

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

隊伍系統顧客平均極限分配與時間
平均極限分配之間的關係

On The Relationship between Time-Average
Distribution and Customer-Average Distribution of
Queues

研究生：趙于翔

指導教授：彭南夫 教授

中華民國一零二年六月

隊伍系統顧客平均極限分配與時間

平均極限分配之間的關係

On The Relationship between Time-Average Distribution and
Customer-Average Distribution of Queues

研究生：趙于翔 Student : Yu-Sean Chao

指導教授：彭南夫 Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Statistics

College of Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Statistics

June 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一零二年六月

隊伍系統顧客平均極限分配與時間 平均極限分配之間的關係

研究生：趙于翔

指導教授：彭南夫 博士

國立交通大學統計學研究所



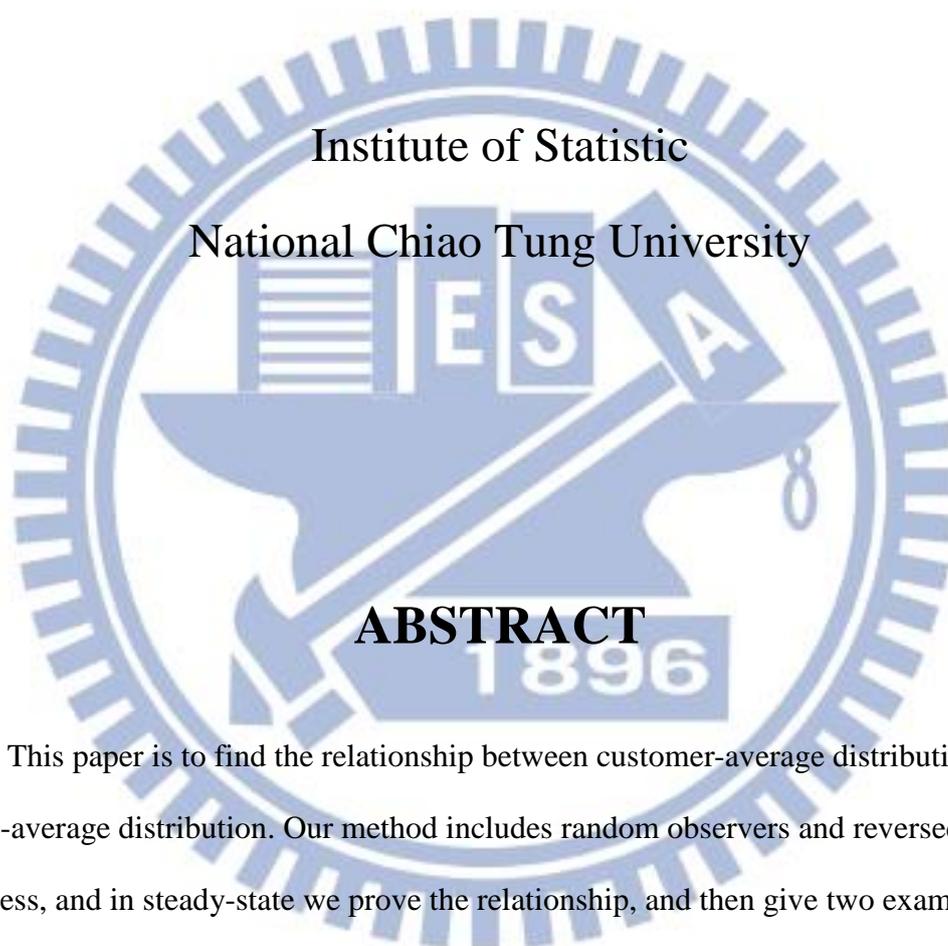
摘要

本文目的在於找出顧客平均極限分配和時間平均極限分配之間的關係式。我們的方法利用到了隨機觀察者和逆向過程的觀念，證明出顧客平均極限分配與時間平均極限分配之間的函數關係式，接著舉了 $M/G/k/k$ 和 $M/M/k$ 二個排隊模型的範例。本文最後推導出初步估計值，模擬了各種的排隊模型，來分析初步估計值和模擬值的估計結果，並說明初步估計值何時會高估或是低估。

關鍵字：隨機觀察者；逆向過程

On The Relationship between Time-Average Distribution and Customer-Average Distribution of Queues

Student : Yu-Sean Chao Chao Advisor : Dr. Nan-Fu Peng



ABSTRACT

This paper is to find the relationship between customer-average distribution and time-average distribution. Our method includes random observers and reversed process, and in steady-state we prove the relationship, and then give two examples in $M/G/k/k$ and $M/M/k$ models. Finally we derive the preliminary estimation to analyze when it will overestimate or underestimate in various queue models.

Key words : random observer, reversed process

誌謝

轉眼間，六月已經到了，感覺好像才剛剛進入研究所一樣，現在即將要離開學校了。在求學的過程中，我非常高興能就來交大統計研究所，在這邊認識了很多很好的朋友，從他們那邊吸收了很多豐富的知識，也學到了各種做人處事的道理。

在研究所的二年，我要謝謝各位老師，提供了這麼多的知識給我，在我遇到問題時，可以適時的在旁邊幫助我。特別要感謝彭南夫老師，他讓我學會了在遇到困難時，如何去分析解決問題，也在論文的指導中，不厭其煩的指出我的矛盾和改善我的方法，如果要我重來一次，我還是會選擇彭南夫老師，謝謝您。還有在所辦中的郭姐跟怡君姐，當我們在行政方面或是器材方便需要幫忙的時候，第一個到的總是你們。這邊也要特別感謝我們口試委員們，在口試的過程中，點出了我在研究過程中沒有思考過的問題點，也讓我學會了如何去更精確的描述一個複雜的問題，並且以清楚的方式去敘述它。

再來，我這邊一定要提到我的同學們。你們是我一生中遇過最好的好朋友，在學業上在生活中是我遇過最聰明的一群人，平常會互相嘴砲，遇到困難時會互相幫忙，陪著我度過訓練精實的研究所生活，沒有你們，我不會有這麼愉快的回憶。我不知道如何用文字來表達我的感受，但是我想說，謝謝你們。

最後，我想感謝我的爸媽，他們一路上都是挺著我，讓我自己做決定，並且在想需要幫忙的時候在背後大力的幫助我。還有我的女朋友，妳毅然決然的陪著我考研究所，陪我度過最難熬的考試時期，在這一路上也是我最不可或缺的人。

六月鳳凰花開，大家將要離別，希望之後可以互相聯絡，互相打氣，希望我們之間的友情可以陪著我們到終點，謝謝大家。

趙于翔 謹誌於

交通大學統計學研究所

中華民國一百零二年六月

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌 謝.....	iii
目 錄.....	iv
第一章 導論.....	1
1-1 研究動機.....	2
1-2 文獻探討.....	2
1-3 研究方法.....	3
第二章 理論與範例.....	3
2-1 主要定理.....	3
2-2 例子驗證.....	8
第三章 模擬及結果分析.....	10
3-1 初步估計值.....	10
3-2 模擬結果.....	12
3-3 結果分析.....	33
第四章 結論.....	34
參考文獻.....	35

