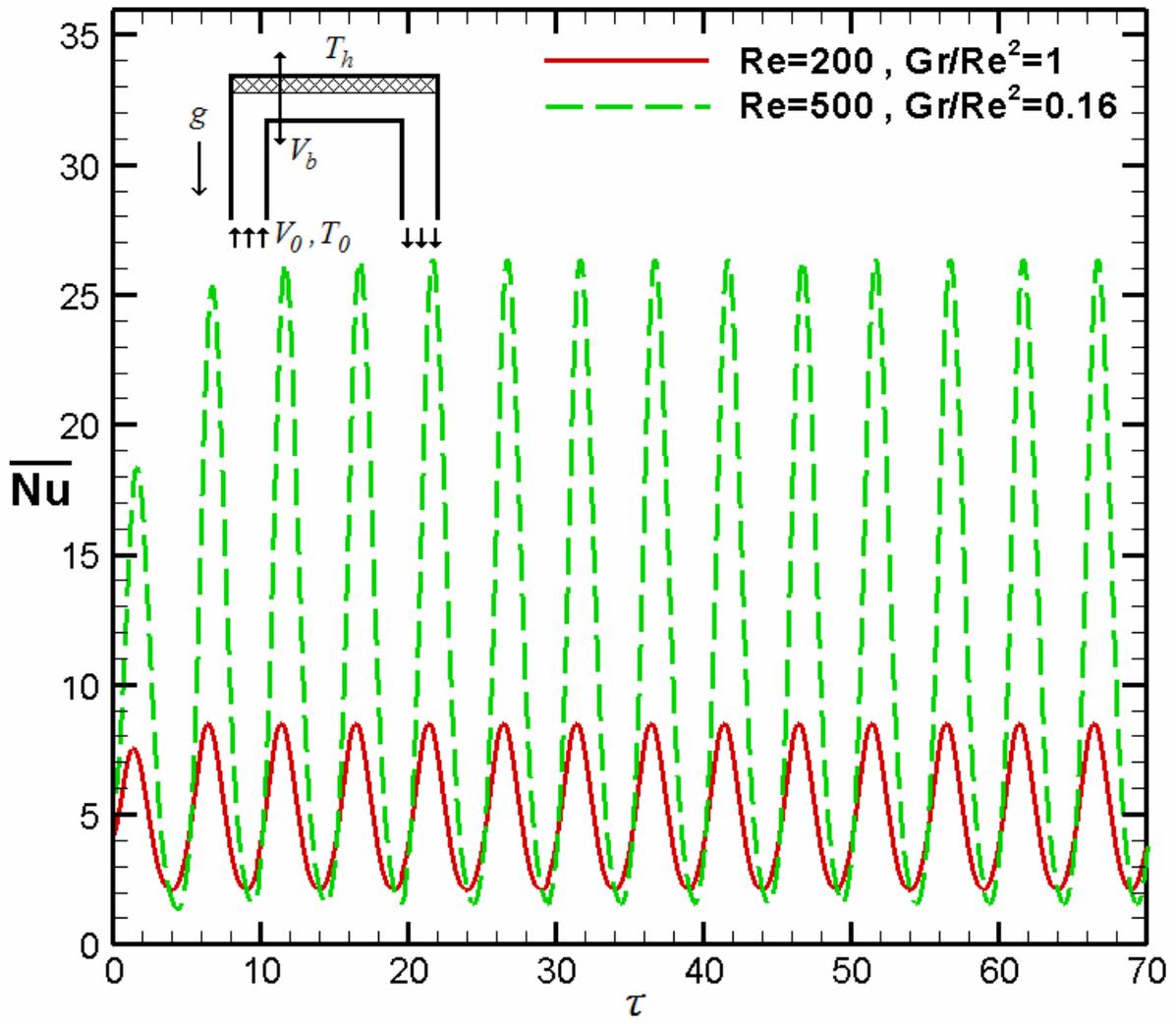


圖 5-24、 $Re=200, Gr/Re^2=1$ ； $Re=500, Gr/Re^2=0.16, F_c=0.2, L_c=0.5$
 ，重力方向和進口流相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖

