國 立 交 通 大 學

理學院科技與數位學習學程

碩 士 論 文

七年級學生的等號概念與
其對代數學習之影響研究

The Study of Seventh Graders' Equal Concept and How Does it Affect Student’s Learning of Algebra

研 究 生：吳佩錦

指導教授：袁　媛　教授

李榮耀　教授

中 華 民 國 一 〇 二 年 六 月

七年級學生的等號概念與其對代數學習之影響研究
The Study of Seventh Graders' Equal Concept and How Does it Affect Student's Learning of Algebra

研 究 生：吳佩錦　　Student：Pei-Chin Wu

指導教授：袁　媛　　Advisor：Yuan Yuan

李榮耀　　Jong-Eao Lee

國 立 交 通 大 學
理學院科技與數位學習學程

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇二年六月

摘　　要

本研究主要在探究七年級學生的等號概念，並分析不同等號概念的七年級學生在一元一次代數式學習上的影響。本研究的主要目的有四項：（一）探討七年級新生的等號概念以及對於等號意義的理解；（二）瞭解不同等號概念的七年級新生對典型等式與非典型等式的判讀與解題策略；（三）瞭解「運算型」學生在學習等量公理後，其等號概念的拓展情形；（四）瞭解不同等號概念的七年級學生在一元一次代數式中解題策略與其學習成效。

本研究採問卷調查法，以國中七年級學生為調查與研究對象，由研究者自編前後測以及一元一次代數式學習成就測驗分析得到以下研究結論：

一、七年級學生在尚未正式接觸代數課程前，只有近五成的學生可以理解等號除「運算」意涵外，還有更深一層的等量「關係型」概念。

二、七年級學生多數能夠正確判讀非典型等式問題，唯獨「等號自反性」的題型僅有三成學生能夠理解。

三、七年級的關係型學生比運算型學生更能理解等號的特性，但擁有關係型概念不代表完全擁有解決非典型等式問題的能力。

四、七年級的運算型學生在處理典型或非典型等式時，所採用的解題策略傾向於「求得一個結果」，無法跳出計算的思考框架。

五、七年級的關係型學生在處理典型或非典型等式時，能運用「等號的替代意義與等價意義」進行解題，同時展現較多元的解題策略。

六、七年級的運算型學生在化簡一元一次式時往往會忽略要維持等號兩邊等價的關係，並固著於計算出一個最後的數值。

七、部份運算型學生認為等號是一種計算過程的連結，因此習慣在所有解題步驟中加入等號，而忽略了等號兩邊必須等價的概念。

八、七年級關係型學生在一元一次代數式的學習成效優於運算型學生。

最後，本研究根據研究結果，提出具體建議，以做為未來相關研究、教材設計與等號概念教學的參考。

關鍵字：等號概念、非典型等式、代數學習

Abstract

This study aimed to explore the concept of seventh graders' equal sign , and how does it affect student's learning of algebra. There are four main purpose of this study：1. To realize the seventh graders' understanding of the equal sign concept；2. To analysis of seventh graders' who have different equal concept problem solving strategies on standard or nonstandard equation；3.To analysis the operational students how to change the concept of the equal sign by learning through equality axioms；4. To analysis of seventh graders' who have different equal concept problem solving strategies on algebra and how does it affect student's learning of algebra.

The study used questionnaire survey to analysis of seventh graders' equal concept. Through some test designed by the researcher can get the following conclusions：

1. Before learning algebra, there is only 50% of seventh-graders can really understand the relational meaning of equal sign.
2. Most of seventh-graders can distinguish the nonstandard equation, but only 30% of them can understand the equal sign reflexive Quiz.
3. In understanding the concept of equal sign, the relational seventh-graders are better than operational ones. But has a relation concept is not the same as having the ability to solve problems.
4. When the operational-seventh graders solve the nonstandard equation, they are used to calculate a result or to do something.
5. When the relational seventh-graders solve the nonstandard equation, they have a variety of problem-solving ability.
6. The operational seventh-graders always ignore the equivalence equal significance when they solve algebra problems.
7. A part of operational seventh-graders consider the equal sign is a link of calculation process.
8. In the effect of learning algebra, the relational seventh-graders are better than the operational ones.

In conclusion, the findings of this study show that specific proposals are offered to be used in the design of instructional materials and the equal sign concept as reference.

Key words：equal concept、nonstandard equation、learning of algebra

誌　　　謝

沒想到自己也能勇敢的跨出那一步，並順利地走到這一天。提筆的此刻，心中瀰漫著無以言喻的激動與喜悅，卻無法全然化成片片字句。

一直以來，讀書不甚靈巧的我總是在學習的路途上跌跌撞撞，雖然如此，我始終熱愛著校園中相互砥礪又蘊含書卷香氣的氛圍，也一直期待著有朝一日能繼續完成那暫時被現實生活擊敗的夢想。工作一段時日，看著身旁的夥伴一個個又重新走入校園，那份熱情與執著也再度燃起我心中的小小燭光。就這樣擁著家人與同事們的祝福，挾著幾分美好憧憬與小小的莫名恐懼，回憶起初踏入交大校園的那一刻，李榮耀教授的殷殷叮嚀，彷彿還在眼前。而如今，我竟已在此細數說不盡的感謝。

回首這兩年來的每一步，時而溫馨時而憂愁，幸好所有的喜怒哀樂與焦躁不安都有有聖、泓葆、弘昌陪著我一起走過：在每份報告與實驗中、在每個週末從白天到黑夜的相守；更要感謝的，是悉心帶領著我一路前行的指導老師袁媛教授：總是竭盡心力、無私無我的指導與傳授所學，不僅在學術中惠予良多，更在兩年研究生涯裡亦師亦友的引領著我們渡過一次又一次的考驗與難題。

最後，感謝口試委員孫之元教授不吝給予指導，讓我釐清自己所學的盲點，並給予我未來研究更多的方向。也感謝我可愛又乖巧貼心的班級，能讓我無後顧之憂的在課餘之中充實自己。

吳佩錦　謹識

于 交通大學理學院碩專班　中華

民國一○二年六月

目次

第一章 緒論··························1
第一節 研究背景與動機··················1
第二節 研究目的與待答問題················4
第三節 名詞釋義 ·····················5
第四節 研究範圍與限制 ···················9
第二章 文獻探討 ·······················11
第一節 等號概念的發展背景 ··················11
第二節 等號概念的相關研究 ··················15
第三節 等號概念與代數學習的關連 ·············17
第三章 研究設計與實施 ····················21
第一節 研究設計與架構 ···················21
第二節 研究步驟與流程 ···················24
第三節 研究工具 ·······················31
第四節 資料蒐集與分析 ···················36
第四章 研究結果與討論 ····················45
第一節 初探七年級學生的等號概念 ·············45
第二節 運算型學生的等號拓展與迷思概念 ·········53
第三節 不同等號概念對代數學習的影響 ··········60
第五章 結論與建議 ·······················61
第一節 結論·························61
第二節 建議·························62

參考文獻

中文部分··························65
英文部分··························67

附錄

附錄一 等號意義理解與等號概念發展前測初稿···············72
附錄二 等號意義理解與等號概念發展前測正式問卷·············74
附錄三 一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念後測··········75

表次

表 3-4-6 等號意義理解類型分析‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧40
表 3-4-7 等號意義理解和等號概念類型的描述‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧40
表 4-1-2 學生在等號意義與認知的表現情況‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧46
表 4-1-3 國內各研究者等號概念研究百分比例表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧47
表 4-1-5 非典型等式測驗內容與學生表現統計表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧50
表 4-1-6 國小二年級學童與國中七年級學生對非典型等式的判讀情形‧‧‧‧‧50
表 4-1-7 七年級學生在第一二大題的作答情形‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧52
表 4-2-2 國中七年級學生等號概念和認知調查結果‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧54
表 4-2-3 七年級 A、B、C 三班第一大題作答情形 ‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧54
表 4-2-5 不同等號思維學生的解題策略統計表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧56
表 4-2-6 第二大題測驗內容以及整體七年級學生作答情形‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧57
表 4-2-7 不同等號概念的七年級學生在第二大題作答情形‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧58
表 4-2-8 不同等號概念學生的解題思維情形‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧59
表 4-3-1 不同等號概念與一元一次代數學習成效的獨立樣本 t 檢定摘要表‧‧‧60

圖次

圖 3-2-1 研究流程圖……24
圖 3-2-2 前測問卷第二大題等號概念心像測驗內容……27
圖 3-2-3 前測問卷第二大題數學態度測驗內容……27
圖 3-2-4 後測第二大題等號迷思概念測驗內容……30
圖 3-3-1 後測第二大題等號迷思概念測驗內容……33
圖 3-4-1 等號意義理解與認知測驗內容……37
圖 3-4-2 非典型等式測驗內容……38
圖 3-4-3 等號的自反性測驗內容……38
圖 3-4-4 等號的對稱性與等價概念測驗內容……38
圖 3-4-5 不同等號概念的解題思維測驗內容……39
圖 3-4-8 後測第一大題等號的意義認知與理解內容……41
圖 3-4-9 後測第二大題等號的迷思概念和誤用測驗內容……42
圖 3-4-10 後測第三大題等號誤用與錯誤類型測驗內容……42
圖 4-1-1 等號意義理解與認知第一大題測驗內容……45
圖 4-1-4 陳嘉皇等號意義解釋的題目內容……48
圖 4-2-1 一元一次代數式錯誤類型分析與等號誤用測驗第一大題內容……53
圖 4-2-4 等號概念理解與等號意義認知測驗第三大題測驗內容……55

第一章　緒論

在教育部所揭示的九年一貫數學學習領域課程能力指標中，指出六年級的學生應能夠理解等量公理，並瞭解等式左右同時加、減、乘、除一數（除時此數不能為零）時，等式仍然會成立（教育部，2003）。而「等式」代表等號左右兩邊物件「等價」的想法，是學生能夠由算術順利進入到代數的重要轉戾點，亦是學生學習等量公理的重要基石（王志銘、康淑娟，2006）。由此可見，學生對於等式的概念心像與學習等量公理之間有著密不可分的關係存在。故本研究主要在探討七年級新生的等號概念拓展情形，以及不懂等號概念對於學習代數的影響。本章分為四節，分別為研究背景與動機、研究目的與問題、名詞釋義、研究範圍與限制。

第一節　研究背景與動機

近年來有許多研究發現，國內有不少學生對於「等號」的真正意涵，仍處於一知半解的狀態，例如：一個將等號視為「運算型」關係的學生，在面對「等式」的時候，會誤認等式右邊應該是等式左邊運算出來的結果，而未經運算的數字應該擺放在等式左邊（邱志賢、毛國楠，2001）。Seo 與 Ginsburg（2003）也指出將等號視為運算符號的觀點，容易限制學生學習數學時的思考層級。簡單地說：一個只將等號視為「運算型」關係的學生，多半能夠理解 3＋2＝5 這種典型等式，但是卻不一定能夠接受 5＝3＋2 或 4＋1＝3＋2 這種非典型等式的寫法。一般而言，國小學生對於等號的認知，通常還是停留在將等號視為「操作符號」去進行由左而右的計算，這些視等號定義為運算型的學生，也多半會將等號界定為「待解決的結果」，或是「應算出的答案」，並未將等號視為一種具有等價關係的符號（Behr，Erlwanger & Nichols，1976；Warren，2004）。

「＝」 這個符號對於七年級的新生而言，其實一點都不會感到陌生。

因為「＝」早在國小一年級上學期的數學教材裡頭，就被普遍介紹與大量使用在算術式當中。因此對國小的學童來說，「＝」出現的時候，學生的概念心像出現的是「do something 」的意象，認定必須要做某事，並且尋求的是一種結果。國內學者謝堅（1997）也認為學生在處理數學課運算教材的時候，會過於著重得到答案，這樣的課程脈絡可能會導致學生誤以為「等號」僅僅只是代表著「運算後的結果」或「計算後的答案是…」的情形，而這樣的教材編排與教學也使得學生在日後學習代數式判讀其等價關係時產生了困擾。國內學者廖學專（2002）在他的研究中也曾呼應這樣的說法：學生由算術進入到代數領域的困難之一，其實是根源於學生對於「等式」缺乏了一種「等價概念」，意即學生缺乏「＝」右邊的物件會等於「＝」左邊的物件，同時「＝」左邊的物件也會等於「＝」右邊的物件的想法。所以，當學生在國中進入到代數式學習的時候，往往會沿用過往運算型關係的認知，認為「＝」是掌控一個算術運算的執行命令，需要 do something 並得到一個最後的結果，而不認為「＝」是比較兩個相等的量的關係符號。而諸如此類的迷思觀念，也往往是日後造成學生在代數學習上產生困難與疑惑的重要因素之一（廖瓊菁，2001）。

無獨有偶，早在中國清朝晚年就有數學家華蘅芳體悟出影響代數學習的成效，其實應該要根源於等號意義的理解上，而非全然植基於未知數的操弄上（上官瑋茵， 2010）。近年來也有越來越多學者投入與等號相關的研究，確認算術式當中的「等號」和代數式裡頭的「等號」，其意義是不盡全然相同的（洪萬生，2007）。縱觀內外，有許多的研究都紛紛不約而同指出，許多學生從算術式到代數式的學習過程中產生了困難，是因為學生對等號概念理解的局限性（Carpenter & Franke，2001；Warren，2002；Warren，2003）。簡單地說，就是學生沒有辦法正確轉換等號的意義，認為看到等號就一定是要找出結果，而不是要維持「＝」左右物件數量上的平衡。因此，研究者在教學現場當中，也常常會發現學生在處理代數式運算的時候，會出現以下兩種的迷思狀況，而追根究柢不是學生不能掌握文字符號操弄，而是學生的等號概念仍然停留在操作型的運算型定義中：

7x-3=2x+7	7x+3x+2-5
= 7x-2x=7+3	= 10x+2-5
= 5x =10	= 10x-3
= x=2	= 7
（迷思一：習慣運算後接等號）	（迷思二：等號後要有運算結果）

因此，不管是國內或是國外，有許多學者的研究結論都支持：學生對於「＝」的理解，如果能夠從「運算型」轉化為「關係型」，了解「＝」除了具有運算結果的特性外，仍具有「替代性」、「自反性」、「對稱性」和「遞移性」，就能促進學生由算術式到代數式的提昇與連接（Falkner，Levi & Carpenter，1999）。而從這些例子我們也不難發現，「代數式的學習」與「等號概念」是有一定程度的相關性存在。再者，研究者從近幾年相關調查研究中發現，國內多數中小學的學生並未全然具有「等式」即為一種「等價關係」的概念，而學生對於「等式」的理解以及「等號概念」也不一定會隨年級增長而有所擴展。探究其原因，也許根源於教材的鋪陳並未強化「等號」的真正意涵。而有不少的研究也顯示，能夠將「等號」視為「關係型」的學生，在解題表現上會明顯優於視「等號」為「運算型」的學生（楊喻惟，2009；劉佩綺，2010；詹佳縈，2010；楊絜媛，2010；呂秀英，2011；許欣鳳，2012）。除此之外，在學生的觀念當中，許多學生認為「＝」的出現代表著他們必須做某種程度的運算動作，這也導致了學生在學習等號右邊有未知數的方程式或是在做非典型等式的時候，會產生某種程度的混淆與困惑，這樣的迷思概念也導致學生在化簡代數式的時候，容易產生錯亂和非得尋求一種結果的固著（莊松潔，2005）。國外的學者 Alibali、Knuth、McNeil 和 Stephens（ 2007 ）更表示，唯有學生真正理解及掌握等號的意義，才是代數學習成功的關鍵。

對於等量公理的學習，不僅是代表著等式兩邊存在一種等價的關係，裡頭更包含了學生對文字符號概念的理解。因此，研究者認為要讓學生對於代數式的運算以及等量公理的學習更加順利，就應該要先瞭解學生對於「等號」的概念理解，到底存在於哪一種階段。Ausubel（1968）曾經說過：影響學習最重要的因素就是確認學習者已經學到甚麼而據以教之，而林福來（1991）也曾指出教師要幫助學生學好數學的最佳參考依據就是在教學中適時的進行診斷評量，瞭解學生的想法、程度、解題策略以及犯錯的原因，也才能對於學生的學習做即時的補救與調整。因此本研究首部份將先針對七年級新生做一份研究者自編的等號概念理解問卷調查，以瞭解學生對於等號的概念心像到底存在於哪種階段，並分析學生現有等號概念中，對於典型等式以及非典型等式的掌握與處理策略有何異同。並初步瞭解對等號固著於「運算型」以及無法處理「非典型等式」的學生，在進入到代數式學習時，會產生甚麼樣的盲點與混淆做探討，在學期末學生學習過等量公理之後，再進行第二次研究者自編的問卷調查，以探討七年級新生的等號概念拓展情形以及代數式的學習成效是否會因其等號概念不同而有所差異。最後，對身為教學現場第一線的教師該如何進行等號概念的擴展以及後續補救教學，便成了本研究的重要目的之一。