第一章 導論

在日常生活中，到處可以見到有形或無形的排隊或擁擠現象，如旅客購票排隊、交通系統、電話線路等等，進而發展出一套研究系統隨機聚散現象，和服務系統工作過程的數學模型，稱為排隊理論。排隊理論一方面可以有效解決系統中人員及設備配置的問題，為公司提供可靠的決策依據；令一方面通過系統優化，找出客戶和公司之間的平衡點，既減少排隊的等候時間，又不浪費公司的財物人力，從而使公司與客戶之間到雙贏。

排隊論的基本構想，是 1910 年丹麥電話工程師埃爾朗在解決自動電話設計問題時開始形成的，當時稱為話務理論。他在熱力學統計平衡理論的啟發下，成功地建立了電話統計平衡模型，並由此得到一組遞推狀態方程，從而導出著名的埃爾朗電話損失率公式。自 20 世紀初以來，電話系統的設計一直在應用這個公式。30 年代蘇聯數學家欣欽，把處於統計平衡的電話呼叫流稱為最簡單流，瑞典數學家巴爾姆又引入有限後效流等概念和定義。他們用數學方法深入地分析了電話呼叫的本征特性，促進了排隊論的研究。50 年代初，美國數學家關於生死過程的研究、英國數學家肯德爾提出嵌入式馬可夫鏈理論，以及對排隊模型的分類方法，為排隊理論奠定了理論基礎。在這以後，塔卡奇等人又將組合方法引進排隊理論，使它更能適應各種類型的排隊問題。70 年代以來，人們開始研究排隊網路和複雜排隊問題的近似解等，成為研究現代排隊理論的新趨勢。

在本文中，我們將討論在排隊理論中一直未解的疑問：顧客平均極限分配與時間平均極限分配，在各種顧客到達過程中，它們之間存在著何種確切的函數關係。

1-1. 研究動機

在排隊理論中，各式的排隊模型都已經有相當的發展。對於顧客平均極限分配(customer-average distribution)和時間平均極限分配(time-average distribution)關係的討論，也已有些許的研究。在我們的認知中，如果顧客到達過程為卜瓦松到達，可得知顧客極限分配會與時間極限分配相同，但是在非卜瓦松到達的排隊模型下，到目前為止，只有找到在某些條件下它們之間的不等式，或者存在著上界。本文目的在於找出極限分配之間的關係式，因此將來可以利用此關係，來使得研究領域方面會更加完善。

1-2. 文獻探討

在 1990[3]中，引進了 LBA(Lack of Bias Assumption)的概念，並且在 ASTA 下證明 LBA，且說明 LBA 包含了所有 ASTA 的模型及有名的 PASTA。最後提供了 Arrival Theorem for product-form queueing networks 的新證明。

在 2008[5]中，作者進一步的延伸了 CFTP 演算法，利用此來模擬時間平均極限分配，證明 PASTA 的性質，並且說明了當顧客到達的時間區段為 NBUE 或 NWUE 時，顧客平均極限分配會隨機的小於或大於時間平均極限分配，以此證明顧客與時間極限分配之差的上限。在 1984[4]中也得出類似的結論。

2008[6]中進一步的探討顧客和時間極限分配的關係，試著說明顧客與時間極限分配之間會有多接近，他們計算了二個分配之間的「距離」，並計算距離的總變異，最後證明出了總變異的上界。

在本文，有別於以前的文獻，不再是說明顧客與時間極限分配之間的不等式，或者是關係的上下界，而是找到了一個確實的函數關係。只是此函數與此隨機過程的逆向過程有關，由於它的困難度，這是一個少被探討的研究領域，故本文只表示分配之間的函數關係是如何，而無法求得此函數的特性。

1-3. 研究方法

在排隊模型中，先進來服務的人，會先被服務，且假設每一個服務過程，除非服務結束，不然服務狀況不會在途中停掉。我們令旁邊有一系列的隨機觀察者，以卜瓦松過程的方式進入系統觀察，而不打擾系統，此觀察者觀察系統中剩餘的人數(不包含自己)。且在證明過程中，會用到逆向過程(reversed process)的性質，逆向過程意指以時光倒流的方式來觀察系統，例如從正向來看有一顧客離開系統，逆向則是一個顧客進入了系統中。

我們的方法利用到逆向過程與隨機觀察者，從顧客平均出發，進而導出顧客平均極限分配與時間平均極限分配之間的函數關係。

第二章 理論與範例

2-1. 主要定理

在本文所探討的排隊模型裡，我們假設一次只能進來一個顧客，一次只能出去一名顧客。一個服務系統，進來的顧客依照更新過程的方式到達，而服務的時間服從*i.i.d.*任何的一般分配。顧客進入系統時，發現服務者是空閒的則進入服務，否則加入排隊。在服務的過程中，我們假設沒有任何一個服務中途被打斷，而且如果之前的服務沒有結束，新的服務不可能開始。服務的順序以先到者優先服務。

令二相鄰顧客到達的時間區段的機率密度函數(p.d.f)為 $f(x)$ ，其累積機率密度函數(c.d.f)為 $F(x)$ ，平均值為 $1/\lambda$ ；顧客進入系統的服務時間機率密度函數為 $g(x)$ ，其累積機率密度函數為 $G(x)$ ，平均值為 $1/\mu$ 。定義 $X(t)$ 為 t 時間點系統的人數，在遍歷性(ergodicity)條件下可得到平穩狀態(steady-state)的機率為

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = k)。$$

假設排隊系統在一段時間 T 內進來了 N 個顧客，我們定義一個隨機變數

$$\Pi_{k,T} = \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } k \text{ in system}}{N}$$

為此段時間 T 內，顧客看系統人數的比例。

另外，我們定義一系列的隨機觀察者，以卜瓦松過程(發生率為 $n\lambda$)的方式進入系統觀察，但不打擾系統，稱此類觀察者為 RO (random observer)，定義

$$P_{k,T,n} = P(\text{a } RO \text{ arrives and sees } k \text{ in system in the period } T)$$

在我們假設的排隊模型裡，我們試著找出顧客平均極限分配和時間平均極限分配之間的關係式。因為在任何顧客到達過程下，時間平均極限分配，和隨機觀察者見到系統中人數平均極限分配會是相同的，也就是說，對所有的 n

$$\begin{aligned} p_k &= P(\text{a } RO \text{ arrived and see } k \text{ in system in steady state}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_{k,T,n} \end{aligned}$$

總整理之，我們得到

$$\pi_k = P(\text{a customer arrives and sees } k \text{ in system in steady state})$$

$$p_k = P(\text{a } RO \text{ arrives and sees } k \text{ in system in steady state})$$

因此 π_k 是顧客平均極限分配， p_k 是時間平均極限分配。

換句話說

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{k,T,n} = p_k, \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_{k,T} = \pi_k \text{ w.p.1 (with probability 1)}$$

