國立交通大學

應用數學系

碩 士 論 文

廣義PORT樹與d維樹的子樹大小描述

The Subtree Size Profile of Generalized PORTs and d-ary Trees

研 究 生 ：林立庭

指導教授：符麥克　博士

中 華 民 國 一 零 二 年 六 月

廣義PORT樹與d維樹的子樹大小描述

The Subtree Size Profile of Generalized PORTs and d-ary Trees

研 究 生 ：林立庭 Student: Li-Ting Lin

指導教授：符麥克　博士 Advisor: Dr. Michael Fuchs

國 立 交 通 大 學
應 用 數 學 系
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Department of Applied Mathematics
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Applied Mathematics

June 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 零 二 年 六 月

The Subtree Size Profile of Generalized PORTs and d-ary Trees

Student:
Li-Ting Lin

Advisor:
Dr. Michael Fuchs

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University
Hsin-chu, 300
Taiwan

June 20, 2013

廣義PORT樹與d維樹的子樹大小描述

學生：林立庭 指導教授：符麥克 博士

國立交通大學應用數學系研究所碩士班

中 文 摘 要

Generalized PORTs和d-ary trees都有其對應的應用模型。這兩種不同的tree 我們能使用相同手法去對於它們的性質進行研究，而利用的性質可以是它們的**out-degree爲k 的node數、level爲k的node數、subtree size爲k的node 數**...等。

本篇中我們所使用的性質爲相同subtree size爲k的node數——即subtree size profile——來進行研究。在這裡，我們使用singularity analysis來進行我們的證明並且能讓證明過程能更加簡化且清楚。

本篇的概述爲：Chapter 1將介紹關於我們的研究領域的歷史以及前人的結果，最後提出關於我們主要證明的源由跟主要定理的提出。Chapter 2我們會介紹singularity analysis，以及我們主要證明中相關的機率定理和會用到的預備知識。Chapter 3爲我們證明generalized PORTs之下，使用subtree size profile的性質所證明的結果。Chapter 4是我們要證明d-ary trees 之下，使用subtree size profile的性質所證明的結果。Chapter 5 我們會對於主要證明的過程以及主要定理的結果給予結論跟討論。

The Subtree Size Profile of Generalized PORTs and d-ary Trees

Student: Li-Ting Lin

Advisor: Dr. Michael Fuchs

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University

Preface

Generalized plane-oriented recursive trees (PORTs) and d-ary trees are two important tree families with many applications. Their properties can be analyzed with the same tools, where properties which are often studied include: *the number of nodes of a fixed out-degree*, *the number of nodes of a fixed level*, *the number of nodes with subtree rooted at the node having a fixed size*, etc.

In this thesis, we will consider the number of nodes with subtree rooted at the node having a fixed size. This is the so called subtree size profile. We will show how to use singularity analysis to obtain the mean value, variance, higher moments and limiting distribution of the subtree size profile for the above two families of trees (under a suitable random model).

An outline of the thesis is as follows: in Chapter 1, we will review the recent history of the subtree size profile and explain the purpose of the current work. In Chapter 2, we will give a brief introduction into singularity analysis, state some useful results from probability theory and prove some prepatory results. In Chapter 3 and Chapter 4, we will discuss the subtree size profile for generalized PORTs and d-ary trees, respectively. These two chapters will also contain our main results. Finally, in Chapter 5, we will summarize our work and conclude with some remarks.

誌　　謝

在研究所的這兩年裡，有明顯的發現，不管是課程的選擇、時間的分配、扮演的身份，都與大學時有很大的差異。因此，很感謝交通大學以及應用數學系對於我的認同和栽培，讓我過了很充實的兩年。

感謝我的指導教授符麥克老師，教導我有關於解析組合的知識，讓我對於之前所學到的組合問題有更進一步的認識跟應用。而且在這兩年的相處，發現符麥克老師對於同一個問題能用不同方法去解決感到佩服，並且對於我所提出的問題能非常清楚、仔細地去講解讓我瞭解並給我提示。感謝兩位口試委員黃顯貴博士和陳冠宇老師對於這篇的研究提供一補充以及未來可以研究的問題。更感謝這兩年我所遇到的老師跟學長，給予我指教。

也感謝我的同學以及這兩年來所認識的人，在學習上或生活上都讓我認識到很多不一樣的思考和想法，更一起度過了很多解決困難的時候，一起談論自己所發生的或是一件事情的評論，讓我對於新環境不會如此恐懼。

感謝家人的關愛與耐心，對於在交通大學的兩年給予很大支持。最後，希望大家還能夠有再見面的機會，也希望大家在離開學校之後，能找到好工作。祝福大家身體健康、萬事如意。

Contents

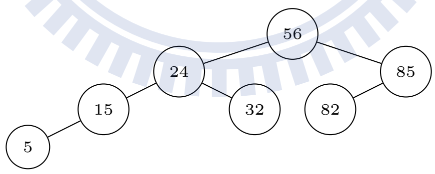
Chapter 1

Introduction

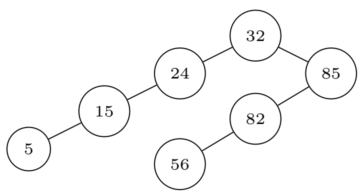
Binary search tree(簡稱 **BST**) 是一個我們常見的資料結構，BST 通常是使用在搜尋跟排序方面的問題。BST 的定義是要符合以下的幾點：

1. 每一個node 都會放一筆資料，而且我們希望每一個資料是不重覆的。
2. 利用資料的某個特性來做爲每一筆資料的key 值。
3. 每一筆資料在輸入進來時，需從root 的key 值開始比較，如果新資料的key 值比正在比較的node 的key 值小，則與正在比較的node 的left subtree 比較；如果新資料的key 值比正在比較的node 的key 值大，則與正在比較的node 的right subtree 比較，以此類推。直到leaf 時，新資料的key 值小者，會成爲leaf 的left child；新資料的key 值大者，會成爲leaf 的right child。

Example 1.1. 假如，我們現在的資料是整數，則以資料的數字爲key 值。現在我們要輸入的資料是$< 56, 85, 24, 15, 82, 32, 5 >$，利用BST的定義能建出一個BST



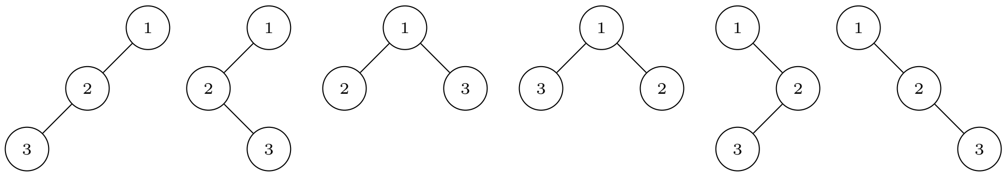
Example 1.2. 我們仍然使用Example 1.1的資料，而現在我們去改變輸入的順序$< 32, 24, 85, 82, 56, 15, 5 >$ 的話，則BST將會變成



由Example 1.1和Example 1.2我們能夠發現，資料相同但輸入順序不同，BST 的樣子也會不同。又因爲BST的資料放在left subtree跟資料放在right subtree的

意義是不一樣——一般我們將這情況視爲**planar**——因此我們去看一個size爲n的BST，它可能的情況就會有$n!$種可能。

Example 1.3. 當$= 3$時 總共會有六種不同的BST。



從Example 1.3可以看出，從輸入順序來看，我們可以發現從root一直到leaf的編號是呈現increasing。如果，我們能將一個大小爲n的tree的每個node都編上不同的編號$\{1, 2, \cdots, n\}$，而從root一直到leaf的編號都是呈現increasing 的話，我們這樣的tree稱作**increasing tree**，而我們單純從輸入順序來看BST的話，BST即是increasing tree的一種。如此，我們可以去給定一個BST的random model。

由Figure 1.1 來看，在第一個資料輸入進來時，這個資料一定是root，只有一種可能；當第二個資料輸入進來時，因爲都會被放在leaf，因此對於第二個資料就可能成爲root 的left child 或right child，共兩種可能，對於這兩種可能我們隨機的去挑選一個位置；當第三個資料輸入進來時，可以用相同的方法去討論，可以得知第三個資料所放的位置有三種可能，再次我們隨機的去挑選一個位置；如此類推。

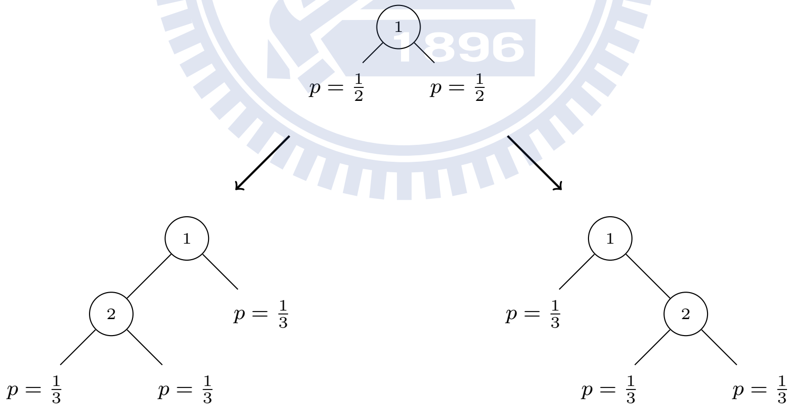


Figure 1.1: 由資料輸入的順序來看每個node 放在一個位置的機率

在建立了random model之後，我們使用tree的各種性質來研究BST。一般來說，有兩種性質最常當作研究時所使用的參數，一種是去看一個size爲n的tree去計算深度爲k 的node 數量，我們稱這個方法爲**node profile**。而另一種是去看一個size爲n的tree 去計算有多少node的subtree size是k，我們稱這個方法爲**subtree size profile**。

Node profile是研究者較常使用的性質，來當作研究BST的參數。在[1]中，F. Bergeron、P. Flajolet和B. Salvy在使用剛才所提出的random model之下，去證明

出了BST使用node profile爲參數的distribution，從node profile 的定義中，我們知道它是有兩個指標的，以$L_{n,k}$表示，因此在[1]中，F. Bergeron等人先設計出一個bivariate generating function

$$L(z,u)=\sum_{n,k\geq 0} L_{n,k}\frac{z^n}{n!}u^k,$$

之後，F. Bergeron 等人證明出node profile 在BST 中的bivariate generating function

$$L(z,u)=\frac{(1-z)^{-2u}-(1-z)^{-1}}{2u-1},$$

而且在固定tree的深度爲k的條件下，證明出node profile的mean value爲

$$\mathrm{E}(L_{n,k})=2\log n+2\gamma-4+\mathcal{O}(\frac{\log n}{n})$$

和variance爲

$$\mathrm{Var}(L_{n,k})=2\log n+4+2\gamma-\frac{2\pi^2}{3}+\mathcal{O}(\frac{\log^2 n}{n}),$$

最後說明了node profile的distribution會趨近於normal distribution。而在[7]中，M. Fuchs、H.-K. Hwang 和R. Neininger也對於node profile有提出更多的研究結果。

Subtree size profile這個性質是近期內大量被拿來當作研究的參數。在本篇，我們也是去使用subtree size profile當作研究的參數。在這裡，我們先用符號$X_{n,k}$來表示subtree size profile。 以Example 1.2來舉例，$X_{7,3}=2$，正好是root 的left subtree和right subtree；$X_{7,2}=2$分別是資料值爲24的node的left subtree跟資料值爲85的node 的left subtree。

在2008年，Q. Feng、H. M. Mahmoud和A. Panholzer合作發表了[3]，這一篇是我們知道最早提出BST使用subtree size profile爲參數的distribution。Q. Feng 等人證明出BST的subtree size profile $X_{n,k}$的結果。

Theorem 1.4. *1.(Normal range)* 假設$1\leq k=o(\sqrt{n})$且$n\to\infty$，則

$$\frac{X_{n,k}-\mu_{n,k}}{\sigma_{n,k}}\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1),$$

其中$\mu_{n,k}$爲

$$\mu_{n,k}=\mathrm{E}(X_{n,k})=\frac{2}{(k+1)(k+2)}n,\quad n\geq k+1$$

而$\sigma^2_{n,k}$爲

$$\sigma^2_{n,k}=\mathrm{Var}(X_{n,k})=\frac{2k(4k^2+5k-3)}{(k+1)(k+2)^2(2k+1)(2k+3)}n,\quad n\geq 2(k+1).$$

2.(Poisson range) 假設$k \sim c\sqrt{n}$且$n \to \infty$，則

$$X_{n,k} \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}(2c^{-2}).$$

3.(Degenerate range) 假設$k < n$，$\sqrt{n} = o(k)$且$n \to \infty$，則

$$X_{n,k} \xrightarrow{L_1} 0.$$

從這三個range來看，像k慢慢逼近n時，$X_{n,k}$的distribution會從一個continuous distribution變成一個discrete distribution。同年，M. Fuchs 所發表的[5] 中，利用total variation distance d_{TV}。

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}|\mathrm{P}(X=k) - \mathrm{P}(Y=k)|,$$

這裡d_{TV}代表的是，兩個random variable X和Y之間的距離。由d_{TV} 來觀察$X_{n,k}$和一個Poisson random variable $\mathrm{Poi}(\mu_{n,k})$，會發現

$$\begin{aligned} d_{TV}(X_{n,k}, \mathrm{Poi}(\mu_{n,k})) &= \frac{1}{2}\sum_{l\geq 0}|\mathrm{P}(X_{n,k}=l) - e^{-\mu_{n,k}}\frac{(\mu_{n,k})^l}{l!}| \\ &\longrightarrow 0, \quad k \to \infty \textit{ and } n \to \infty. \end{aligned}$$

而從這個結果能夠知道$X_{n,k}$的distribution一直都是Poisson distribution，因此我們可以發現$X_{n,k}$的distribution並不是真的有什麼改變。

到了2010年，F. Dennert和R. Grübel所發表的[2]更是將Q. Feng 等人的結果拿來證明$X_{n,k}$的joint distribution，讓subtree size profile的研究更加完整。他們先證明兩個random variable $X_{n,j}$和$X_{n,k}$之間的covariance 爲

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_{j+k+2,j}, X_{j+k+2,k}) &= -\frac{4j(j+2k+3)}{(k+1)(k+2)(j+k+1)(j+k+2)}, 1 \leq k \\ \mathrm{Cov}(X_{n,j}, X_{n,k}) &= \frac{n+1}{j+k+3}\mathrm{Cov}(X_{j+k+2,j}, X_{j+k+2,k}), \quad \forall n > j+k+2. \end{aligned}$$

之後，他們利用這個covariance去證明。當$n \to \infty$時，k維度的random variable $n^{-\frac{1}{2}}(X_{n,1} - \mathrm{E}(X_{n,1}), X_{n,2} - \mathrm{E}(X_{n,2}), \cdots, X_{n,k} - \mathrm{E}(X_{n,k}))$的distribution會趨近於一個$k$維度的normal distribution。值得一提的是，我們所使用「subtree size profile」這個詞是從這一篇引用過來的。

在之前有說明過，BST是increasing tree的一種。當我們在研究increasing tree的性質時，我們會先去給定一組非負的weight sequence $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots\}$，而且要符合$\phi_0 > 0$和找到一個$i \geq 2$使得$\phi_i > 0$ 的這兩個條件。現在我們有一個increasing trees T的話，我們能夠用weight sequence去計算increasing tree 的weight。

$$\omega(T) = \prod_{v\in T}\phi_{d(v)},$$

這個式子所表示的是tree 的所有node v 的out-degree $d(v)$ 所對應到的weight 全部相乘起來，就是increasing tree 的weight。 之後設定

$$\tau_n = \sum_{\#T=n} \omega(T), \quad \tau(z) = \sum_{n\geq 1} \tau_n \frac{z^n}{n!},$$