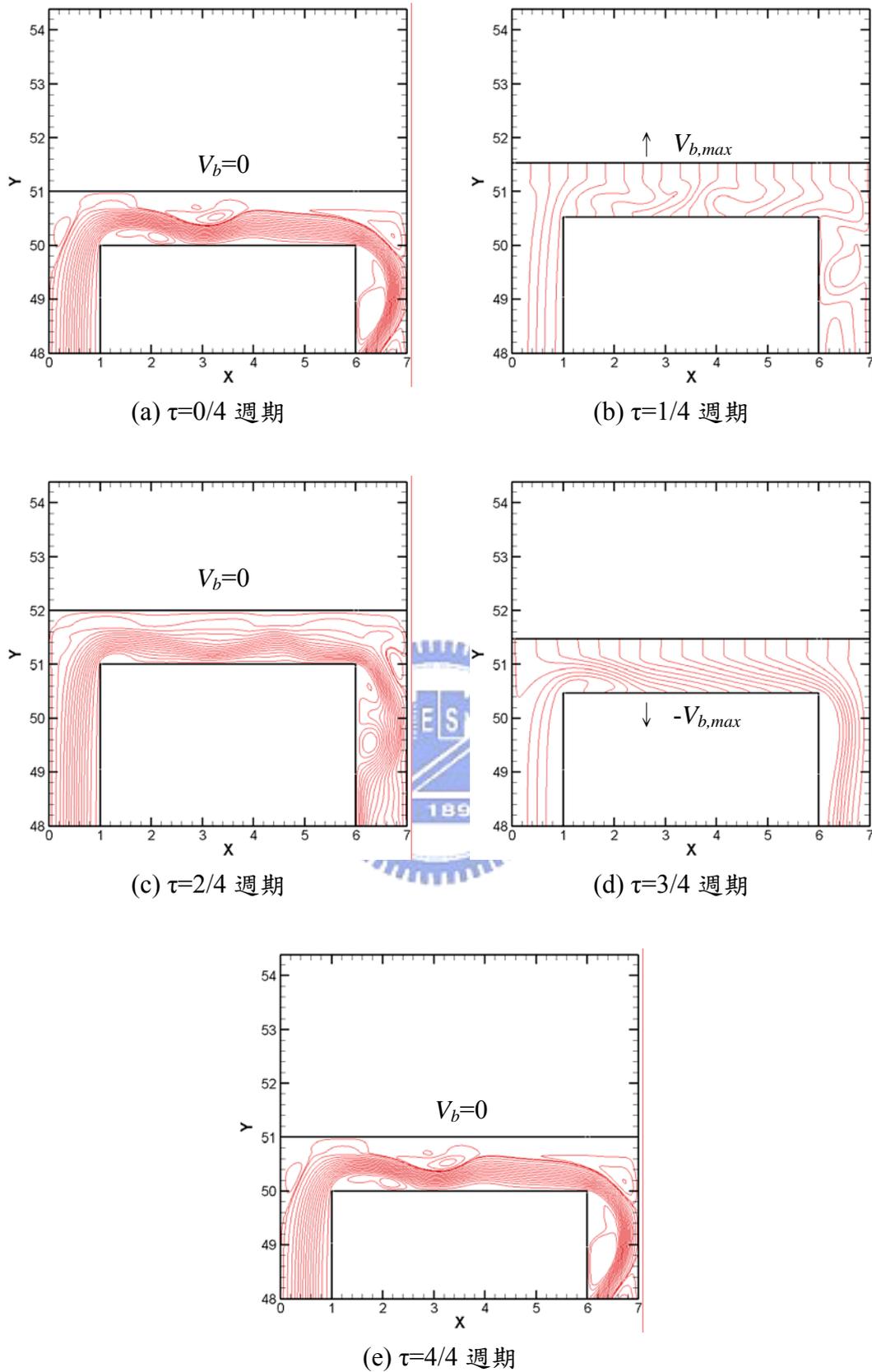


圖 5-25、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

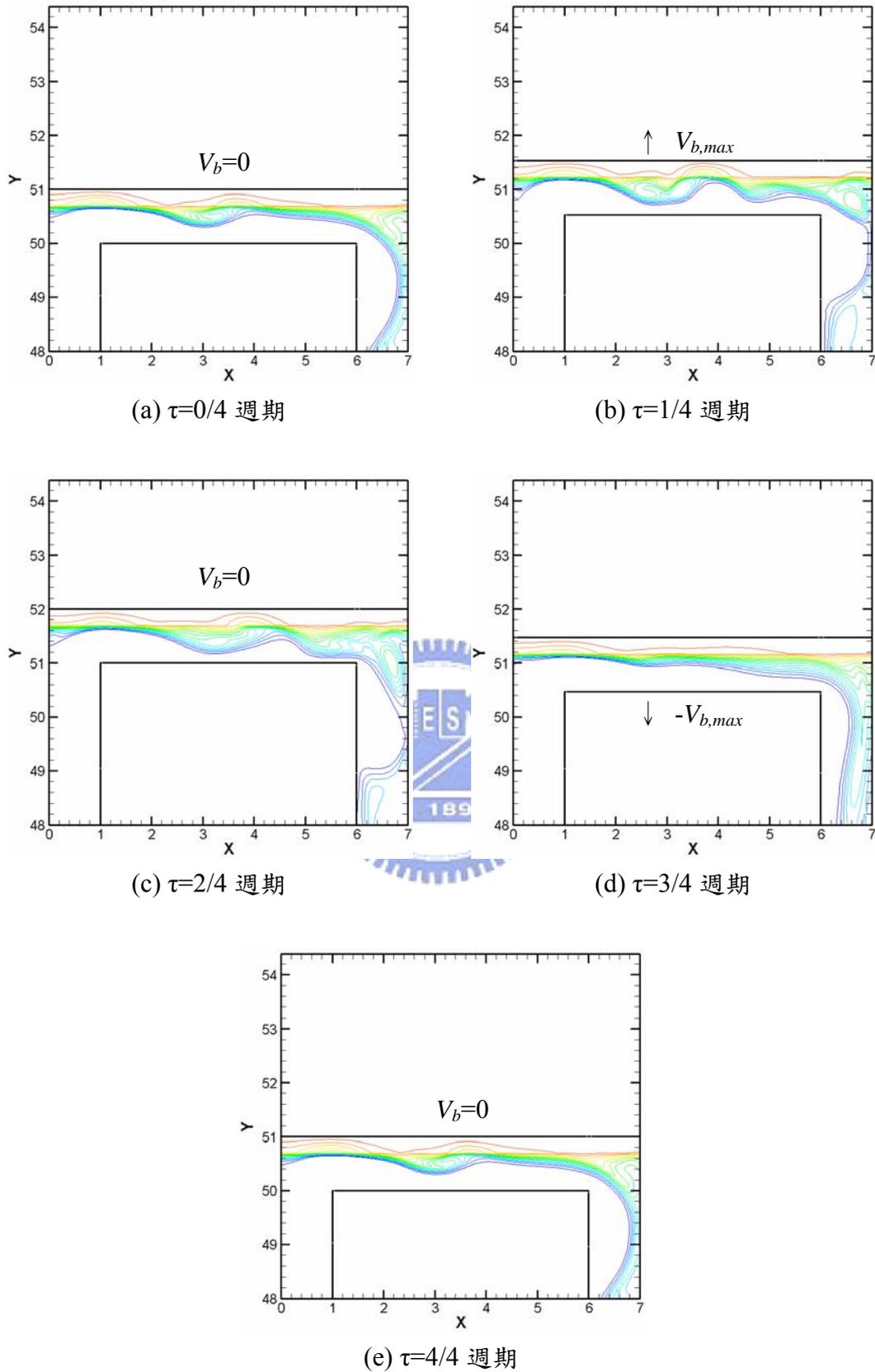


圖 5-26、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，移動邊界移動一週期之流場流線圖

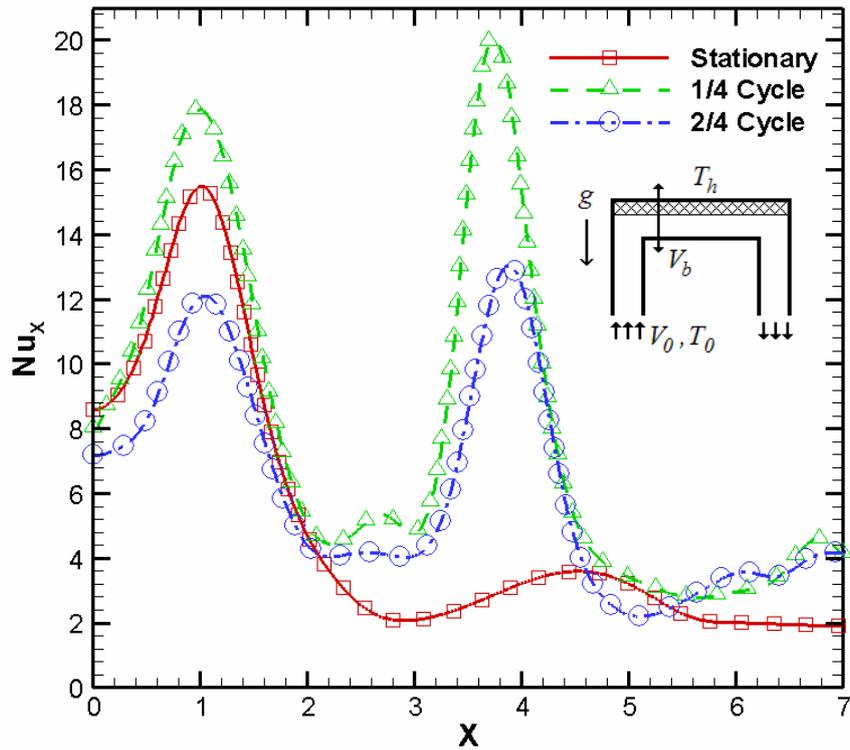


圖 5-27(a)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