第二節　研究目的與待答問題

一、研究目的：

國內學者李宜蓉（2009）與國外學者McNeil等人（2006）都曾分析國內外教科書中等號的使用方式，發現中學教科書的版本中對於等號（equal signs）的呈現方式鮮少有引出「關係型」詮釋的脈絡，所以學生即便上了國中以後，仍然會將等號解釋為一種操作符號或是維持一種必須要「do something 」運算型的定義。而針對不同等號概念的學生，在由算術進入到代數的學習中，究竟又扮演著何種舉足輕重的角色，是否真會因等號

概念的不同而對其學習成效產生影響，著實令研究者感到好奇。因此，根據以上動機，本研究主要研究目的如下：

（1） 初探七年級新生的等號概念以及對於等號意義的理解

（2） 瞭解不同等號概念的七年級新生對典型等式與非典型等式的判讀與解題策略

（3） 瞭解「運算型」學生在學習等量公理後，其等號概念的拓展情形

（4） 瞭解不同等號概念的七年級學生在一元一次代數式中解題策略與其學習成效

二、待答問題：

依據本研究所提出的研究目的，列出以下幾個待答問題，期許能透過研究者自編的兩次問卷調查統計，瞭解目前七年級新生等號的概念階段以及代數式學習時的各個面向：

（1） 探究七年級新生的等號概念與對等號意義的理解有何差異存在？

（2） 探究不同等號概念的七年級新生，對於典型等式與非典型等式的認知與解題策略為何？

（3） 觀察七年級「運算型」學生在學習完等量公理後，其等號概念是否能由「運算型」提昇到「關係型」？

（4） 探討七年級學生在一元一次代數式的解題策略與學習成效是否會因等號概念的不同而有所差異？

第三節　名詞釋義

在本小節當中，研究者將針對本研究中所提及的一些名詞作簡單的介紹與定義，本小節將分成三個部份做解釋，第一部分為與「等號」概念相關的名詞，包含了文中所提及的「運算型」與「關係型」的界定與分類以及「等號概念心像」的意涵：第二部份是與「等式」有關的名詞，包含了典型等式與非典型等式的部份；最後第三部份是「等號」本身具有的特性，包含了等號的「替代性」、「自反性」、「對稱性」與「遞移性」的基本性質說明。

一、與「等號」概念相關的名詞：

本研究依陳嘉皇(2008)及 Knuth、Stephens、McNeil 與 Alibali （2006）的定義，依據學生不同的等號概念心像，將學生區分為「運算型學生」以及「關係型學生」，其定義闡述如下：

１．運算（operational）型學生：

將「＝」視為一種運算結果的表現，也就是認為「＝」是運算過程與答案之間的一種連結符號。對於等式的判讀，只侷限於典型等式當中。意即認定「＝」的處理必須是由一種左到右的過程，會將等號定義為「答案是…..」、「結果是……」、「要算出答案是……」等。

２．關係（relational）型學生：

在本研究當中，「關係」意義代表的是等號兩邊等量，也可以視為等號兩邊一樣多的概念，也就是以一種等價平衡的關係來判讀等式。對「關係型」的學生來說，等號不再一定是運算結果的連結符號。因此，此類型的學生對於等號的理解可以是「左右兩邊相等」、「左右兩邊一樣多、「左右兩邊一樣大」等，這也意味著學生能夠理解接受等號兩邊數值相等、並有等號兩端數值平衡的概念。

3、等號概念心像：

本研究是根據 Vinner（1983）的定義：所謂的概念心像（concept image）指的是當我們聽到一個詞彙或是概念時，在心中或腦海中對此詞彙或概念名稱所聯結產生的非言辭實體（enity），我們稱之為概念心像。簡單的來說，概念心像指的是與這個概念有關的印象或是經驗的集合體。舉例來說：當我們聽到蘋果這個詞彙，每個人在心中所浮現的意像或是概念聯結可能是不盡相同的；有人對於蘋果的印象與聯結在於他的視覺表徵，所以當提及蘋果時所產生的概念心像為紅色或是綠色；也有人對於蘋果的聯結在於他接觸蘋果時的味覺表徵，所以當提到蘋果時心中所產生的概念心像就是微酸帶點香甜；更有人對於蘋果的印象聯結在於一種心靈影像或是記憶，因此當提到蘋果時心中所浮現的概念心像便是一段回憶或某個具有代表性的人、事、物。

二、典型等式以及非典型等式

在本研究中對於等式所界定的「典型等式」以及「非典型等式」，是參考陳嘉皇（2009）及 Nicole M. McNeil et al.（2006）的分類，其相關的定義闡述如下：

１．典型等式（Standard equations）

是為學生最熟悉的一般等式，意即等號左邊為運算過程，右邊為運算結果的呈現，例如：5＋2＝7、10－4＝6。此種等式是將等號界定在操作符號的學生最為習慣及能夠掌握的等式。

２．非典型等式（Nonstandard equations）

除了等號左邊為運算過程，右邊為運算結果的等式之外，其餘不同呈現方式的等式，在本研究中均界定為非典型等式。其中分典型等式又可以細分為三大類：包括等號右邊為運算過程，左邊為運算結果，例如：7＝2＋5、6＝10－4；或等號左右兩邊皆為運算過程，如：2＋5＝3＋4、10－3＝6＋1；抑或是具有等號自反性的式子，如：6＝6。

三、等號本身具有的特性：

１．等號的「替代性」：

對任意數 a ,b 和函數式 F（x），若 a = b，則 F(a)= F(b)(假設等式兩邊都具有其意義)。在一階邏輯中，不能量化像 F 這樣的表達式(它可能是個函數謂詞)。一些例子：

對任意實數 a，b，c，若 a = b，則 a + c = b + c （這裡 F(x)為 x + c)；

對任意實數 a，b，c，若 a = b，則 a − c = b − c （這裡 F(x)為 x − c)；

對任意實數 a，b，c，若 a = b，則 a × c = b × c(這裡 F(x)為 x × c)；

對任意實數 a，b，c，若 a = b 且 c 不為零，則 a ÷ c = b ÷ c

(這裡 F(x)為 x ÷ c)。

２．等號的「自反性」：對任意量 a，a = a。這個性質通常在數學證明中作為中間步驟。

３．等號的「對稱性」：對任意量 a 和 b，若 a = b，則 b = a。

４．等號的「遞移性」：對任意量 a，b，c，若 a = b 且 b = c，則 a = c。

第四節 研究範圍與限制

本研究採用調查法，並以研究者任教學校的七年級學生為研究對象，主要在探討七年級學生的等號概念以及不同等號概念對學生學習一元一次代數式的影響。在研究中所使用與等號概念有關的測驗是改編自國內研究者許欣鳳（2012）對國小二年級學生所做的等號相關研究；研究中與等號概念相關的典型與非典型等式則是採用陳嘉皇（2009）及 McNeil 等人（2006）的試題與分類，在分類過程中都是由研究者自己評定與分類，容易有研究者主觀因素介入，未來後續研究者或許可改採用評分者間信度；而等量公理與一元一次代數式學習教材則是採用十二年國教中百綱的能力指標為限，以研究者任教學校的七年級學生為研究範圍，而本研究結果是否可以推論到其他對象或其他學校，則應審慎考量。

第二章　文獻探討

根據本研究的動機與目的，本章節將針對研究內容，依序彙整與本研究相關之文獻基礎，並分為三個面向進行相關文獻探討。因此本章將分為三個小節，第一節為「等號概念的發展背景」，主要探討等號的起源、意義與分類；第二節為「等號概念的相關研究」，主要探索具有不同等號意義思考對等號概念形成的影響；第三節為「等號概念與代數學習的關連」，主要以代數的角度出發，去探究其不同等號概念思維與代數學習的關連。

第一節　　等號概念的發展背景

本節主要目的在介紹等號概念的發展背景，並分別針對「等號的起源」以及「等號的意義與分類」，加以陳述與探討。

一、等號的起源

相等(equal) 是數學概念裡頭重要的觀念與關係之一，它意味著一種相等的意涵。而等號（sign of equality）的出現其實與方程式有相當的關連性存在。數學史上，早在數學萌芽時期就已經有了方程式的記載，因此也有了表示相等關係的方法。綜觀內外，在中國古代也有所謂的方程式概念，但它是以「列表」(算籌布列)的方法解決，因此不需要使用到等號，而在記錄書寫上則是以漢字「等」或「等於」表示。在阿默斯紙草書中以「3ℬ」符號來表示相等的概念；在丟番圖中則是以「ᒐ˜」或「ч」為等號；在巴赫沙里殘簡中則是以相當於「pha」的字母為等號代表；一直到了十五世紀，阿拉伯人蓋拉薩迪以「ᐟ」表示相等；雷格蒙塔努斯則以水平之破折號「—」為等號，如1Q et 3 Ꝛ — 30 表示 $x^2+3x=30$；帕喬利亦以破折號為等號，但較長且記於數字之下，如1. co. m̃. 1. ce. de. √β∝ ——— 36 表

示 $x^2-y^2=36$（引自百度百科 http://baike.baidu.com/view/428835.htm）。

等號（sign of equality）最早是出現在西元 1557 年英國雷考特教授（Rebort Record，1510~1558）的勵志石（Whetstone of Witte）一書當中，而這本代數課本也是英國第一本使用「＋」、「－」符號的英文書。Recorde 為了避免重複使用枯燥乏味的「等於」這個介詞，因此創用了「＝」這個符號來取代「等於」。在當時 Record 也認為沒有其它符號可以比「平行而且等長的兩條直線」更適合用來代表「等於」的意涵，因此「＝」又被稱之為 Record's sign。而等於這個符號「＝」的創立，無庸置疑是 Recorde 對數學界最大的貢獻。

然而「＝」這個符號被雷考特創立之後，在當時並沒有被廣泛的接受與使用，它的推廣十分地緩慢。一直到 1631 年，英國的奧特雷德（William Oughtred）出版了一本對數學界極具影響力的書籍－數學之鑰（Clavis Mathematicae），並在書中強調數學符號的重要性，才使得「＋」、「－」、「＝」這些符號成為數學最終通行的標準記號（林炎全等譯，1983）。

二、等號的意義：

等號所表示的最基本意義為「保持式子左右等量」，也就是相等（sameness）的等量關係。在數學上，等號本身具備有替代性（符合等量公理的特性，即：ａ＝ｂ則ａ＋ｃ＝ｂ＋ｃ）、自反性（1＝1、2＝2、3＝3…等符合恆等式型態的式子）、對稱性(若ａ＋ｂ＝ｃ則ｃ＝ａ＋ｂ）和遞移性（若ａ＝ｂ且ｂ＝ｃ則ａ＝ｃ）等性質。

依據 McNeil等人（2006）針對等號概念所作的相關研究分類，將學生對等號概念的認知區分為運算型及關係型。所謂的運算型指的是一種運算定義，代表等號的右邊是一種運算結果；而關係型則是指學生能以平衡的觀點來看待等號左右兩邊的物件。有許多研究發現，不管在哪一種年級階層中都有許多的學生尚未對等號有完備的認識與發展（Baroody＆Ginsburg，1983；Behr，Erlwanger＆Nichols，1980；Kieran，1981）。簡

單地說：學生往往將等號誤解為只是一種運算符號，意即一定要「做某件事情（doing something）」，而非總是將等號視為一種等價或是等量的關係（Behr et al.，1980）。

McNeil 和 Alibali（2006）也曾在其研究中指出，學生通常會依據自身的經驗來詮釋並建構其等號概念，當學生在小學階段初次接觸等號時，因為學習經驗與範疇有限，所以會因課程編排而傾向於將等號解釋定義為運算符號。也正因為國內九年一貫數學領域教材課程綱要的編排以及課程內容的鋪陳沒有對於等號真正的意涵做完善的引導與拓展，所以多數的學童都會直接將等號定義為一種運算符號的代表，而缺乏了等價的關係意義。NcNeil 的論點也和 Seo 和 Ginsburg（2003）所提出的論點不謀而合：這兩位學者認為在小學數學教材中，因為等號常常搭配著算術運算出現，所以學生往往會將等號定義為求得的「總數量」、或運算後的「結果與答案」，而潛移默化地限制了學童對等號真正意涵的理解。根據這些學者的論點，倘若我們持續在這樣的教學模式下學習，學生的確會容易根深蒂固的把等號直接與「運算符號」畫上等號（McNeil＆Alibali，2006）。

三、等號的分類：

在上一小節等號的意義中，我們可以理解等號的基本意涵指的是「保持式子左右相等」，但是在算術當中，等號的使用卻常常是要求學生求出一個最終答案。所以等號在算術中除了具有「保持相等」的意義外，有時也蘊含著「運算」的意義。蔣治邦、謝堅、陳竹村、林昭珍與吳淑娟（2002）都曾在其相關研究中指出等號的意義有二：一為「得到答案」：如「2＋6＝8」式子中，表示「2個和6個和起來，得到的答案是8個」；另一個意義為兩邊一樣大的「等價關係」：如「5＋3＝2＋6」式子中，表示「5＋3」和「2＋6」這兩項經過數量大小的比較活動，可以發現這兩者一樣大的結果。因此，等號可因其在典型等式與非典型等式中而給予不同的分類。

依據陳嘉皇（2008）及Knuth、Stephens、McNeil 與 Alibali（2006）對等號概念的分類法則，將學生對於等號概念的認知區分為「運算型定義」及「關係型定義」。「運算型定義」是指學生只將等號視為運算後與得到結果之間的連結符號，具有宣告結果的意義存在，是故等號後方必須跟隨出現的一個答案或結果。而所謂的「關係型定義」則是指學生能夠將等號視為一種左右兩側等價的關係符號，因此不尋求必須要有結果，只要是兩邊符合關係對等的式子。而許多研究（楊喻惟，2009；黃富麟，2010；潘亨足，2010；劉佩綺，2010；昌秀英，2011）在探討等號概念時，皆根據陳嘉皇（2008）及Knuth、Stephens、McNeil 與 Alibali（2006）等人的分類法，將學生對等號的認知區分成「運算型」以及「關係型」。因此，當本研究探討學生的等號概念時，將參考陳嘉皇（2008）及Knuth、Stephens、McNeil 與 Alibali（2006）等人的分類法，將學生對等號的認知主區分為「運算型」及「關係型」兩種意義來解釋。

第二節　等號概念的相關研究

研究者在此將探討國內外等號概念的相關研究，並分析不同等號概念類型對等號概念形成的影響，並在此小節當中，將等號類型依照陳嘉皇（2008）及 Knuth、Stephens、McNeil 與 Alibali（2006）等人的分類法，把學生對等號的認知區分為「運算型」及「關係型」兩種意義來解釋。

一、「運算型」：將等號視為運算符號

根據國外許多學者的研究發現，不管在哪一種年級當中，都有不少學生對於等號意義理解尚未完全發展完備（Baroody＆Ginsburg，1983；Behr，Erlwanger＆Nichols，1980；Kieran，1981；Rand，2003）。而此種未完備的緣由不外乎學生總將等號認定為一種必須「do something」的運算符號，意即等號的出現就代表著必須要「做某件事情」，而正因為這樣的狹隘認知，學生往往無法將等號進一步認定為等價或是等量的概念（Behr et al.，1980）。McNeil 和 Alibali（2006）曾在他們的研究中指出，學生在詮釋以及建構一些概念的時候，多半都是根據自己本身的學習經驗來做演繹與歸納，當學生在小學初次接觸到等號的時候，因為他們的學習經驗相當有限且狹隘，加上課程編排的脈絡偏向於運算型意義的鋪陳，因此在此階段的學生多半傾向於將等號解釋為一種運算型的符號，鮮少能有學生會將其轉化成一種等價的概念，而正因為這樣的課程編排，導致學生無法對等號產生完備的觀念。