其中$\#T$ 代表increasing tree 的size。 最後，再設

$$\phi(\omega) = \sum_{r\geq 0} \phi_r \omega^r,$$

此方程式稱爲**weight function**。 在[1] 中，證明出$\tau(z)$ 與weight function有這樣的關係

$$\tau'(z) = \phi(\tau(z)), \quad \tau(0) = 0.$$

因此，我們能夠利用weight function來設計出一種increasing trees並且觀察這種increasing trees的性質，我們把這些increasing trees全部收集起來，將它們稱爲**simply generated families of increasing trees**，當然BST也是屬於此類。

在介紹BST的時候，我們先提出一個random model，然後在這個random model 之下去使用node profile或subtree size profile $X_{n,k}$去作爲參數，找出這個參數的distribution。 而simply generated families of increasing trees這類increasing trees當然也是要先提出一個random model，而這個random model將會由剛才我們所定義的weight function來造出。假設一個size爲n的increasing tree T的話，則T的機率就能設爲$\frac{\omega(T)}{\tau_n}$。 當T有了一個random model 之後，我們就能從T的性質裡，挑選一個出來作爲研究T 的參數來使用。

定義好simply generated families of increasing trees之後，我們接下來要開始使用subtree size profile $X_{n,k}$來進行研究。我們知道$X_{n,k}$是一個雙指標的random variable，是在一個size爲n的tree之中，計算有多少node擁有size k 的subtree的個數。也就是説從root去看它所有的subtree的size，而root的每個subtree 也可以用同樣的方法，往下找出subtree size爲k的node 數，之後全部加起來即可，因此可以得到

$$X_{n,k} \overset{d}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X^{(i)}_{I_i,k}, & n > k. \\ 1, & n = k. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中，$X^{(i)}_{n,k}$的distribution會與$X_{n,k}$相同，即是$X^{(i)}_{n,k} \overset{d}{=} X_{n,k}$，而$N$在這裡所代表的是root的subtree 個數，而I_i表示root的subtree的size並且要符合$I_1 + I_2 + \cdots + I_N = n-1$ 的條件。

接下來，我們給定random variable $(N, I_1, I_2, \cdot, I_r)$的joint distribution 爲

$$\begin{aligned} \pi_{n,r,i_1,i_2,\cdots,i_r} &= P(N = r, I_1 = i_1, I_2 = i_2, \cdots, I_r = i_r) \\ &= [\omega^r]\phi(\omega) \binom{n-1}{i_1, i_2, \cdots, i_r} \frac{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_r}}{\tau_n}, \end{aligned}$$

其中$i_1+i_2+\cdots+i_r=n-1$且$i_1,i_2,\cdots,i_r\geq 1$，因爲如果有一個i_t 是0 的話，$N=r$這個條件就不會成立。

在這裡我們定義一個bivariate generating function

$$P_k(z,y)=\sum_{n\geq 1}\tau_n \mathrm{E}(\exp(X_{n,k}y))\frac{z^n}{n!}.$$

並且利用$P_k(z,y)$和$\pi_{n,r,i_1,i_2,\cdots,i_r}$計算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}P_k(z,y)&=\sum_{n\geq 1}\tau_n \mathrm{E}(\exp(X_{n,k}y))\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\sum_{n\geq 1}\tau_n\sum_{r\geq 0}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n-1}\pi_{n,r,i_1,i_2,\cdots,i_r}\prod_{j=1}^{r}\mathrm{E}(\exp(X^{(j)}_{i_j,k}y))\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\&\quad+(e^y-1)\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

我們可以得到一個微分方程

$$\frac{\partial}{\partial z}P_k(z,y)=\phi(P_k(z,y))+(e^y-1)\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!},\tag{1.1}$$

而$P_k(0,y)=0$。對我們來說，這個微分方程重要的是能夠推導m次動差生成函數(**generating function of m-th moment**)，因此我們要先定義m次動差生成函數

$$A_k^{[m]}(z)=\sum_{n\geq 1}\tau_n \mathrm{E}(X_{n,k}^m)\frac{z^n}{n!}.$$

當我們對$P_k(z,y)$的微分方程的y進行偏微之後，讓y代入0。我們便能得到關於$A_k^{[m]}(z)$的微分方程

$$\frac{d}{dz}A_k^{[m]}(z)=\phi'(\tau(z))A_k^{[m]}(z)+B_k^{[m]}(z),\tag{1.2}$$

其中$B_k^{[m]}(z)$代表示的是除了$\phi'(\tau(z))A_k^{[m]}(z)$這項之外其餘的項。由於我們知道$P_k(0,y)=0$這個條件，因此能知道$A_k^{[m]}(0)=0$。我們會大量運用(1.2)在我們的主要證明之中。

在2012年，M. Fuchs所發表的[6]中，證明了另外一種increasing trees之下，使用$X_{n,k}$的distribution，就是利用(1.2) 來進行他的證明。這種被證明出結果的increasing trees是**plane-oriented recursive trees**(簡稱**PORTs**)。與[3]相同，分成normal range、Poisson range 和degenerate range來證明$X_{n,k}$的distribution，而這三個range的結果與類似。

Theorem 1.5. *1. (Normal range)* 假設$1\leq k=o(\sqrt{n})$，則

$$\frac{X_{n,k}-\mu_{n,k}}{\sigma_{n,k}}\xrightarrow{d}N(0,1),$$

其中$\mu_{n,k}=\frac{2n-1}{4k^2-1}$，在$n\to\infty$ 的條件之下

$$\sigma_{n,k}^2 \sim \left(\frac{8k^2-4k-8}{(4k^2-1)^2}-\frac{(2k-3)!!^2}{(k-1)!^2 4^{k-1}k(2k+1)}\right)n.$$

2. (Poisson range) 假設$k\sim c\sqrt{n}$ 且$n\to\infty$，則

$$X_{n,k}\xrightarrow{d}\mathrm{Poi}(2^{-1}c^{-2}).$$

3. (Degenerate range) 假設$k<n$，$\sqrt{n}=o(k)$且$n\to\infty$，則

$$X_{n,k}\xrightarrow{L_1}0.$$

在Theorem 1.5中的normal range就是利用weight function 定義random model，之後再使用(1.2)跟PORTs的$\tau(z)$和$\phi(\omega)$ 完成了證明。在[6]的最後，有提出關於grown simply families of increasing trees 是否也能使用(1.2) 來證明類似的結果。

先介紹grown simply families of increasing trees。一種Increasing trees可以定義很多種不同的random model，像是我們一開始所介紹的BST使用類似Figure 1.1的方法，從root開始每個node插入到increasing trees 的任意leaf 時，這些leaf被選擇到的機率都是相同的，一直生長到這個increasing tree的size 是n爲止，這樣所給定的random model 會與我們使用weight function 所給定的random model是相同的。因此，我們想知道simply generated families of increasing trees 中，有多少種increasing trees如果可以使用生長的方式找到相同的random model的話，我們就將這類的increasing trees的集合稱爲**grown simply families of increasing trees**。

在2007年，A. Panholzer和H. Prodinger所發表的[8]之中已經證明出grown simply families of increasing trees只有三種。分別是**d-ary trees**、**recursive trees**和**generalized PORTs**。而在之前所提到的BST 跟PORTs正好分別是d-ary trees 和generalized PORTs的其中一個例子。

由於，increasing trees利用生長的方式得到的random model和同樣的increasing trees 直接給定weight function的random model是相同的，因此M. Fuchs在證明PORTs 時，利用weight function去證明出結果，同時M. Fuchs看到(1.2)的實用性，因此在[6]的最後，寫下關於在d-ary trees和generalized PORTs之下subtree size profile的distribution的結果。

Theorem 1.6. *1. (Normal range)* 假設$1\le k=o(\sqrt{n})$ 且$k\to\infty$ 和$n\to\infty$，則

$$\frac{X_{n,k}-\mu_{n,k}}{\sigma_{n,k}}\xrightarrow{d}N(0,1),$$

其中$\mu_{n,k}$ 爲

$$\mu_{n,k}=\mathrm{E}(X_{n,k})=\frac{(r-1)(rn-1)}{(rk+r-1)(rk-1)},$$

在$n \to \infty$ 時，可得

$$\sigma_{n,k}^2 \sim \frac{r-1}{r}\frac{n}{k^2}.$$

2. *(Poisson range)* 假設$k \sim c\sqrt{n}$ 且$n \to \infty$，則

$$X_{n,k} \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}((r-1)r^{-1}c^{-2}).$$

3. *(Degenerate range)* 假設$k < n$，$\sqrt{n} = o(k)$且$n \to \infty$，則

$$X_{n,k} \xrightarrow{L_1} 0.$$

Theorem 1.7. *1. (Normal range)* 假設$1 \leq k = o(\sqrt{n})$ 且$k \to \infty$ 和$n \to \infty$，則

$$\frac{X_{n,k} - \mu_{n,k}}{\sigma_{n,k}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

其中$\mu_{n,k}$ 為

$$\mu_{n,k} = \mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{d((d-1)n+1)}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)},$$

在$n \to \infty$ 時，可得

$$\sigma_{n,k}^2 \sim \frac{d}{d-1}\frac{n}{k^2}.$$

2. *(Poisson range)* 假設$k \sim c\sqrt{n}$ 且$n \to \infty$，則

$$X_{n,k} \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}(d(d-1)^{-1}c^{-2}).$$

3. *(Degenerate range)* 假設$k < n$，$\sqrt{n} = o(k)$且$n \to \infty$，則

$$X_{n,k} \xrightarrow{L_1} 0.$$

觀察Theorem 1.5和Theorem 1.6就會發現，Theorem 1.6 的normal range只證明當k和n同時趨近於無窮時，$X_{n,k}$的distribution會趨近於normal distribution。而我們的主要研究是當給定k時，$X_{n,k}$在normal range的條件下，$X_{n,k}$的distribution是否還是會趨近於normal distribution。 這個主要的證明跟過程會在Chapter 3 時介紹，而關於Theorem 1.7相同問題的主要證明及過程會在Chapter 4中介紹。

Remark 1.8. 在介紹grown simply families of increasing trees時，我們沒有提到recursive trees在subtree size profile $X_{n,k}$ 的研究結果，但實際上在Q. Feng、H. M. Mahmoud和A. Panholzer發表的[3]以及M. Fuchs發表的[5] 之中，不只證明了BST在$X_{n,k}$的distribution 同時也證明了recursive trees在$X_{n,k}$的distribution。

Chapter 2

Tools

在這個章節，我們會寫出一些我們在之後將會運用到的工具。

2.1 Singularity Analysis

在看一個計數問題的時候，我們經常會利用生成函數的方式使問題能夠很容易的找到答案。通常我們在看一個生成函數的時候，都會把寫成冪級數的樣子。也就是說，

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$$

而z^n的係數a_n往往會是問題的答案，因此生成函數的係數對於我們去求出問題的答案是重要的。因此我們使用$[z^n]$ 這個符號來方便表示生成函數中z^n 的係數。也就是說，

$$[z^n]f(z) = a_n.$$

在一個計數問題裡，找出問題所代表的生成函數$f(z)$ 有時會比找出係數$[z^n]f(z)$是來得簡單。通常在一個計數問題裡，我們常常能夠發現$f(z)$ 的形式會是$(1 - \zeta z)^{-\alpha}$，而這樣的形式在使用二項式展開以及二項式係數的乘數公式就能簡單的找出$[z^n]f(z)$。

Example 2.1. 現在我們用$f(z) = (1 - \zeta z)^{-\alpha}$來將它化解成冪級數的樣子

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 - \zeta z)^{-\alpha} \\ &= \sum_{n\geq 1} \binom{-\alpha}{n} (-\zeta z)^n. \end{aligned}$$

如果$-\alpha$是正整數的話，則$\binom{-\alpha}{n}$就是我們一般所熟知道二項式係數；如果不是的話，就會使用二項式係數的乘數公式來轉換它

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n\geq 1} \binom{-\alpha}{n} (-\zeta z)^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \binom{n+\alpha-1}{n} (\zeta z)^n.
\end{aligned}
$$

由這個式子能夠知道$[z^n]f(z)$的答案

$$
[z^n]f(z) = \binom{-\alpha}{n}(-\zeta)^n = \binom{n+\alpha-1}{n}\zeta^n.
$$

但是$f(z)$也可能出現不同的形式，導致$[z^n]f(z)$不能夠精準的計算出一個答案，而singularity analysis就是來幫助我們找出$[z^n]f(z)$的近似值。在[4] 中，找出$[z^n]f(z)$的近似值的方法是透過複變中的**Cauchy's integral formula**

$$
[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(z)\frac{dz}{z^{n+1}}
$$

來計算出$[z^n]f(z)$的答案。我們知道複變要計算一個積分時，必須給予一個contour $\mathcal{C}$，而這個contour $\mathcal{C}$往往會與$f(z)$的singularities有所關聯，在Theorem 2.2中，我們將contour $\mathcal{C}$ 轉換成Hankel contour $\mathcal{H}$來得到積分的結果，並得到$[z^n]f(z)$的答案。

Theorem 2.2. 假設α是一個在$\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$中的任意複數以及$\beta$是任意複數。

1. 當$f(z)$爲

$$
f(z) = (1-z)^{-\alpha},
$$

則$f(z)$在z^n的係數將會近似於

$$
[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{n^k}\right),
$$

其中e_k是一個α的多項式，最高次爲$2k$。

2. 當$f(z)$爲

$$
f(z) = (1-z)^{-\alpha}\left(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta},
$$

則$f(z)$在z^n的係數將會近似於

$$
[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\big(\log n\big)^{\beta}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\log n^k}\right),
$$

其中$c_k = \binom{\beta}{k}\Gamma(\alpha)\frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big|_{s=\alpha}$。

利用Theorem 2.2已經能夠對於這兩種形式的生成函數$f(z)$找到$[z^n]f(z)$ 的近似值。

有時，$f(z)$過於複雜時，我們會對於$f(z)$的singularity做展開。我們往往會讓$f(z)$ 分成主要項$g(z)$跟次要項$h(z)$，也就是

$$f(z) = g(z) + \mathcal{O}(h(z)).$$

通常，這個$g(z)$只會看$f(z)$展開後z的order最小項，而$h(z)$就會是$f(z)$展開後z的order第二小項。也就是

$$g(z) = o(h(z)).$$

有時為求精準，$g(z)$所包含的可能不只是$f(z)$展開後z的order最小項，可以是$f(z)$展開後的許多項，但$h(z)$仍然要符合以上的條件。

如果$g(z)$是符合Theorem 2.2之中所提到的形式的話，我們的$g(z)$仍可以去使用Theorem 2.2來幫助我們看出$[z^n]g(z)$的近似值，而如果$h(z)$也是符合Theorem 2.2中所提到的形式，但是對於$\mathcal{O}$ 這個符號，我們並不知道它是否具有封閉性能夠做到以下的事情

$$[z^n]\mathcal{O}(h(z)) = \mathcal{O}([z^n]h(z)).$$

如果，可以的話，我們就能使用Theorem 2.2得到類似的結果。要做到這件事情必須要先給定一些條件，才能使以上的事情成立，因此我們先定義一些條件。

Definition 2.3. 假設ϕ和R為實數且$R > 1$而$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$，則

$$\Delta(\phi, R) = \{z \mid |z| < R, z \neq 1, |arg(z-1)| > \phi\},$$

我們之稱為Δ-domain。如果一個function在Δ-domain裡是analytic 的話，則我們說這個function是Δ-analytic。

有了Definition 2.3之後，就能讓$\mathcal{O}(h(z))$ 使用Theorem 2.4 找出結果。有時我們會使用o這個符號來決定次要項$h(z)$ 的樣子，因此Theorem 2.4也介紹了關於o的封閉性。

Theorem 2.4. 假設α和β是任意實數且$f(z)$是一個Δ-*analytic function*。

1. 假設當$f(z)$為

$$f(z) = \mathcal{O}\left((1-z)^{-\alpha}\left(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right)$$

並且z在Δ-*domain*與*1*的鄰域的交集下，則$[z^n]f(z)$ 結果為

$$[z^n]f(z) = \mathcal{O}\left(\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\log n\right)^{\beta}\right).$$