1/4、2/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

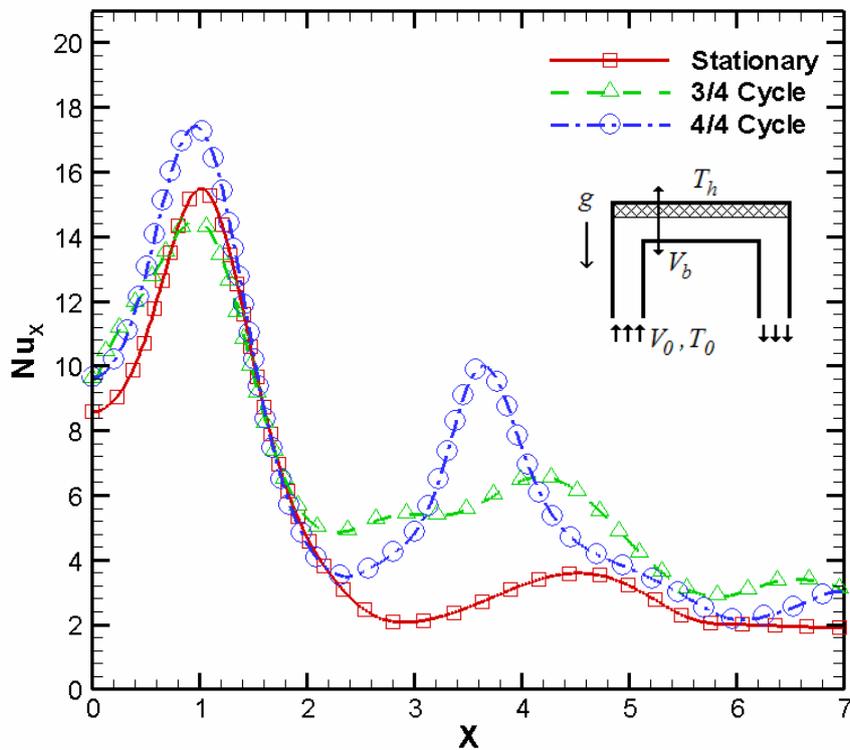


圖 5-27(b)、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=6.4$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相反，
3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