無獨有偶，學者 Seo 和 Ginsburg（2003）也認為在小學數學課程當中，等號常常搭配著算術運算的出現，使得小學生容易將等號定義成為求得「答案」以及「總量」的一種結果連結符號，而忽略了等式左右亦存在著一種等價或等量的關係。也因為初次接觸等號時總是在加減法問題中呈現，進而促使學生更加將等號建構歸納成一種運算結果，因為解決這樣單純加減法的運算問題時，是不需具備等式兩邊等價的概念，僅需針對數字做運算便可得到正確的結果，長期浸濡在這樣的情境中，自然容易使學生

將等號的意義建構成一種單純的運算結果（McNeil ＆ Alibali，2006）。

曾有國外學者在研究中指出，對初次接觸代數的學生而言，他們心中所預期的方程式是一種左邊為單純運算過程，右邊為唯一結果且中間由等號做為連結的一種特定形式，意即本文中所指的典型等式，例如：6＋5＝11（Baroody ＆ Ginsburg，1983）。在早前不少關於等號的研究中，當中學生被要求對「等號」下一個定義時，大多數的中學生對「等號」理解的表現和小學生一樣，均對等號做出運算型的定義，只有極少數的中學生能夠兼及關係型的意義。而這樣的不成熟的等號概念思維不只存在於中學生，更是有可能延續到大學生的階段（Kieran，1981）。Herscovics 和 Linchevski（1994）更在其研究中明確指出：儘管在一般運算式中，學生只將等號視為運算型符號並不會對解題過程及結果造成立即的影響，但在後續的學習過程當中，一旦需要將等號視為關係型的等價概念時，學生就會有所迷惑及認知的障礙存在。而為了驗證這樣的假設，Essien 和 Setati 在 2006 年時曾將研究對象由小學轉移至中學，果不其然發現八年級甚或是九年級的學生多將等號視為一種求解的運算工具符號，較難將等號視為一種比較數量的關係型符號。

二、「關係型」：將等號視為等價關係符號

綜觀內外，其實並非所有的研究結果都對於等號概念存在著負面不樂觀的想法。Knuth、Alibali、McNeil、Weinberg 和 Stephens（2006）就曾在其研究中表示，學生對於等號意義的理解會隨著中學年級的增加而有所拓展，最後終將發展出關係型的等號概念。McNeil 和 Alibali（2006）在探討學生等號意義理解對經驗數學和等號情境產生作用時，預期數學經驗的層次與等號情境會交互影響，因此七年級的學生在單獨或加減法的運算當中，會自然的將等號視為一種運算型符號；而在需要比較數量的等價題型當中，學生也會自然的將等號視為一種關係型的等價符號；而對大學生而言，不管今天面對的是一種什麼樣的題型，因為其本身的等號意義理解

已臻完備，因此都能夠以一種等價的思維來解題。在 McNeil 和 Alibali（2006）的研究中更指出，中學生（研究中指的是七年級學生）的表現可以被用來預測數學經驗的層次與等號情境的互動性。這也呼應了 Izsak（2003）所提出的研究結果，這些學者認為學生在中學階段具有良好的知識背景與組織結構能力，而這樣的能力恰好能夠用來學習並建構較高層次的數學問題，而適時佐以中學階段所發展的邏輯概念，更可用來協助等價關係的建立。藉由這樣的關係，我們更能幫助學生察覺複雜的相似關係，所以從發展學的角度來觀看，中學生比小學生更容易形成等號關係型意義的理解（McNeil，Grandau，Knuth，Alibili，Stephens，Hattikudur ＆ Krill，2006）。Herscovics（1980）和 Kieran（1981）也曾以年齡的觀點來做研究，他們認為 12 到 14 歲的學生即便最初對等號抱持著運算的概念，但經過解說以及訓練過後，學生便會開始對等號建立所謂的等價關係，Kieran 的研究更進一步明確的指出，13 歲是接受等號成為等價概念的最佳過渡時期。

早期在一些國外學者的研究中都曾指出：學生對於非典型等式的方程式容易感到困擾以及混淆，而追根究柢發現，其源自於學生接觸非典型的機會較少（Weaver，1973）。更有研究報告顯示，七年級的學生多半難以將等號視為一種等量等價的關係型符號，但是在等號兩邊都具有運算方程式的等價脈絡之下，便可以將等號視為一種數量比較的等價型意義符號（McNeil ＆ Alibili，2005）。在後續的研究中，等號通常被視為運算後接答案的一種連結符號，這樣的標準情境即為本研究中的典型等式（例如：6＋3＝9），很少被視為兩邊非標準操作情境（例如：3＋6＝4＋5）或其他具有自反性的非典型等式（例如：9＝9），而這些非標準情境中的非典型等式包含了「等號兩邊運算」、「等號右邊運算」、「等號兩邊均不運算」和「不全等」四種，而這些非典型等式往往會比典型等式更容易引發學生理解等號的等價概念（McNeil，2006）。

第三節　等號概念與代數學習的關連

「代數」在中學數學課程裡常被視為一種「廣義算術 generalized arithmetic」（Booth，1988），從引入文字符號開始，到對文字符號施行運算，最後有系統地解決算術四則運算問題，都算是代數的一種範疇。而代數與算術之間有許多共同使用的符號，例如：＋、－、＝；但實際上，這些符號在代數與算術兩者之間的意義卻不盡全然相同。

一、等號意義與學生對於等號的認知

國外學者 Sfard（1991）曾在其研究中指出，當人類在思索一個抽象的數學概念時會有兩種不同層次的面向出現，一個是運算層面的，另一個則是結構層面的。舉例來說:當我們去處理一個情境化的題型時，倘若採取的策略是用一序列的還原法倒回來推算答案，而不是將問題情境或解題方法形式化，只是單純的去推算出結果，那麼在這樣的解題過程裡，數學的概念便是停留在單純的運算過程，然而這樣的還原推算不見得可以解決所有的數學題型。而國內學者謝孟珊（2000）更在其研究中擴展說明：當學生沒有辦法成功地以算術方法解題時，他必須學習將問題形式化，建立方程式，並在方程式左右實際處理運算，這才算是真正進入到代數的階段，對於數學的處理也才正式進入到結構層面。

二、代數與等號學習的關連

Kieran（1989）與 Vergnaud（1997）都曾在研究中表示：學生對於等號概念的學習與理解都將影響往後他如何處理一個代數式。不約而同地，學者 Alibali、Knuth、Hattikudur、McNeil 和 Stephens（2007）也都認為代數學習在數學教育中佔了不可或缺的重要角色，然而若學生對於等號概念理解有限，則終將成為其學習代數的絆腳石。當我們細細檢視方程式在數學中所扮演的本質與角色，事實上，所有代數方程式的操作都必須瞭解等號是一種關係型的表徵（上官瑋茵，2010）。除此之外，等式在學校各階

段的數學課程編排中無所不在，等式的理解在代數的學習中必然扮演著舉足輕重的角色，更確切地說，等式中等號意義的判讀直接或間接的都影響著未來代數的學習成效。Byers 和 Herscovics（1977）認為在學習代數的解題策略時，必須要能夠將等號視為一種等價型的概念，如此才能夠賦與代數學習的意義而非流於一種形式上的記憶。

Chaiklin 與 Lesgold（1984）研究約莫 11 歲左右的學生如何判斷等式是否相等（例如：685－492＋947、947＋492－685、947－685＋492、947－492＋685 中，那些式子是相等的？)，結果發現學生在判斷過程中習慣以「計算出結果」來作判讀，而不是以一種數量相等的關係來研判，這代表著學生尚存留在一種運算型的概念當中，因此面對這樣題型的題目時，無法快速的以等價概念作答。反觀 Knuth、Alibili、Hattikudur、McNeil 和 Stephens（2008）所提出的研究結果，即使是六七年級未正式接觸過代數學習的學生，只要他們具有等價型的等號概念時，他們便可以順利的解決代數方程式類型的數學問題。同時這些學者也提出，若學生想要瞭解並能使用代數來解決數學問題，那麼他們就必須仰賴正確的數學觀念，而其中最重要的觀念之一，便是等號等價的概念。Soh（1994）指出，有些學生認為「2x＋14＝6x」這種方程式是錯的，因為等式的左邊應該要有比較多的未知數。而 Sfard 與 Linchevski（1994）在研究學生解方程式的迷思時也不約而同的發現，學生能處理「3x＋17＝24」這種典型的等式，但是卻無法完全處理像「24＝3x＋17」這種非典型等式，因為學生覺得式子不像它本來應該有的常見的樣子。這些研究再再地說明，學生對等式有其必然的刻板印象，因此學生必須要先理解「等號」的真正意涵，並接受等號的存在是保持一種平衡等價的概念而非總是要計算出一個結果，如此完備了自身的等號概念後，才能真正處理一個代數式子（許欣鳳，2012）。

第三章　研究設計與實施

本研究首部分主要在探究國中七年級學生對於等號意義的理解及其等號概念發展，而研究後半部將聚焦於運算型學生在學習等量公理前後的等號概念擴展情形，並希望透過研究者自編後測研究分析調查，瞭解國中七年級學生是否會因其等號意義認知差異，而在學習一元一次式化簡及一元一次方程式求解時產生不同的迷思概念與錯誤類型。最後透過期末的成就測驗瞭解七年級學生的代數學習成果是否會因其等號概念而有所不同。在本章節中，依本研究之研究目的與待答問題進行研究設計與實施之說明。本章共分四小節，第一節為研究方法與研究對象；第二節為研究步驟與流程；第三節為研究工具；第四節為資料蒐集與分析。

第一節　研究方法與研究對象

杜威（Dewey，1933）曾指出，當一個研究者面對待處理的問題時，其解決程序有五個步驟與階段：遭遇困難與問題、界定和認定困難與問題、提出解決問題的假設與方法、沙盤推演假設的結果、最後進行假設的考驗。而這五個程序也被視為科學方法的基本步驟。一個符合科學精神的研究，應具有系統性、客觀性和實證性三個特徵。調查法是所有量化的科學研究中最常用的方法之一，它是一種有目的、有計劃、有系統地蒐集有關研究對象現實狀況或歷史狀況的方法。而調查法也是科學研究當中最常用的基本研究方法，它綜合運用歷史法、觀察法等方法以及談話、問卷、個案研究、測驗等科學方式，對教育現象進行有計劃的、周密的和系統的了解，並對調查蒐集到的資料進行分析、綜合、比較、歸納。

在所有的調查法當中，蒐集初級資料最普遍被採用的是問卷調查法（Kotler，1998），它是以書面提出問題的方式再蒐集資料的一種研究方法，即調查者就調查項目編制問題組成問卷，分發或郵寄給相關人員，經

由文字引導說明後由受試者填寫答案，然後回收整理、統計和研究，以便研究者能夠全盤的瞭解受試者的現況，從而能針對其現況提出假設再設計相關性的實驗進行驗證。國內多位學者在進行國中學生等號概念的教學研究時，也曾採用問卷調查法以瞭解受試者對於等號意義的認知階段並觀察其對代數方面的學習成效影響（廖學專，2002；楊喻維，2009；劉佩綺，2010；潘亨足，2010），這與本研究首部分探討國中七年級新生的「等號意義與等號概念發展」，並依其對等號概念理解的不同而區分為「運算型學生」及「關係型學生」有異曲同工之妙，因此研究者在本研究第一部份將採用問卷調查法進行研究資料的蒐集。而為了降低樣本學生各種特質的差異，諸如：城鄉差距、學校規模、社經背景等等，在研究者與指導教授討論後決定選取同一所國民中學為本研究之樣本學校。同時為了考量樣本學生選取之可行性及便利性，本研究採非隨機抽樣中的方便抽樣，選取研究者所任職的新竹市立新新國中為研究樣本學校，且為了方便研究者在同一時間進行施測，因此樣本選取時採用立意抽樣的方式在 25 個班級中，選取 20 個班級學生為樣本學生，合計約 660 人接受研究者所自編的「等號意義理解與等號概念認知」測驗調查，透過研究者自編測驗問卷資料的蒐集分析，將學生依其「等號的意義理解」與處理「典型等式」、「非典型等式」的結果與認知概念將樣本學校中的七年級樣本新生區分為「運算型學生」及「關係型學生」。

在過去的研究當中，國內有不少研究者針對國小學童進行等號概念理解與教學的行動研究，而這些研究者均發現等號概念的拓展有助於國小學童正確學習爾後的數學代數知識（陳嘉皇，2009；楊絮媛，2010；昌秀英，2011；許欣鳳，2012）。然而研究者卻時常在教學現場中發現即便上了國中以後，學生的等號概念也並未如預期將隨著時間的增長而有所拓展，以致於學生在國中階段接觸代數以後，往往無法以正確的概念進行解題，或雖能順利解題但卻常常出現令人啼笑皆非的式子，尤其是在一元一次多項式與一元一次方程式中，常常會有等號誤用的情況產生，即便最後結果為

正確解答，但細看其運算式卻常出現前後不等的情況。例如以下兩個例子：

（１）將等號放置在方程式之前

3x+4x−3=2x+7

=7x−3=2x+7

=7x−2x=7+3

=5x =10

=x=2

（２）認為等號必定為結果論

3x+2x+7=5x+7=12

即認定等號之後必定要有一個計算後的結果

探究其迷思根源，在於學生對於等號概念的一知半解而造成往後代數的學習困難與混淆（廖學專，2002；楊喻維，2009；劉佩綺，2010；潘亨足，2010)。追本溯源，學生應當在七年級正式接觸代數前就具備有完整的等號概念，因此，在本研究的第二部分，研究者將把研究過程聚焦於「運算型樣本學生」與「關係型樣本學生」在處理「一元一次多項式」與「一元一次方程式」時的解題策略與等號迷思誤用情況，並透過一元一次式定期評量成果觀察兩組學生的代數學習成果，更希望能透過兩次自編測驗分析：等量公理教學前後「運算型樣本學生」對於等號概念理解的擴展以及等號意義認知的變化，以期有助於教師將來在針對學生學習算術過渡到代數的內容教學，能夠掌握學生的迷思概念並完備運算型學生的等號概念。

第二節　研究步驟與流程

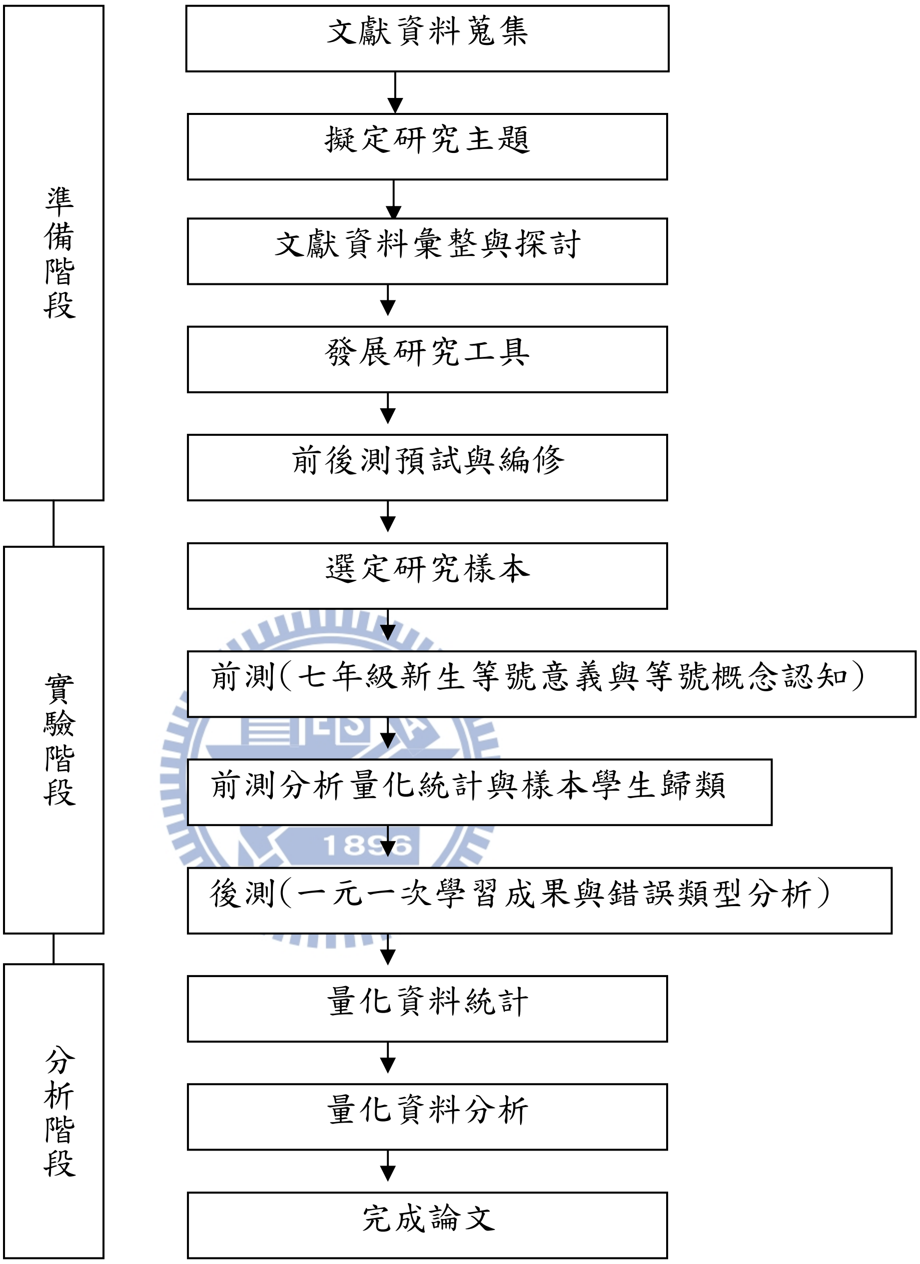

圖 3-2-1 研究流程圖

本研究主要研究目的在於探討國中七年學生對於等號意義的理解與等號概念的發展情形，依照杜威（Dewey，1933）科學研究的方法與精神，研究者將本研究的研究步驟與流程（圖 3-2-1），主要區分為三大階段；階段一是為準備階段：包含了文獻資料的蒐集與彙整、研究主題的擬訂、研究工具的發展與編修；階段二為實驗階段：包含樣本學校與樣本學生的選定、等號意義理解與等號概念發展的前測問卷調查、量化分析統計與樣本學生歸類、以及學習完等量公理後的一元一次學習成果與錯誤類型分析問卷；最後階段三為分析階段：將階段二中的前後測問卷作資料分析探討，並從中探究學生的等號概念類型與學習代數式的迷思。以下研究者將分別依照研究三個階段做詳細描述：