2. 假設當$f(z)$爲

$$f(z)=o\Big((1-z)^{-\alpha}\big(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\big)^{\beta}\Big)$$

並且z在Δ-*domain*與*1*的鄰域的交集下，則$[z^n]f(z)$ 結果爲

$$[z^n]f(z)=o\Big(\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\big(\log n\big)^{\beta}\Big).$$

使用Theorem 2.2和Theorem 2.4，就能夠讓符合於上述形式的這些生成函數$f(z)$的singularity在$z=1$的情況下找出$[z^n]f(z)$的近似值。但如果現在出現符合上述形式的生成函數$g(z)$，但$g(z)$的singularity 並不是在$z=1$的情況之下，而是在一個任意的singularity在$z=\zeta$，ζ是不爲0的任意複數。此時，Δ-domain 和$g(z)$所代入的z就會因爲singularity ζ 而有所改變。當然所得到的係數也會有所變化。

$$[z^n]g(z)=\zeta^{-n}[z^n]g(\zeta z),$$
$$[z^n]\mathcal{O}(g(z))=\zeta^{-n}[z^n]\mathcal{O}(g(\zeta z)).$$

由於我們的Δ-domain經過ζ的倍數調整變爲$\zeta\Delta$-domain，讓$g(z)$所代入的z經過ζ的倍數調整使得問題變回在Theorem 2.2 和Theorem 2.4之下能解決的問題。

有時，我們在看生成函數的係數會使用微分和積分來幫助我們。而在使用singularity analysis時，我們仍然會使用到微分和積分，因此我們會希望$\mathcal{O}$這個符號，在使用微分和積分時仍然具有封閉性。也就是說

$$\frac{d}{dz}\mathcal{O}(h(z))=\mathcal{O}(\frac{d}{dz}h(z)),$$
$$\int\mathcal{O}(h(t))dt=\mathcal{O}(\int h(t)dt).$$

因此，Theorem 2.5和Theorem 2.7就是要來介紹這件事情。

Theorem 2.5. 假設$f(z)$是一個Δ-*analytic function*且在*singularity* 的展開爲

$$f(z)=\sum_{i=0}^{k}c_i(1-z)^{\alpha_i}+\mathcal{O}((1-z)^A),$$

則任意的$r(>0)$次導函數$\frac{d^r}{dz^r}f(z)$仍會是Δ-*analytic* 且它的*singularity*展開爲

$$\frac{d^r}{dz^r}f(z)=(-1)^r\sum_{i=0}^{k}c_i\frac{\Gamma(\alpha_i+1)}{\Gamma(\alpha_i+1-r)}(1-z)^{\alpha_i-r}+\mathcal{O}((1-z)^{A-r}).$$

Remark 2.6. 對於$f(z)$爲

$$f(z)=\mathcal{O}((1-z)^A\Big(\log\frac{1}{1-z}\Big)^B),\quad B\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

在它的r次導函數將會是

$$\frac{d^r}{dz^r}f(z)=\mathcal{O}((1-z)^{A-r}\Big(\log\frac{1}{1-z}\Big)^B)$$

Theorem 2.7. 假設$f(z)$是一個Δ-*analytic function*且在*singularity* 的展開為

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k} c_i(1-z)^{\alpha_i} + \mathcal{O}((1-z)^A),$$

則$\int_0^z f(t)dt$仍是Δ-*analytic*且在α_i和A不等於-1 的情況，它的*singularity*展開是:

1. 如果$A < -1$的話

$$\int_0^z f(t)dt = -\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{\alpha_i+1}(1-z)^{\alpha_i+1} + \mathcal{O}((1-z)^{A+1}).$$

2. 如果$A > -1$的話

$$\int_0^z f(t)dt = -\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{\alpha_i+1}(1-z)^{\alpha_i+1} + L_0 + \mathcal{O}((1-z)^{A+1}),$$

其中，L_0會是

$$L_0 = \sum_{\alpha_i<-1} \frac{c_i}{\alpha_i+1} + \int_0^1 \Big(f(t) - \sum_{\alpha_i<-1} c_i(1-t)^{\alpha_i}\Big)dt.$$

對於，Theorem 2.5和Theorem 2.7我們將會大量去使用它們。

Remark 2.8. 當α或A等於-1時，我們可以知道

$$\int_0^z (1-t)^{-1}dt = \log\frac{1}{1-z}, \quad \int_0^z \mathcal{O}((1-t)^{-1})dt = \mathcal{O}(\log\frac{1}{1-z}).$$

2.2 Probability Theory

我們的研究重大結果就是要去證明$X_{n,k}$的distribution會去趨近normal distribution。 如果有一個random variable的sequence，而這些random variable 具有互相獨立且有相同的distribution，我們可以使用中央極限定理來證明這個random variable 的sequence的distribution會去趨近normal distribution。但不可能所有的random variable的sequence 都具有這個特性，因此我們要使用另一個方法來說。

P. Chebyshev提出一種方法主要用來證明中央極限定理，這方法被稱為**動差法(method of moments)**。

Theorem 2.9 (Fréchet-Shohat Theorem)**.** 先假設一個*random variable* X並且假設X的所有動差$\mathrm{E}(X^m)$必須存在且唯一決定X的*distribution*。而現在一個*random variable* 的*sequence* $\{X_n\}_{n\geq 1}$具備所有的動差$\mathrm{E}(X_n^m)$且符合$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X_n^m) = \mathrm{E}(X^m)$對於所有的$m = 1, 2, \cdots$，則$X_n$的*distribution*會趨近到$X$的*distribution*。

由於我們的目標是證明$X_{n,k}$的distribution去趨近normal distribution，因此可以看出我們所要的結果是

$$E(N(0,1)^m) = \begin{cases} \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}(\frac{m}{2})!}, & \text{if } m \text{ is even.} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，當我們知道一個random variable的sequence $\{X_n\}_{n\geq 1}$且它具有所的動差的話，我們就能去證明這個結果

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_{n,k}^m) = \begin{cases} \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}(\frac{m}{2})!}, & \text{if } m \text{ is even.} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

再利用Theorem 2.9去說明$\{X_n\}_{n\geq 1}$ 的distribution 趨近normal distribution。

2.3 Grown Simply Families of Increasing Trees

在Chapter 1中，我們曾經介紹A. Panholzer 和H. Prodinger在[8] 已經證明了grown simply families of increasing trees只有三種increasing trees。即是d-ary trees、recursive trees、generalized PORTs 並且也說明了如何使用weight function來給定它們的random model。

1. (d-ary trees)

$$\phi(\omega) = \phi_0(1+\frac{ct}{\phi_0})^d,$$

其中$\phi_0, c > 0$且$d \in \{2, 3, \cdots\}$。

2. (Recursive trees)

$$\phi(\omega) = \phi_0 e^{\frac{ct}{\phi_0}},$$

其中$\phi_0, c > 0$。

3. (Generalized PORTs)

$$\phi(\omega) = \phi_0(1-\frac{ct}{\phi_0})^{-r+1},$$

其中$\phi_0, c > 0$且$r > 1$。

由上面的結果，我們只需要找一個符合條件的ϕ_0和c就行了，因此我們給定一個特別的例子。在這裡我們所給定的是ϕ_0和c爲1，如果我們給不同的ϕ_0 和c，影響的只是答案多了ϕ_0和c的倍數而已。

1. (d-ary trees)

$$\phi(\omega) = (1+t)^d, \quad d \in \{2, 3, \cdots\}. \tag{2.2}$$

2. (Recursive trees)

$$\phi(\omega) = e^t.$$

3. (Generalized PORTs)

$$\phi(\omega) = (1-t)^{-r+1}, \quad r > 1. \tag{2.3}$$

我們將會利用這個例子來當作我們的weight function。 因爲我們知道weight function和$\tau(z)$的關係爲

$$\tau'(z) = \phi(\tau(z)), \quad \tau(0) = 0.$$

因此，我們可以使用weight function來找出$\tau(z)$。而且我們可以看到d-ary tree和generalized PORTs的weight function是非常類似的，因此可以猜測兩者的$\tau(z)$也會是類似的，因此可以用Lemma 2.10來看出$\tau(z)$的形式。

Lemma 2.10. 假設ζ不爲0和α不爲-1並且$\phi(z)$爲

$$\phi(z) = (1 - \zeta z)^{-\alpha}.$$

由於我們知道

$$\tau'(z) = \phi(\tau(z)), \quad \tau(0) = 0,$$

則我們可以推得$\tau(z)$的形式爲

$$\tau(z) = \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta}(1 - \zeta(\alpha+1)z)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

並且能得知τ_n是

$$\tau_n = n![z^n]\tau(z) = \big(\zeta(\alpha+1)\big)^{n-1}(n-1)!\binom{n-1-\frac{1}{\alpha+1}}{n-1}.$$

Proof. 從$\tau'(z) = \phi(\tau(z))$和$\tau(0) = 0$來觀察，可以知道$\tau(z)$大概會是

$$\tau(z) = A - A(1 - Bz)^C,$$

將$\tau(z)$和$\tau'(z)$代入$\tau'(z) = \phi(\tau(z))$ 之中可以得到

$$ABC(1 - Bz)^{C-1} = (1 - \zeta A + \zeta A(1 - Bz)^C)^{-\alpha}.$$

最快能知道的是

$$1 - \zeta A = 0.$$

接下來能推得

$$\begin{aligned} 1 &= (\zeta A)^{-\alpha} = ABC, \\ -\alpha C &= C - 1. \end{aligned}$$

由這些結果得到

$$\tau(z) = \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta}(1 - \zeta(\alpha+1)z)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

因此，$\tau(z)$的樣子被我們計算出來。

之後，利用$\tau(z)$的結果並且由Example 2.1能夠知道

$$
\begin{aligned}
[z^n]\tau(z) &= -\frac{1}{\zeta}\binom{\frac{1}{\alpha+1}}{n}\big(-\zeta(\alpha+1)\big)^n \\
&= (-1)^{n+1}\zeta^{n-1}(\alpha+1)^n\frac{(\frac{1}{\alpha+1})(\frac{1}{\alpha+1}-1)\cdots(\frac{1}{\alpha+1}-n+1)}{n!}.
\end{aligned}
$$

再進行下一步之前，我們先把$\frac{1}{1+\alpha}$和n拿出來之後，剩餘的項去提出負號並簡化

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}\zeta^{n-1}(\alpha+1)^n\frac{(\frac{1}{\alpha+1})(\frac{1}{\alpha+1}-1)\cdots(\frac{1}{\alpha+1}-n+1)}{n!} \\
&= (-1)^2\zeta^{n-1}(\alpha+1)^n\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{n}\binom{n-1-\frac{1}{\alpha+1}}{n-1} \\
&= \big(\zeta(\alpha+1)\big)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n-1-\frac{1}{\alpha+1}}{n-1}.
\end{aligned}
$$

因此，我們的結果爲

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= n![z^n]\tau(z) = n!\big(\zeta(\alpha+1)\big)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n-1-\frac{1}{\alpha+1}}{n-1} \\
&= \big(\zeta(\alpha+1)\big)^{n-1}(n-1)!\binom{n-1-\frac{1}{\alpha+1}}{n-1}
\end{aligned}
$$

□

有Lemma 2.10的結果，我們可由(2.2)能夠推得d-ary tree的$\tau(z)$和τ_n爲

$$
\begin{aligned}
\tau(z) &= -1+(1-(d-1)z)^{-\frac{1}{d-1}}, \quad d\in\{2,3,\cdots\}, \\
\tau_n &= (d-1)^{n-1}(n-1)!\binom{n-1+\frac{1}{d-1}}{n-1}, \quad d\in\{2,3,\cdots\}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

同樣地，由(2.3)能夠推得generalized PORTs的$\tau(z)$和τ_n 爲

$$
\begin{aligned}
\tau(z) &= 1-(1-rz)^{\frac{1}{r}}, \quad r>1, \\
\tau_n &= r^{n-1}(n-1)!\binom{n-1-\frac{1}{r}}{n-1}, \quad r>1.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

有$\phi(z)$和$\tau(z)$之後，就能用於主要證明之中。

2.4 Differential Equation

在Chapter 1的最後，我們介紹過bivariate generating function $P_k(z,y)$ 以及m次動差生成函數$A_k^{[m]}(z)$，兩者之間的關係是可以從$P_k(z,y)$ 的微分方程(1.1)去推導出$A_k^{[m]}(z)$ 的微分方程(1.2)。 因此，我們要知道如何去計算$A_k^{[m]}(z)$ 的解。

Lemma 2.11. 我們知道

$$
A'(z) = \phi'(\tau(z))A(z)+B(z), \quad A(0)=0
$$

和

$$\tau'(z) = \phi(\tau(z)), \quad \tau(0) = 0.$$

因此，$A(z)$的解是

$$A(z) = \tau'(z)\int_0^z \frac{B(t)}{\tau'(t)}dt.$$

Proof. 在計算微分方程時，我們先找出齊次解，也就是找出$A'(z) = \phi'(\tau(z))A(z)$的解。首先，同除$A(z)$

$$\frac{A'(z)}{A(z)} = \phi'(\tau(z)),$$

而且可知道

$$\log A(z) = \int_0^z \phi'(\tau(t))dt + C. \tag{2.6}$$

因爲$\tau'(z) = \phi(\tau(z))$的關係，因此可以知道

$$\phi'(\tau(z)) = \frac{\tau''(z)}{\tau'(z)}. \tag{2.7}$$

將(2.7)代入(2.6)可以得到

$$\begin{aligned}\log A(z) &= \int_0^z \frac{\tau''(t)}{\tau'(t)}dt + C\\ &= \log\tau'(z) + C.\end{aligned}$$

所以齊次解

$$A(z) = \tilde{C}\tau'(z).$$

接下來，我們要找出非齊次解。首先假設$A(z)$的樣子爲

$$A(z) = \tilde{C}(z)\tau'(z).$$

對於上述的式子進行微分得到

$$A'(z) = \tilde{C}'(z)\tau'(z) + \tilde{C}(z)\tau''(z).$$

將$A(z)$和$A'(z)$代入原來的微分方程

$$\tilde{C}'(z)\tau'(z) + \tilde{C}(z)\tau''(z) = \phi'(\tau(z))\tilde{C}(z)\tau'(z) + B(z).$$

因爲我們有(2.7)所以可以將式子變爲

$$\begin{aligned}&\tilde{C}'(z)\tau'(z) + \tilde{C}(z)\phi'(\tau(z))\tau'(z) = \phi'(\tau(z))\tilde{C}(z)\tau'(z) + B(z),\\ &\tilde{C}'(z)\tau'(z) = B(z).\end{aligned}$$

因此得到

$$\tilde{C}(z)=\int_0^z \frac{B(t)}{\tau'(t)}dt+C_1.$$

將$\tilde{C}(z)$代入我們所假設$A(z)$，又因爲$A(0)=0$ 的關係，所以非齊次解是

$$A(z)=\tau'(z)\int_0^z \frac{B(t)}{\tau'(t)}dt$$

□

2.5 Some Technical Lemmas

最後，我們在這裡提出一些我們還沒介紹到的預備知識

Lemma 2.12. 假設α是大於-1的任意數，我們能得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i}}{(l+2+\alpha)(i+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}\\&\qquad=-\frac{2(2k-1)!\Gamma(3+2\alpha)}{(1+\alpha)\Gamma(2k+3+2\alpha)}+\frac{(k-1)!k!\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma^2(k+2+\alpha)}.\end{aligned}$$

Proof. 首先我們先用分數折開的想法，先折$\frac{1}{(i+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}$ 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(l+2+\alpha)(i+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}\\&=\frac{1}{(l+1+\alpha)(l+2+\alpha)}\left(\frac{1}{i+2+\alpha}-\frac{1}{l+i+3+2\alpha}\right).\end{aligned}$$