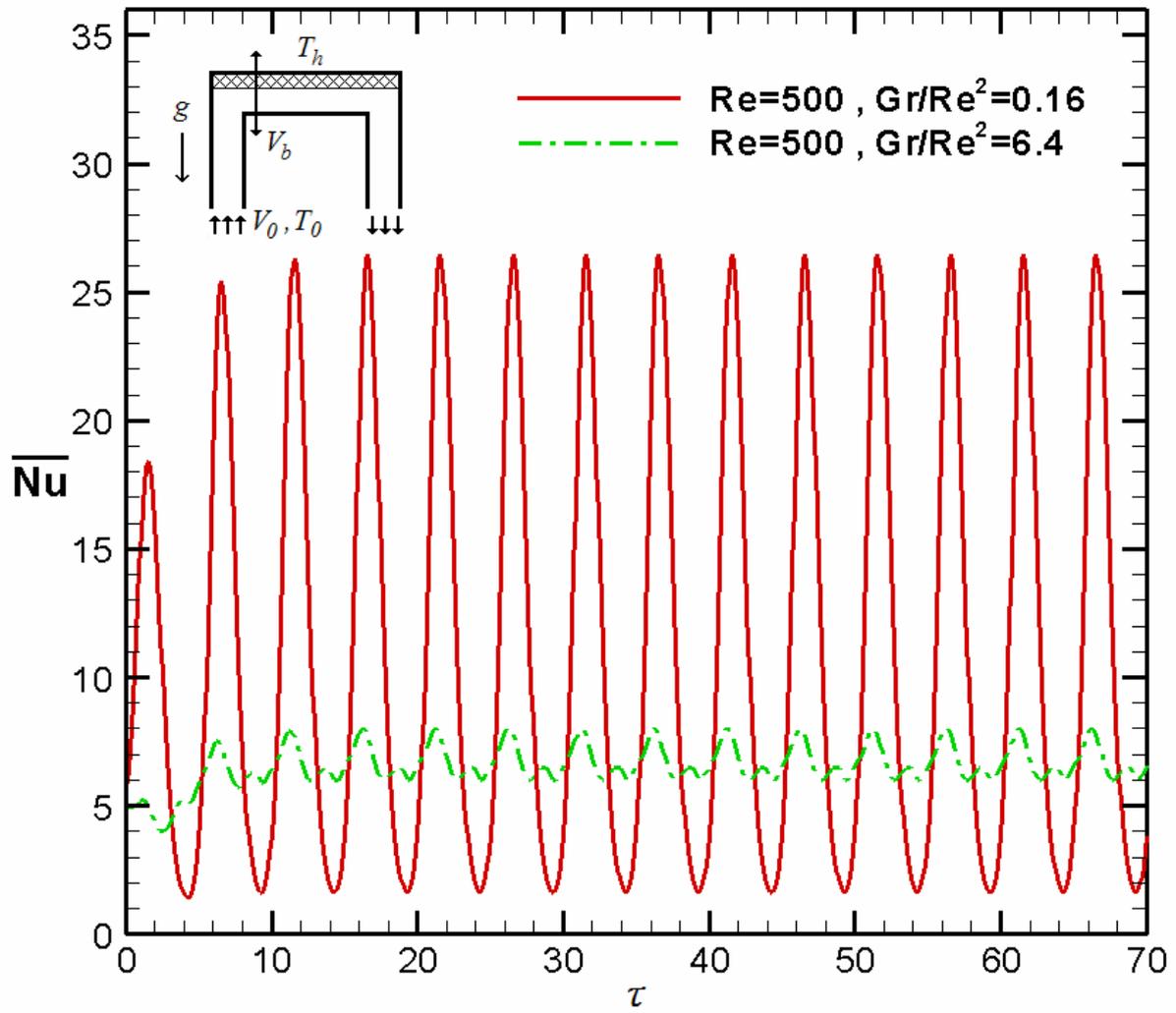


圖 5-28、 $Re=500$ ， $Gr/Re^2=0.16$ 、 6.4 ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，
 重力方向和進口流相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖

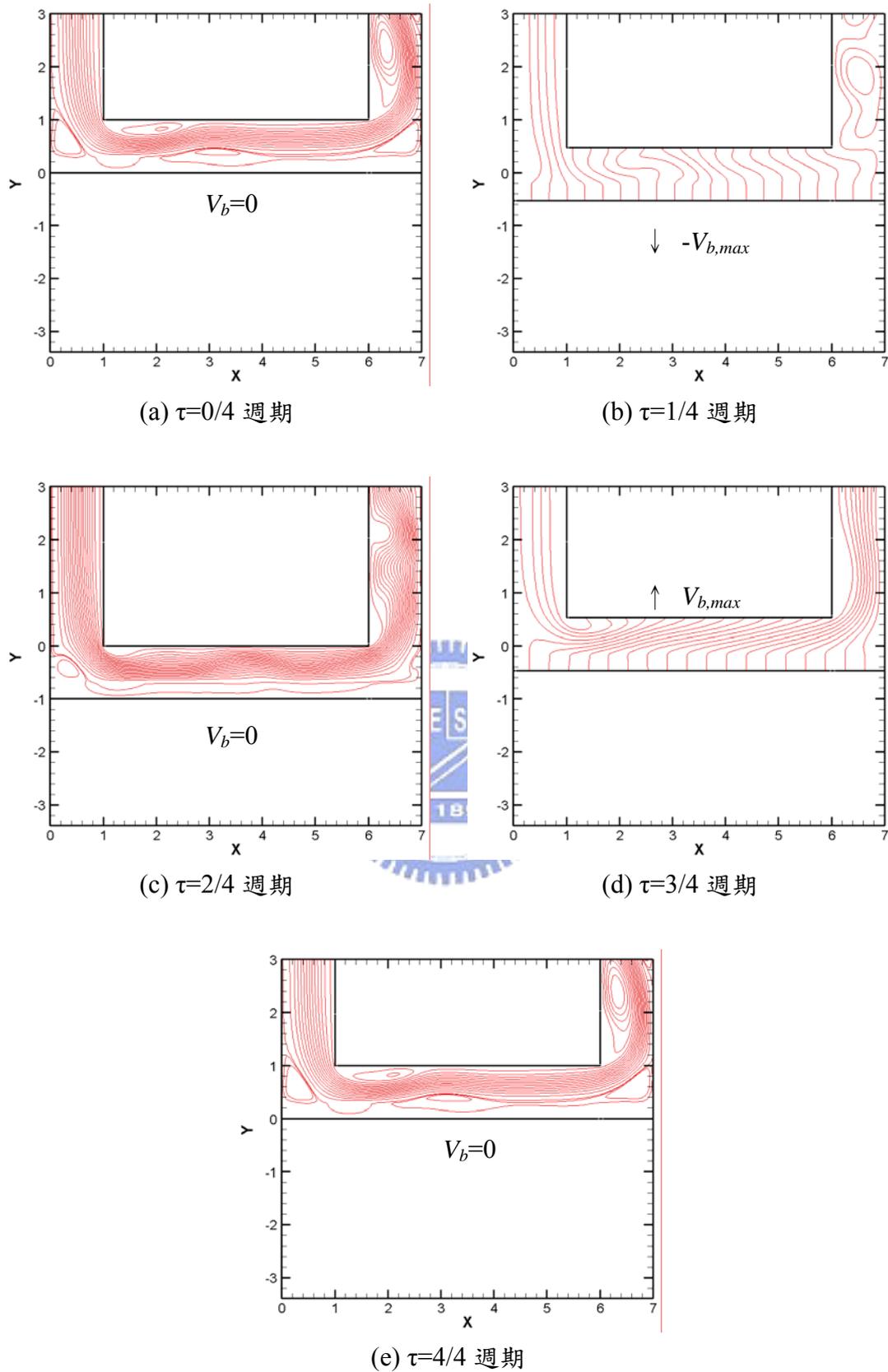


圖 5-29、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，移動邊界移動一週期之流場流線圖

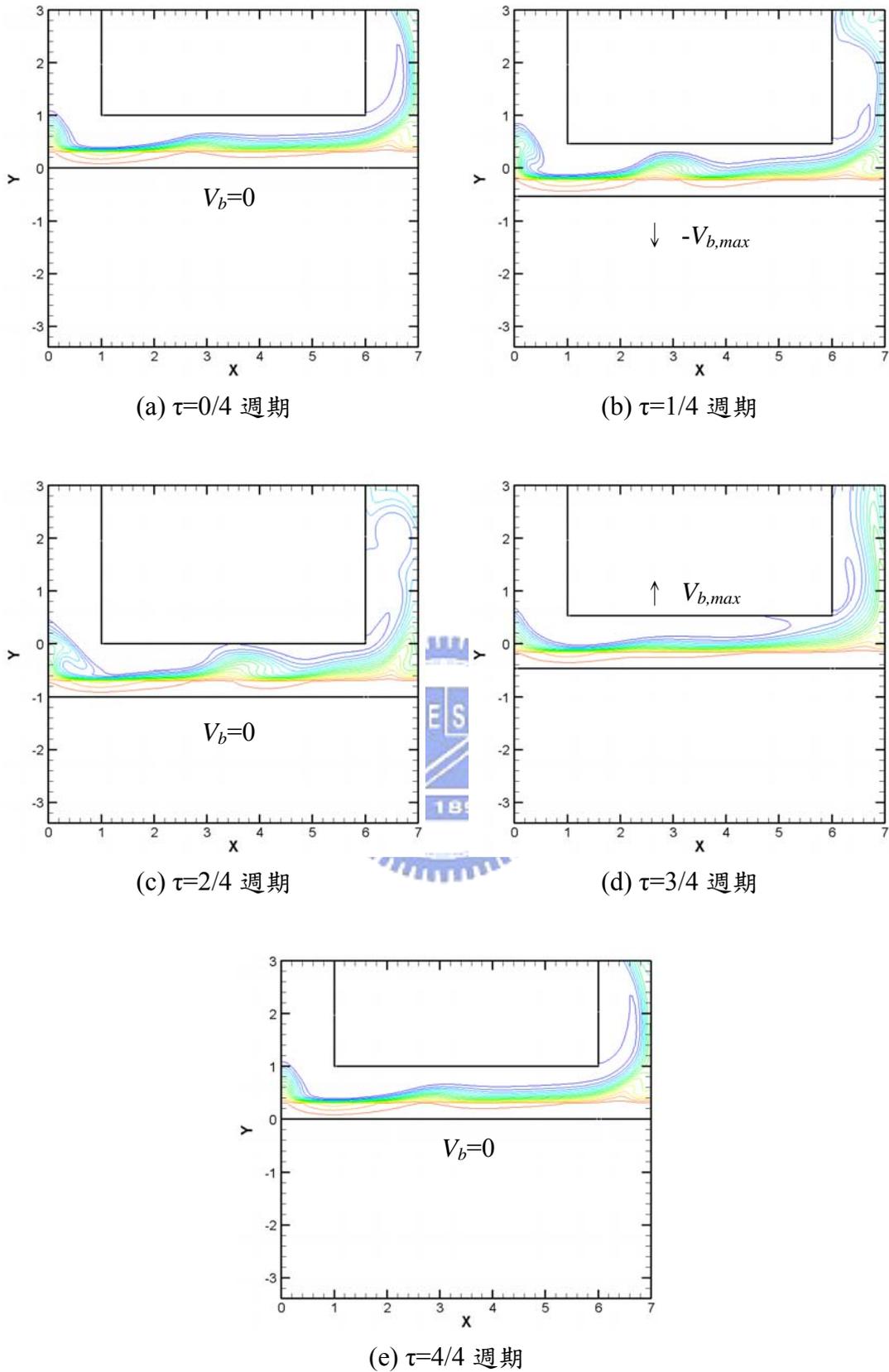


圖 5-30、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，移動邊界移動一週期之流場流線圖

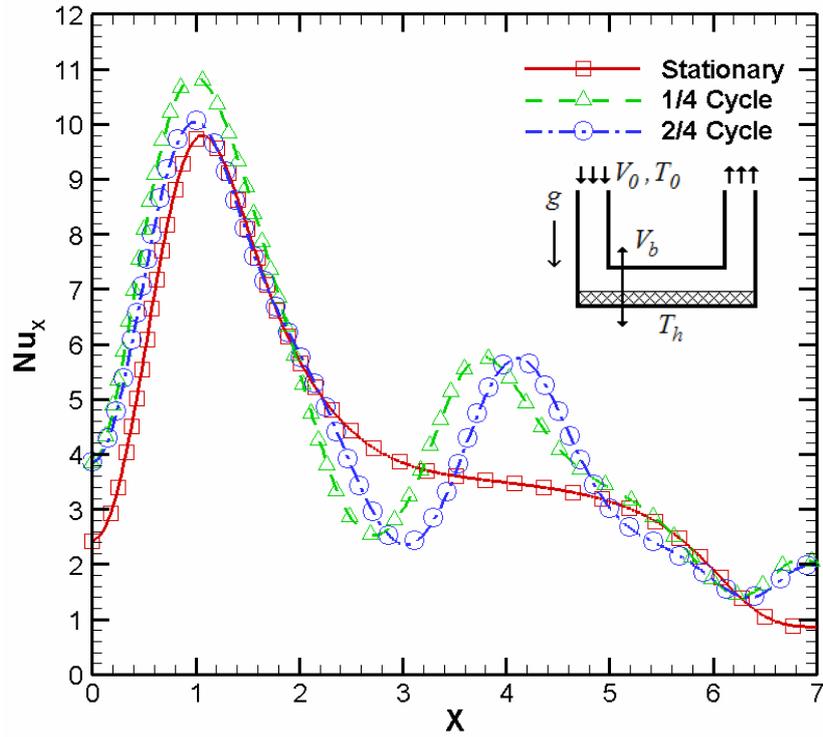


圖 5-31(a)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，
1/4、2/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