階段一　準備階段　：

（一）文獻蒐集與彙整：

研究者依據過去在教學現場所觀察到的現象以及國內外專家學者的研究，發現學生的等號概念認知在學生學習代數時扮演著舉足輕重的角色，近年來國外學者 Jones、Pratt 和 Tayler（2012）也在期刊上再次對等號作了意義類別的區分與定義，由此可見等號（equal sign）在數學學習與教學鋪陳上的確有值得我們重新深入研究探討之處。故研究者在 2012 年 3 月與指導教授多次討論後，決定將研究主題訂為探討國中七年級新生對於等號意義的理解以及運算型學生學習等量公理前後等號概念認知的拓展情形，並期許藉由研究者自編的試題可以觀察並分析不同等號認知概念的學生在學習代數的迷思概念以及錯誤類型分析，最後透過專家教師所編製的成就測驗觀察不同等號類型的學生在代數上的學習成果。而在研究問題形成後，研究者便著手擬定研究方向、研究目的、以及相關的待答問題。為確認此主題之可行性與重要性，研究者在 2012 年 2 月尚未真正確定研究主題時，便先行蒐集閱讀其相關文獻，以利研究確立後之彙整，並與指導教授作定期討論以確定本研究的範圍與理論基礎。

（二）發展研究工具：

在本研究中，研究者所採取的研究方法為調查研究法，而蒐集初級資料最普遍被採用的便是問卷調查法（Kotler，1998），因此在本研究中所重的研究工具主要為三項：第一部分為研究者自編的等號意義與等號概念認知理解測驗；第二部分為研究者自編的一元一次代數式錯誤類型分析與等號謬用測驗；最後一部分為專家教師所編纂的一元一次代數式學習成就測驗。期許透過這些量化資料彙整分析，可以幫助研究者瞭解國中七年級學生的等號意義理解與等號概念拓展情形。而在發展研究工具的過程當中，研究者也參閱了國內學者潘亨足（2010）、許欣鳳（2012）等人所編製與等號或一元一次代數式相關的試卷，並與國中現職數學教師進行討論，以期完備兩份問卷調查試卷的準確度。

（三）預試與試題修編：

為使本研究的研究工具更趨於完備，研究者在預試前便與多位教學經歷三～五年的現職國中數學教師共同編修試題，並經過專家教師－指導教授的分析與建議後，於 2012 年 5 月初步確立前測：等號意義與等號概念理解的預試試題。為使預試更具有準確性，因此在預試學生的挑選上，研究者採用與正式施測時所選定的樣本學校為基準，隨機挑選 25 個班級中的一個七年級班級學生（2012 年 10 月正式施測時，此班級學生已成為八年級學生）做為預試樣本，以期與正式進行施測時的樣本學生達最小差異。並在預試後挑選三名運算型學生與三名關係型學生：分別依其七年級五次段考成績平均為標準劃分為高、中、低成就，再分別進行晤談並瞭解題目對學生是否有誤導或語意不明之處，以利研究者在正式施測時能將學生因題意誤解而影響作答的誤差降至最低。在預試時研究者原本希望透過題目的引導讓學生描述關於等號的概念心像，如圖 3-2-2 前測問卷第二大題。

當我們提到牛頓，有人會聯想到蘋果、地心引力；當我們提到華盛頓，有人會聯想到櫻桃樹、誠實；那麼當老師提到”等號”的時候，你又會聯想到甚麼呢？或者，等號對你來說，具有甚麼樣的意義呢？請你試著把它寫下來。

當我聽到或看到「＝」、「等號」我會想到：

____

____

____

圖 3-2-2 前測問卷第二大題等號概念心像測驗

但因學生對於概念心像一詞多半感受生澀難懂，無法以白話文詞流暢回答，因此研究者在與指導教授討論後將此題目移除，並將題目更替為學生對於數學的態度測驗，如圖 3-2-3，

對於數學這個科目，我覺得它像哪一種食物？

____

原因：

____

____

圖 3-2-3 前測第二大題數學態度測驗

讓學生透過日常接觸到的食物來比擬心目中對於數學的態度與喜愛程度，藉此題目可使研究者更加瞭解學生對於數學的接受程度，並在其中挑選出適當的個案以利後續研究發展。

關於本研究後測問卷：一元一次代數式錯誤類型分析與等號謬用測驗，研究者編製時謹遵前例，避免冗詞贅字與艱難生詞，以減少受試者的閱讀認知負荷，並於 2012 年 9 月在樣本學校中 25 個八年級班級中隨機挑選一個班級進行預試，經由指導教授再次審閱無誤後，後測問卷於是確立。

階段二　實驗階段　：

（一）實施對象與實施時間：

本研究首部分欲瞭解剛升上國中的七年級新生，對於等號意義的理解及其等號概念發展，為避免七年級新生在尚未接觸正式課程前已有先修其相關課程而影響研究結果，故關於國中七年級新生對於等號意義的理解及其等號概念發展之前置研究將於2012年10月份第一次段考後的早自習時間統一施測。而在本研究中參與研究的樣本學校選擇上，研究者最後選定研究者所任職的新竹市立新新國民中學作為樣本學校。新竹市立新新國民中學在新竹市屬於市區型的大型學校，每個年級班級數有25個班級，每班人數約為29~33名學生，由於地理位置鄰近交通大學、清華大學、新竹大學、食品研究院、工研院、以及新竹科學園區，故家長素質與其社經背景也較為一致。再加上新新國民中學辦學風格多元且特色顯著，所以也有不少重視教育的家長跨區將孩子送到此處就讀。在本研究中為了降低研究時樣本的內部因素差異，並衡量研究進行的時間與地域便利性，因此研究者與指導教授多次討論後共同選定研究者所任職的新竹市立新新國民中學作為樣本學校。並在新新國民中學的新生25個班級中，採非隨機抽樣中的立意抽樣方式，選取時間可配合的20個班級共約660名學生作為樣本學生。

而本研究第二部分希望透過等量公理的教學前後，觀察「運算型樣本學生」等號概念的拓展情形，隨後將研究聚焦於「運算型樣本學生」與「關係型樣本學生」在處理「一元一次多項式」與「一元一次方程式」時的解題策略與等號迷思與誤用情況。因此在第二部分的研究中，研究者將在2012年12月同樣對樣本學校中進行前測的660名樣本學生進行一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念，最後於2013年1月對這660名樣本學生進行一元一次代數式學習成就測驗，希望透過這兩次的自編測驗分析：等量公理教學前後「運算型樣本學生」對於等號概念理解的擴展以及等號意義認知的變化，並分析不同等號概念學生在學習一元一次代數式時的解題策略與學習成效是否會有所差異。

（二）前後測問卷調查：

在本研究當中，研究者將針對樣本學生進行三次與等號概念相關的研究測驗，分別為前測：等號意義理解與等號概念發展測驗、後測：一元一次代數式解題策略與等號概念迷思測驗，以及學期末由數位專家教師所編製的一元一次代數式學習成就測驗。在這三次的測驗當中，研究者將分別分析七年級新生的等號概念與其數學學習成就之相關性，並探討不同等號概念的樣本學生在學習等量公理與一元一次代數式時所產生的迷思概念，最後藉由期末的學習成就測驗去探討不同等號概念對與代數學習之影響。

在本研究中所使用的前測與後測測驗工具為研究者參考國內外學者 McNeil 與 Alibali（2005）、Knuth、Stephens、Alibali （2006）、陳嘉皇（2009）、謝闓如（2010）、昌秀英（2011）、許欣鳳（2012）等人的相關研究後所設計，相關內容與編製過程將於第三節研究工具中詳細說明。

階段三　分析階段：

在本研究當中，前測所進行的等號意義理解與等號概念發展測驗主要是想瞭解學生對於等號認知的現況，因此在首部分的調查研究中，研究者將採用描述性統計的方式，分別針對學生對於等號意義理解的狀況與非典型等式的認知狀況作百分比統計與描述性解釋；第二部分的一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念則是欲瞭解學生在學習完等量公理之後，其對於等號概念的拓展情形，是否能有效從運算型提升為關係型。從這份調查當中，研究者也想探討不同等號概念的學生在面對一元一次代數式時所產生的等號迷思概念為何，因此，第二部分的資料分析亦是採用描述性統計的方式作說明，更想透過此份調查研究探討運算型學生與關係型學生在面對一元一次式化簡時所產生的迷思概念為何？檢測內容如圖3-2-4 所示：

二、李小衡在練習化簡x的一元一次式時，採用了以下方法，請你幫李小衡檢查看看整個化簡的過程是否有錯誤？

$$-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$$

$=-28x+12+35x+25$	…步驟一 同乘分母最小公倍數20
$=7x+37$	…步驟二 同類項合併
$=7x=37$	…步驟三 使用移項法則
$x=\frac{37}{7}$	…步驟四 解得x

口 沒有錯誤

口 有錯誤，我認為在步驟______開始錯誤，應該為________________

圖 3-2-4 後測 第二大題 等號迷思概念測驗內容

最後，研究者想藉由專家教師所編製的一元一次代數式學習成就測驗探討不同等號概念的學生在代數學習上的影響，因此這部分研究者將利用獨立樣本 t 考驗作資料的統計分析。

第三節　　研究工具

本研究旨在探究國中七年級學生對於等號意義的理解與等號概念的發展，與探討不同等號概念的七年級學生在經過等量公理學習後，其對一元一次代數式的解題策略與等號誤用情形。在這個小節當中，將針對研究中研究者所自編的兩份研究工具作詳細說明：分別為研究工具的編製過程、研究工具的內容、研究工具的信度與效度、以及研究工具的使用方式。

一. 國中七年級學生等號意義理解與等號概念發展測驗

（一）等號意義理解與等號概念發展編製過程：

本研究首部分所採用的等號意義理解與等號概念發展測驗，是研究者參考國內外學者 McNeil 與 Alibali（2005）、Knuth、Stephens、Alibali（2006）、陳嘉皇（2009）、謝闓如（2010）、昌秀英（2011）、許欣鳳（2012）等人的相關研究，自行設計「國中七年級新生等號意義理解與等號概念發展測驗」，經過多位任職於教學現場的專家教師討論，以及指導教授編修而成前測初稿（如附錄一），而後研究者再以樣本學校為基準，隨機挑選 25 個班級中的一個七年級班級學生共 29 名進行實際測驗，以了解學生對測驗試題語意描述之接受程度與作答情形，以便研究者做進一步的修正。

在 2012 年 5 月前測初稿施測的過程當中，研究者發現第二大題描述等號概念心像的部分，對於國中七年級學生在作答上具有相當難度，探究其原因為學生多半不瞭解何謂概念心像，即便題幹中有給予例子參考說明，學生多半仍舊對於概念心像一詞一知半解，更無法以文字描述。所以在與指導教授討論過後，研究者將原本試題修更替為學生對於數學的態度測驗，讓學生透過日常接觸到的食物來比擬心目中對於數學的態度與喜愛程度，藉此題目可使研究者更加瞭解學生對於數學的接受程度，並在其中挑選出適當的個案以利後續研究發展以選擇題方式呈現。在第三大題等式正確值的判斷當中，研究者參考陳嘉皇（2009）、謝闓如（2010）、許欣鳳（2012）的研究結果，將學生的等號認知概念依照其「運算型」與「關係

型」思維而編製不同的選項，希望透過兩種不同的解題歷程，可以幫助研究者瞭解學生對於等號概念的思維存在於何種階段。同樣為了更加釐清學生對於等號意義的理解，因為研究者在前測的第四大題中採用勾選的方式讓學生回答心目中等號可能代表的意義為何，透過這個可使研究者與前測第三第五兩大題相互對應，更能協助研究者判定學生的等號類型停留在何種階段。而在第五大題中研究者依循學者陳嘉皇(2009)、謝閭如(2010)、許欣鳳(2012)的測驗試題模式，將「典型等式」與「非典型等式」而其類別分別編製，並在其中融入學生可能常見的等號錯誤迷思類型為誘導選項；最後經過預試發現，學生多半反應第三大題與第五大題的過於類似，最後在與指導教授討論後，採用指導教授的建議，雖然題目類似，但在第三大題中可以清楚的判斷學生對於等號解題的概念式採用運算或是等量推理，因此仍舊決定保留此題型。只將第一大題與第二大題合併為同一大題以方便對照學生先備數學成就與其對於數學喜愛程度的相關性。最後交由指導教授再次審閱後成只有四個大題的正式前測試卷（如附錄二）。

（二）等號概念檢測工具內容

本研究首部分等號意義理解與等號概念發展的測驗工具內容共分為四個大題，第一大題的施測目的主要是想瞭解七年級新生過去的數學學習成就以及其對於數學的學習態度；第二大題的施測目的則是要瞭解學生對於等號的認知存在何種階段；第三大題則是藉由典型等式與非典型等式的區別來判斷學生對於等號左右兩側數值的關係理解，並依據樣本學生的作答內容將其分別歸類為不同類型，最後第四大題則是幫助研究者釐清不同等號概念的學生在處理等式問題是所採用的解題策略為何，透過此大題研究者更能夠掌握過渡型的學生在處理非典型等式的部分會較傾向於哪種解題模式（如附錄二）。

二、國中七年級學生的一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念：

（一）編製過程：

研究者於2012年10月進行完國中七年級學生的等號意義理解與等號概念發展調查後，便著手進行調查結果的統計與分析，並與多位專家教師共同探討不同等號概念學生的迷思概念與解題策略為何，以便於後續一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念的試題設計，同時於11月初完成後測試題的初稿，交由指導教授審視後再進行預試。此次預試則是選取同樣為新竹市大型市區學校民民國中為樣本學校，採用非隨機抽樣的方式選取一個七年級的班級共30名學生進行20分鐘的預試，以瞭解學生對於試題語意的接受程度以及作答情形。在預試的結果中學生多半表示時間充足且題意簡單明瞭，唯獨第二大題的化簡一元一次式題型採開放式作答難以下筆，在與指導教授討論後修訂為（1）增列步驟說明，以及（2）將每一步驟與等號相對應，（3）引導學生找出錯誤的步驟並提供自己的想法，會更利於研究者判斷學生的迷思概念存在哪個步驟，也更能瞭解學生是否能正確判斷等號的意義，如圖3-3-1：