之後，再拆開$\frac{1}{(l+1+\alpha)(l+2+\alpha)}$ 並且整理一下，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(l+2+\alpha)(i+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}\\&=\left(\frac{1}{l+1+\alpha}-\frac{1}{l+2+\alpha}\right)\left(\frac{1}{i+2+\alpha}-\frac{1}{l+i+3+2\alpha}\right)\\&=\frac{1}{(l+1+\alpha)(i+2+\alpha)}-\frac{1}{(l+2+\alpha)(i+2+\alpha)}\\&\quad-\frac{1}{(l+1+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}+\frac{1}{(l+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

我們先計算(2.8)的第一項

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i}}{(l+1+\alpha)(i+2+\alpha)}\\&=\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l}}{l+1+\alpha}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{i}}{i+2+\alpha}\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\int_0^1 (-1)^l x^{l+\alpha}dx \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\int_0^1 (-1)^i x^{i+1+\alpha}dx$$
$$= \left(\int_0^1 \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^l x^{l+\alpha}dx\right)\left(\int_0^1 \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^i x^{i+1+\alpha}dx\right).$$

接下來，利用二項式係數化簡式子得到

$$\left(\int_0^1 \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^l x^{l+\alpha}dx\right)\left(\int_0^1 \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^i x^{i+1+\alpha}dx\right)$$
$$= \left(\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{k-1}dx\right)\left(\int_0^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}dx\right)$$
$$= \frac{(k-1)!^2\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)\Gamma(k+2+\alpha)}. \tag{2.10}$$

從這個結果可以知道，我們在計算這些式子時，化簡到最後的結果l和i都會消失，也就是說，我們可以把l和i調對但並不會影響到計算的結果。

再回到(2.8)，我們將(2.8)的第四項再拆開一次，得到

$$\frac{1}{(l+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)} = \frac{1}{i+1+\alpha}\left(\frac{1}{l+2+\alpha} - \frac{1}{l+i+3+2\alpha}\right).$$

由於l和i調對不會影響到結果，因此這裡所拆開的式子在(2.8) 的前三項就能計算出結果。現在，我們就逐一來看(2.8)的前三項，而第一項已經算出結果了，因此來看第二項，利用(2.9)的做法得到

$$-\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i}}{(l+2+\alpha)(i+2+\alpha)}$$
$$= -\left(\int_0^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}dx\right)^2$$
$$= -\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\alpha)}{\Gamma^2(k+2+\alpha)}. \tag{2.11}$$

接下來，我們所要計算(2.8)的第三項

$$-\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i}}{(l+1+\alpha)(l+i+3+2\alpha)}$$
$$= -\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i}}{(l+1+\alpha)}\int_0^1 x^{l+i+2+2\alpha}dx$$
$$= -\int_0^1 \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^l}{(l+\alpha)}x^{l+2+2\alpha}(1-x)^{k-1}dx$$
$$= -\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx.$$

我們在式子中要額外加上一個t，則式子會改變成

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx \qquad (2.12)\\
&=-\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}(t+1-t)t^{\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&=-\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&\quad-\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{\alpha}(1-t)^{k}dtdx.
\end{aligned}
$$

我們分開討論這兩個積分，(2.12)的第一個積分的結果要經由一個技巧中得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&\quad=\int_0^1\bigg(\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dt\\
&\qquad+\int_x^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dt\bigg)dx\\
&\qquad-\int_0^1\int_x^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&\quad=\int_0^1\int_0^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&\qquad-\int_0^1\int_x^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx
\end{aligned}
$$

關於上述式子的第二項，我們將積分位置對調後，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_x^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&\quad=\int_0^1\int_0^t x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dxdt.
\end{aligned}
$$

由於，x和t的符號對調沒有影響，所以經過簡化之後，可以得到(2.12)的第一個積分的結果是

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx\\
&\quad=\frac{1}{2}\bigg(\int_0^1 x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}dx\bigg)^2\\
&\quad=\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\alpha)}{2\Gamma^2(k+2+\alpha)}. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

而(2.12)的第二個積分的結果可以由分部積分得到

$$
\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{\alpha}(1-t)^{k}dtdx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+\alpha}\int_0^1 x^{2+2\alpha}(1-x)^{2k-1}dx \\
&\quad + \frac{k}{1+\alpha}\int_0^1\int_0^x x^{1+\alpha}(1-x)^{k-1}t^{1+\alpha}(1-t)^{k-1}dtdx \\
&= \frac{(2k-1)!\Gamma(3+2\alpha)}{(1+\alpha)\Gamma(2k+3+2\alpha)} + \frac{(k-1)!k!\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{2\Gamma^2(k+2+\alpha)}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

由(2.10)、(2.11)、(2.13)和(2.14)的結果，代入我們要證明式子之中並簡化得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i}}{(l+2+\alpha)(i+2+\alpha)(l+i+3+2\alpha)} \\
&= -\frac{2(2k-1)!\Gamma(3+2\alpha)}{(1+\alpha)\Gamma(2k+3+2\alpha)} + \frac{(k-1)!k!\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(k+2+\alpha)^2}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.13. 假設N爲正整數且α_1、α_2和α_3爲任意正數，則

$$
\sum_{i=0}^{N}\binom{i+\alpha_1}{i}\sum_{j=0}^{N-i}\binom{j+\alpha_2}{j}\binom{N-i-j+\alpha_3}{N-i-j} = \binom{N+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2}{N}.
$$

Proof. 在這個證明中，我們會用到Example 2.1的結果以及

$$
[z^n]f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k},
$$

其中$f_n = [z^n]f(x)$，$g_n = [z^n]g(x)$。因此，我們先來看式子裡面的和

$$
\sum_{j=0}^{N-i}\binom{j+\alpha_2}{j}\binom{N-i-j+\alpha_3}{N-i-j}.
$$

從Example 2.1的結果，我們可以想成是兩個function的相乘求z^{N-i}的係數，因此可以得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-i}\binom{j+\alpha_2}{j}\binom{N-i-j+\alpha_3}{N-i-j} &= [z^{N-i}](1-z)^{-1-\alpha_2}(1-z)^{-1-\alpha_3} \\
&= [z^{N-i}](1-z)^{-2-\alpha_2-\alpha_3}.
\end{aligned}
$$

對於這個結果，我們還可以寫成

$$
[z^{N-i}](1-z)^{-2-\alpha_2-\alpha_3} = \binom{N-i+\alpha_2+\alpha_3+1}{N-i}.
$$

之後，我們將這個結果代入所證明的式子中，再用相同的想法計算外面的和是

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}\binom{i+\alpha_1}{i}\binom{\alpha_2+\alpha_3+1}{N-i} &= [z^N](1-z)^{-3-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \\
&= \binom{N+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2}{N}.
\end{aligned}
$$

□

Remark 2.14. 關於Lemma 2.13，我們是爲了主要證明的方便而將設定那樣的形式，但其實在一般的情況，假設兩個function $f(z)$和$g(z)$的形式爲

$$f(z) = (1-z)^{\alpha_1}, g(z) = (1-z)^{\alpha_2},$$

其中的α_1和α_2可以爲任意數，則

$$\begin{aligned}[z^n]f(z)g(z) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha_1}{k}\binom{\alpha_2}{n-k} \\ &= \binom{\alpha_1+\alpha_2}{n}.\end{aligned}$$

因此，Lemma 2.13也是可寫成上述的形式。

Chapter 3

Generalized PORTs

Chapter 3要證明在generalized PORTs之下，利用subtree size profile $X_{n,k}$並且在給定k 的情況下，求出$X_{n,k}$的distribution 會趨近normal distribution的主要過程。而我們要用的方法就是利用Theorem 2.9 證明$X_{n,k}$的distribution符合(2.1)的結果。因此，我們會先去找出$X_{n,k}$ 的mean value 和variance，並利用(1.1)和(1.2)去證明(2.1)。

3.1 Mean Value and Variance

在Section 2.3中，已經知道$\phi(\omega)$和$\tau(z)$的樣子，因此會直接使用(2.3)和(2.5)來進行證明。

Proposition 3.1. *在generalized PORTs之下，$X_{n,k}$的mean value爲*

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{r(r-1)}{(rk+r-1)(rk-1)}n - \frac{r-1}{(rk+r-1)(rk-1)}, \quad n > k$$

Proof. 首先，我們先回顧一下$\phi(\omega)$和$\tau(z)$，由(2.3) 和(2.5)知道

$$\begin{aligned}
&\phi(\omega) = (1-t)^{-r+1}, \quad r > 1, \\
&\tau(z) = 1 - (1-rz)^{\frac{1}{r}}, \quad r > 1.
\end{aligned}$$

因爲我們要計算$\mathrm{E}(X_{n,k})$，所以我們要去找出m 次動差生成函數$A_k^{[m]}(z)$中的係數，也就是說

$$\mathrm{E}(X_{n,k}^m) = \frac{n!}{\tau_n}[z^n]A_k^{[m]}(z).$$

因爲Lemma 2.11能知道$A_k^{[m]}(z)$的解是

$$\mathrm{E}(X_{n,k}^m) = \frac{n!}{\tau_n}[z^n]\tau'(z)\int_0^z \frac{B_k^{[m]}(t)}{\tau'(t)}dt.$$

因此，當我們把$m=1$的時候，就是我們所要找的$\mathrm{E}(X_{n,k})$的結果。所以，我們對於(1.1)的y進行1次偏微並且y代入0 之後，我們就能知道$A_k(z)$的樣子，更能得到$B_k^{[1]}(z)$ 是

$$B_k^{[1]}(z)=\frac{\tau_k}{(k-1)!}z^{k-1},$$

其中τ_k也可以從(2.5)知道，就是

$$\tau_k=r^{k-1}(k-1)!\binom{k-1-\frac{1}{r}}{k-1}.$$

接下來，我們先將$B_k^{[1]}(z)$代入$\mathrm{E}(X_{n,k})$ 之中，會變成

$$\mathrm{E}(X_{n,k})=\frac{n!\tau_k}{(k-1)!\tau_n}[z^n]\tau'(z)\int_0^z\frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt.$$

之後，我們先對於式子中的積分做整理，變成

$$\begin{aligned}
&[z^n]\tau'(z)\int_0^z\frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt=[z^n]\tau'(z)\int_0^z t^{k-1}(1-rt)^{1-\frac{1}{r}}dt\\
&=[z^n]\tau'(z)\left(\int_0^{\frac{1}{r}}t^{k-1}(1-rt)^{1-\frac{1}{r}}dt+\int_{\frac{1}{r}}^z t^{k-1}(1-rt)^{1-\frac{1}{r}}dt\right)\\
&=[z^n]\tau'(z)\left(r^{-k}\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{1-\frac{1}{r}}dt\right.\\
&\qquad\left.+(-r)^{-k+1}\int_{\frac{1}{r}}^z(1-rt-1)^{k-1}(1-rt)^{1-\frac{1}{r}}dt\right)\\
&=[z^n]\tau'(z)r^{-k}\left(\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}+\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^{l+1}\int_0^{1-rz}t^{l+1-\frac{1}{r}}dt\right)\\
&=[z^n]\tau'(z)r^{-k}\left(\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}+\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2-\frac{1}{r}}(1-rz)^{l+2-\frac{1}{r}}\right).
\end{aligned}$$

最後，我們能得到$X_{n,k}$的mean value爲

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n,k})&=\frac{n!\tau_k}{(k-1)!\tau_n}[z^n]\tau'(z)\int_0^z\frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt\\
&=\frac{n!\tau_k}{(k-1)!\tau_n}[z^n]\tau'(z)r^{-k}\left(\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2-\frac{1}{r}}(1-rz)^{l+2-\frac{1}{r}}\right)\\
&=\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\tau_k r^{-k}\frac{\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}\\
&=\frac{(r-1)(rn-1)}{(rk+r-1)(rk-1)},
\end{aligned}$$

其中，τ_n的化簡可以利用Lemma 2.10中證明τ_n的想法去展開τ_n 中的二項式係數並且去做到化簡這件事。 □

證明完$X_{n,k}$的mean value後，我們要來證明$X_{n,k}$的variance。

Proposition 3.2. *在generalized PORTs之下，$X_{n,k}$的variance爲*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_{n,k}) = \Bigg(&\Big(k(4+k)r^2-(2+3k)r+1\Big)\frac{r(r-1)}{(rk+r-1)^2(rk-1)^2}\\ &-\frac{2(2k-1)!\Gamma(3-\frac{2}{r})}{\Gamma(2k+3+\frac{2}{r})}\binom{k-1-\frac{1}{r}}{k-1}^2\Bigg)n+\mathcal{O}(n^{\frac{1}{r}}),\quad n>k.\end{aligned}$$

Proof. 在這裡，我們的證明方法會與Proposition 3.1類似。我們要先計算出$B_k^{[2]}(z)$，就是對於(1.1) 的y做2次偏微並且y 代入0，因此會得到2次動差生成函數$A_k^{[2]}(z)$的微分方程

$$\frac{d}{dz}A_k^{[2]}(z)=\phi'(\tau(z))A_k^{[2]}(z)+\phi''(\tau(z))(A_k^{[1]}(z))^2+\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!},$$

其中，$B_k^{[2]}(z)$爲

$$B_k^{[2]}(z)=\phi''(\tau(z))(A_k^{[1]}(z))^2+\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}.$$

接下來，我們先計算$A_k^{[2]}(z)$

$$\begin{aligned}A_k^{[2]}(z)&=\tau'(z)\int_0^z\frac{\phi''(\tau(t))(A_k^{[1]}(t))^2+\tau_k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}}{\tau'(t)}dt\\ &=\tau'(z)\int_0^z\frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t\frac{\tau_k u^{k-1}}{(k-1)!\tau'(u)}du\right)^2dt\\ &\quad+\tau'(z)\int_0^z\frac{\tau_k t^{k-1}}{(k-1)!\tau'(t)}dt\\ &=\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}\tau'(z)\int_0^z\frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t\frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2dt\\ &\quad+\frac{\tau_k}{(k-1)!}\tau'(z)\int_0^z\frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt.\end{aligned}$$

因爲$\phi(\omega)=(1-t)^{1-r}$，所以我們可以知道

$$\begin{aligned}\phi(\omega)&=(1-t)^{1-r},\\ \phi'(\omega)&=(r-1)(1-t)^{-r},\\ \phi''(\omega)&=r(r-1)(1-t)^{-1-r}\end{aligned}$$

並且將$\tau(z)$代入$\phi''(\omega)$之中，得到

$$\phi''(\tau(z))=r(r-1)(1-rz)^{-1-\frac{1}{r}}.$$

由於這個式子，我們的積分將可以被簡化。之後，我們先來看$B_k^{[2]}(z)$ 中的這個積分$\left(\tau'(t)\int_0^t\frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2$。在Proposition 3.1的證明過程之中，我們已經計算過這個積

分$\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du$，因此我們能夠知道

$$\begin{aligned}
\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2 &= (\tau'(t))^2 r^{-2k}\Bigg(\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2-\frac{1}{r}}(1-rt)^{l+2-\frac{1}{r}}\Bigg)^2 \\
&= (\tau'(t))^2 r^{-2k}\Bigg(\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})} \\
&\quad + 2\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2-\frac{1}{r}}(1-rt)^{l+2-\frac{1}{r}} \\
&\quad + \Bigg(\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2-\frac{1}{r}}(1-rt)^{l+2-\frac{1}{r}}\Bigg)^2\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

對於上述的式子，我們只觀察重要的項，因此得到

$$\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2 = r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(\tau'(t))^2 + \mathcal{O}((1-rt)^{\frac{1}{r}}).$$

到這裡，我們先整理$A_k^{[2]}(z)$

$$\begin{aligned}
A_k^{[2]}(z) &= \frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}\tau'(z)\int_0^z \frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2 dt \\
&\quad + \frac{\tau_k}{(k-1)!}\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt \\
&= \frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}\tau'(z)\int_0^z \frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\Bigg(r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(\tau'(t))^2 \\
&\quad + \mathcal{O}((1-rt)^{\frac{1}{r}})\Bigg)dt + \frac{\tau_k}{(k-1)!}\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt \\
&= \frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}\tau'(z)\int_0^z \Bigg((r-1)r^{-2k+1}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(1-rt)^{-2} \\
&\quad + \mathcal{O}((1-rt)^{-\frac{1}{r}})\Bigg)dt + \frac{\tau_k}{(k-1)!}\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt.
\end{aligned}$$