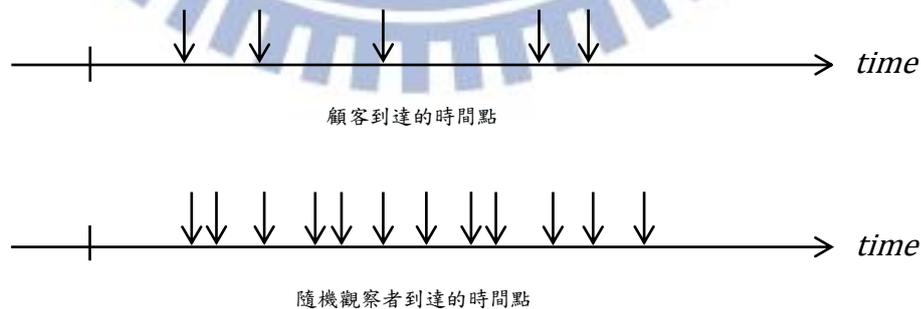


圖 2-1、系統狀態示意圖

定理 1. [2]

排隊模型在平穩狀態時，當一位顧客離開系統時，回頭觀看系統中剩餘人數的機率分配與 π_k 相同。

下面的定理 2，稱之為 PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

定理 2. [8]

在排隊理論中，當顧客到達過程為卜瓦松到達時，則顧客平均極限分配與時間平均極限分配相同。

現在我們可以開始探討本文最主要的結果

$$\begin{aligned} \Pi_{i,T} &= \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system}}{N} \\ &= \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system and next arrival is another customer}}{N} \\ &+ \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system and next arrival is a RO}}{N} \\ &= \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system and next arrival is another customer}}{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system}} \\ &\times \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system}}{N} \\ &+ \sum_j \frac{\text{number of RO's see } j \text{ in system and previous arrival is a customer and see } i \text{ in system}}{\text{number of RO's see } j \text{ in system}} \\ &\times \frac{\text{number of RO's see } j \text{ in system}}{\text{Total of RO arrived in } (0, T]} \times \frac{\text{Total of RO arrived in } (0, T]}{N} \\ &= \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system and next arrival is another customer}}{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system}} \\ &\times \frac{\text{number of customers among } N \text{ see } i \text{ in system}}{N} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\text{number of RO's see } i+1 \text{ in system and previous arrival is a customer and see } i \text{ in system}}{\text{number of RO's see } i+1 \text{ in system}}$$

$$\times \frac{\text{number of RO's see } i+1 \text{ in system}}{\text{Total of RO arrived in } (0, T]} \times \frac{\text{Total of RO arrived in } (0, T]}{N}$$

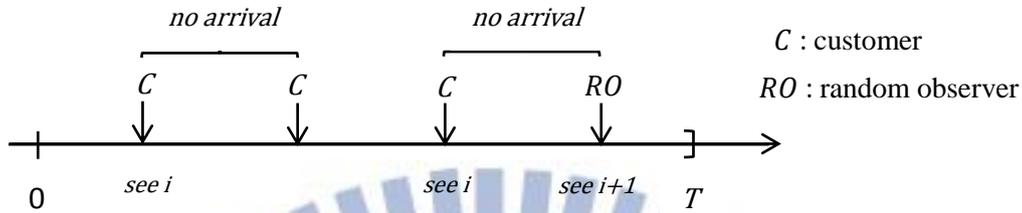


圖 2-2、系統狀態示意圖

由於隨機觀察者是以非常密集的方式到達系統觀察，則觀察者到達系統之前不會有顧客離去，故前一位顧客看到系統中有*i*個人，下一個到達系統的隨機觀察者會看到系統中有*i+1*人，所以上式最後一個等號*j*會等於*i+1*。

我們將上述式子左右各取極限($T \rightarrow \infty$)，則 $N \rightarrow \infty$ w.p.1。左式 $\Pi_{i,T}$ 會趨近於 π_i w.p.1；右式第一項會等於 $O(1/n)$ w.p.1，因為隨機觀察者(RO)以 $n\lambda$ 的發生率到達；第二項趨近於 π_i w.p.1；第三項趨近於

$$P\left(\begin{array}{c} \text{a RO arrives and previous arrival is a customer} \\ \text{seeing } i \text{ in system} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \text{a RO arrives and sees} \\ i+1 \text{ in system} \end{array}\right)$$

$$= P\left(\begin{array}{c} \text{a RO arrives and next change in the system is} \\ \text{a customer leaving in reversed process} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \text{a RO arrives and sees} \\ i+1 \text{ in system in reversed process} \end{array}\right)$$

第四項趨近於 π_{i+1} w.p.1；第五項趨近於 n 。

因此，取極限($T \rightarrow \infty$)之後，上式將變為，w.p.1

$$\pi_i = O\left(\frac{1}{n}\right)\pi_i + nP(\text{a RO arrives and next change in the system is a}$$

customer leaving in reversed process | a RO arrives and sees $i + 1$ in system in reversed process) p_{i+1}

最後，讓 $n \rightarrow \infty$ ，得到下面定理 3

定理 3.

π_i 與 p_{i+1} 之間的等式關係為

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} n P(a \text{ RO arrives and next change in the system is a customer leaving in reversed process} | a \text{ RO arrives and sees } i + 1 \text{ in system in reversed process}) p_{i+1}$$

註記

1. 定理 3 中的式子，基本上牽扯到此排隊隨機過程的逆向過程。
2. $P(a \text{ RO arrives and next change in the system is a customer leaving in reversed process} | a \text{ RO arrives and sees } i + 1 \text{ in system in reversed process})$ 是 $O(1/n)$ ，因為 RO 是以 $n\lambda$ 的發生率到達。

定理 4.

所有以卜瓦松過程到達的排隊模型中，可根據 PASTA 定理，得到

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} n P(a \text{ RO arrives and next change in the system is a customer leaving in reversed process} | a \text{ RO arrives and sees } i + 1 \text{ in system in reversed process}) p_{i+1}$$

2-2. 例子驗證

由於逆向過程非常的難找到，在排隊理論中為一探討不多的領域，故本文目前只找出等式關係式，無法求得此函數的特性。在本章節中，我們選了二種排隊系統，此二種排隊系統的逆向過程已經被證明出來，故可利用此逆向過程來求得等式關係式。

***M/G/k/k* 損失排隊模型 [7]**

我們討論一個損失排隊模型(Loss model) *M/G/k/k*，其到達過程為卜瓦松 *Poisson*(λ)，通常稱之為 Erlang loss model。*M/G/k/k* 損失排隊模型意指，系統中最大容納人數為 k 人，當 k 個服務系統都滿人的話，後來的顧客則不會進入系統中，造成損失。服務時間遵從任意連續分配 g ，其故障率(hazard rate)為 $\lambda(t) = g(t)/\bar{G}(t)$ 。

Erlang Loss Formula

定義 $E[S] = \int \bar{G}(x)dx$ 為平均服務時間，根據定理 2 系統中人數的極限分配為

$$p_n = \pi_n = P\{n \text{ in system}\} = \frac{\frac{(\lambda E[S])^n}{n!}}{\sum_{i=0}^k \frac{(\lambda E[S])^i}{i!}}, \quad n = 0, 1, \dots, k$$