二、李小衡在練習化簡x的一元一次式時，採用了以下方法，請你幫李小衡檢查看看整個化簡的過程是否有錯誤？

$$-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$$

$=-28x+12+35x+25$	…步驟一 同乘分母最小公倍數20
$=7x+37$	…步驟二 同類項合併
$=7x=37$	…步驟三 使用移項法則
$x=\frac{37}{7}$	…步驟四 解得x

口 沒有錯誤

口 有錯誤，我認為在步驟______開始錯誤，應該為____________

圖 3-3-1 後測第二大題：等號迷思概念測驗內容

（二）一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念測驗工具內容：

本研究第二部分的內容是想瞭解在經過等量公理的學習之後，運算型或是過渡型的學生是否能夠拓展其等號概念到達關係型。並透過第二部分的測驗調查，去分析不同等號概念的學生在學習一元一次代數式時產生什麼樣的迷思概念。因此，在第二部分研究者所自編的試卷總共分為三個大題：第一大題為等號的意義認知與理解，此大題的設計目的是希望能瞭解在前測中的關係型與過渡型學生是否能夠提升並拓展其等號概念；第二大題為一元一次式化簡時等號的迷思概念，此大題的設計目的是想瞭解學生能否真正明白等號左右兩邊必須等價的概念；第三大題為一元一次式的化簡與求解一元一次方程式，這個部份的設計目的則是幫助研究者瞭解學生的等號使用時機與解題策略（如附件三）。

三、研究工具的信度與效度：

在前測等號意義理解與等號概念認知測驗形成時，請指導教授和研究團隊：現職專家教師協助檢核研究工具的內容與方法是否符合研究主題，並探討問卷中之題目是否適切完善並切合研究目的與待答問題。經過多次討論指正後提供修正意見，研究者再根據多位專家教師以及指導教授所提供的修正意見消化後，修改等號意義理解與等號認知概念的測驗內容，並同時配合修訂後測的一元一次代數式成就測驗與等號迷思誤用問卷，以形成專家內容效度。而本研究中所採用的問卷是以許欣鳳（2012）的研究問卷為主體並加以修改題目數字，試卷信度分析 Cronbach's α係數為.759，同樣地，後測一元一次式錯誤類型分析與等號迷思概念測驗也是商請製導教授與研究團隊協助檢核研究工具的內容與方法是否合乎研究主題，以其符合專家內容效度，此試卷Cronbach's α係數為.801。

四、研究工具的使用

本研究以等號意義理解與等號概念認知測驗作為研究者初步瞭解國中七年級新生對於等號概念理解情形之工具，其測驗結果將作為學生學習完等量公理以及一元一次代數式學習教學成效參考。在樣本學生尚未接觸一元一次代數式時先進行等號意義理解與等號概念認知問卷測驗調查，探討受試者對等號意義的理解以及對等號兩邊數字間關係的認知情形。隨後研究者在依據受試者的作答內容將受試者區分歸類，以瞭解其等號概念的發展情形及迷思概念，作為後測試題編修與教學之參考。等受試者學完等量公理以及一元一次代數式後再進行一元一次代數式錯誤類型分析與等號誤用測驗，並將研究聚焦於運算型學生的作答情形，再將受試者前後測驗結果加以分析比較，以分析不同等號類型學生在學習完等量公理以及一元一次代數式之後，其等號概念的轉化拓展情形與學習效果，藉此瞭解等號概念對代數式學習之影響，以供其他教學現場教師及後續研究者參考。

第四節　資料蒐集與分析

本研究以量化調查研究法為主，並依據研究目的以及實際需要進行資料的蒐集與分析，其資料的蒐集方法與分析將如下所述：

一、量化資料的蒐集：

本研究中所採用的前測問卷：等號意義理解與等號概念認知測驗，是依據本研究的研究目的，並參考 McNeil 和 Alibali（2005）、Knuth 等人（2006）、陳嘉皇（2009）、謝閨如（2010）、昌秀英（2011）、許欣鳳（2012）等國內外多位學者的相關研究並經由指導教授審閱後所編製而成。其前測問卷調查的目的在於瞭解國中七年級學生的等號意義理解與等號認知概念存在何種階段，以利研究者在後續的研究中可以依受試者不同的等號概念加以探討其代數式的學習成就，與其一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念。而在本研究中研究者為了減低受試者進行測驗時空間與時間的誤差，因此，所選取的 660 位樣本學生都在統一的時間進行施測，而前後測的施測時間均為 20 分鐘。

二、資料的分析

本研究中主要以調查研究法為主，因此在前測：等號意義理解與等號概念認知測驗與後測：一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念資料的分析上將採用描述性統計的方式，將國中七年級學生初步分類後，依照其等號概念的發展不同，作前後測的百分比分析比較，並探討不同等號概念的學生，在面對一元一次代數式時所可能產生的迷思概念與解題策略為何。而研究最後一部份則欲探討不同等號概念的學生，在一元一次代數式學習上的表現有何差異，此部分將利用獨立樣本 t 考驗的結果作說明。爾後將依序就測驗內容以及區分歸類標準作詳細說明：

（一）前測：等號意義理解與等號概念認知測驗

第一大題：對於等號「＝」意義的理解與認知

透過此部分的問卷測驗調查，希望能夠瞭解七年級學生對於等號意義的理解與認知情形是處於「運算型」或「關係型」，此測驗主要參考學者許欣鳳（2012）年所編製的測驗，內容如圖 3-4-1 所示：

一、35 + 47 = 82 是一個加法算式， 其中「 = 」是等號：
以下是「 = 」所代表的可能意思，只要是你認為正確的，都可以在□中打「V」。
□ㄅ. 答案是… □ㄆ. 左右兩邊相等 □ㄇ. 會得到…
□ㄈ. 連接 35 + 47 與答案 82 □ㄉ. 結果是… □ㄊ. 兩邊的數量一樣大

圖 3-4-1 等號意義理解與認知測驗內容

在此測驗當中，選項ㄅ、ㄇ、ㄈ、ㄉ均代表著視等號為「運算型」意義，另外選項ㄆ、ㄊ則意味著視等號為「等價」、「關係型」意義。若填答時只選ㄅ、ㄇ、ㄈ、ㄉ或其中部分選項者，研究者將此類型學生定義為運算型學生；若填答時選擇ㄅ、ㄇ、ㄈ、ㄉ與ㄆ、ㄊ其中部分選項時，則研究者將此類型學生定義為過渡型學生；若填答時能夠選擇所有選項者，則研究者將此類學生定義為關係型學生。

第二大題：非典型等式與等號基本性質的判斷

此部分試題設計是想瞭解學生在典型等式與非典型等式之判別情形以及能否理解等號所具有的一些基本性質。在試題的設計上需要學生先行判斷等式寫法是否正確，並選出其所認為的正確運算結果，總計共有 5 個小題。在問卷中 5 個小題皆採用非典型等式的類型佈題。在第 1、2 小題當中「＝」左邊均為數字且「＝」右邊為一個運算的過程，題目如圖 3-4-2：

1.( )　48＝43＋5，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 43＋5＝48　②正確　③錯誤，應該是 48－43＝5

2.( )　32＝38－6，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 38－6＝32　②錯誤，應該是 38－32＝6　③正確

圖 3-4-2　非典型等式測驗內容

而第 3 小題則為等號本身自反性概念(即 A＝A 的型態)，題目如圖 3-4-4：

3.( )　36＝36，這個算式正確嗎？

①正確　②錯誤，應該是 36－36＝0　③錯誤，應該是 36＋0＝36

圖 3-4-3　等號的自反性測驗內容

最後第 4 小題為等號對稱性的運算式，以及第 5 小題為等號的等價概念測驗，希望學生能夠透過等價概念來進行判斷，而非總是固著於單純的運算模式，其題目如圖 3-4-4：

4.( )　35＋15＝35＋15，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 35＋15＝50　②錯誤，應該是 35＋15＋15＝65

③正確　④錯誤，應該是 35＋15＋35＝85

5.( )　7＋8＝12＋3，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 7＋8＋3＝18　②正確

③錯誤，應該是 7＋8＝15　④錯誤，應該是 7＋8＋12＝27

圖 3-4-4 等號的對稱性與等價概念測驗內容

第三大題：等號意義理解與其在運算上的運用

　　此部分試題設計主要是為了要幫助研究者再次釐清學生的等號概念到底是存在哪種階段，透過學生的答題模式可以瞭解學生在面對一個等式時所採用的解題策略是屬於關係型策略或是運算型的策略，如圖 3-4-5：

四、老師出了一個題目：
36＋12＝35＋(　　)，請問(　　)裡的答案是多少？
有四個同學提出了自己的想法，哪些同學說法是正確的，請在□中「V」。

口 維維的想法：因為36＋12＝48，所以(　　)裡的答案是「48」

口 盛盛的想法：因為36＋12＋35＝83，所以(　　)裡的答案是「83」

口 琪琪的想法：因為36＋12＝48，所以35＋(　　)也是48，因此(　　)裡的答案是「13」

口 佩佩的想法：因為36比35大1　，所以12要比(　　)小1，等號兩邊才會一樣大，因此(　　)裡的答案是「13」。

圖 3-4-5 不同等號概念的解題思維測驗內容

在本研究前測等號意義理解與等號概念認知問卷調查當中，第一大題的施測目的是「瞭解樣本學生對等號意義的理解」，依據樣本學生在第一大題的作答情況，研究者將樣本學生對等號意義的理解區分為「A運算型」、「B過渡型」及「C關係型」三種類型，而此分類法則是參考國內學者陳嘉皇（2009）、謝閨如（2010）、許欣鳳（2012）在對國小學童作類似等號概念測驗時所選用的分類標準。

在本研究當中，如果樣本學生在第一大題當中所勾選的答案未含有ㄆ或ㄊ，且第二大題全部判斷錯誤或第二大題部分判斷錯誤且第四大題僅採用琪琪運算型解題想法者，研究者將這些受試者歸類為「A 運算型」；倘若樣本學生第一大題所勾選的答案含有ㄆ和ㄊ，且第二大題全部判斷正確者，研究者則將其歸類為「C關係型」，其他樣本學生各種不同的答題狀態則統一歸類為「B過渡型」。而在本次研究的前測問卷調查中，總計共有 660 名樣本學生參與問卷調查，其填答的選項與等號概念對應之類型如表 3-4-6 所示：

表 3-4-6 等號意義理解類型分類

<table>
<tr><th>第二大題勾選
類型
第三大題作答</th><th>ㄅ、ㄇ、ㄈ、ㄉ選項</th><th>含有ㄆ或ㄊ選項</th><th>同時含有ㄆ和ㄊ選項</th></tr>
<tr><td>全部錯誤</td><td>A運算型</td><td rowspan="3">B過渡型</td><td rowspan="2">B過渡型</td></tr>
<tr><td>部分正確</td><td rowspan="2">B過渡型</td></tr>
<tr><td>全部正確</td><td>C關係型</td></tr>
</table>

其次關於本研究中，研究者對國中七年級新生等號意義理解與等號概念認知的類型與描述說明如表 3-4-7：

表 3-4-7 等號意義理解與等號概念類型與描述

等號意義之類型	等號認知概念類型分析說明
A運算型	受試者對於等號意義無法正確理解或對等號沒有左右一樣大、等價的概念，且完全無法接受非典型等式，更不瞭解等號的對稱性與自反性等基本性質，這類型受試者對於等號概念的認知僅存在初始階段的「運算性」意義。
B過渡型	受試者對於等號意義無法完全正確理解、對等號可能缺乏兩邊等價的概念，或無法完全正確判斷等號的基本性質。此類受試者對於等號雖有一定程度的理解但不全然完備，所以無法完全正確判斷非典型等式。又或者受試者對於等號只有運算認知，但能部份或完全接受非典型等式。對於這類型的受試者來說，他們對於等號概念有「部分等價關係」意義。
C關係型	受試者對等號意義與概念趨於完備，具有等價概念與瞭解等號基本性質，並且能正確判斷非典型等式，對等號概念正確存在「等價關係性」意義。

（二）一元一次代數式錯誤類型分析與等號迷思概念：

第一大題：等號意義的認知與理解

在後測的第一大題當中，主要是參考前測第二大題的佈題方式，依據學生在此大題的作答結果可觀察學生在學習完等量公理之後，其等號概念是否能夠順利由運算型或過渡型拓展至關係型，如圖3-4-8所示：

$3+7x=17$ 是一個 x 的一元一次方程式，請問在此方程式中，等於「＝」所代表的意思有哪些是正確的?請在口中打勾「Ｖ」
口 $3+7x$ 的答案是…　口等號左右兩邊會相等　口 $3+7x$ 會得到…
口 $3+7x$ 的結果是…　口等號兩邊的值一樣大

圖 3-4-8 後測第一大題：等號的意義認知與理解

在本研究中，若樣本學生只勾選（1）$3+7x$ 的答案是…（2）$3+7x$ 會得到…（3）$3+7x$ 的結果是…此三種選項或這三種選項其中一種，而不勾選等號左右兩邊會相等或是不勾選等號兩邊的值一樣大，那麼在第二階段當中研究者將其歸類為運算型學生，反之，若學生全部選項皆勾選時，則在本研究中將定義為關係型的學生。在此大題中，研究者除了作百分比統計外，也將觀察前測時運算型或過度型的學生是否能夠透過等量公理的學習而拓展本身的等號概念至關係型。

第二大題：等號的迷思概念與誤用

在後測的第二大題當中，研究者利用教學現場所觀察到的學生迷思概念佈題，透過這個題目，研究者希望能夠瞭解學生是否能真正理解等號左右物件必須等價的概念，也希望觀察運算型學生是否因為等號概念的不完全，而傾向於面對一個等式的時候總是認為一定要有一個最後的計算結果，如圖3-4-9所示：

二、李小衡在練習化簡x的一元一次式時，採用了以下方法，請你幫李小衡檢查看看整個化簡的過程是否有錯誤？

$$-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$$

$=-28x+12+35x+25$	…步驟一 同乘分母最小公倍數20
$=7x+37$	…步驟二 同類項合併
$=7x=37$	…步驟三 使用移項法則
$x=\frac{37}{7}$	…步驟四 解得x

口 沒有錯誤

口 有錯誤，我認為在步驟______開始錯誤，應該為________________

圖3-4-9 後測第二大題：等號的迷思概念與誤用測驗內容

在本研究中，若樣本學生勾選沒有錯誤，或是認為在步驟三移項法則時才產生錯誤，這代表學生對於等號概念存留在運算型概念，認為一個含有等號的式子出現必定要尋得一個最後的計算結果，因此對於一元一次式與一元一次方程式的判讀是有所困惑的。若樣本學生勾選有錯誤且能正確回答在第一步驟就發生了錯誤，那麼代表學生能夠瞭解等號左右物件必須等價的概念，此為關係型學生面對代數式時的檢核表現。

第三大題：等號誤用與錯誤類型分析

在第三大題當中，研究者設計了 2 個一元一次式的化簡題型與 4 個一元一次方程式的求解題型，在題幹當中研究者不刻意去強調化簡或是求解，主要是希望能透過此大題瞭解學生對於一元一次代數式的判讀與解題時所犯的錯誤類型，並想觀察學生在解題過程中等號的使用情形，是否能夠確實瞭解等號使用的時機，如圖 3-4-10 所示：

（1）$1-3=-\frac{3}{2}x$	（2）$13-2x-3=-x$	（3）$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=-2x+\frac{3}{4}$
（4）$5x+3=3+5x$	（5）$4x-\frac{x}{4}-\frac{-8}{5}+\frac{7}{3}$	（6）$\frac{5x+4}{3}-\frac{-2x-3}{5}$

圖 3-4-10 後測第三大題：等號誤用與錯誤類型測驗內容

此大題的佈題主要是對照前測第三大題的佈題方式，分別將典型等式與非典型等式的概念融入，並加入等號自反性的題目為主要觀察項目之一。此外，在第三大題的前 4 小題當中，研究者將觀察學生的等號出現時機是否恰當，而 5 與 6 兩小題則是與觀察學生是否能夠理解等號左右在運算過程中必須維持等價的概念。

（三）一元一次代數式學習成就測驗：

本研究最後一部份的一元一次代數式學習成就測驗為新新國中的數學期末段考試卷，由數位專家教師所共同編纂。透過前測結果的分類，研究者想利用獨立樣本 t 檢定去探討運算型學生與關係型學生在一元一次代數式學習時的學習成效，是否有顯著差異。