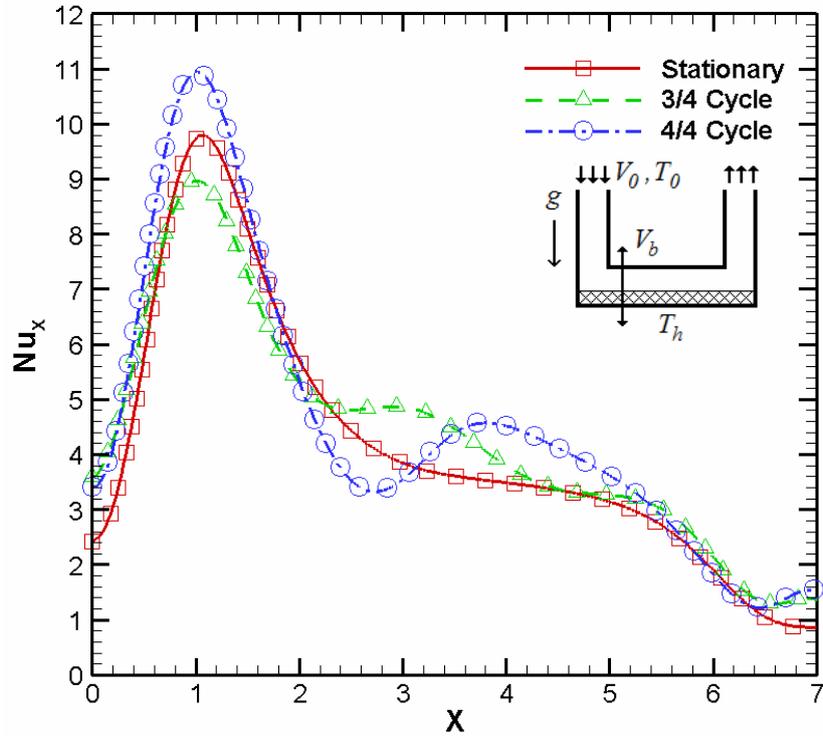


圖 5-31(b)、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$ ，重力方向和進口流相同，
3/4、4/4 週期瞬間之局部紐塞數比較圖

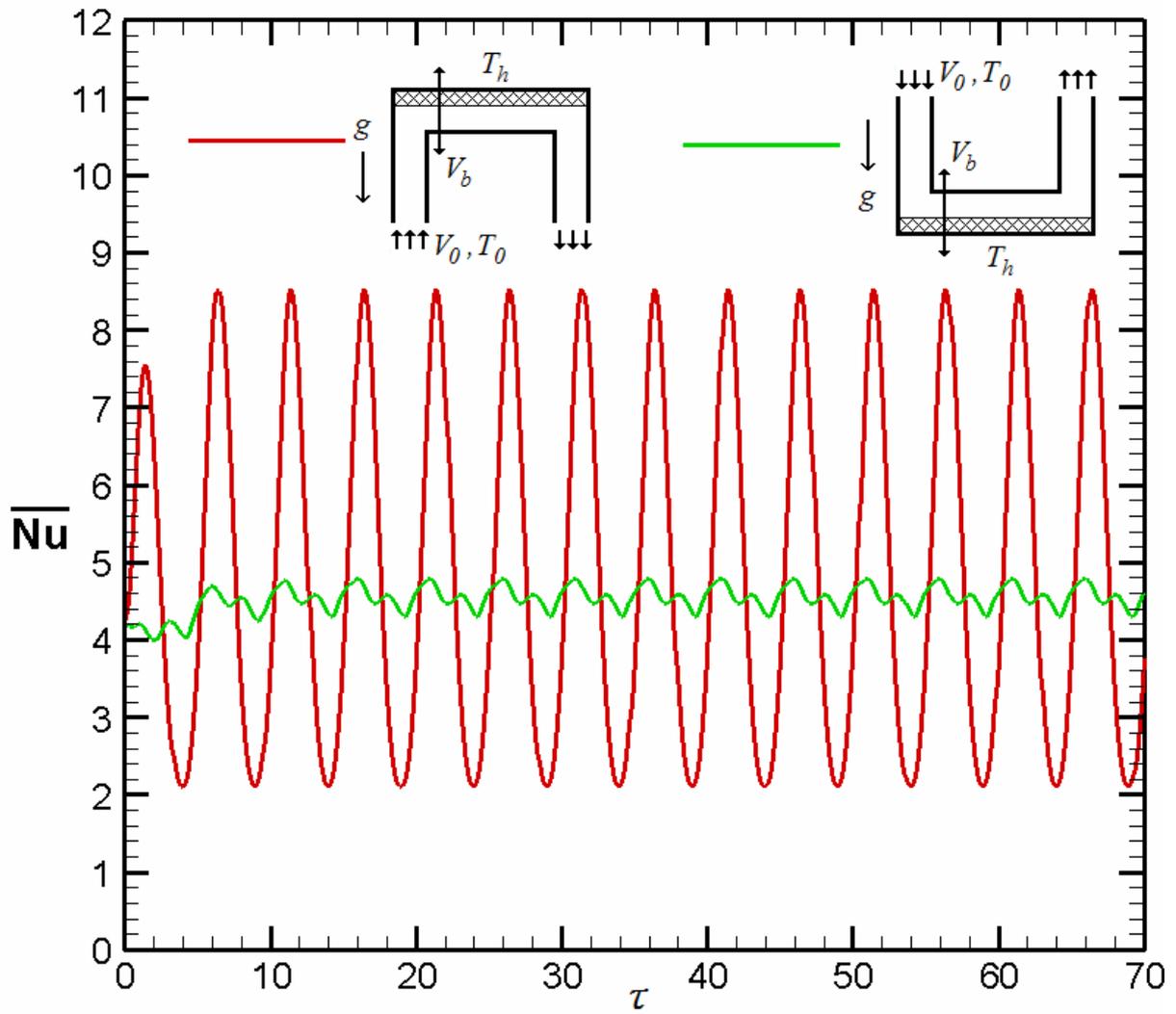


圖 5-32、 $Re=200$ ， $Gr/Re^2=1$ ， $F_c=0.2$ ， $L_c=0.5$
 ，重力方向和進口流相同及相反，高溫面之平均紐塞數隨時間變化圖