此機率稱為 Erlang Loss Formula。

在此模型假設下，套入 Erlang loss formula

$$\frac{\frac{(\lambda E[S])^i}{i!}}{\sum_{i=0}^k \frac{(\lambda E[S])^i}{i!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n P(a \text{ RO arrives and next change in}$$

the system is a customer leaving in reversed

$$process \left| \begin{array}{l} a RO \text{ arrives and sees } i + 1 \text{ in system} \\ \text{in reversed process} \end{array} \right) = \frac{\frac{(\lambda E[S])^{i+1}}{(i+1)!}}{\sum_{i=0}^k \frac{(\lambda E[S])^i}{i!}}$$

系理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(a RO \text{ arrives and next change in the system is} \\ a \text{ customer leaving in reversed process} | a RO \text{ arrives} \\ \text{and sees } i + 1 \text{ in system in reversed process}) = \frac{i+1}{\lambda E(S)}$$

此系理是正確的，因為由[7]的內容中得知，逆向過程(reversed process)與正向過程(forward process)具有相同分配。換句話說，逆向過程也形成一個 $M/G/k/k$ 排隊系統，只是逆向過程表示在系統的剩餘時間，與正向過程的經過時間是不同的。因此，以上機率可視為正向過程的機率。

所以在 $M/G/k/k$ 下，可經由 Erlang loss formula，得到顧客與時間極限分配的函數關係

$$\pi_i = p_i = \left[\frac{i+1}{\lambda E(S)} \right] p_{i+1}$$

由於此函數為利用 Erlang loss formula 求得，我們再證明等式關係證明結果同樣為此函數，即可驗證此定理為正確的。其過程將在接下來的初步估計值中證明。

$M/M/k$ 排隊模型

由[7]得知，此排隊系統是馬可夫鏈的生死過程(birth and death process)，因此是時間可逆的，故正向過程與逆向過程完全相同。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(a RO \text{ arrives and next change in the system is}$$

a customer leaving in reversed process|a RO arrives and sees i + 1 in system in reversed process)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} nP(a RO arrives and next change in the system is$$

a customer leaving in forward process|a RO arrives and sees i + 1 in system in forward process)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(i+1)\mu}{n\lambda + (i+1)\mu}$$

$$= \frac{(i+1)\mu}{\lambda}$$

由定理 4 得知

$$\pi_i = p_i = \left[\frac{(i+1)\mu}{\lambda} \right] p_{i+1}$$

第三章 模擬及結果分析

由於範例中逆向過程已知，故可以證明出等式關係的結果。但是在其他的隊伍系統中，其逆向過程目前未知，故我們假設系統為平穩狀態，顧客也都已進入了平穩狀態，在此假設下初步估計等式關係式。隨後利用此初步估計值，來觀察在不同的系統中，其估計結果會產生何種誤差。

3-1. 初步估計值

在此，我們要初步估計以下機率的值

P(a RO arrives and next change in the system is a customer

leaving in reversed process|a RO arrives and sees i + 1 in system in reversed process

我們假設系統處於平穩狀態，正在服務的人同樣進入平穩狀態，因此剩餘時間的機率密度函數是 $\bar{G}(t)/E(S)$ [7]，所以上式機率可被估計

成

$$\int_0^{\infty} \frac{\frac{g(t)}{\bar{G}(t)} \bar{G}(t)}{n\lambda + \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt$$

因此定理 3 中的等式關係可被估計為

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n \frac{\frac{g(t)}{\bar{G}(t)} \bar{G}(t)}{n\lambda + \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{ng(t)}{n\lambda + \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ng(t)}{n\lambda + \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt \\ &= \frac{1}{\lambda E(S)} \end{aligned}$$

我們推廣到當系統中總共有 i 個人時， $i \leq k$ ， k 為總服務人數。其初步估計值為

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n \frac{i \frac{g(t)}{\bar{G}(t)} \bar{G}(t)}{n\lambda + i \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{nig(t)}{n\lambda + i \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nig(t)}{n\lambda + i \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}} \frac{1}{E(S)} dt \\ &= \begin{cases} \frac{i}{\lambda E(S)} & , i \leq k \\ \frac{k}{\lambda E(S)} & , i > k \end{cases} \end{aligned}$$

3-2. 模擬結果

在此本文模擬三種排隊模型， $M/G/k$ 、 $G/M/k$ 和 $G/G/k$ ，在此三種系統中，逆向過程目前為止還未能找出，故可以利用初步估計值，觀察當零散的顧客還未進入平穩狀態時，其估計結果會是高估還是低估。每次模擬次數為 10,000,000 次，總服務人數 $k = 5$ 。

所選的分配可能為 IFR(increasing failure rate)或 DFR(decreasing failure rate)，如果顧客到達分配為 IFR，則表示時間越久，顧客進入系統的機率越高，如果顧客到達分配為 DFR，則表示時間越久，顧客進入系統的機率越低；如果服務時間分配為 IFR，則表示時間越久，顧客服務完成離開系統的機率就越高，如果服務時間分配為 DFR，則表示時間越久，顧客服務完成離開系統的機率就越低。

排隊理論中，顧客進來的平均頻率一定要小於服務的平均頻率(遍歷性)，否則的話，整個系統會不收斂，因為服務未結束則一直會有人進入，到最後整個系統是發散的，所以顧客進來的平均時間一定要大於服務的平均時間，也就是交通密度(traffic intensity) ρ 必須小於 1。

為了清楚顯示估計值的誤差會是高估或低估，我們定義誤差百分比為初步估計值和模擬真實資料的誤差比率，也就是

$$\text{誤差百分比} = (\text{初步估計值} - \text{真實值}) / \text{真實值}$$

模擬次數不同，其模擬的數值精確度也不同，由於等式關係為顧客平均值和時間平均值的分式，當精確值不高的時候，分式的誤差就會越大，故要求模擬次數需達到一千萬次。在三種排隊模型中，各種分配都有模擬過，在此只挑出其中幾個代表性的分配，無論所選的分配為何，其估計的結果都是相同的。

M/G/k

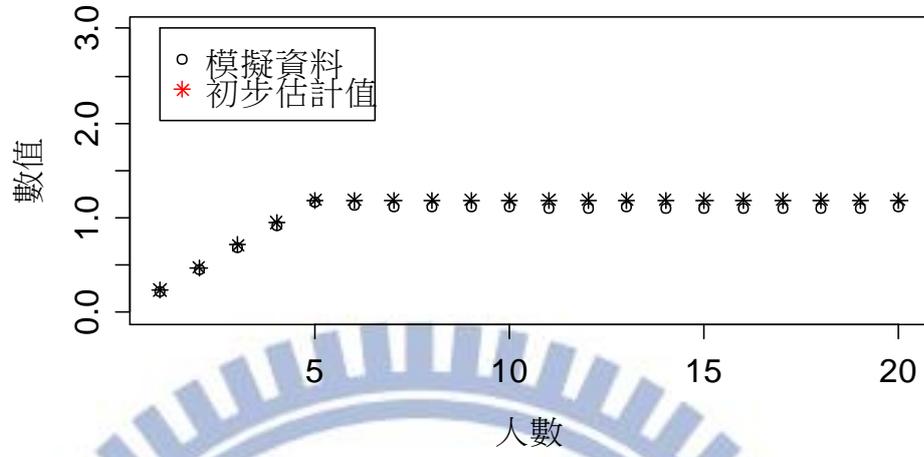
顧客進來時間服從指數分配 $Exp(\lambda)$ ，期望值為 $1/\lambda$ ，服務時間服從任意分配 G ，期望值為 $1/\mu$ ，則交通密度 $\rho = \lambda/k\mu$ 。