第四章　研究結果與討論

根據本研究目的與待答問題，本章將分成三大部分做討論：第一節為初探七年級學生的等號概念與其對等號意義的理解；並同時探討不同等號概念的學生對典型等式與非典型等式的判讀；第二節將觀察運算型學生在經過等量公理學習後，是否能順利拓展其等號概念的發展；同時分析不同等號概念的學生在處理一元一次代數式時所產生的迷思概念分別為何；第三節研究者將利用獨立樣本 t 考驗去探討不同等號概念的學生在一元一次代數式學習成果上所產生的差異。

第一節　初探七年級學生的等號概念

本研究首部分的研究目的為初探七年級學生對於等號意義的理解，為方便研究資料的蒐集，研究者採取便利取樣的方式，選定研究者所任教的新竹市都會型學校為母群體，並以七年級 25 個班級中的 20 個班級學生為樣本，合計樣本人數為 660 人，進行研究者自編的等號概念測驗問卷調查，為使施測時之誤差與干擾因素達到最小，因此施測時間統一為 2012 年 10 月某個早自修時間，作答時間為 20 分鐘。

壹、七年級學生對等號概念認知與等號意義理解的情形

根據研究者所自編的等號概念測驗內容，第一大題為數學符號「＝」的意義理解與認知，此大題的主要目的在探討學生對於等號意義的理解與認知情形，題目內容如圖 4-1-1 所示。

一、35＋47＝82 是一個加法算式， 其中「＝」是等號： 以下是「＝」所代表的<u>可能意思</u>，只要是你認為正確的，都可以在□中打「V」。 □ㄅ. 答案是…　　□ㄆ. 左右兩邊相等　□ㄇ. 會得到… □ㄈ. 連接 35＋47 與答案 82 □ㄉ. 結果是…　　□ㄊ. 兩邊的數量一樣大

圖 4-1-1 等號意義理解與認知第一大題測驗內容

在本大題中，若學生作答時所勾選的選項僅有ㄅ、ㄇ、ㄈ、ㄉ，且同時不含有ㄆ和ㄊ兩者，則研究者在研究中將這類學生對於等號認知歸類於

「運算型」；若學生作答時勾選的選項同時含有ㄆ和ㄊ，那麼研究者在研究中將其對於等號認知歸類於「關係型」；除此之外，若學生作答時所勾選的選項僅含有ㄆ或ㄊ其中一項，那麼代表此類型學生對於等號的認知介於「運算型」和「關係型」之間，像這類對於等號意義有部分相等概念但是並未完全接受等價關係的學生，在本研究中泛稱為「過渡型」。而本研究在此大題中所採用的分類方法，則是參考以往國內研究者對國小學生進行等號相關研究時所編製的分類法則（陳嘉皇，2009；呂秀英，2011；許欣鳳，2012）。研究者將受測樣本學生在第一大題的作答情況統計如表4-1-2。

表 4-1-2 學生在等號意義與認知的表現情況

學生所勾選的選項	人數	百分比	對等號的認知
不含有ㄆ、ㄊ	257	41%	「運算」意義
含有ㄆ或ㄊ之一	61	10%	介於「運算」意義和「關係」意義之間
同時含有ㄆ和ㄊ	305	49%	「關係」意義
總計	623	100%	

從表 4-1-2 的統計結果顯示：參與等號意義理解與等號概念測驗的七年級學生當中，以關係型的學生共 305 人為最多數，佔測驗人數的 49%；其次為運算型的學生共 257 人，佔測驗人數的 41%，最後是介於運算型與關係型中的過渡型學生共 61 人為最少數，佔總測驗人數的 10%。由此統計結果我們可以知道：對國中七年級學生來說，只有將近五成的學生可以理解等號除了運算的意義存在外，更重要的是一種等價的概念，這與國內潘亨足在 2010 年對國中七年級學生所做的等號概念調查研究結果不謀而合。曾有國外研究者針對六、七、八年級學生調查其等號概念，發現等號概念停留在運算型的學生，六年級約有 53%、七年級約有 36%、同時八年級學生約有 52%（Knuth，2006），這樣的研究結果也與研究者所調查七年級運算型學生比例（41%）相去不遠。此外，國內也有不少研究者針對各階層學生的等號概念加以研究，發現對各階層的學生而言，能夠真

正理解等號具有等價概念的學生，僅僅只佔少數（陳嘉皇，2008；楊絮媛，2010；潘亨足，2010；昌秀英，2011；許欣鳳，2012），如表 4-1-3 所示：

表 4-1-3 國內各研究者等號概念研究百分比例表

研究對象	樣本人數	運算型學生百分比	研究學者
二年級學生	223 人	62%	許欣鳳，2012
二年級學生	783 人	54%	昌秀英，2011
三年級學生	165 人	50%	楊絮媛，2010
六年級學生	342 人	69%	陳嘉皇，2008
七年級學生	203 人	50%	潘亨足，2010

而這些研究結果與研究者所調查的結果如出一轍，更服膺了國外許多學者的論點：不管在哪一種年級與階層的學生當中，都有許多人尚未對等號有完備的認識與發展（Baroody＆Ginsburg，1983；Behr，Erlwanger＆Nichols，1980；Kieran，1981）。

綜觀國內外，其實有不少研究者對於等號的發展提出更進一步的見解：Knuth、Alibali、McNeil、Weinberg 和 Stephens（2005）曾在其研究中表示，學生對於等號意義的理解會隨著年級的增加而有所拓展。這樣的論點，由表 4-1-3 中似乎可循見其脈絡，在加上本研究的調查結果：七年級運算型學生佔 41%，似乎也更進一步的支持著等號概念會隨年級增長而有所拓展的論點。但若細細推敲其研究內容，不難發現運算型學生隨年級增加而看似降低的比例，實際上藏有耐人尋味的端倪。在本研究中的等號概念分類法則與檢驗試題，均是參照上述學者在作等號相關測驗時的編製方式，唯一不同的地方有兩點：昌秀英（2011）在等號的分類法則中，只要學生沒有選填「左右兩邊相等」、或是「兩邊的數量一樣大」的選項時，一律將這樣的學生歸類於運算型，也就是說在昌秀英（2011）的等號概念研究中所採用的是二分法原則，只將學生的等號概念類型分為運算型與關係型；因此若研究者採用此二分法歸類時，那麼本研究中七年級學生的等號概念屬於運算型的比例將提高至 51%，與昌秀英（2011）所調查

二年級運算型學童佔 54%，楊絜媛（2010）所調查三年級運算型學童佔 50%結果相比，並未如國外學者 Knuth、Alibali、McNeil、Weinberg 和 Stephens（2005）所言，等號概念會隨著年級的增長而拓展，也未如國內楊喻惟（2009）的調查結果顯示不同年級對等號概念的認知有顯著差異，並會隨著年級的增加而使得關係型的學生比例增高。因此，研究者認為這樣的論點是有待商榷與再次探討的。

其次，陳嘉皇在 2008 年的研究中，使用單一選擇的模式研究 342 位臺南縣國小六年級學童對等號意義的解釋，其內容如圖 4-1-4 所示：

在「5＋4＝9」的數學運算式中，選出你認為對於「＝」的正確解釋：
（1） 「＝」表示兩邊的數量是相等的或一樣的意思
（2） 「＝」表示 5＋4 的答案加起來總共是 9 的意思
（3） 「＝」表示任何式子是等於或一樣意思
（4） 「＝」表示進入到下一步驟的意思
（5） 不知道

圖 4-1-4 陳嘉皇等號意義解釋的題目內容

其中選項（1）為關係型解釋，選項（2）為運算型解釋，選項（3）或（4）為脫離情境相等的解釋，選項（5）則為不知道或無反應。在陳嘉皇的研究結果中有 69%學童為運算型，14%的學童為關係型，與本研究結果中運算型學生佔 51%，關係型學生佔 49%略有不同，探究其可能的差異原因為：陳嘉皇（2008）的研究是採用單一選擇題模式，學童僅能依其對等號的認知選擇唯一選項，不能同時選填兩個以上的選項，但實際上等號的運算或關係意義並非是單一的、相悖的，應當是可以兩者並存的意義（蔣治邦、謝堅、陳竹村、林昭珍、吳淑娟，2002）。因此，研究者認為在本研究中所採用的多選方式會較貼近學生真實的等號概念，也能夠解釋為何在陳嘉皇的研究中，運算型的學生比例會遠高於國內其他研究者的比例甚多。

根據97課綱的內容，國小二年級學生必須要能夠建立等號兩邊數量相等的概念，但是由昌秀英（2011）與許欣鳳（2012）的研究中不難發現，由於國內課本的編排方式偏向於運算型的概念，因此國小二年級學童大約都有將近五~六成的學生，對於等號意義的理解是無法達成此目標的。在楊絮媛（2010）、陳嘉皇（2008）、潘亨足（2010）與研究者的研究中更可以發現，即便學生到了國小中高年級，甚或是到了國中階段，仍舊有將近五成的學生對於等號的意義無法達到完備成熟的狀態，也再次說明了學生的等號概念不一定會隨著年級的增加而有所拓展。

研究者根據國內外學者的研究結果推測，學生對等號意義的發展是有具有層次性的，首先是透過課程的編排建立「運算型」意義，若能夠適當在教學情境中加入非典型等式的佈題與練習，便可以將學生的等號概念提升為「等價關係」意義（Saenz-Ludlow & Waldgrave， 1998）。但是要能夠順利提升學生的等號概念到「關係型」，其實會比「運算型」更具有困難性（Warren， 2004），因此必須透過適當的教材與課程安排才能夠建立學生正確且完備的等號概念，也才能建立學生多元解題策略與強化等號概念的轉化（陳嘉皇，2008；姚如芬，2011；許欣鳳，2012）。

貳、七年級學生對於等號特性與非典型等式的判讀情形

在研究者自編的等號意義理解與等號概念認知測驗中，第二大題為非典型等式與等號基本特性的判讀，研究者設計了 5 個單選題型的選擇題，目的是在判斷學生對於非典型等式的理解情形以及是否能夠瞭解等號的一些基本特性，由研究結果可以推知：對七年級的學生而言，有八成左右的學生都可以瞭解並接受非典型等式的佈題，唯獨在第 3 與第 4 小題中對於等式的自反性概念題目，表現情形不如其它小題。研究者將本研究的測驗內容與研究結果百分比整理如表 4-1-5：

表 4-1-5 非典型等式測驗內容與學生表現統計情形

題號	試題內容	答對人數	答對率
1	48＝43＋5，這個算式正確嗎？ ①錯誤，應該是 43＋5＝48 ②正確 ③錯誤，應該是 48－43＝5	525	84%
2	32＝38－6，這個算式正確嗎？ ①錯誤，應該是 38－6＝32 ②錯誤，應該是 38－32＝6 ③正確	517	83%
3	36＝36，這個算式正確嗎？ ①正確 ②錯誤，應該是 36－36＝0 ③錯誤，應該是 36＋0＝36	245	39%
4	35＋15＝35＋15，這個算式正確嗎？ ①錯誤，應該是 35＋15＝50 ②錯誤，應該是 35＋15＋15＝65 ③正確 ④錯誤，應該是 35＋15＋35＝85	491	78%
5	7＋8＝12＋3，這個算式正確嗎？ ①錯誤，應該是 7＋8＋3＝18 ②正確 ③錯誤，應該是 7＋8＝15 ④錯誤，應該是 7＋8＋12＝27	535	86%

從表 4-1-5 可以發現，七年級學生對於非典型等式的判讀以及等號自身的特性是有一定程度的認知，這與謝閫如（2010）、昌秀英（2011）、許欣鳳（2012）對國小二年級學童所作的調查結果差異甚大，如表 4-1-6：

表 4-1-6 國小二年級學童與國中七年級學生對非典型等式的判讀情形

題目類型	謝閫如	昌秀英	許欣鳳	本研究
a＝b＋c	40＝10＋30	7＝3＋4	48＝43＋5	48＝43＋5
答對率	63.1%	45%	17.5%	84%
a＝b－c	36＝48－12	無此類型	32＝38－6	32＝38－6
答對率	54.1%	無	17.5%	83%
a＝a	41＝41	5＝5	36＝36	36＝36
答對率	30.3%	60%	23.8%	39%
a＋b＝b＋a a＋b＝a＋b	43＋35＝35＋43	4＋5＝5＋4	35＋15＝35＋15	35＋15＝35＋15
答對率	25.4%	70%	21.1%	78%
等號兩邊皆運算式的等式	14＋12＝37－11	2＋3＝15－10	7＋8＝12＋3	7＋8＝12＋3
答對率	25.4%	59%	22.9%	86%

由表 4-1-6 可以發現：國小二年級學童在典型等式的判讀中表現情形並不如國中七年級學生的表現，探究其可能原因有以下兩點：

1. 研究者比較謝閨如（2010）與許欣鳳（2012）的論文時發現，謝閨如的施測時間點是在二年級學童即將升上三年級的時候，而許欣鳳則是在一年級剛升上二年級的時候施測，因此雖同列為二年級的學生，但顯然年紀較大的學生較能夠接受等號左邊為運算式的非典型等式，因此當研究樣本為七年級學生時，更使學生的接受程度提高到八成。
2. 研究者比較昌秀英（2011）與許欣鳳（2012）的論文時發現，同樣施測時間點中的二年級學童表現落差甚大，探究其原因為昌秀英（2011）試題中所採用的數字較小，對於國小二年級學童而言較容易計算與判斷，並且在昌秀英（2011）的歸類中，只要學生認為答案正確就納入答對率的計算當中，因此能夠順利判讀的比例相對於許欣鳳（2012）高出許多。而同樣的試題對於七年級學生而言，不管運算過程在左邊或是右邊，學生多半都能輕易的計算出結果而做比較，因此在判讀上可能只會考慮計算結果而直接勾選答案正確，而不見得會去思考題目的佈題方式是否恰當，因此在第 1、2、5 小題中的答對率會因為可以計算而明顯偏高，而第 3 小題自反性沒有任何可以計算的過程就反而答對率偏低。這樣的研究結果也是與許欣鳳（2012）全然相反之處。而或許學生年級對數字的接受度與計算能力，也是往後作等式判讀測驗需納入考量之處。

此外，研究者從受測學生的第一大題與第二大題答題統計資料發現，有些七年級學生雖然能夠在第一大題中勾選出ㄆ和ㄊ兩種具有等價關係的選項，但是到第二大題時卻不見得能夠真正應用在解題中，因此根據研究者的調查結果顯示：能夠真正理解等號概念與等號意義並正確判讀非典型等式的學生，實際上只有 175 人，佔受測樣本的 28%，其次可以理解等號概念也能夠部分判斷非典型等式與等號特性的學生有 122 人，佔受測樣本的 20%；而在第一大題中歸類為運算型的樣本學生也並非完全無法

理解非典型等式的概念，能夠完全答對或部分答對第二大題的學生也分別有 39 與 235 人，其詳細分佈結果如表 4-1-7：

表 4-1-7 七年級學生在第一、二大題的答題情形

學生在第一大題勾選的選項	人數	百分比	對等號的認知	學童在第二大題的答題結果	人數	百分比
不同時含有ㄆ、ㄊ	318	51%	運算型意義	全部答對	39	6%
				部份答對	235	37%
				全部錯誤	44	7%
同時含有ㄆ和ㄊ	305	49%	關係型意義	全部答對	175	28%
				部份答對	122	20%
				全部錯誤	8	1%
總計	623	100%			623	100%

由表4-1-5與4-1-7研究結果可以知道，學生對於等號的認知情形與實際上解題中的應用是有一定程度差異存在（許欣鳳，2012），尤其是在等號的自反性測驗當中更為明顯。因為學生往往將等號誤解為只是一種運算符號，意即一定要「做某件事情（doing something）」，而非總是將等號視為一種等價或是等量的關係（Behr et al.，1980），因此學生對於等號自反性測驗的題目普遍來說接受度都偏低。此外，Seo 與 Ginsburg（2003）曾指出：若學生將等號視為運算符號的觀點，會容易限制學生的數學思考層次，若學生拒絕非典型的等式的存在，也會干擾學生對數學更深一層的理解。因此如何提升學生的等號概念並落實到解決問題層次上，似乎也成為我們值得去思考的問題。