第六章 結論

本研究採用 ALE 法及葛拉金有限元素法模擬活塞內部加裝多孔性介質之散熱管道，其隨活塞做往復運動的流場和溫度場變化機制，並探討加裝多孔性介質之後對高溫面熱傳的增益，所得的模擬結果將綜合為以下所述：

1. 加入多孔性介質後，可以改善活塞頂部高溫壁面的熱傳效果。
2. 活塞開始振動時，在低浮力效應下的平均紐塞數變化較大，但整體的平均紐塞數對時間的平均還是比高浮力效應的大，也就是浮力效應加強會使熱傳效率降低。
3. 在相同的浮力效應的影響下，進口流速度較高時，活塞頂面的熱傳效果較好。
4. 重力方向與進口流相同時的高溫面熱傳效率較重力方向與進口流相反時差。



參考文獻

1. P. P. Grassmann, and M. Tuma, "Applications of the Electrolytic Method- II. Mass Transfer within a Tube for Steady, Oscillating and Pulsating Flows," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 22, pp. 799-804, 1979.
2. A. T. Patera, and B.B. Mikic, "Exploiting Hydrodynamic Instabilities Resonant Heat Transfer Enhancement," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 29, No. 8, pp. 1127-1138, 1986.
3. S. Y. Kim, B. H. Kang, and A. E. Hyun, "Heat Transfer in the Thermally Developing Region of a Pulsating Channel Flow," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 17, pp. 1257-1266, 1993.
4. A. E. Bergles, "Heat Transfer Enhancement - The Encouragement and Friction in Tubes with Repeated-Rib Roughness," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 14, No. 4, pp. 601-617, 1971.
5. R. L. Webb, E. R. G. Eckert, and R. J. Goldstein, "Heat Transfer and Friction in Tubes with Repeated-Rib Roughness," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 14, No. 4, pp. 601-617, 1971.
6. M. J. Lewis, "An Elementary Analysis for Predicting the Momentum and Heat Transfer Characteristics of a Hydraulically Rough Surface," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 97, No. 2, pp. 249-267, 1975.
7. J. C. Han, "Heat Transfer and Friction in Channels with Two Opposite Rib-Roughed Walls," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 106, pp. 774-781, 1984.
8. A. E. Bergles, "Recent Development in Convective Heat-Transfer Augmentation," Applied Mechanics Reviews, vol.26, pp.675-682, 1973.
9. A. E. Bergles, "Survey And Evaluation of Techniques to Augment Convective Heat and Mass Transfer," Heat and Mass Transfer, vol.1, pp.331-424, 1969.
10. A. E. Bergles and R. L. Webb, "A Guide to the Literature on Convective Heat Transfer Augmentation," Advances in Enhanced Heat

- Transfer-1985, S. M. Shenkman, J. E. O' Brien, I. S. Habib, and J. A. Kohler, Vol. HTD-Vol.43, pp.81-90, ASME Symposium, 1985.
11. S. W. Chang and L. M. Su, "Influence of Reciprocating Motion on Heat Transfer Inside a Ribbed Duct with Application to Piston Cooling in Marine Diesel Engines," *Journal of Ship Research*, Vol. 41, No. 4, pp. 332-339.
 12. Wu-Shung Fu, Wen-Wang Ke, Ke-Nan Wang, "Laminar Forced Convection in a Channel With a Moving Block," *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 44(13), pp.2385-2394, 2001.
 13. W. F. Noh, "A time-dependent two-space-dimensional coupled Eulerian-Lagrangian code," in: B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg, eds., *Methods in computational Physics*, Academic Press, New York, Vol. 3, p. 117, 1964.
 14. C. W. Hirt, A. A. Amsden, and H. K. Cooks, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds," *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp. 227-253, 1974.
 15. T. J. R. Hughes, W. K. Liu, and T. K. Zimmermann, "Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation For Incompressible Viscous Flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, pp. 329-349, 1981.
 16. A. Huerta and W. K. Liu, "Viscous Flow With Large Free Surface Motion," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 69, pp. 277-324, 1988.
 17. T. Belytschko, D. P. Flanagan, and J. M. Kennedy, "Finite Element Methods With User-Controlled Meshes For Fluid-Structure Interaction," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 33, pp. 669-688, 1982.
 18. J. Donea, S. Giuliani, and J. P. Halleux, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method For Transient Dynamic Fluid Structure Interactions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 33, pp. 689-723, 1982.
 19. A. Huerta ,and W. K. Liu, "Viscous Flow Structure Interaction," *Journal of pressure vessel technology*, Vol. 110, pp. 15-21, 1988.
 20. T. Nomura and T. J. R. Hughes, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method For Interaction Of Fluid And A Rigid Body," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, pp.