< 個案 1 >

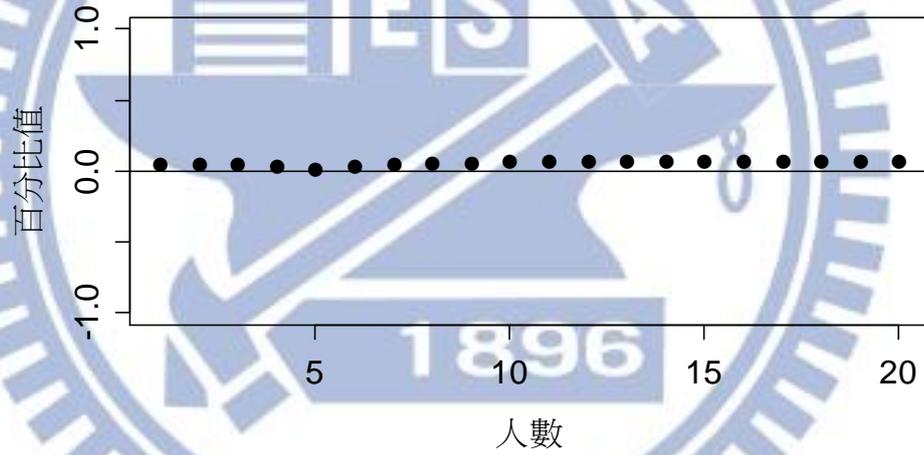
$\lambda = 2/3$ ，服務時間服從韋伯分配 $Weibull(0.9,6)$ ， $\mu = 0.1584007$ ，則 $\rho = 0.841747$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.009840332	0.0093157	0.2260496	0.2376	0.05110159
1	0.04121087	0.0390595	0.4524543	0.4752	0.05027673
2	0.08632806	0.0816412	0.6795374	0.7128	0.04895363
3	0.1201423	0.1136212	0.9128055	0.9504	0.0411905
4	0.1244747	0.1178745	1.166803	1.188	0.0181713
5	0.1010235	0.0956686	1.13331	1.188	0.04826192
6	0.08441523	0.0799141	1.12172	1.188	0.05909249
7	0.07124245	0.0674711	1.117197	1.188	0.06338075
8	0.06039321	0.0572443	1.113087	1.188	0.06730692
9	0.05142841	0.0487636	1.109169	1.188	0.0710772
10	0.04396409	0.0416247	1.106069	1.188	0.07407921
11	0.03763301	0.035588	1.106494	1.188	0.07366599
12	0.03216284	0.030496	1.108832	1.188	0.07140261
13	0.02750281	0.0260089	1.108407	1.188	0.07181341
14	0.02346512	0.0221348	1.105473	1.188	0.07465831
15	0.02002293	0.0189883	1.105039	1.188	0.07508022
16	0.01718338	0.0162728	1.104259	1.188	0.07583987
17	0.0147364	0.013928	1.098576	1.188	0.0814053
18	0.01267824	0.0120212	1.104821	1.188	0.07529179
19	0.01088067	0.0102814	1.108932	1.188	0.07130572

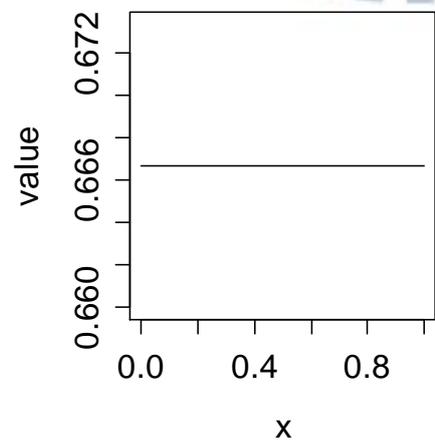
模擬值



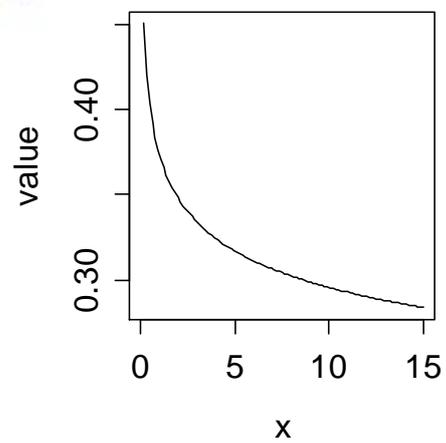
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate

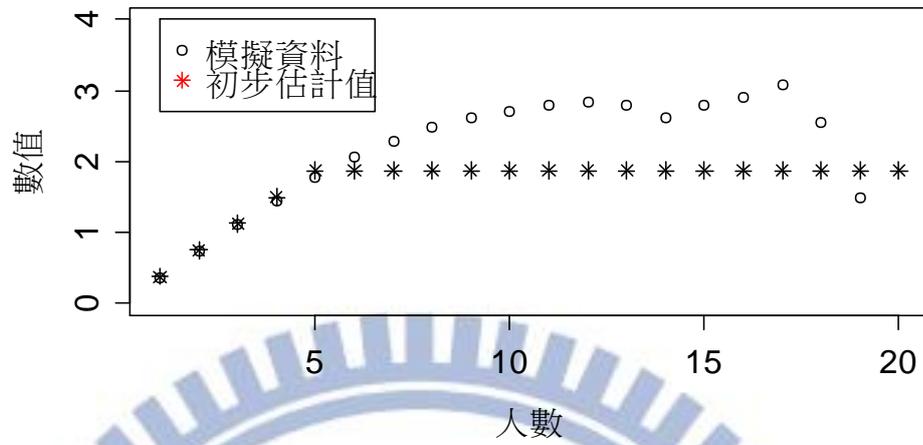


< 個案 2 >

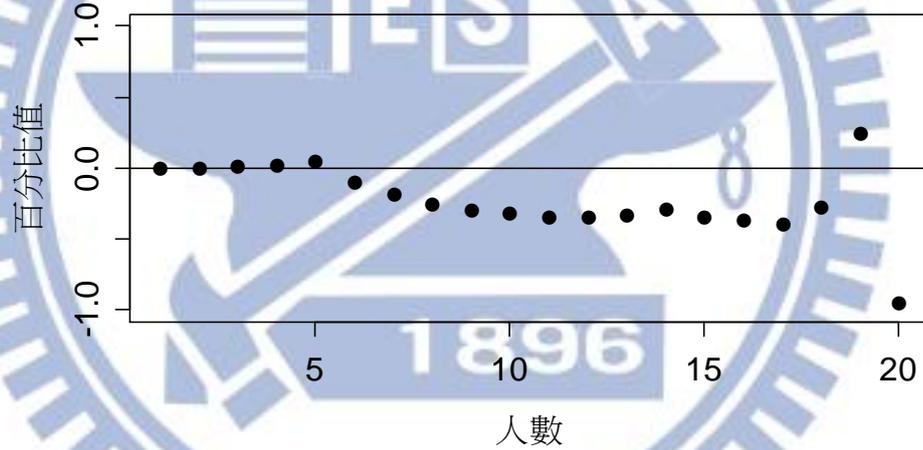
$\lambda = 2/3$ ，服務時間服從分配 $Gamma(8,2)$ ， $\mu = 0.25$ ，則 $\rho = 0.53$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.06595811	0.0659489	0.3723401	0.375	0.007143731
1	0.1771201	0.1769925	0.7421523	0.75	0.01057423
2	0.2384854	0.2384565	1.104661	1.125	0.01841234
3	0.215864	0.2159229	1.451989	1.5	0.03306552
4	0.1487083	0.1487412	1.773207	1.875	0.0574061
5	0.08388259	0.0838729	2.058367	1.875	-0.08908364
6	0.0407473	0.0406966	2.29556	1.875	-0.1832059
7	0.0177284	0.0177735	2.482193	1.875	-0.2446195
8	0.007160403	0.0071967	2.624747	1.875	-0.2856454
9	0.002741864	0.002789	2.711345	1.875	-0.3084613
10	0.001028641	0.0010355	2.79847	1.875	-0.3299911
11	0.000370024	0.0003707	2.828423	1.875	-0.3370865
12	0.000131062	0.0001287	2.787007	1.875	-0.3272353
13	4.62E-05	4.41E-05	2.61047	1.875	-0.2817386
14	1.69E-05	1.96E-05	2.800337	1.875	-0.3304378
15	7.00E-06	8.10E-06	2.914264	1.875	-0.3566129
16	2.78E-06	1.80E-06	3.080019	1.875	-0.3912375
17	5.84E-07	5.00E-07	2.554478	1.875	-0.265995
18	1.96E-07	2.00E-07	1.491745	1.875	0.256917
19	1.34E-07	1.00E-07	30.6895	1.875	-0.9389042

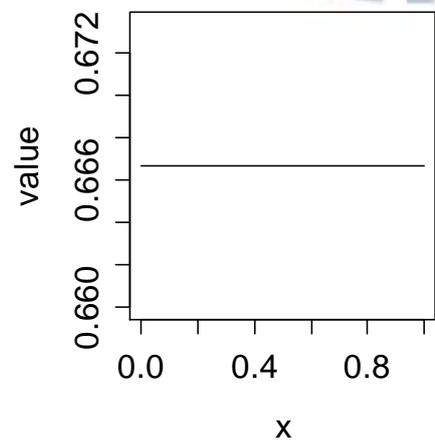
模擬值



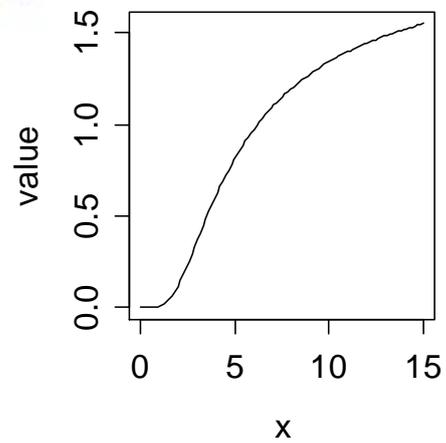
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



< 個案 3 >

$\lambda = 1$ ，服務時間服從常態分配 $N(2,1)$ ， $\mu = 0.5$ ，則 $\rho = 0.4$ 。

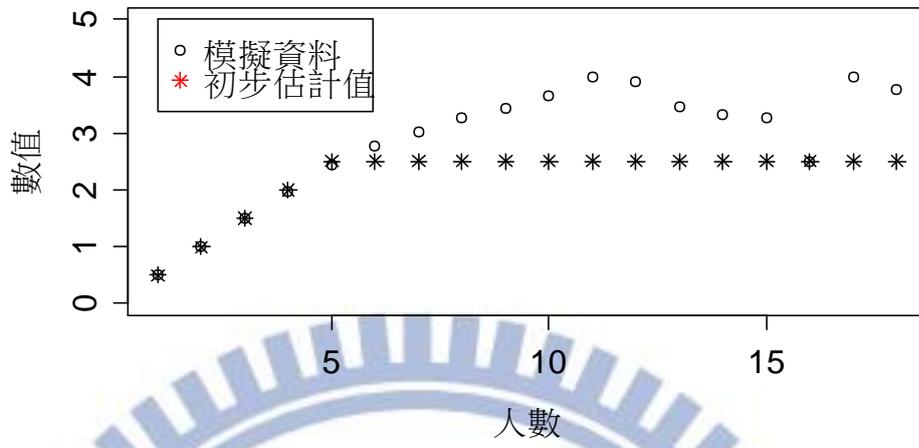
系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.133634	0.1325466	0.4946565	0.5	0.01080245
1	0.2679569	0.2668926	0.9914243	1	0.008649853
2	0.2692012	0.2689901	1.491252	1.5	0.005866484
3	0.1803788	0.1813793	1.981439	2	0.009367674
4	0.0915392	0.0922476	2.474199	2.5	0.01042801
5	0.03728382	0.0377794	2.776891	2.5	-0.09971263
6	0.01360493	0.0137496	3.053893	2.5	-0.1813728
7	0.004502319	0.0045182	3.312819	2.5	-0.2453557
8	0.001363854	0.0013649	3.485407	2.5	-0.2827237
9	0.000391604	0.0003823	3.679929	2.5	-0.3206391
10	0.000103888	0.000108	3.682697	2.5	-0.3211497
11	2.93E-05	2.90E-05	3.973419	2.5	-0.3708189
12	7.30E-06	8.80E-06	4.175747	2.5	-0.4013048
13	2.11E-06	2.40E-06	4.395256	2.5	-0.4312049
14	5.46E-07	6.00E-07	2.625117	2.5	-0.04766142
15	2.29E-07	3.00E-07	9.787012	2.5	-0.7445594
16	3.07E-08	2.00E-07	6.049785	2.5	-0.5867622
17	3.31E-08	1.00E-07	4.079633	2.5	-0.3871998