第二節 運算型學生的等號拓展與迷思概念

國內有不少學者都認為等號概念的拓展能夠強化學生在代數上的學習（陳嘉皇，2009；楊絮媛，2010；昌秀英，2011；許欣鳳，2012），因此研究者在探討七年級學生的等號概念與等號意義理解後，將接續探討「運算型」學生在經過等量公理學習後，其等號概念的拓展情形，並同時分析不同等號概念的七年級學生，在處理一元一次代數式時所採用的解題策略以及所產生的等號迷思概念有何差異？本研究第二部份的資料蒐集是採用研究者自編的一元一次代數式錯誤類型分析與等號誤用測驗，施測時間為 2012 年 12 月 21 日的早自修，作答時間為 20 分鐘，受測樣本學生為與前測相同的樣本學生，合計共 660 位學生。

壹、 透過等量公理學習對運算型學生等號拓展之情形

根據研究者自編的一元一次代數式錯誤類型分析與等號誤用測驗內容，第一大題為等號意義理解與等號概念測驗，其佈題方式完全比照前測調查時的佈題方式，只有將題幹中的 35＋47＝82 是一個加法算式改為 3+7x=17 是一個一元一次方程式，其內容如圖 4-2-1 所示：

(1) 3+7x=17 是一個 x 的一元一次方程式，請問在此方程式中，等於「=」所代表的意思有哪些是正確的？請在口中打「V」。	
□ 3+7x 的答案是	□ 等號左右兩邊一樣大
□ 3+7x 的結果是	□ 等號兩邊的值是相同的
□ 3+7x 會得到…	

圖 4-2-1 一元一次代數式錯誤類型分析與等號誤用測驗第一大題內容

在此大題當中，研究者主要想瞭解七年級樣本學生在經過等量公理學習後，本身的等號概念與等號認知情形，是否會因相關概念的學習而拓展或更加完備，因此，在第二次的測驗調查中，研究者將有勾選等號左右兩邊一樣大且有勾選等號兩邊的值是相同的學生歸類為「關係型」學生；而沒有選擇等號左右兩邊一樣大，且沒有選擇等號兩邊的值是相同的，研究者將其歸類為「運算型」學生，其他則一樣歸類為「過渡型」學生，其調查

結果與前測調查結果的分析比較如表 4-2-2 所示：

表 4-2-2 國中七年級學生等號概念與認知調查

前測所屬等號類型	人數	百分比	後測所屬等號類型	人數	百分比
運算型	257	41%	運算型	189	30%
過渡型	61	10%	過渡型	42	7%
關係型	305	49%	關係型	392	63%
總計	623	100%	總計	623	100%

由表 4-2-2 的調查結果發現，學生的等號概念在透過等量公理學習後有明顯的拓展趨勢，原本「運算型」學生有 257 人，佔受測樣本學生的 41%，經過等量公理學習後，「運算型」學生減少為 189 人，佔受測樣本學生的 30%，而關係型的學生則是由原本的 305 人（49%）增加為 392 人（63%）。由此可以大膽推論等量公理的學習是有助於學生建立正確的等號概念，而這樣的說法也與廖瓊菁（2001）的研究相符：等式的存在與等量公理之間有著密不可分的關係，而等式中「等號左右兩邊的值會相等」的想法，更是學生由算術進入到代數的重要轉折點（王志銘，2006）。

研究者在整理前後兩次測驗第一大題調查資料時發現一個非常有趣且值得探討的現象，研究者將之整理如表 4-2-3：

表 4-2-3 七年級 A、B、C 三班第一大題作答情形

前測所屬等號類型	A 班人數	B 班人數	C 班人數	後測所屬等號類型	A 班人數	B 班人數	C 班人數
運算型	8	18	12	運算型	1	2	0
過渡型	13	11	8	過渡型	3	2	4
關係型	13	5	13	關係型	30	30	29
總計	34	34	33	總計	34	34	33

表 4-2-3 中的 A 班 B 班分別為樣本學校中為兩位資深老師黃老師以及林老師所任教的班級，C 班則為研究者所任教的班級，在兩次的測驗調查中可以發現，原本 A 班關係型學生只有 13 人，B 班關係型學生只有 5 人，C 班關係型學生也只有 13 人，但是在第二次測驗調查中 A 班、B 班、C 班三

班的關係型學生分別提升到 30 人、30 人、29 人，以這三個班整體情況而言，關係型學生的總人數由 31 人躍昇至 89 人，共增加了 58 人，佔整體七年級關係型增加人數的 67%，著實耐人尋味。研究者為了探究其大幅成長的原因，分別與 A 班、B 班任教老師分享此發現，遂得知黃老師以及林老師在等量公理單元教學時，與研究者都不約而同地藉由實物操作進行等量公理教學，並再次對學生釐清等號的等價概念，因此研究者推測在等量公理教學活動中適時加入天秤實物操作，的確有助於強化學生等號的等價概念，而這樣的發現也與廖瓊菁（2001）以及陳嘉皇（2008）的研究結果相互呼應。

貳、 不同等號概念學生的解題思維與等號誤用情形

在研究者自編的等號概念理解與等號意義認知測驗中，研究者欲探討不同等號概念的學生其解題思維模式的差異，因此設計了第三大題的題目，題目內容如圖 4-2-4 所示：

三、老師出了一個題目： 36＋12＝35＋( )，請問( )裡的答案是多少？有四個同學提出了自己的想法，哪些同學說法正確，請在□中「∨」。

□ 維維的想法：因為 36＋12＝48，所以( )裡的答案是「48」

□ 盛盛的想法：因為 36＋12＋35＝83，所以( )裡的答案是「83」

□ 琪琪的想法：因為 36＋12＝48，所以 35＋( )也是 48，因此( )裡的答案是「13」

□ 佩佩的想法：因為 36 比 35 大 1 ，所以 12 要比( )小 1，等號兩邊才會一樣大，因此( )裡的答案是「13」。

圖 4-2-4 等號概念理解與等號意義認知測驗第三大題內容

在此大題當中，研究者主要想瞭解「運算型學生」與「關係型學生」在面對一個非典型等式時所採用的解題策略分別為何？並想探究在第一大題中被分類為關係型的學生是否能夠在解題的過程當中採用比較等號兩者關係的想法來解題？而運算型的學生是否就會偏向採用計算結果的方式來做解題策略？在本大題中，若只勾選琪琪說法者，研究者將其解題策略

規類於運算型思維，若有勾選佩佩說法者，研究者將其歸類於可採用等價思維關係解題，此大題的調查結果整理如表 4-2-5：

表 4-2-5 不同等號思維學生的解題策略統計表

不同等號概念	樣本學生人數	不同等號思維模式與解題策略		人數	百分比
運算型學生	257 人	錯誤思維	維維:36+12=48，所以()=48	26	4.6%
			盛盛:36+12+35=83，所以()=83		
		運算思維	琪琪:36+12=48，35+()=48，所以()=13	198	35.2%
		等價思維	佩佩:36 比 35 大 1，12 比()小 1，等號兩邊要一樣大，所以()=13	33	5.9%
關係型學生	305 人	錯誤思維	維維:36+12=48，所以()=48	3	0.5%
			盛盛:36+12+35=83，所以()=83		
		運算思維	琪琪:36+12=48，35+()=48，所以()=13	97	17.4%
		等價思維	佩佩:36 比 35 大 1，12 比()小 1，等號兩邊要一樣大，所以()=13	205	36.4%
總計	562 人			562	100%

根據本大題的統計結果可以發現，運算型學生不管在面對典型等式或非典型等式時，都傾向於要計算出一個結果，這樣的調查結果與廖學專（2002）所探討學生等號概念心像的結果大致相符。在本研究中運算型的 257 位學生有 198 位學生會採用先計算出左邊結果再去做比較的解題策略，佔運算型學生整體比例的 77%，這顯示對等號固著於要計算（do something）的學生，在處理等式時較無法跳脫其思考框架（Carpenter，Franke & Levi，2003）。也再次驗證了 NcNeil 和 Alibali（2006）的論點：若在教材的編排與鋪陳中沒有強化等號的等價概念，那麼學生便會就自身的學習經驗去將等號詮釋為一種運算符號，並根深蒂固的將其與運算符號劃上等號。同樣地，在表 4-2-5 的統計結果中我們也不難發現，關係型的學生在解決問題時有更高的比例會採用等價性以及替代性的思維去做比較型解題，這樣的研究結果也與 Jone 與 Pratt 在 2012 年所做的「等號的替代意義與等價意義」研究結果一脈相承。因此，若要使學生在處理等式

問題時有更多元化的解題思維，那麼在教學時就必須幫助學生發展等號的等價意義才能擴充學生的等號對稱性與遞移性（古欣怡、林碧珍，2011）；而在教學過程當中，也要顧及學生等號意義發展的層次性，透過適當的教學引導以及討論過程，才能將學生的等號概念提升到「關係性層次」（Saenz-Ludlow & Waldgrave，1998）。

令研究者好奇的是：在一般非典型等式中，不同等號概念的學生會有不同的解題思維，其中運算型的學生有近八成所採用的解題策略是偏向於計算出一個結果（do something），而關係型的學生則是分別有約三成的學生會採用運算思維解題，有近七成的學生會採用等價思維解題，這引發研究者想更進一步去探究不同等號概念的學生除了在解題策略上有所不同外，在處理一元一次代數式時，是否也會有不同的解題思維與不同的迷思概念呢？因此，研究者在後續測驗內容中設計了第二大題：李小衡在練習化簡 x 的一元一次式：$-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$時採用了以下的方法，請你幫李小衡檢查看看，整個化簡的過程中從第幾步驟出現錯誤？並寫出你認為正確的寫法與答案。其內容與整體七年級學生作答情形如表 4-2-6 所示：

表 4-2-6 第二大題測驗內容以及整體七年級學生作答情形

第二大題測驗內容 $-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$	每個步驟的思維與做法	各選項選答學生人數	百分比
$=-28x+12+35x+25$	(1)同乘分母最小公倍數 20	377 人	60.5%
$=7x+37$	(2)將同類項合併	3 人	0.5%
$=7x=37$	(3)使用移項法則	171 人	27.4%
$x=\frac{37}{7}$	(4)解得 $x=\frac{37}{7}$	13 人	2.1%
	過程完全正確，沒有錯誤	59 人	9.5%

由表 4-2-6 的統計結果可以知道，整體七年級受測樣本學生當中，共有 377 人，約整體 60.5%學生可以理解步驟一：同乘以分母最小公倍數 20

會造成等號前後的值不一致的狀態，因此研究者推斷這些學生多半都能夠瞭解等號左右兩邊應該隨時保持等量且平衡的狀態，這樣的學生對於等號的概念是具有等價的關係型意義，而這樣的結果也相當接近研究者在第一大題等號概念分類調查的比例：關係型學生佔整體七年級學生的 63%。研究者再進一步細細探究不同等號概念的學生在每個選項中的答題情形，並將其結果整理如表 4-2-7：

表 4-2-7 不同等號概念的七年級學生在第二大題作答情形

第二大題測驗內容 $-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$	每個步驟的思維與做法	不同等號類型學生	填答人數	百分比
$=-28x+12+35x+25$	(1)同乘分母最小公倍數 20	運算型	10	1.6%
		過渡型	25	4.0%
		關係型	342	54.9%
$=7x+37$	(2)將同類項合併	運算型	3	0.5%
		過渡型	0	0%
		關係型	0	0%
$=7x=37$	(3)使用移項法則	運算型	104	16.7%
		過渡型	17	2.7%
		關係型	50	8%
$x=\frac{37}{7}$	(4)解得 $x=\frac{37}{7}$	運算型	13	2.1%
		過渡型	0	0%
		關係型	0	0%
	過程正確，沒有錯誤	運算型	59	9.5%
		過渡型	0	0%
		關係型	0	0%

從表 4-2-7 的統計結果可以知道：在受測的七年級樣本學生中，認為整個計算過程沒有錯誤的均為運算型學生，共有 59 人；同樣地，在處理一元一次代數式時會習慣固著於尋求一個答案，而非總是能夠接受化簡式子的

學生，總共有 171 位，其中運算型的學生佔了 104 位。這顯示運算型的學生因為總是將等號的出現定義在「計算」當中，因此不善於判讀題目的意涵，而總是偏向於要求得一個最後的結果（楊喻唯，2009），因此在代數式的解題策略中，往往較關係型學生有較低的答對率。而當研究者再更深一層去探索學生的修正過程時發現：選擇第一步驟就出現錯誤的學生，不管是哪一種等號概念的學生，都能夠正確回答出同乘最小公倍數造成不等量的結果；而選擇第三步驟使用移項法則出現錯誤的學生，就會因等號概念的不同而有截然不同的看法，如表 4-2-8 所示：

表 4-2-8 不同等號概念學生的解題思維情形

第三步驟修正理由	等號類型	人數	百分比
$=7x+37$ 到 $=7x=37$ 移項後應該要變號 $=7x=-37$	運算型學生	98	57.3%
	過渡型學生	11	6.4%
	關係型學生	0	0%
$=7x+37$ 到 $=7x=37$ 不應該有移項動作	運算型學生	6	3.5%
	過渡型學生	6	3.5%
	關係型學生	50	29.3%

從表 4-2-8 我們更可以清楚的發現，運算型學生雖然認為步驟三出現錯誤，但卻是因為其考慮移項變號的問題，由此我們更可以推斷當等號概念停留在運算型的學生，其解題的思維仍舊是侷限在尋求一個結果；反之，部份關係型的學生雖不見得能夠在代數式中注意等號左右等價的概念，但是能夠皆能夠理解等式的出現不一定是要強求一個最後的答案，而這樣的研究結果也與劉佩綺（2010）的調查結果相符合。

第三節　不同等號概念對代數學習的影響

國外學者 Sfard（1991）曾在其研究中指出，當人類在思索一個抽象的數學概念時會有兩種不同層次的面向出現，一個是運算層面的，另一個則是結構層面的。因此，當研究者探究七年級學生的等號概念時，發現即便經過等量公理的學習，仍舊有約三成的學生對於等號的概念停留在運算型的階段，這更促使研究者想進一步瞭解不同等號概念的發展對七年級學生在代數學習上的影響有多少。因此，在本研究最後一部份，研究者將利用獨立樣本 t 考驗去探討不同等號概念的學生在一元一次代數式學習成果上所產生的差異，其結果如表 4-3-1 所示：

表 4-3-1 不同等號概念與代數學習成效的獨立樣本 t 檢定結果

組別	人數	平均數	標準差	t 值	p 值
關係型學生	392	86.00	13.43		
運算型學生	189	61.60	23.44	13.290	.000

從表 4-3-1 我們可以清楚的發現，不同等號概念的學生在一元一次代數式的學習上有顯著的差異。這樣的研究結果與國外學者 Kieran（1989）與 Vergnaud（1997）相互呼應：學生對於等號概念的學習與理解都將影響往後他如何處理一個代數式，唯有擁有完整的等號概念，才能讓學生在進入代數學習時有更多元的思維與解題方式。不約而同地，國外許多學者 Alibali、Knuth、Hattikudur、McNeil 和 Stephens（2007）也都認為代數學習在數學教育中佔了不可或缺的重要角色，因此，如果學生對於等號概念的理解有限，終將使其成為代數學習的絆腳石。

第五章　結論與建議

本研究主要利用調查研究法去探討國中七年級學生的等號概念與等號意義理解，並同時分析七年級學生對於非典型等式的判讀以及不同等號概念的學生在一元一次代數式的解題策略與學習成效。根據研究結果與討論，將本章提出相關建議與討論。

第一節　結論

根據本研究第四章的研究結果與討論，研究者提出以下結論：

一、七年級學生在尚未正式接觸代數課程前，只有近五成的學生可以理解等號除「運算」意涵外，還有更深一層的等量「關係型」概念。

二、七年級學生多數能夠正確判讀非典型等式問題，唯獨「等號自反性」的題型僅有三成學生能夠理解。

三、七年級的關係型學生比運算型學生更能理解等號的特性，但擁有關係型概念不代表完全擁有解決非典型等式問題的能力。

四、七年級的運算型學生在處理典型或非典型等式時，所採用的解題策略傾向於「求得一個結果」，無法跳出計算的思考框架。

五、七年級的關係型學生在處理典型或非典型等式時，能運用「等號的替代意義與等價意義」進行解題，同時展現較多元的解題策略。

六、七年級的運算型學生在化簡一元一次式時往往會忽略要維持等號兩邊等價的關係，並固著於計算出一個最後的數值。

七、部份運算型學生認為等號是一種計算過程的連結，因此習慣在所有解題步驟中加入等號，而忽略了等號兩邊必須等價的概念。

八、七年級關係型學生在一元一次代數式的學習成效明顯優於運算型學生。

第二節　建議

依據本研究的研究過程與研究結果，研究者對教學、教材設計與編排以及未來研究上提出幾點相關建議：

一、教學方面的建議：

1．根據研究者與國內多位研究者的調查結果發現：各階層的學生能夠真正理解等號且具有等價概念的學生，僅僅只佔少數(陳嘉皇，2008；楊絮媛，2010；潘亨足，2010；昌秀英，2011；許欣鳳，2012)。而學生對於等號意義的理解除課本編排內容外，還有老師課堂教學上所採用的詞語引導（潘亨足，2010），因此研究者建議國小老師在學生初次接觸等號時除了採用「結果是…」、「答案是…」、「會得到…」這種運算型詞彙外，也可以加入關係型的詞彙「左右兩邊相等…」、「兩邊的值一樣大…」來引導學生拓展其等號思維。