在整理過後，我們可以發現$A_k^{[2]}(z)$的第二項已經是被計算過的，因此我們只要計算出第一項即可。我們使用Theorem 2.7可以得到

$$\begin{aligned}
&\tau'(z)\int_0^z \Bigg((r-1)r^{-2k+1}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(1-rt)^{-2} + \mathcal{O}((1-rt)^{-\frac{1}{r}})\Bigg)dt \\
&\quad = \tau'(z)\Bigg((r-1)r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(1-rz)^{-1} + L_0 + \mathcal{O}((1-rz)^{1-\frac{1}{r}})\Bigg) \\
&\quad = (r-1)r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(1-rz)^{-2+\frac{1}{r}} + L_0(1-rz)^{-1+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

這裡的z是從Δ-domain中挑選出來並且$z \to \frac{1}{r}$。在上面的式子中L_0是

$$
\begin{aligned}
L_0 = &-(r-1)r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})} \\
&+\int_0^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2\right. \\
&\left.-(r-1)r^{-2k+1}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(1-rt)^{-2}\right)dt.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

我們先不看L_0的計算，我們先把$X_{n,k}$的variance找出來。由於我們已經知道了$A_k^{[2]}(z)$，因此我們可以知道$\mathrm{E}(X_{n,k}^2)$的樣子爲

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n,k}^2) &= \frac{n!}{\tau_n}[z^n]A_k^{[2]}(z) \\
&= \frac{n!}{\tau_n}[z^n]\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}(r-1)r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}(1-rz)^{-2+\frac{1}{r}} \\
&\quad + \frac{n!}{\tau_n}[z^n]\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}L_0(1-rz)^{-1+\frac{1}{r}} \\
&\quad + \frac{n!}{\tau_n}[z^n]\frac{\tau_k}{(k-1)!}\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt + \mathcal{O}(\frac{n!}{\tau_n}n^{-1}).
\end{aligned}
$$

$\mathrm{E}(X_{n,k}^2)$的第三項已知是$\mathrm{E}(X_{n,k})$，因此只要將其它項計算出來並且簡化

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n,k}^2) &= \frac{n!}{\tau_n}r^{-2k}\frac{\tau_k^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}[z^n](r-1)(1-rz)^{-2+\frac{1}{r}} \\
&\quad + \frac{n!}{\tau_n}\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}L_0[z^n](1-rz)^{-1+\frac{1}{r}} \\
&\quad + \frac{r(r-1)}{(rk+r-1)(rk-1)}n + \mathcal{O}(\frac{n!}{\tau_n}n^{-1}) \\
&= \frac{\tau_{n+2}}{\tau_n}r^{-2k}\frac{\tau_k^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})} + \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}L_0 \\
&\quad + \frac{r(r-1)}{(rk+r-1)(rk-1)}n + \mathcal{O}(n^{\frac{1}{r}}) \\
&= \frac{(r-1)^2}{(rk+r-1)^2(rk-1)^2}(r^2n^2 + r(r-2)n) \\
&\quad + L_0 r^{2k-1}\binom{k-1-\frac{1}{r}}{k-1}^2 n + \frac{r(r-1)}{(rk+r-1)(rk-1)}n + \mathcal{O}(n^{\frac{1}{r}}).
\end{aligned}
$$

我們有$\mathrm{E}(X_{n,k})$和$\mathrm{E}(X_{n,k}^2)$，因此能得到$X_{n,k}$ 的variance爲

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X_{n,k}) \\
&= ((r-1)(r-2) + (rk+r-1)(rk-1))\frac{r(r-1)}{(rk+r-1)^2(rk-1)^2}n \\
&\quad + L_0 r^{2k-1}\binom{k-1-\frac{1}{r}}{k-1}^2 n + \mathcal{O}(n^{\frac{1}{r}}).
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

接下來，我們就要開始來看L_0的部份，我們可以利用(3.1)和(3.2) 來進行計算

$$L_0 = -(r-1)r^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}$$

$$+2(r-1)r^{-2k}\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2-\frac{1}{r})(l+1-\frac{1}{r})} \tag{3.4}$$

$$+(r-1)r^{-2k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i} \tag{3.5}$$

$$\times\frac{(-1)^{l+i+2}}{(l+2-\frac{1}{r})(i+2-\frac{1}{r})(l+i+3-\frac{2}{r})}.$$

對於(3.4)，我們使用Lemma 2.12的證明過程中的分數拆開的想法，將可以進行化簡

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2-\frac{1}{r})(l+1-\frac{1}{r})}\\
&\quad=\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l+1-\frac{1}{r}}-\frac{1}{l+2-\frac{1}{r}}\right)\\
&\quad=\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^{l}\left(\int_0^1(1-z)^{l-\frac{1}{r}}dz-\int_0^1(1-z)^{l+1-\frac{1}{r}}dz\right)\\
&\quad=\int_0^1 z^{k-1}(1-z)^{-\frac{1}{r}}dz-\int_0^1 z^{k-1}(1-z)^{1-\frac{1}{r}}dz\\
&\quad=\frac{(k-1)!\Gamma(1-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+1-\frac{1}{r})}-\frac{(k-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma(k+2-\frac{1}{r})}.
\end{aligned}$$

而對(3.5)，我們使用Lemma 2.12得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i+2}}{(l+2-\frac{1}{r})(i+2-\frac{1}{r})(l+i+3-\frac{2}{r})}\\
&\qquad=-\frac{2(2k-1)!\Gamma(3-\frac{2}{r})}{(1-\frac{1}{r})\Gamma(2k+3-\frac{2}{r})}+\frac{(k-1)!k!\Gamma(1-\frac{1}{r})\Gamma(2-\frac{1}{r})}{\Gamma^2(k+2-\frac{1}{r})}.
\end{aligned}$$

因為(3.4)和(3.5)的化簡，因此能將L_0代入(3.3) 進行整理，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_{n,k})=\Bigg(&\left(k(4+k)r^2-(2+3k)r+1\right)\frac{r(r-1)}{(rk+r-1)^2(rk-1)^2}\\
&-\frac{2(2k-1)!\Gamma(3-\frac{2}{r})}{\Gamma(2k+3+\frac{2}{r})}\binom{k-1-\frac{1}{r}}{k-1}^2\Bigg)n+\mathcal{O}(n^{\frac{1}{r}}).
\end{aligned}$$

□

3.2 Higher Moments and Distribution of $X_{n,k}$

接下來，我們要找出$X_{n,k}$的所有動差，並且利用(2.1) 證明$X_{n,k}$ 的distribution將會趨近於normal distribution。在進行證明之前，我們要讓$X_{n,k}$的參數移動一

個mean value，因此設定新參數爲$\overline{X}_{n,k} = X_{n,k} - \mu n$，其中$\mu = \frac{r(r-1)}{(rk+r-1)(rk-1)}$。由於我們的參數移動，(1.1)也會受到影響，因此我們設一個新的bivariate generating function

$$\overline{P}_k(z,y) = \sum_{n\geq 1} \tau_n E(\exp(\overline{X}_{n,k} y)) \frac{z^n}{n!} = P_k(ze^{-\mu y}, y).$$

利用(1.1)和$\overline{P}_k(z,y)$的關係，我們得到一個新的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{P}_k(z,y) = e^{-\mu y}\phi(\overline{P}_k(z,y)) + e^{-\mu k y}(e^y - 1)\tau_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{3.6}$$

當然$\overline{P}_k(0,y) = 0$。

同樣地，我們利用這個新的微分方程來推導出新的m次動差生成函數$\overline{A}_k^{[m]}(z)$的微分方程

$$\frac{d}{dz}\overline{A}_k^{[m]}(z) = \phi'(\tau(z))\overline{A}_k^{[m]}(z) + \overline{B}_k^{[m]}(z), \tag{3.7}$$

其中$\overline{B}_k^{[m]}(z)$表示除了$\phi'(\tau(z))\overline{A}_k^{[m]}(z)$ 之外其餘的項，利用$\overline{P}_k(0,y) = 0$這個條件，我們可以知道$\overline{A}_k^{[m]}(0) = 0$。

由於，我們要找出$X_{n,k}$的所有動差且從Section 3.1能知道$\overline{B}_k^{[m]}(z)$在計算$X_{n,k}$的動差上是非常重要的。因此，我們要先找出$\overline{B}_k^{[m]}(z)$的形式是如何。

Lemma 3.3. 我們利用(3.6)可以知道

$$\begin{aligned}\overline{B}_k^{[m]}(z) = {} & ((-k\mu+1)^m - (-k\mu)^m)\tau_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ & + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}(-\mu)^{m-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0} \\ & + (r-1)\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=m-1\\ i_1<m-1}}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z) \\ & \quad \times \frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{r-1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}.\end{aligned}$$

Proof. 當我們要找出m次動差生成函數時，我們會對於(3.6)的y 進行m次偏微並且y代入0。首先我們先看(3.6)等號左邊的第二項

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-\mu k y}(e^y-1)\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\bigg|_{y=0} = ((-k\mu+1)^m - (-k\mu)^m)\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}.$$

接下來，我們來看(3.6)等號左邊的第一項

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-\mu y}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0} = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0}.$$

由上述的式子可以發現，如果$e^{-\mu y}$消失，這樣我們所要檢查的就只會剩下$\phi(\overline{P}_k(z,y))$這一項的對$y$偏微，而那樣的討論我們放到最後再來觀察。我們先來看i 不爲m的時候，式子會變成

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-\mu y}\phi(\overline{P}_k(z,y))\Big|_{y=0}\\
&=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\Big|_{y=0}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\phi(\overline{P}_k(z,y))\Big|_{y=0}+\frac{\partial^m}{\partial y^m}\phi(\overline{P}_k(z,y))\Big|_{y=0},
\end{aligned}$$

其中，我們知道(2.3)而且$\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\big|_{y=0}=(-\mu)^{m-i}$，因此可以整理

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\Big|_{y=0}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\phi(\overline{P}_k(z,y))\Big|_{y=0}+\frac{\partial^m}{\partial y^m}\phi(\overline{P}_k(z,y))\Big|_{y=0}\\
&=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}(-\mu)^{m-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}+\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}.
\end{aligned}$$

剩下檢查$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\big|_{y=0}$ 即可，我們先對y 偏微一次，之後用之前的辦法展開

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}&=\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(\frac{r-1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^r}\frac{\partial}{\partial y}\overline{P}_k(z,y)\right)\Big|_{y=0}\\
&=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\frac{\partial^{i+1}}{\partial y^{i+1}}\overline{P}_k(z,y)\Big|_{y=0}\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial y^{m-i-1}}\frac{r-1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^r}\Big|_{y=0}.
\end{aligned}$$

因爲我們知道$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\overline{P}_k(z,y)\big|_{y=0}=\overline{A}_k^{[m]}(z)$ 而且在上面的式子中，當i是$m-1$的時候，即是$\phi'(\tau(z))\overline{A}_k^{[m]}(z)$，因此我們要拿掉$i$是$m-1$ 的情況，並且我們利用$\overline{A}_k^{[m]}(z)$來表示$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\overline{P}_k(z,y)\big|_{y=0}$，可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m-2}\overline{A}_k^{[i+1]}(z)\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial y^{m-i-1}}\frac{r-1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^r}\Big|_{y=0}\\
&=(r-1)\sum_{i=0}^{m-2}\overline{A}_k^{[i+1]}(z)\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial y^{m-i-1}}\left(\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\right)\Big|_{y=0}\\
&=(r-1)\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=m-1\\ i_1<m-1}}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\\
&\qquad\times\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}.
\end{aligned}$$

由這些過程，可以得到$\overline{B}_k^{[m]}(z)$。 □

關於Lemma 3.3，是讓我們方便能使用相同的結果來簡化我們的主要證明，因此整理成Lemma 3.3的形式。經由一連串的觀察，我們就能得到$\overline{B}_k^{[m]}(z)$的結果。現在我們知道$\overline{B}_k^{[m]}(z)$ 的樣子，再來就是證明$X_{n,k}$的所有動差。

Proposition 3.4. 對於所有的$m \geq 1$，$\overline{A}_k^{[m]}(z)$必須是Δ-*analytic function*。我們對於$\overline{A}_k^{[m]}(z)$的*singularity*進行展開，得到

$$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z) = \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1+\frac{1}{r}}),$$

其中$z \in \Delta$並且$z \to \frac{1}{r}$以及

$$\overline{A}_k^{[2m]}(z) = \frac{(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{r})}{2^m m! r\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1}),$$

其中$z \in \Delta$並且$z \to \frac{1}{r}$。而σ^2是$X_{n,k}$ 的*variance*。

Proof. 我們所證明的手法是利用induction來進行。而induction basis，即$m = 1$，是我們在Section 3.1中，$A^{[1]}$ 和$A^{[2]}$的結果。在$\overline{B}_k^{[m]}(z)$之中，有許多要處理的式子，所以我們先對於這些式子先做個假設

$$\left.\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\right|_{y=0} = \mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}) \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\right|_{y=0} = \frac{(2m)!\Gamma(m+1-\frac{1}{r})}{2^m m!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m}) \tag{3.9}$$

其中$z \in \Delta$並且$z \to \frac{1}{r}$，以及

$$\left.\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\right|_{y=0} = \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{1}{r}}) \tag{3.10}$$

$$\left.\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\right|_{y=0} = \frac{(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{r})}{2^m m!\Gamma(\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{2}{r}}), \tag{3.11}$$

其中$z \in \Delta$並且$z \to \frac{1}{r}$。我們會使用這些假設在我們的證明過程之中，當然在證明$\overline{A}_k^{[m]}(z)$的過程之中，我們也會去證明它們。

首先，我們要先證明$\overline{A}_k^{[m]}(z)$ 的奇數項。假定在$\overline{A}_k^{[m]}(z)$、(3.8)、(3.9)、(3.10)以及(3.11)比$2m-1$還要小的項都是對的。從Lemma 3.3我們已經知道了$\overline{B}_k^{[m]}(z)$的形式，我們由$\overline{B}_k^{[m]}(z)$ 的樣子來分析。我們發現如果我們要認真的去分析$\overline{B}_k^{[m]}(z)$，就必須要展開所有的項來分析，但並不用全部的項都展開，我們只對於$1-rz$的order最小項有興趣，因此我們可以先觀察我們所有的條件的$1-rz$的order。

	$m = 2i-1$	$m = 2i$
$\overline{A}_k^{[m]}(z)$	$\mathcal{O}((1-rz)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}})$	$\mathcal{O}((1-rz)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{r}})$
$\left.\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\right\|_{y=0}$	$\mathcal{O}((1-rz)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{r}})$	$\mathcal{O}((1-rz)^{-\frac{m}{2}-1+\frac{1}{r}})$
$\left.\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\right\|_{y=0}$	$\mathcal{O}((1-rz)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{r}})$	$\mathcal{O}((1-rz)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{r}})$

Table 3.1: The order of $1-rz$

由Table 3.1，我們能夠知道$1-rz$的order最小項，只會發生在m 是偶數的情況，所以當我們在$\overline{B}_k^{[m]}(z)$的第三項中，如果要看$1-rz$ 的order 最小項時，會希望全部條件都選擇m爲偶數的情況。由於這個想法，我們可以很快的去看出order最小項會在哪裡，而這件事對於我們往後的證明有非常大的幫助。

現在，我們所要證明的是$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)$的項，因此我們觀察$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$的第二項和第三項。$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$ 的第二項會是

$$\sum_{i=0}^{2m-2}\binom{2m-1}{i}(-\mu)^{2m-1-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。