- 115-138, 1992.
21. T. Nomura, "Finite Element Analysis Of Vortex-Induced Vibrations Of Bluff Cylinders," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 46, pp. 587-594, 1993.
 22. H. H. Hu, "Direct Simulation Of Flows Of Solid-liquid Mixtures," *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 22, pp. 335-352, 1996.
 23. A. Masud and T. J. R. Hughes, "A Space-Time Galerkin/Least-Squares Finite Element Formulation Of The Navier-Stokes Equation For Moving Domain Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 146, pp. 91-126, 1997.
 24. 楊德良，張仁德，"結構物在風場中之數值模擬研究"，行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，1995。
 25. 黃建平，"無塵室內工作人員移動對塵粒擴散之影響"，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，1996。
 26. 楊肅正，"穩定流場下剛體移動衍生之熱流現象"，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，1997。
 27. 楊肅正，"擺動矩形體在流動場中之流場與熱傳特性研究"，國立交通大學機械工程研究所博士論文，2000。
 28. R. Teman, "Navier Stokes Equations", 3rd Edition, North Holland Amsterdam, 1984.
 29. K. H. Huebner, E. A. Thornton and T. G. Byrom, "The Finite Element Method for Engineers", 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1995.
 30. J. Wang and M. S. Gadala, "Formulation And Survey Of ALE Method In Nonlinear Solid Mechanics," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 24, pp. 253-269, 1997.
 31. D. W. Pepper and J. C. Heinrich, *The Finite Element Method: Basic Concepts And Applications*, Taylor&Francis, 1992.
 32. 林清貴，"往復運動對半封閉渠槽的流場與熱傳影響之數值模擬"，國立清華大學動力機械工程研究所碩士論文，2002。
 33. 劉謹德，"通道內設凸起物往復運動時混合對流之熱傳研究"，國立成功大學造船暨船舶機械工程研究所碩士論文，2001。
 34. 黃睿哲，"往復通道加裝凸起物紊流場觀察與數值模擬分析"，國立成功大學造船暨船舶機械工程研究所碩士論文，2001。
 35. 廖英皓，"活塞頂部之熱傳分析"，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，2003。

36. 賴昱志，” 增進活塞熱傳效益之數值模擬” ， 國立交通大學機械工程研究所碩士論文，2004。
37. Orhan Aydm, “Aiding And Opposing Mechanisms Of Mixed Convection In A Shear- And Buoyancy-Driven Cavity,” International Communications in Heat and Mass Transfer Vol.26, No.7, October, 1999, pp. 1019-1028
38. Robert W. Fox & Alan T. McDonald Introduction to Fluid Mechanics, FIFTH EDITION.
39. 謝文健，” 利用有限元素法解析密閉式空間內自然對流問題” ， 國立交通大學機械工程研究所碩士論文，1987。
40. 劉維元，” 多孔性介質的熱傳分析” ， 國立交通大學機械工程研究所碩士論文，1994。
41. 黃新鉗，” 加裝多孔凸塊以增強熱傳效率之研究” ， 國立交通大學機械工程研究所博士論文，1997。
42. Kambiz Vafai, 1984, “Convection Flow and Heat Transfer in Variable-Porosity Media” , J. Fluid Mech., Vol. 147, pp.233-259.
43. P. Nithiarasu, K. N. Seetharamu, T.Sundararajan, “Natural Convective Heat Transfer In a Fluid Saturated Variable Porous Medium” , Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, No. 16, pp. 3955-3967, 1997.
44. C. Taylor and T. G. Hughes, “Finite Element Programming of The Navier-Stokes Equations” , Pineridge Press Swansea, 1981.
45. B. M. Irons, “A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis” , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.2, pp.5-32, 1970.
46. P. Hood, “Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices” , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.10, pp.379-399, 1976.

附 錄 A

有限元素法矩陣方程式，解速度場和溫度場：

$$([A] + [K] + \lambda [L])\{q\} = \{f\}$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & [0] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & [0] \\ [A_{31}] & [A_{32}] & [A_{33}] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [0] & [0] & [K_{33}] \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] & [0] \\ [L_{21}] & [L_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_t\} \end{bmatrix}$$



在內流場中，上列矩陣中的子矩陣分別為：

$$[A_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U_{fp}\}^m \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + [N] \{V_{fp}\}^m \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{U_{fp}\}^m [N] + \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} \sqrt{([N] \{U_{fp}\}^m)^2 + ([N] \{V_{fp}\}^m)^2} [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[A_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{U_{fp}\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[A_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{V_{fp}\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[A_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U_{fp}\}^m \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + [N] \{V_{fp}\}^m \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{V_{fp}\}^m [N] + \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} \sqrt{([N] \{U_{fp}\}^m)^2 + ([N] \{V_{fp}\}^m)^2} [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[A_{31}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{\theta_{fp}\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned}
[A_{32}] &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{ \theta_{fp} \}^m [N] \right) d\Omega \right] \\
[A_{33}] &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right] \\
[K_{11}] &= \sum_1^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) d\Omega - \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \varepsilon \{ \hat{V} \} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right]) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \left(\{N\} \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} [N] \right) d\Omega \right]
\end{aligned}$$

$$[K_{22}] = [K_{11}]$$

$$[K_{23}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left(-\{N\} \frac{Gr}{\text{Re}^2} \varepsilon [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[K_{33}] = \sum_1^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) d\Omega - \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \varepsilon \{ \hat{V} \} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right]) d\Omega + \frac{1}{\text{Re Pr}_e} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right]$$

$$[L_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned}
\{f_u\} &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{U_{fp}\}^m d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{U_{fp}\}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{U_{fp}\}^m \right) d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{f_v\} &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{V_{fp}\}^m d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{V_{fp}\}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{V_{fp}\}^m \right) d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{f_\theta\} &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_{fp}\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{ \theta_{fp} \}^m d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{ \theta_{fp} \}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re Pr}_e} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{ \theta_{fp} \}^m \right) d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

對於外流場，矩陣中的子矩陣分別為：

$$[A_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{U\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned}
[A_{12}] &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{U\}^m [N] d\Omega \right] \\
[A_{21}] &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{V\}^m [N] d\Omega \right] \\
[A_{22}] &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{V\}^m [N] \right) d\Omega \right] \\
[K_{11}] &= \sum_1^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) d\Omega - \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) \hat{V} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right]
\end{aligned}$$

$$[K_{22}] = [K_{11}]$$

$$[K_{23}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left(-\{N\} \frac{Gr}{\text{Re}^2} [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[K_{33}] = \sum_1^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) d\Omega - \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) \hat{V} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right]$$

$$[L_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$



$$\begin{aligned}
\{f_u\} &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{U\}^m d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) \{U\}_\tau d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{U\}^m \right) d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{f_v\} &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{V\}^m d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) \{V\}_\tau d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{V\}^m \right) d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{f_\theta\} &= \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{\theta\}^m d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) \{\theta\}_\tau d\Omega + \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{\theta\}^m \right) d\Gamma \right]
\end{aligned}$$