2．根據國內外多位研究者的調查結果顯示：學生的等號概念不一定隨著年齡的增長而有所拓展，學生本身的等號意義發展亦是具有層次性（Saenz-Ludlow & Waldgrave， 1998）。因此研究者建議老師在等號概念的教學情境中應先建構學生等號的概念與性質，適時加入非典型等式的佈題與練習，並在解題教學過程當中引導學生跳脫「求得一個結果」的思考框架，強化學生「左右兩邊相等…」、「兩邊的值一樣大…」的關係型解題技巧與思維，勢必有助於學生的等號概念從「運算型」拓展至「關係型」。

3．在本研究中發現：透過等量公理的教學可以再次釐清學生對於等號意義的理解；而在等量公理的教學當中若能提供實物的操作更能有效強化學生的等號概念由「運算型」到「關係型」。因此，研究者建議未來在進行等量公理教學時教師可以適時提供實體教具供學生操弄，並引導學生等號兩邊等價的概念，相信更能有效轉化學生的等號概念，提升學生對於等號意義的理解。

二、教材設計與編排方面的建議：

1．根據本研究調查結果，七年級學生的等號概念能到達關係型的僅有約五成，而這樣的結果與國內多位研究者所調查不同年級學生的等號概念結果大致相同（陳嘉皇，2008；楊絮媛，2010；潘亨足，2010；昌秀英，2011；許欣鳳，2012）。歸咎其根源來自於學生初次在國小接觸等號概念時，教科書的編排總是伴隨著加法或減法運算，容易使學生誤解並聚焦於等號的出現並需要「do something」，而忽略了等號的真正意涵；即便教科書後續有等號兩邊數量一樣多的題型出現，但仍舊是包含在加減法的單元中，且提供學生練習的份量有限，因此無法讓學生跳脫等號必定是要尋求一個結果的框架，而影響學生等號概念的拓展。故研究者建議國小教科書中應增加一個以「等號」為主的教學單元，先介紹等號的一些基本性質，再融入各種非典型等式類型的題目，以建構學生完整的等號概念。

2．根據本研究結果顯示：七年級學生在尚未正式接觸代數課程前，只有約五成的學生可以理解等號的關係型意義，而等號的關係型概念又在學生的代數學習中扮演著舉足輕重的角色，在本研究中更不難發現擁有關係型等號概念的學生在一元一次代數式的學習成效明顯優於運算型學生。因此研究者建議學生在國小六年級進入到國中七年級的銜接課程當中，應當安排等號基本性質，例如：等號的自反性、等號的對稱性；與等號關係型等價意義理解等相關課程，以完整建構學生的等號概念。

三、未來研究上的建議：

1．研究者在研究過程當中發現，透過實物操作進行等量公理教學的班級學生更能夠強化其等號概念，因此推測在等量公理教學中適時加入實物的操作更有助於運算型學生拓展其等號概念到關係型。而此推論是否能一概而論，則需留待後續研究者繼續檢定釐清。

2．研究者在探討七年級學生對於典型等式與非典型等式判讀結果時，發現七年級學生在第三小題等號自反性的作答情形與先前研究者許欣

鳳（2012）的研究結果大相逕庭。研究者推測是因為七年級學生對於數字的計算能力遠優於國小二年級學生，因此在判斷非典型等式時只考慮計算結果是否正確便能輕易作答，因此才會有極高的判讀正確率。然而，這樣的研究結果是否就真能代表學生對非典型等式的接受度提高，有待後續研究者衡量不同年級學生對數字的接受度與計算能力，重新編製等式判讀測驗後才能再次釐清其相關性。

參考文獻

一、中文部份

上官瑋茵（2010）。**國中課程綱要代數分年細目詮釋的等號類型之內容分析**。國立中山大學教育研究所碩士班論文，未出版，高雄市。

王志銘、康淑娟（2006）。**等量公理前置教學活動之實踐與探究。台灣數學教師電子期刊第八期**，21-37 頁。

古欣怡、林碧珍(2011)。**整數四則之等號教學研究。發表於 2011 資訊科技融入教學與教師專業發展國際學術研討會**，新竹市：國立新竹教育大學。

百度百科。2012年10月10日，取自http://baike.baidu.com/view/428835.htm。

邱志賢、毛國楠（2001）。**國小六年級學童解未知數文字題之另類概念分析。台東師院學報，12**（下），23-60。

李宜蓉（2009），**一～九年級數學教科書中代數符號及等號概念之發展設計**，臺灣師範大學數學系碩士論文，台北市。

林福來（1991）。**數學的診斷評量。教師天地，54**，32－38。

昌秀英(2011)。**國小低年級學童等號概念與教師對其發展情形了解之研究**。私立中原大學教育研究所碩士班論文，未出版，桃園縣。

洪萬生（2007）。**他山之石：國際間數學教育改革的趨勢與展望。載於陳麗桂、林陳甬、張俊彥主編，中小學數學與科學教育改革的回顧與展望**（頁 45-68）。台北：國立台灣師範大學。

莊松潔（2005）。**不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究**。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。

許欣鳳（2012）。**運用萬用揭示板發展國小二年級等號概念教材之行動研究**。私立中原大學教育研究所碩士班論文，未出版，桃園縣。

陳嘉皇(2008)。**國小學童等號概念解釋與解題策略初探。臺灣數學教師電子期刊，13**，34 － 46。

陳嘉皇(2009)。**提昇學童等號關係概念理解教學設計與實施成效研究。高雄師大學報，26**，21-41。

黃富麟(2010)。**國小六年級教師的等號教學相關知識探討**。私立中原大學教育研究所碩士班論文，未出版，桃園縣。

楊喻惟(2009)。**等號概念對國中生一元一次方程式解題策略與解題表現的影響**。國立臺中教育大學教育研究所碩士班論文，未出版，臺中市。

詹佳縈(2010)。**國小三年級學童等號概念探究**。國立臺中教育大學教育研究所碩士班論文，未出版，臺中市。

楊絮媛(2010)。**國小三年級學童的等號概念對加減計算題與加減文字題的表現差異之研究**。國立臺中教育大學教育研究所碩士班論文，未出版，臺中市。

廖學專(2002)。**初探國中生等號概念之心像**。國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，未出版，台北市。

廖瓊菁(2001)。**國小六年級代數教學之研究**。國立屏東師範學院教育研究所碩士班論文，未出版，屏東縣。

劉佩綺(2010)。**不同等號概念與一元一次方程式錯誤類型之分析**。國立中山大學教育研究所碩士班論文，未出版，高雄市。

蔣治邦、謝堅、陳竹村、林昭珍、吳淑娟(2002)。**國小數學教材分析-整數的數量關係**。新北市：國立教育研究院籌備處。2012 年 10 月 8 日，取自：http://www.naer.edu.tw/naerResource/study/216/book11/p4.htm

潘亨足(2010)。**不同等號概念之下國中生一元一次方程式解題策略之研究**。國立中山大學教育研究所碩士班論文，未出版，高雄市。

謝堅（1997)。**實驗課程對四則運算教材的處理。國民小學數學新課程概說（中年級)**。台灣省國民學校教師研習會編印。

謝孟珊(2000)。**以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。

謝閨如(2010)。**國小二、三年級學生對等號算式的理解。教育研究月刊，190**，69-86。

二、英文部份

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*, 221-247.

Ausubel, D. P. (1968). *Education psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Baroody, A., J., & Ginsburg, H. P. (1983, March). *The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY.

Behr Erlwanger & Nichols (1976). *How children view equality sentence* (PMDCTechnical Report No. 3). Tallahassee: Florida State University. (ERIC DocumentReproduction Service No. ED144802)

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideals of algebra, K-12* (pp.20-32). Reston, VA: NCTM.

Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics's. *Mathematics Teaching*, *81*, 24-27.

Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2001). *Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof.* In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, and J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference (Vol. 1, pp.155-162). University of Melbourne, Australia.

Chaiklin, S., & Lesgold, S. (1984，April). *Prealgebra students's knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Chicago: Henry Regnery.

Essien, A. ＆ Setati, M. (2006). *Revisiting the Equal sign: Some Grade 8 and 9 learners' interpretations*. African Journal for Research in Mathematics, Science and Technology Education, 10(1), 47-58.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*, 232-236.

Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for the concept of equation, *The Mathemarics Teacher, 73*, 572-580.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Izsak, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and the development of modeling knowledge.Journal for Research . *Mathematics Education,34*, 11-19.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37(4)*, 297-312.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Muddle School, 13*, 514-519.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. In S. Wagne & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp.33-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: NCTM.

Kotler, P. (1998), Marketing Management：*Analysis, Planning, Implementation and Control, 9th* ed., Prentice-Hall Inc. Marketing, Robert Ferber Edition, McGraw-Hill Co., p.3.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: the books they read can't help. *Cognition and Instruction, 24(3)*, 367-385.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition And Instruction, 24(3)*, 367–385.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). Mathematical proficiency for all students: *Toward a strategic research and development program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. & Linchchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*,191-228.

Saenz-Ludlow, A. & Waldgrave, C.(1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics,35*,153-87.

Seo, K. H., &; Ginsburg, H. P. (2003). "You've got to carefully read the math sentence…": *Classroom context and children's interpretations of the equal sign*. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills*: Constructing adaptive expertise (pp.161-187). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics*: An International Perspective(pp.5-26). Hove, East Sussex: Psychology Press Ltd.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*, 293-305

Warren, E. (2002). Unknowns, arithmetic to algebra: Two exemplars. In A. Cockburn &; E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369-376). Norwich: PME.

Warren, E. (2003). Young children's understanding of equals: Alongitudinal study. In N. Pateman, G. Dougherty, &; J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.379-387). Hawaii: PME.

Warren, E. (2004).Generalising arithmetic: Supporting the process in the early years. In M. J. Hoines &; A. B. Fuglestad(Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education (Vol. 4, pp.417-424). Bergen, Norway: Bergen University College.

Weaver, F. (1973). The symmetric property of the equality relation and young children"s ability to solve open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 4,* 45-46.

<附錄一>

新竹市立新新國民中學　＿＿＿＿＿班＿＿＿＿＿號 性別：＿＿＿＿

這是一份與數學有關的不計分問卷，請你依照你的認知來回答下列問題：

一、個人基本資料：

（１）在小學的時候，我的數學成績大約都是落在：

□１００分　□９９～９０　□８９～８０

□７９～７０　□７０以下

二、當我們提到牛頓，有人會聯想到蘋果、地心引力；當我們提到華盛頓，有人會聯想到櫻桃樹、誠實；那麼當老師提到”等號”的時候，你又會聯想到甚麼呢？或者，等號對你來說，具有甚麼樣的意義呢？請你試著把它寫下來。

當我聽到或看到「＝」、「等號」我會想到：

三、老師出了一個題目： 36＋12＝35＋(　　)，請問（　　）裡的答案是多少？有四個同學提出了自己的想法，你覺得哪些同學說法是正確的，請在□中打「V」。

□ **維維的想法：**因為 36＋12＝48，所以(　　)裡的答案是「48」

□ **盛盛的想法：**因為 36＋12＋35＝83，所以(　　)裡的答案是「83」

□ **琪琪的想法：**因為 36＋12＝48，所以 35＋(　　)也是 48，
因此(　　)裡的答案是「13」

□ **佩佩的想法：**因為 36 比 35 大 1 ，所以 12 要比(　　)小 1，
等號兩邊才會一樣大，因此(　　)裡的答案是「13」。

□ **以上都不是**，(　　) 裡的答案應該是＿＿＿＿＿＿＿＿

因為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

四、35＋47＝82 是一個加法算式， 其中「＝」是等號：

以下是「＝」所代表的可能意思，只要你認為正確的，都可以在□中打「V」。

□ㄅ. 答案是…　□ㄆ. 左右兩邊相等　□ㄇ. 會得到…

□ㄈ. 連接 35＋47 與答案 82　□ ㄉ. 結果是…　□ㄊ. 兩邊的數量一樣大

五、選出你認為正確的答案：

1.(　　)　48＝43＋5，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 43＋5＝48　②正確

③錯誤，應該是 48－43＝5

2.(　　)　32＝38－6，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 38－6＝32　②錯誤，應該是 38－32＝6

③正確

3.(　　)　36＝36，這個算式正確嗎？

①正確　②錯誤，應該是 36－36＝0

③錯誤，應該是 36＋0＝36

4.(　　)　35＋15＝35＋15，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 35＋15＝50

②錯誤，應該是 35＋15＋15＝65　③正確

④錯誤，應該是 35＋15＋35＝85

5.(　　)　7＋8＝12＋3，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 7＋8＋3＝18　②正確

③錯誤，應該是 7＋8＝15

④錯誤，應該是 7＋8＋12＝27

<附錄二>

新竹市立新新國民中學 ________班________號 性別：_______

這是一份與數學有關的不計分問卷，請你依照你的認知來回答下列問題：

一、個人基本資料：

（１）在小學的時候，我的數學成績大約都是落在：

□１００分 □９９～９０ □８９～８０ □７９～７０□７０以下

（２）對於數學這個科目，我覺得它像哪一種食物？______________

原因：____

____

二、35＋47＝82 是一個加法算式， 其中「＝」是等號：以下是「＝」所代表的可能意思，只要是你認為正確的，都可以在□中打「V」。

□ㄅ.答案是… □ㄆ. 左右兩邊相等 □ㄇ.會得到…

□ㄈ.連接 35＋47 與答案 82 □ㄉ.結果是…□ㄊ.兩邊的數量一樣大

三、選出你認為正確的答案：

1.( )48＝43＋5，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 43＋5＝48 ②正確

③錯誤，應該是 48－43＝5

2.( )32＝38－6，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 38－6＝32 ②錯誤，應該是 38－32＝6

③正確

3.( )36＝36，這個算式正確嗎？

①正確 ②錯誤，應該是 36－36＝0

③錯誤，應該是 36＋0＝36

4.( )35＋15＝35＋15，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 35＋15＝50 ②錯誤，應該是 35＋15＋15＝65

③正確 ④錯誤，應該是 35＋15＋35＝85

5.( )7＋8＝12＋3，這個算式正確嗎？

①錯誤，應該是 7＋8＋3＝18 ②正確

③錯誤，應該是 7＋8＝15 ④錯誤，應該是 7＋8＋12＝27

<附錄三>

新竹市立新新國民中學 ________班________號 性別：________

一、$3+7x=17$ 是一個 x 的一元一次方程式，請問在此方程式中，等於「＝」所代表的意思有哪些是正確的?請在口中打勾「ｖ」

口 $3+7x$ 的答案是… 口等號左右兩邊會相等 口 $3+7x$ 會得到…

口 $3+7x$ 的結果是… 口等號兩邊的值一樣大

二、李小衡在練習化簡x的一元一次式時，採用了以下方法，請你幫李小衡檢查看看整個化簡的過程是否有錯誤？

$-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$

$=-28x+12+35x+25$ …步驟一 同乘分母最小公倍數20

$=7x+37$ …步驟二 同類項合併

$=7x=37$ …步驟三 使用移項法則

$x=\frac{37}{7}$ …步驟四 解得x

口 沒有錯誤

口 有錯誤，我認為在步驟______開始錯誤，應該為________________

三、請化簡一元一次式與求一元一次方程式的解：

（1）$1-3=-\frac{3}{2}x$ （2）$13-2x-3=-x$ （3）$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=-2x+\frac{3}{4}$

（4）$5x+3=3+5x$ （5）$4x-\frac{x}{4}-\frac{-8}{5}+\frac{7}{3}$ （6）$\frac{5x+4}{3}-\frac{-2x-3}{5}$