再來，我們要觀察$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$的第三項，利用Table 3.1的想法，我們能夠知道在i_1+1、i_2 和i_3都是偶數的條件之下，可以得到$1-rz$的order 最小項，但是現在$i_1+i_2+i_3$要是偶數而在上述條件中只有i_1 是奇數，所以我們想得到order最小項必須是讓i_1、i_2或i_3 的其中一個條件改變。我們在這裡選擇讓i_1改變成偶數。在改變條件之後，所得到$1-rz$ 的order 最小項爲

$$\begin{aligned}(r-1)&\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-2\\ i_1:even;i_1<2m-2\\ i_2,i_3:even}}\binom{2m-2}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}\\ &\qquad\times\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{1}{r}})\\ &=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}),\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。由以上的觀察，可以發現

$$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}),$$

其中z屬於Δ且$z\to\frac{1}{r}$。再一次，利用Theorem 2.7 和Lemma 2.11能夠知道

$$\begin{aligned}\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)&=\tau'(z)\int_0^z\frac{\overline{B}_k^{[2m-1]}(t)}{\tau'(t)}dt\\ &=(1-rz)^{-1+\frac{1}{r}}\int_0^z\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1})dt\\ &=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1+\frac{1}{r}}),\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。

接下來，我們要開始來證明(3.8)和(3.10)，先使用Lemma 3.3的證明想法，可以得到類似$\overline{B}_k^{[m]}(z)$的形式

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}&=(r-1)\sum_{i_1+i_2+i_3=m-1}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\\ &\qquad\times\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\end{aligned}\tag{3.12}$$

以及

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0} \tag{3.13}$$
$$=\sum_{i_1+i_2+i_3=m-1}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}.$$

我們要利用(3.12)和(3.13)來證明(3.8) 和(3.10)，我們已經知道$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)$ 是成立的，因此我們在這裡是可以使用的。同樣地，由Table 3.1 的想法，我們可以知道$1-rz$ 的order 最小項會發生於特定的條件下，得到

$$(r-1)\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-2\\ i_1,i_2,i_3:even}}\binom{2m-2}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}$$
$$\times\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{1}{r}})$$
$$=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。以及

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-2\\ i_1,i_2,i_3:even}}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}$$
$$\times\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+2-\frac{2}{r}})$$
$$=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{1}{r}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。因此，我們證明(3.12) 和(3.13)在奇數項爲

$$\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。以及

$$\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{1}{r}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。這個結果發現與(3.8) 和(3.10)的假設是一樣的。

接下來，我們要來證明偶數項的部份——就是$\overline{A}_k^{[2m]}(z)$ 的項—— 同樣我們逐一觀察$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$的第二項和第三項。利用(3.8)和(3.9)會得到$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$ 的第二項爲

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\binom{2m}{i}(-\mu)^{2m-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}=\mathcal{O}((1-rz)^{-m+\frac{1}{r}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。再來，我們利用Table 3.1 的想法來觀察$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$的第三項因此可以得到

$$
\begin{aligned}
&(r-1)\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1<2m-1}}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\\
&\qquad\times\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\\
&\quad=(r-1)\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_1<2m-1\\ i_2,i_3:even}}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\bigg|_{y=0}\\
&\qquad\times\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m})\\
&\quad=\frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m}),
\end{aligned}
$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$，而c為

$$
\begin{aligned}
c&=\frac{r-1}{r}\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_1<2m-1\\ i_2,i_3:even}}(i_1+1)\frac{\Gamma(\frac{i_1+1}{2}-\frac{1}{r})}{(\frac{i_1+1}{2})!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\frac{\Gamma(\frac{i_2}{2}+1-\frac{1}{r})}{(\frac{i_2}{2})!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\frac{\Gamma(\frac{i_3}{2}+\frac{1}{r})}{(\frac{i_3}{2})!\Gamma(\frac{1}{r})}\\
&=2\frac{r-1}{r}\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_1<2m-1\\ i_2,i_3:even}}\binom{\frac{i_1+1}{2}-1-\frac{1}{r}}{\frac{i_1+1}{2}-1}\binom{\frac{i_2}{2}-\frac{1}{r}}{\frac{i_2}{2}}\binom{\frac{i_3}{2}-1+\frac{1}{r}}{\frac{i_3}{2}}\\
&=2\frac{r-1}{r}\sum_{i=0}^{m-2}\binom{i-\frac{1}{r}}{i}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{j-\frac{1}{r}}{j}\binom{m-i-j-2+\frac{1}{r}}{m-i-j-1}\\
&=\frac{2}{(m-2)!}\frac{\Gamma(m-\frac{1}{r})}{\Gamma(1-\frac{1}{r})}.
\end{aligned}
$$

關於c的化簡，能利用Lemma 2.13的結果得到。從前面的觀察，我們知道$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$的$1-rz$的order最小項會發生在$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$ 的第三項，因此$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$可以整理成

$$
\begin{aligned}
\overline{B}_k^{[2m]}(z)&=\frac{(2m-1)!}{2^m}\frac{2}{(m-2)!}\frac{\Gamma(m-\frac{1}{r})}{\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m})\\
&=\frac{(m-1)(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{r})}{2^m m!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m}),
\end{aligned}
$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$。最後，再次利用Theorem 2.7 和Lemma 2.11得到

$$
\begin{aligned}
&\overline{A}_k^{[2m]}(z)=\tau'(z)\int_0^z\frac{\overline{B}_k^{[2m]}(t)}{\tau'(t)}dt\\
&=(1-rz)^{-1+\frac{1}{r}}\int_0^z\bigg(\frac{(m-1)(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{r})}{2^m m!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rt)^{-m}\\
&\qquad+\mathcal{O}((1-rt)^{-m+1-\frac{1}{r}})\bigg)dt
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{r})}{2^m m! r\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1}),$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{r}$。在這裡，我們已經證明出$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)$和$\overline{A}_k^{[2m]}(z)$。剩下，我們要證明(3.9)和(3.11)也是成立的。

首先，我們先使用(3.12)來證明(3.9)。使用之前的想法可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}\\
&= (r-1)\sum_{i_1+i_2+i_3=2m-1}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\\
&\qquad\times\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}\\
&= (r-1)\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_2,i_3:even}}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\\
&\qquad\times\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1})\\
&= \frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1}),
\end{aligned}$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{r}$，而c爲

$$\begin{aligned}
c &= \frac{r-1}{r}\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_2,i_3:even}}(i_1+1)\frac{\Gamma(\frac{i_1+1}{2}-\frac{1}{r})}{(\frac{i_1+1}{2})!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\frac{\Gamma(\frac{i_2}{2}+1-\frac{1}{r})}{(\frac{i_2}{2})!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\frac{\Gamma(\frac{i_3}{2}+\frac{1}{r})}{(\frac{i_3}{2})!\Gamma(\frac{1}{r})}\\
&= 2\frac{r-1}{r}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{i-\frac{1}{r}}{i}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{j-\frac{1}{r}}{j}\binom{m-i-j-2+\frac{1}{r}}{m-i-j-1}\\
&= 2(1-\frac{1}{r})\frac{\Gamma(m+1-\frac{1}{r})}{(m-1)!\Gamma(2-\frac{1}{r})}\\
&= \frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m+1-\frac{1}{r})}{\Gamma(1-\frac{1}{r})}.
\end{aligned}$$

上述是利用Lemma 2.13的結果得到，因此我們將式子要行整理

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{(1-\overline{P}_k(z,y))^{r-1}}\Big|_{y=0}\\
&= \frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1})\\
&= \frac{(2m-1)!}{2^m}\frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m+1-\frac{1}{r})}{\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}}\\
&\qquad + \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1})\\
&= \frac{(2m)!\Gamma(m+1-\frac{1}{r})}{2^m m!\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-1+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}((1-rz)^{-m}),
\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$，因此證明(3.9) 是成立的。

最後，我們使用(3.13)來證明(3.11)。再次，我們使用相同的方法可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\\
&=\sum_{i_1+i_2+i_3=2m-1}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\\
&=\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_2,i_3:even}}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\\
&\quad+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{2}{r}})\\
&=\frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-\frac{1}{r}}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{2}{r}}),
\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$，而c為

$$\begin{aligned}
c&=\frac{2}{r}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{i-\frac{1}{r}}{i}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{j-1+\frac{1}{r}}{j}\binom{m-i-j-2+\frac{1}{r}}{m-i-j-1}\\
&=\frac{2}{r}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{r})}{(m-1)!\Gamma(1+\frac{1}{r})}\\
&=\frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{r})}{\Gamma(\frac{1}{r})}.
\end{aligned}$$

因此，我們整理以上的結果得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{1-\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}\\
&=\frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-\frac{1}{r}}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{2}{r}})\\
&=\frac{(2m-1)!}{2^m}\frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{r})}{\Gamma(\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-\frac{1}{r}}\\
&\quad+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{2}{r}})\\
&=\frac{(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{r})}{2^m m!\Gamma(\frac{1}{r})}\sigma^{2m}(1-rz)^{-m-\frac{1}{r}}+\mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{2}{r}}),
\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{r}$，而(3.11) 也是成立的。 □

證明完Proposition 3.4之後，我們要利用這個結果來證明Theorem 1.6的normal range在給定k之下，$X_{n,k}$ 的distribution會趨近normal distribution。 在此，我們獨立寫出一個定理說明。

Theorem 3.5. 在*generalized PORTs*之下，在給定正整數k的情況，則*subtree size profile* $X_{n,k}$的*mean value*和*variance*為

$$\mathrm{E}(X_{n,k})=\mu_{n,k}=\frac{r(r-1)}{(rk+r-1)(rk-1)}n,\quad n>k.$$

以及，當$n \to \infty$，則

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X_{n,k}) &= \sigma_{n,k}^2 \\ &\sim \Bigg(\Big(k(4+k)r^2-(2+3k)r+1\Big)\frac{r(r-1)}{(rk+r-1)^2(rk-1)^2} \\ &\quad -\frac{2(2k-1)!\Gamma(3-\frac{2}{r})}{\Gamma(2k+3+\frac{2}{r})}\binom{k-1-\frac{1}{r}}{k-1}^2\Bigg)n.\end{aligned}$$

並且，我們可以知道

$$\frac{X_{n,k}-\mu_{n,k}}{\sigma_{n,k}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Proof. 從Proposition 3.1和Proposition 3.2 已經知道$\mathrm{E}(X_{n,k})$和$\operatorname{Var}(X_{n,k})$的結果。因此我們要證明在給定$k$的情況下，$X_{n,k}$的distribution會趨近於normal distribution。由於我們已經所有知道m 次動差生成函數的結果，即是Proposition 3.4，因此我們能利用這個結果找到$X_{n,k}$的所有m次動差為

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m-1}) = \mathcal{O}\left(\frac{n!}{\tau_n}\frac{r^n n^{m-2-\frac{1}{r}}}{\Gamma(m-1-\frac{1}{r})}\right),$$

其中$n \to \infty$，以及

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m}) = \frac{n!}{\tau_n}\frac{(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{r})}{2^m m! r\Gamma(1-\frac{1}{r})}\sigma^{2m}[z^n](1-rz)^{-m+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{n!}{\tau_n}\frac{r^n n^{m-2}}{\Gamma(m-1)}\right),$$

其中$n \to \infty$。之後再整理一下式子，可以得到

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m-1}) = \mathcal{O}(n^{m-1}),$$

其中$n \to \infty$，以及

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m}) = \frac{(2m)!}{2^m m!}\sigma^{2m}n^m + \mathcal{O}(n^{m-1+\frac{1}{r}}),$$

其中$n \to \infty$。

由於這個結果符合(2.1)，因此從Theorem 2.9知道$X_{n,k}$ 的distribution會趨近於normal distribution。 □

Chapter 4

d-ary Trees

接下來，我們要來證明d-ary trees的結果，證明過程與Chapter 3 是非常相似地，一樣會先找出在d-ary trees之下，$X_{n,k}$ 的mean value 和variance，之後再去找$X_{n,k}$的所有動差。我們已經知道d-ary trees 的$\phi(\omega)$和$\tau(z)$爲(2.2) 和(2.4)。 在此，先回顧一下(2.2)和(2.4)

$$\phi(\omega) = (1+t)^d, \quad \tau(z) = -1 + (1-(d-1)z)^{-\frac{1}{d-1}}, \quad d \in \{2, 3, \cdots\}.$$

以及τ_n爲

$$\tau_n = (d-1)^{n-1}(n-1)!\binom{n-1+\frac{1}{d-1}}{n-1}.$$

有了這些，我們就能開始我們的證明。

4.1 Mean Value and Variance

首先，我們先證明出$X_{n,k}$的mean value。

Proposition 4.1. *在d-ary trees之下，當$n > k$時，則$X_{n,k}$的mean value爲*

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{d(d-1)}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)}n + \frac{d}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)}.$$

Proof. 因爲在Chapter 3中，我們知道

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{n!\tau_k}{(k-1)!\tau_n}[z^n]\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt.$$

因此，我們直接代入d-ary trees的$\tau(z)$使得$\mathrm{E}(X_{n,k})$ 的積分變成

$$\begin{aligned}
&[z^n]\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt \\
&= [z^n]\tau'(z)\int_0^z t^{k-1}(1-(d-1)t)^{1+\frac{1}{d-1}}dt \\
&= [z^n]\tau'(z)\left(\int_0^{\frac{1}{d-1}} t^{k-1}(1-(d-1)t)^{1+\frac{1}{d-1}}dt + \int_{\frac{1}{d-1}}^z t^{k-1}(1-(d-1)t)^{1+\frac{1}{d-1}}dt\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [z^n]\tau'(z)\Bigg((d-1)^{-k}\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{1+\frac{1}{d-1}}dt \\
&\quad + (d-1)^{1-k}\int_{\frac{1}{d-1}}^{z}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^l(1-(d-1)t)^{l+1+\frac{1}{d-1}}dt\Bigg) \\
&= [z^n]\tau'(z)(d-1)^{-k}\Bigg(\frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2+\frac{1}{d-1}}(1-(d-1)z)^{l+2+\frac{1}{d-1}}\Bigg) \qquad (4.1)\\
&= \frac{\tau_{n+1}}{n!}(d-1)^{-k}\frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})}.
\end{aligned}
$$

在經過計算之後，我們能夠知道$\mathrm{E}(X_{n,k})$爲

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n,k}) &= \frac{n!\tau_k}{(k-1)!\tau_n}[z^n]\tau'(z)\int_0^z \frac{t^{k-1}}{\tau'(t)}dt \\
&= \frac{n!\tau_k}{(k-1)!\tau_n}\frac{\tau_{n+1}}{n!}(d-1)^{-k}\frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})} \\
&= \frac{d(d-1)n}{((d-1)k+d)(d-1)k+1}+\frac{d}{((d-1)k+d)(d-1)k+1}.
\end{aligned}
$$

這裡的計算仍然是去展開所有τ_n並且進行化簡得到的。 □

接下來，我們要去證明$X_{n,k}$的variance。

Proposition 4.2. *在d-ary trees之下，當$n>k$時，則*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_{n,k}) = \Bigg(&\frac{kd(d-1)(k(d-1)+1)}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2} \\
&-\frac{2(2k-1)!\Gamma(3+\frac{2}{d-1})}{(d-1)\Gamma(2k+3+\frac{2}{d-1})}\binom{k-1+\frac{1}{d-1}}{k-1}^2\Bigg)((d-1)n+1)+\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d-1}}),
\end{aligned}
$$

Proof. 一開始，我們要先知道$\mathrm{E}(X_{n,k}^2)$的樣子，我們已經知道$A_k^{[2]}(z)$的微分方程是

$$
\frac{d}{dz}A_k^{[2]}(z)=\phi'(\tau(z))A_k^{[2]}(z)+\phi''(\tau(z))(A_k^{[1]}(z))^2+\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!},
$$

其中$A_k^{[1]}(z)$是我們已經知道的，因此在看$A_k^{[2]}(z)$時，使用Lemma 2.11得到

$$
\begin{aligned}
A_k^{[2]}(z) &= \tau'(z)\int_0^z \frac{\phi''(\tau(t))(A_k^{[1]}(t))^2+\tau_k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}}{\tau'(t)}dt \\
&= \tau'(z)\int_0^z \frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{\tau_k u^{k-1}}{(k-1)!\tau'(u)}du\right)^2 dt \\
&\quad +\tau'(z)\int_0^z \frac{\tau_k t^{k-1}}{(k-1)!\tau'(t)}dt.
\end{aligned}
$$