< 個案 4 >

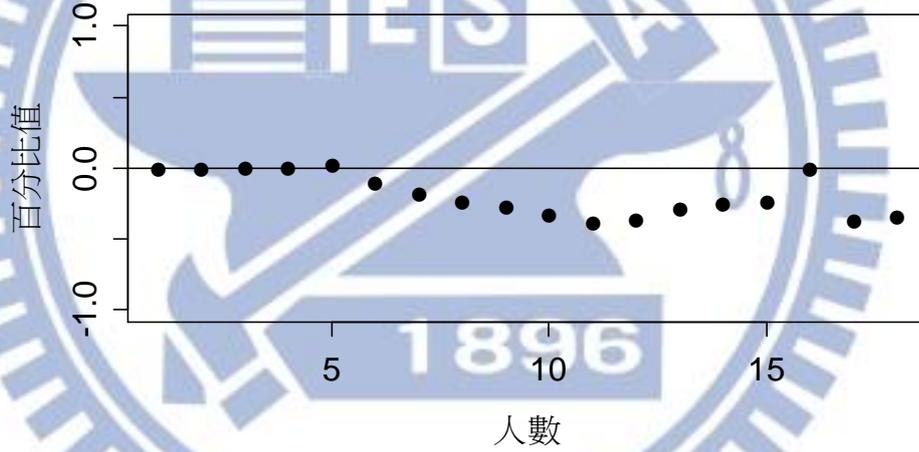
$\lambda = 5$ ，服務時間服從分配 $Beta(2,3)$ ， $\mu = 2.5$ ，則 $\rho = 0.4$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.1337508	0.1338514	0.499138	0.5	0.001726935
1	0.2681651	0.2681723	0.9970131	1	0.002995803
2	0.2689757	0.2687152	1.49067	1.5	0.006258739
3	0.1802647	0.1804259	1.975517	2	0.01239305
4	0.09133096	0.0913596	2.432837	2.5	0.02760691
5	0.0375527	0.0375285	2.76586	2.5	-0.09612188
6	0.01356848	0.0135919	3.029401	2.5	-0.1747544
7	0.004486662	0.0044636	3.269444	2.5	-0.2353439
8	0.001365248	0.0013631	3.423466	2.5	-0.269746
9	0.000398164	0.0003868	3.663336	2.5	-0.3175619
10	0.000105587	0.0001063	4.003001	2.5	-0.3754685
11	2.66E-05	2.63E-05	3.895778	2.5	-0.3582796
12	6.75E-06	5.80E-06	3.469509	2.5	-0.279437
13	1.67E-06	1.70E-06	3.313203	2.5	-0.2454432
14	5.13E-07	8.00E-07	3.281432	2.5	-0.2381376
15	2.44E-07	2.00E-07	2.505826	2.5	-0.00232488
16	7.98E-08	4.00E-07	3.977306	2.5	-0.3714339
17	1.01E-07	2.00E-07	3.767671	2.5	-0.3364601

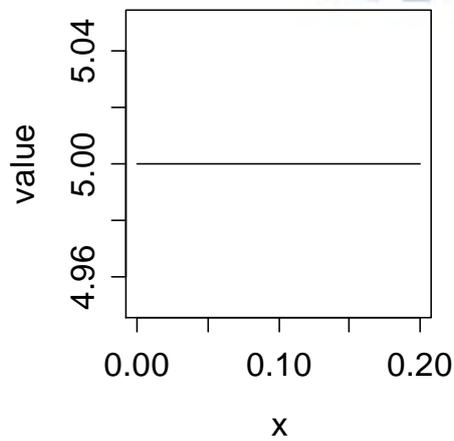
模擬值



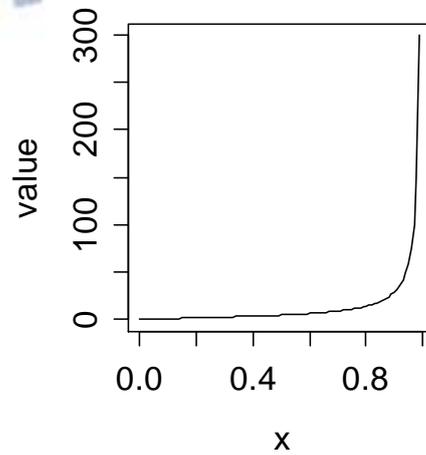
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



$G/M/k$

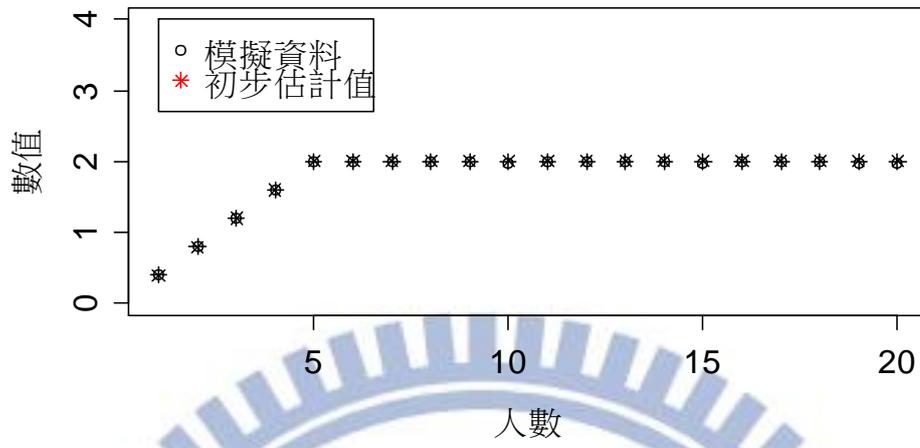
顧客進來時間服從任意分配 G ，期望值為 $1/\lambda$ ，服務時間服從指數分配 $Exp(\mu)$ ，期望值為 $1/\mu$ 。

< 個案 1 >

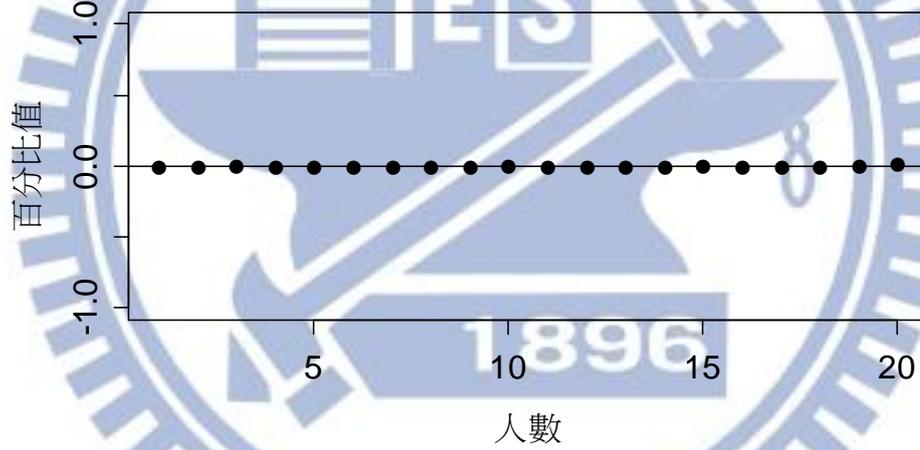
顧客進來時間服從韋伯分配 $Weibull(0.5, 2)$ ， $\lambda = 0.25$ ， $\mu = 0.1$ ，則 $\rho = 0.5$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.2132132	0.067059	0.3984163	0.4	0.003974982
1	0.1683139	0.117474	0.7974834	0.8	0.003155622
2	0.1473059	0.1428073	1.193974	1.2	0.005046835
3	0.1196067	0.1424614	1.593433	1.6	0.004121041
4	0.08940531	0.1233906	1.99404	2	0.002988889
5	0.0618797	0.0947479	1.991946	2	0.004043237
6	0.04756549	0.0726851	1.993742	2	0.003138741
7	0.03645662	0.055599	1.992869	2	0.003578224
8	0.02789897	0.0426642	1.991216	2	0.004411461
9	0.02142621	0.0327331	1.986309	2	0.00689288
10	0.01647936	0.0251659	1.991972	2	0.004030409
11	1.26E-02	1.93E-02	1.997113	2	0.001445532
12	9.68E-03	1.48E-02	1.996088	2	0.001959634
13	7.42E-03	1.14E-02	1.996168	2	0.001919448
14	5.69E-03	8.75E-03	1.983908	2	0.008111399
15	4.41E-03	6.73E-03	1.998887	2	0.000557046
16	3.36E-03	5.16E-03	2.00274	2	-0.00136827
17	2.58E-03	3.95E-03	1.996915	2	0.001544941
18	1.98E-03	3.03E-03	1.982735	2	0.008707698
19	1.53E-03	2.31E-03	1.967844	2	0.01634054