在這個式子中，第二項是我們已經算過的，所以我們只要去算出第一項的結果即可。同樣地，我們先觀察$\phi''(\omega)$

$$\begin{aligned}
&\phi(\omega) = (1+t)^d, \quad d \in \{2,3,4,\cdots\} \\
&\phi'(\omega) = d(1+t)^{d-1} \\
&\phi''(\omega) = d(d-1)(1+t)^{d-2}
\end{aligned}$$

因此，我們將$\tau(z)$代入，得到

$$\phi''(\tau(z)) = d(d-1)(1-(d-1)z)^{-1+\frac{1}{d-1}}.$$

再來，我們觀察$\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{\tau_k u^{k-1}}{(k-1)!\tau'(u)}du\right)^2$

$$\begin{aligned}
&\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{\tau_k u^{k-1}}{(k-1)!\tau'(u)}du\right)^2 \\
&= \frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}(\tau'(t))^2(d-1)^{-2k}\left(\frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2+\frac{1}{d-1}}(1-(d-1)t)^{l+2+\frac{1}{d-1}}\right)^2 \\
&= \frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}(\tau'(t))^2(d-1)^{-2k}\left(\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}\right. \\
&\qquad + 2\frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2+\frac{1}{d-1}}(1-(d-1)t)^{l+2+\frac{1}{d-1}} \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2+\frac{1}{d-1}}(1-(d-1)t)^{l+2+\frac{1}{d-1}}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

在這裡，我們對於上述式子進行整理得到

$$\begin{aligned}
&\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{\tau_k u^{k-1}}{(k-1)!\tau'(u)}du\right)^2 \\
&\qquad = (d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}(\tau'(t))^2 + \mathcal{O}((1-(d-1)t)^{-\frac{1}{d-1}}),
\end{aligned}$$

其中$t \in \Delta$且$t \to \frac{1}{d-1}$。經過上述的觀察，我們可以化簡$A_k^{[2]}(z)$並且使用Theorem 2.7解出積分的結果

$$\begin{aligned}
&\tau'(z)\int_0^z \frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2 dt \\
&= \tau'(z)\int_0^z \frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left((d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}(\tau'(t))^2\right. \\
&\qquad \left. + \mathcal{O}((1-(d-1)t)^{-\frac{1}{d-1}})\right)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau'(z)\int_0^z \Big(d(d-1)^{-2k+1}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}(1-(d-1)t)^{-2} \\
&\quad + \mathcal{O}((1-(d-1)t)^{\frac{1}{d-1}})\Big) dt \\
&= d(d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}(1-(d-1)z)^{-2-\frac{1}{d-1}} \\
&\quad + L_0(1-(d-1)z)^{-1-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}(1),
\end{aligned}
$$

其中$t \in \Delta$且$t \to \frac{1}{d-1}$。而L_0爲

$$
\begin{aligned}
L_0 &= -d(d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})} \\
&\quad + \int_0^{\frac{1}{d-1}} \Bigg(\frac{\phi''(\tau(t))}{\tau'(t)}\left(\tau'(t)\int_0^t \frac{u^{k-1}}{\tau'(u)}du\right)^2 \\
&\quad - d(d-1)^{-2k+1}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}(1-(d-1)t)^{-2}\Bigg) dt.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

同樣地，L_0的計算仍是放在後面再討論。經由上面的計算，我們可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n,k}^2) &= \frac{n!}{\tau_n}[z^n]A_2^{[2]}(z) \\
&= \frac{n!}{\tau_n}[z^n]\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}d(d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}(1-(d-1)z)^{-2-\frac{1}{d-1}} \\
&\quad + \frac{n!}{\tau_n}[z^n]\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2}L_0(1-(d-1)z)^{-1-\frac{1}{d-1}} + \mathrm{E}(X_{n,k}) + \mathcal{O}(\frac{n!}{\tau_n}[z^n]1) \\
&= (d-1)^{-2k}\frac{\tau_{n+2}}{\tau_n}\frac{\tau_k^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})} + L_0\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\frac{\tau_k^2}{(k-1)!^2} \\
&\quad + \frac{d(d-1)}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)}n + \frac{d}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)} \\
&\quad + \mathcal{O}(\frac{n!}{\tau_n}[z^n]n^{-1}) \\
&= \frac{d^2(d-1)^2}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2}n^2 \\
&\quad + (d(d+1)+((d-1)k+d)((d-1)k+1))\frac{d(d-1)}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2}n \\
&\quad + (d^2+((d-1)k+d)((d-1)k+1))\frac{d}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2} \\
&\quad + L_0(d-1)^{2k-2}\binom{k-1+\frac{1}{d-1}}{k-1}^2((d-1)n+1) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d-1}})
\end{aligned}
$$

以及

$$
\mathrm{Var}(X_{n,k}) = ((d-1)^2k^2+(d^2-1)k+d^2)\frac{d(d-1)}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2}n
$$

$$+ ((d-1)^2k^2 + (d^2-1)k + d^2)\frac{d}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2}$$
$$+ L_0(d-1)^{2k-2}\binom{k-1+\frac{1}{d-1}}{k-1}^2((d-1)n+1) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d-1}}).$$

再來，我們要觀察L_0，利用(4.1)和(4.2)可得到

$$L_0 = -d(d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!^2\Gamma^2(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}$$
$$+ 2d(d-1)^{-2k}\frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l} \tag{4.3}$$
$$\times \frac{(-1)^{l+1}}{(l+2+\frac{1}{d-1})(l+1+\frac{1}{d-1})}$$
$$+ d(d-1)^{-2k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i} \tag{4.4}$$
$$\times \frac{(-1)^{l+i+2}}{(l+2+\frac{1}{d-1})(i+2+\frac{1}{d-1})(l+i+3+\frac{2}{d-1})}.$$

對於(4.3)，我們還是利用Lemma 2.12 的證明過程中分數拆開的想法，因此得到

$$\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2+\frac{1}{d-1})(l+1+\frac{1}{d-1})}$$
$$= \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^{l+1}\left(\int_0^1 z^{l+\frac{1}{d-1}}dz - \int_0^1 z^{l+1+\frac{1}{d-1}}dz\right)$$
$$= \frac{(k-1)!\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+2+\frac{1}{d-1})} - \frac{(k-1)!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(k+1+\frac{1}{d-1})}.$$

而(4.4)，利用Lemma 2.12的結果進行化簡，得到

$$\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^{l+i+2}}{(l+2+\frac{1}{d-1})(i+2+\frac{1}{d-1})(l+i+3+\frac{2}{d-1})}$$
$$= -\frac{2(2k-1)!\Gamma(3+\frac{2}{d-1})}{(1+\frac{1}{d-1})\Gamma(2k+3+\frac{2}{d-1})} + \frac{(k-1)!k!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})\Gamma(2+\frac{1}{d-1})}{\Gamma^2(k+2+\frac{1}{d-1})}.$$

最後，我們將(4.3)和(4.4) 的結果代入variance 之中使得

$$\mathrm{Var}(X_{n,k}) = \Bigg(\frac{kd(d-1)(k(d-1)+1)}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2}$$
$$- \frac{2(2k-1)!\Gamma(3+\frac{2}{d-1})}{(d-1)\Gamma(2k+3+\frac{2}{d-1})}\binom{k-1+\frac{1}{d-1}}{k-1}^2\Bigg)((d-1)n+1) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d-1}}).$$

□

Remark 4.3. 在Chapter 1之中，我們已經說明過d-ary trees在當$d = 2$時就是BST，而BST的結果能從Equation 1知道$\mathrm{E}(X_{n,k})$和$\mathrm{Var}(X_{n,k})$ 的樣子，因此當我們嘗試去讓$d = 2$，利用我們計算出來的mean value 和variance可以得到

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{2}{(k+2)(k+1)}(n+1)$$

和

$$\mathrm{Var}(X_{n,k}) = \frac{2k(4k^2+5k-3)}{(2k+3)(2k+1)(k+1)(k+2)^2}(n+1) + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

這個結果，只能看n的部份會發現是對的，而我們也可以參考[5]的結果。發現使用我們的結果會得到$X_{n,k}$的variance會多一個誤差項$\mathcal{O}(n^{-1})$存在。從[5]中，可以知道實際上這個誤差值是可以被忽略。但在$d > 2$的時候，這個誤差項$\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d-1}})$對於$X_{n,k}$的variance來說卻會是重要的。從這個誤差值就能看出BST與d-ary trees 之間的不同。

4.2 Higher Moments and Distribution of $X_{n,k}$

最後，我們來要找出$X_{n,k}$的所有動差並且證明符合(2.1)這件事。首先，我們要讓$X_{n,k}$移動一個mean value並且設一個新參數爲$\overline{X}_{n,k} = X_{n,k} - \mu n$，其中$\mu = \frac{d(d-1)}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)}$。之後，我們設

$$\overline{P}_k(z,y) = \sum_{n\geq 1} \tau_n E(\exp(\overline{X}_{n,k}y))\frac{z^n}{n!} = P_k(ze^{-\mu y}, y).$$

因此，我們可以得到新的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{P}_k(z,y) = e^{-\mu y}\phi(\overline{P}_k(z,y)) + e^{-\mu k y}(e^y - 1)\tau_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!},$$

而$\overline{P}_k(0,y) = 0$。利用上述的微分方程，我們知道$\overline{X}_{n,k}$的m 次動差生成函數$\overline{A}_k^{[m]}(z)$就是，對上述的式子的y進行m次偏微後y代入0，則可以得到$\overline{A}_k^{[m]}(z)$的微分方程

$$\frac{d}{dz}\overline{A}_k^{[m]}(z) = \phi'(\tau(z))\overline{A}_k^{[m]}(z) + \overline{B}_k^{[m]}(z),$$

其中$\overline{A}_k^{[m]}(0) = 0$。其實，我們可以發現以上所看到的式子跟(3.6)和(3.7)是一樣的，但因爲我們的$\phi(\omega)$和$\tau(z)$都有改變，因此$\overline{B}_k^{[m]}(z)$ 也會跟著改變。

Lemma 4.4. 我們知道(3.6)，因此可以知道

$$\begin{aligned}
\overline{B}_k^{[m]}(z) &= ((-k\mu+1)^m - (-k\mu)^m)\tau_k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}(-\mu)^{m-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0} \\
&+ d\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=m-1\\ i_1<m-1}}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}.
\end{aligned}$$

Proof. 此證明會跟Lemma 3.3的證明是類似。首先，我們會找出m次動差生成函數，就是從(3.6) 的y進行m次偏微並且y 代入0 之後就能找到。同樣，先觀察(3.6)等號左邊的第二項

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-\mu k y}(e^y-1)\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\bigg|_{y=0}=((-k\mu+1)^m-(-k\mu)^m)\tau_k\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}.$$

接下來，我們來看(3.6)等號左邊的第一項

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-\mu y}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0}.$$

同樣地，我們先來看i不是m的時候

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-\mu y}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0}\\&=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0}+\frac{\partial^m}{\partial y^m}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0},\end{aligned}$$

其中，我們知道$\phi(\omega)$的樣子而且$\frac{\partial^{m-k}}{\partial y^{m-k}}e^{-\mu y}\big|_{y=0}=(-\mu)^{m-k}$，因此可以簡化爲

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial y^{m-i}}e^{-\mu y}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\phi(\overline{P}_k(z,y))\bigg|_{y=0}\\&\quad=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}(-\mu)^{m-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0}.\end{aligned}$$

剩下的就是檢查$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\phi(\overline{P}_k(z,y))\big|_{y=0}$，我們之後都會將$\overline{P}_k(z,y)$ 代入(2.2)來表示

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^m}{\partial y^m}(1-\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0}\\&=\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(d(1+\overline{P}_k(z,y))^{-1+d}\frac{\partial}{\partial y}\overline{P}_k(z,y)\right)\bigg|_{y=0}\\&=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\frac{\partial^{i+1}}{\partial y^{i+1}}\overline{P}_k(z,y)\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial y^{m-i-1}}d(1+\overline{P}_k(z,y))^{-1+d}\bigg|_{y=0}.\end{aligned}$$

因爲我們知道$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\overline{P}_k(z,y)\big|_{y=0}=\overline{A}_k^{[m]}(z)$ ，而且在上面的式子中，當i等於$m-1$的時候，即$\phi'(\tau(z))\overline{A}_k^{[m]}(z)$，因此我們要拿掉$i$是$m-1$ 這項，並且我們利用$\overline{A}_k^{[m]}(z)$來表示$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\overline{P}_k(z,y)\big|_{y=0}$，得到

$$\begin{aligned}&d\sum_{i=0}^{m-2}\overline{A}_k^{[i+1]}(z)\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial y^{m-i-1}}(1+\overline{P}_k(z,y))^{-1+d}\bigg|_{y=0}\\&=d\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=m-1\\i_1<m-1}}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}.\end{aligned}$$

由這些過程，可以得到$\overline{B}_k^{[m]}(z)$。 □

接下來，我們將要進行主要的證明部份。

Proposition 4.5. 對於所有$m \geq 1$，$\overline{A}_k^{[m]}(z)$是Δ-*analytic function*，而且我們對於它的*singularity*做展開，則可以得到

$$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z) = \mathcal{O}((1-rz)^{-m+1-\frac{1}{d-1}}),$$

其中$z \in \Delta$而且$z \to \frac{1}{d-1}$。以及

$$\overline{A}_k^{[2m]}(z) = \frac{(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{2^m m!(d-1)\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m}),$$

其中$z \in \Delta$而且$z \to \frac{1}{d-1}$。

Proof. 我們仍然要使用induction的方法來進行我們的證明，而我們的induction basis即是$A_k^{[1]}(z)$和$A_k^{[2]}(z)$的結果。在證明的過程中我們會使用到一些假設

$$\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0} = \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0} \tag{4.6}$$

$$= \frac{(2m)!\Gamma(m+1+\frac{1}{d-1})}{2^m m!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}),$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$，以及

$$\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0} = \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+1+\frac{1}{d-1}}) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0} = \frac{(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{d-1})}{2^m m!\Gamma(\frac{-1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m+\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+\frac{2}{d-1}}), \tag{4.8}$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$。

當然，我們先假設所有比m小的結果都是成立的然後要去證明m是對的。我們仍然會先證明奇數項的情況，再去證明偶數項的情況。在證明之前，我們先來觀察每項$1-(d-1)z$ 的order。

	$m = 2i-1$	$m = 2i$
$\overline{A}_k^{[m]}(z)$	$\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{d-1}})$	$\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{d-1}})$
$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\big\|_{y=0}$	$\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{d-1}})$	$\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-\frac{m}{2}-1-\frac{1}{d-1}})$
$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\big\|_{y=0}$	$\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}})$	$\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{d-1}})$

Table 4.1: The order of $1-(d-1)z$

由Table 4.1，能夠知道每個項在奇數和偶數時，$1-(d-1)z$的order 的情況。有助於我們之後的證明。

現在，我們先來證明Proposition 4.5的奇數項，也就是$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)$。先看$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$的第二項可以發現

$$\sum_{i=0}^{2m-2}\binom{2m-1}{i}(-\mu)^{2m-1-i}\frac{\partial^i}{\partial y^i}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\Big|_{y=0}$$
$$=\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$。

再來，我們要觀察$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$的第三項，由於Table 4.1的關係我們可知道，$1-(d-1)z$ 的order最小項是發生於i_1+1、i_2和i_3都是偶數項的時候。但是從我們有的條件$i_1+i_2+i_3=2m-2$ 來看，現在是不可能發生的，因此i_1、i_2和i_3 之中一個必須要改變它的項。在這裡，我們在此改變i_1爲偶數，因此$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$的第三項的$1-(d-1)z$的order最小項爲

$$d\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-2\\ i_1:even;i_1<2m-2\\ i_2,i_3:even}}\binom{2m-2}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}$$
$$+\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m})$$
$$=\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$。由這些觀察，我們可以知道

$$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)=\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}),$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$。在利用Theorem 2.7 和Lemma 2.11能得到$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)$是

$$\overline{A}_k^{[2m-1]}(z)=\tau'(z)\int_0^z\frac{\overline{B}_k^{[2m-1]}(t)}{\tau'(t)}dt=\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+1-\frac{1}{d-1}})$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$。

之後，我們要來證明(4.5)和(4.7)。同樣地，我們先寫出跟$\overline{B}_k^{[2m-1]}(z)$類似的式子

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\Big|_{y=0}\tag{4.9}$$
$$=d\sum_{i_1+i_2+i_3=m-1}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}$$

和

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}\tag{4.10}$$
$$=-\sum_{i_1+i_2+i_3=m-1}\binom{m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}.$$

再一次，由Table 4.1的想法，可以各別知道$1-(d-1)z$的order最小項

$$
\begin{aligned}
& d \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-2 \\ i_1:even;i_1<2m-2 \\ i_2,i_3:even}} \binom{2m-2}{i_1,i_2,i_3} \overline{A}_k^{[i_1+1]}(z) \frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}} (1+\overline{P}_k(z,y))^d \bigg|_{y=0} \frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)} \bigg|_{y=0} \\
& \qquad\qquad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m}) \\
& \qquad = \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}),
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$。以及

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-2 \\ i_1:even;i_1<2m-2 \\ i_2,i_3:even}} \binom{2m-2}{i_1,i_2,i_3} \overline{A}_k^{[i_1+1]}(z) \frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)} \bigg|_{y=0} \frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)} \bigg|_{y=0} \\
& \qquad\qquad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+1+\frac{2}{d-1}}) \\
& \qquad = \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+1+\frac{1}{d-1}}),
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$。所以得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}} (1+\overline{P}_k(z,y))^d \bigg|_{y=0} &= \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}) \\
\frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)} \bigg|_{y=0} &= \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+1+\frac{1}{d-1}})
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$。因此，我們證明(4.5) 和(4.7)是成立的。

接下來，我們要證明Proposition 4.5的偶數項，也就是$\overline{A}_k^{[2m]}(z)$。同樣地，我們可知道$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$ 的第二項爲

$$
\sum_{i=0}^{2m-1} \binom{2m}{i} (-\mu)^{2m-i} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (1+\overline{P}_k(z,y))^d \bigg|_{y=0} = \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+1+\frac{1}{d-1}}).
$$

其中z屬於Δ-domain且$z \to \frac{1}{d-1}$。利用Table 4.1的想法來觀察$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$的第三項得到

$$
\begin{aligned}
& d \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1 \\ i_1<2m-1}} \binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3} \overline{A}_k^{[i_1+1]}(z) \frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}} (1+\overline{P}_k(z,y))^d \bigg|_{y=0} \frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)} \bigg|_{y=0} \\
& = d \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1 \\ i_1:odd;i_1<2m-1 \\ i_2,i_3:even}} \binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3} \overline{A}_k^{[i_1+1]}(z) \frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}} (1+\overline{P}_k(z,y))^d \bigg|_{y=0} \frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)} \bigg|_{y=0} \\
& \quad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}) \\
& = \frac{c(2m-1)!\sigma^{2m}}{2^m} (1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}),
\end{aligned}
$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$，而c爲

$$\begin{aligned}c&=\frac{d}{d-1}\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_1<2m-1\\ i_2,i_3:even}}(i_1+1)\frac{\Gamma(\frac{i_1+1}{2}+\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_1+1}{2})!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\frac{\Gamma(\frac{i_2}{2}+1+\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_2}{2})!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\frac{\Gamma(\frac{i_3}{2}-\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_3}{2})!\Gamma(-\frac{1}{d-1})}\\
&=2\frac{d}{d-1}\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1\\ i_1:odd;i_1<2m-1\\ i_2,i_3:even}}\binom{\frac{i_1+1}{2}-1+\frac{1}{d-1}}{\frac{i_1+1}{2}-1}\binom{\frac{i_2}{2}+\frac{1}{d-1}}{\frac{i_2}{2}}\binom{\frac{i_3}{2}-1-\frac{1}{d-1}}{\frac{i_3}{2}}\\
&=2\frac{d}{d-1}\sum_{i=0}^{m-2}\binom{i+\frac{1}{d-1}}{i}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{j+\frac{1}{d-1}}{j}\binom{m-i-j-2-\frac{1}{d-1}}{m-i-j-1}\\
&=\frac{2}{(m-2)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}.\end{aligned}$$

之後，我們對於$\overline{B}_k^{[2m]}(z)$進行整理

$$\begin{aligned}\overline{B}_k^{[2m]}(z)&=\frac{(2m-1)!}{2^m}\frac{2}{(m-2)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}}\\
&\quad+\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1})\\
&=\frac{(m-1)(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{2^m m!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}}\\
&\quad+\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}),\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$。因此，更能得到

$$\begin{aligned}\overline{A}_k^{[2m]}(z)&=\tau'(z)\int_0^z\frac{\overline{B}_k^{[2m]}(t)}{\tau'(t)}dt\\
&=\tau'(z)\int_0^z\Big(\frac{(m-1)(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{2^m m!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)t)^{-m}\\
&\quad+\mathcal{O}((1-(d-1)t)^{-m+\frac{1}{d-1}})\Big)dt\\
&=\frac{(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{2^m m!(d-1)\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-\frac{1}{d-1}}\\
&\quad+\mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m}),\end{aligned}$$

其中$z\in\Delta$且$z\to\frac{1}{d-1}$。

最後，我們將證明(4.9)和(4.10)。很快地，我們知道(4.9)會是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0}\\
&=d\sum_{i_1+i_2+i_3=2m-1}\binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3}\overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\bigg|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\bigg|_{y=0}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1 \\ i_1:odd;i_2,i_3:even}} \binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3} \overline{A}_k^{[i_1+1]}(z) \frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d \Big|_{y=0} \frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}} \frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0} \\
&\quad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}) \\
&= \frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}),
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$，而c爲

$$
\begin{aligned}
c &= 2\frac{d}{d-1} \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1 \\ i_1:odd;i_2,i_3:even}} (i_1+1) \frac{\Gamma(\frac{i_1+1}{2}+\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_1+1}{2})!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})} \frac{\Gamma(\frac{i_2}{2}+1+\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_2}{2})!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})} \frac{\Gamma(\frac{i_3}{2}-\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_3}{2})!\Gamma(-\frac{1}{d-1})} \\
&= 2\frac{d}{d-1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{i+\frac{1}{d-1}}{i}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{j+\frac{1}{d-1}}{j}\binom{m-i-j-2-\frac{1}{d-1}}{m-i-j-1} \\
&= \frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m+1+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}.
\end{aligned}
$$

之後，我們再對(4.9)整理，可以知道

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}(1+\overline{P}_k(z,y))^d\Big|_{y=0} \\
&= \frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}) \\
&= \frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m+1+\frac{1}{d-1})}{\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\frac{(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}} \\
&\quad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}) \\
&= \frac{(2m)!\Gamma(m+1+\frac{1}{d-1})}{2^m m!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m-1-\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m-1}),
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$。相同地，我們也知道(4.10)會是

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0} \\
&= -\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1 \\ i_1:odd,i_2,i_3:even}} \binom{2m-1}{i_1,i_2,i_3} \overline{A}_k^{[i_1+1]}(z)\frac{\partial^{i_2}}{\partial y^{i_2}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0}\frac{\partial^{i_3}}{\partial y^{i_3}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Big|_{y=0} \\
&\quad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+\frac{2}{d-1}}) \\
&= \frac{c(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m+\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+\frac{2}{d-1}}),
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$，而c是

$$
c = -\frac{2}{d-1}\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2m-1 \\ i_1:odd;i_2,i_3:even}} (i_1+1)\frac{\Gamma(\frac{i_1+1}{2}+\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_1+1}{2})!\Gamma(1+\frac{1}{d-1})}\frac{\Gamma(\frac{i_2}{2}-\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_2}{2})!\Gamma(-\frac{1}{d-1})}\frac{\Gamma(\frac{i_3}{2}-\frac{1}{d-1})}{(\frac{i_3}{2})!\Gamma(-\frac{1}{d-1})}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{d-1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{i+\frac{1}{d-1}}{i}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{j-1-\frac{1}{d-1}}{j}\binom{m-i-j-2-\frac{1}{d-1}}{m-i-j-1} \\
&= \frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m-\frac{1}{d-1})}{\Gamma(-\frac{1}{d-1})}.
\end{aligned}
$$

再次對(4.10)進行整理

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\frac{1}{1+\overline{P}_k(z,y)}\Bigg|_{y=0} \\
&= \frac{2}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m-\frac{1}{d-1})}{\Gamma(-\frac{1}{d-1})}\frac{(2m-1)!}{2^m}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m+\frac{1}{d-1}} \\
&\quad + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+\frac{2}{d-1}}) \\
&= \frac{(2m)!\Gamma(m-\frac{1}{d-1})}{2^m m!\Gamma(-\frac{1}{d-1})}\sigma^{2m}(1-(d-1)z)^{-m+\frac{1}{d-1}} + \mathcal{O}((1-(d-1)z)^{-m+\frac{2}{d-1}}),
\end{aligned}
$$

其中$z \in \Delta$且$z \to \frac{1}{d-1}$。所以我們會發現結果與(4.6)和(4.8)是一樣的。當然我們同時也證明了Proposition 4.5成立。 □

證明完Proposition 4.5之後，我們利用這些結果來證明Theorem 1.7 的normal range在給定k的情況之下，$X_{n,k}$的distribution 會趨近normal distribution。在這裡，我們給一個定理，來整理我們的結果。

Theorem 4.6. *在d-ary trees之下，在給定正整數k的情況，則subtree size profile $X_{n,k}$ 的mean value和variance爲*

$$
\mathrm{E}(X_{n,k}) = \mu_{n,k} = \frac{d(d-1)}{((d-1)k+d)((d-1)k+1)}n, \quad n > k.
$$

以及，當$n \to \infty$，則

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_{n,k}) = \sigma_{n,k}^2 \sim \Bigg(&\frac{kd(d-1)^2(k(d-1)+1)}{((d-1)k+d)^2((d-1)k+1)^2} \\
&- \frac{2(2k-1)!\Gamma(3+\frac{2}{d-1})}{\Gamma(2k+3+\frac{2}{d-1})}\binom{k-1+\frac{1}{d-1}}{k-1}^2\Bigg)n.
\end{aligned}
$$

並且，我們可以知道

$$
\frac{X_{n,k}-\mu_{n,k}}{\sigma_{n,k}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1).
$$

Proof. 從Proposition 4.1和Proposition 4.2知道$X_{n,k}$ 的mean value 和variance。因此我們現在要去證明$X_{n,k}$的所有動差會符合(2.1)。現在，我們要利用Theorem 2.2以及Theorem 2.4 來對Proposition 3.4 的結果進行singularity analysis 並且得到

$$
\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m-1}) = \mathcal{O}(\frac{n!}{\tau_n}\frac{(d-1)^n n^{m-2+\frac{1}{d-1}}}{\Gamma(m-1+\frac{1}{d-1})}),
$$

其中$n\to\infty$，以及

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m}) = \frac{n!}{\tau_n}\frac{(2m)!\Gamma(m+\frac{1}{d-1})}{2^m m!(d+1)\Gamma(1+\frac{1}{d+1})}\sigma^{2m}[z^n](1-(d-1)z)^{-m+\frac{1}{r}} + \mathcal{O}(\frac{n!}{\tau_n}\frac{(d-1)^n n^{m-1}}{\Gamma(m)}),$$

其中$n\to\infty$。之後再整理一下式子，可以得到

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m-1}) = \mathcal{O}(n^{m-1}),$$

其中$n\to\infty$，以及

$$\mathrm{E}((X_{n,k}-\mu n)^{2m}) = \frac{(2m)!}{2^m m!}\sigma^{2m} n^m + \mathcal{O}(n^{m-\frac{1}{d-1}}),$$

其中$n\to\infty$。因此，我們能知道$X_{n,k}$的所有動差會符合(2.1)。因此可由Theorem 2.9得知，$X_{n,k}$ 的distribution 會趨近於normal distribution，得到我們想要的結果。 □

Chapter 5

Conclusion

在Chapter 5中，我們要爲本篇做整理。在Chapter 1之中，我們利用BST來解釋一些名詞並且認識我們研究中所用的參數subtree size profile $X_{n,k}$。我們知道BST、recursive tree、PORTs去使用$X_{n,k}$已有了許多的結果。我們本篇的研究動機是由[6]這篇開始，從裡面我們知道grown simply families of increasing tree能藉由weight function $\phi(\omega)$給定一個random model，並且利用$\phi(\omega)$推得m次動差生成函數，讓我們可以使用singularity analysis的方式，找出Generalized PORTs和d-ary trees使用$X_{n,k}$的mean value和variance。當然我們也可以利用singularity analysis，找出$X_{n,k}$的m次動差生成函數的係數並推得$X_{n,k}$的所有動差。

因此，在Chapter 2之中，大致介紹了singularity analysis並且說明了$\mathcal{O}$與$[z^n]$可以互換。讓singularity analysis在$\mathcal{O}$之中也能進行計算。而且，我們也介紹了Fréchet-Shohat Theorem，即是Theorem 2.9，以便我們的證明。

在Chapter 3和Chapter 4我們分別證明了generalized PORTs和d-ary trees 使用$X_{n,k}$作爲參數，並且給定k 的情況之下，$X_{n,k}$的mean value 以及variance，而在證明的時候我們只會去看關於n的最高次項的係數，而對於其他項只是進行大略的估計。其實我們在計算mean value跟variance的時候，如果想要看他們更精確的結果的話，我們在證明的過程中，可以看更多的項來進行計算。

在我們證明m次動差生成函數的形式時，我們使用induction來幫助我們看出m次動差生成函數。之後，利用m次動差生成函數找到$X_{n,k}$的所有動差並且得到我們想要的結果。

在我們的主要證明過程中，我們發現generalized PORTs和d-ary trees不管是所使用的weight function、計算方法和證明想法都是類似的。我們也因爲這些原因，在Chapter 2中提出許多通用於兩者的工具來使用。因此，我們可以猜測有一個通用的證明是可以證明出與兩者相似的另一種increasing trees。而這樣的increasing trees大概可以從simply generated families of increasing trees 找到這樣的increasing trees。

但是從[6]的證明以及本篇的兩種increasing trees的證明可以發現，我們的證明遠比M. Fuchs的證明複雜許多，討論的東西也增加許多。因此可以想像我們要找出一個通用的證明，可能比我們分開討論不同的increasing trees的證明還要更加的複雜。所以，我們才選擇分開討論generalized PORTs 和d-ary trees 的證明。

Bibliography

[1] F. Bergeron, P. Flajolet, and B. Salvy. Varieties of increasing trees. *Lectures Notes in Computer Science*, 581:24–48, (1992).

[2] F. Dennert and R. Grübel. On the subtree size profile of binary search trees. *Combinatorics, Probability and Computing*, 19:561–578, (2010).

[3] Q. Feng, H. Mahmoud, and A. Panholzer. Phase changes in subtree varieties in random recursive and binary search trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22:160–184, (2008).

[4] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, (2009).

[5] M. Fuchs. Subtree sizes in recursive trees and binary search trees: Berry-esseen bounds and poisson approximations. *Combinatorics, Probability and Computing*, 17:661–680, (2008).

[6] M. Fuchs. Limit theorems for subtree size profiles of increasing trees. *Combinatorics, Probability and Computing*, 21:412–441, (2012).

[7] M. Fuchs, H.-K. Hwang, and R. Neininger. Profiles of random trees: Limit theorems for random recursive trees and binary search trees. *Algorithmica*, 46:367–407, (2006).

[8] A. Panholzer and H. Prodinger. Level of nodes in increasing trees revisited. *Random Structures and Algorithms*, 31:203–226, (2007).