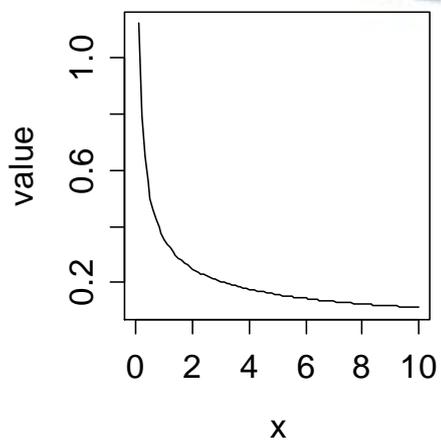
模擬值



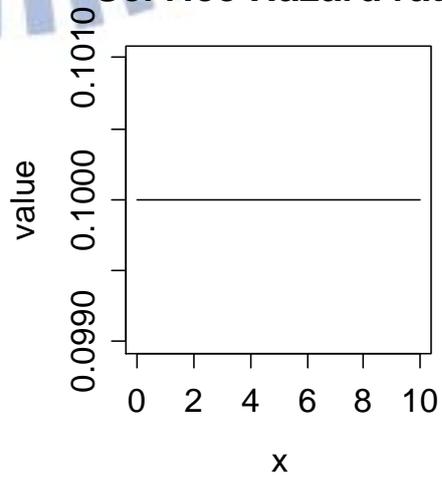
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



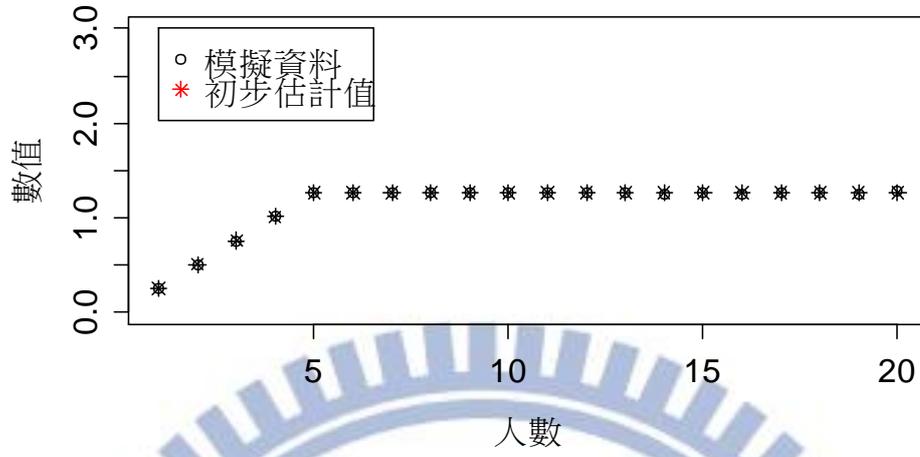
< 個案 2 >

顧客進來時間服從韋伯分配 $Weibull(2, 2)$, $\lambda = 0.564$, $\mu = 1/7$,

則 $\rho = 0.79$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.004660409	0.009055	0.2543157	0.253208	-0.00435696
1	0.03560535	0.0547079	0.5057021	0.506415	0.001410499
2	0.1081821	0.1381523	0.7578078	0.759623	0.002395485
3	0.1823052	0.1989987	1.012131	1.012831	0.000690993
4	0.1966135	0.1879582	1.264268	1.266038	0.001400735
5	0.1486696	0.1288898	1.263705	1.266038	0.00184667
6	0.1019936	0.0885992	1.263897	1.266038	0.001694566
7	0.07010003	0.0608137	1.264836	1.266038	0.000951024
8	0.04808032	0.0416608	1.265662	1.266038	0.000297124
9	0.0329162	0.0284826	1.263986	1.266038	0.001623881
10	0.02253395	0.0195625	1.26377	1.266038	0.001794605
11	1.55E-02	1.35E-02	1.26864	1.266038	-0.00205097
12	1.06E-02	9.19E-03	1.268525	1.266038	-0.00196024
13	7.25E-03	6.29E-03	1.255539	1.266038	0.008362517
14	5.01E-03	4.36E-03	1.260301	1.266038	0.004552091
15	3.46E-03	3.03E-03	1.253078	1.266038	0.01034269
16	2.42E-03	2.10E-03	1.272847	1.266038	-0.00534928
17	1.65E-03	1.42E-03	1.268033	1.266038	-0.00157262
18	1.12E-03	9.83E-04	1.252612	1.266038	0.01071887
19	7.85E-04	6.95E-04	1.279208	1.266038	-0.01029492

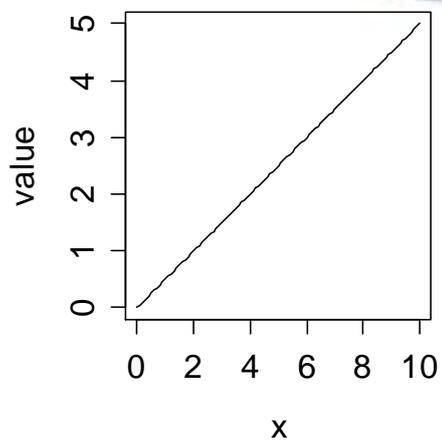
模擬值



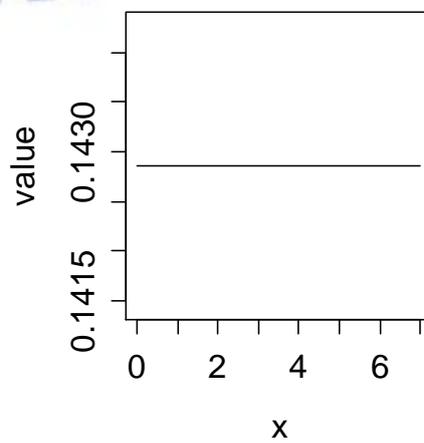
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



G/G/k

顧客進來時間服從任意分配 G ，期望值為 $1/\lambda$ ，服務時間服從任意

分配 G ，期望值為 $1/\mu$ 。

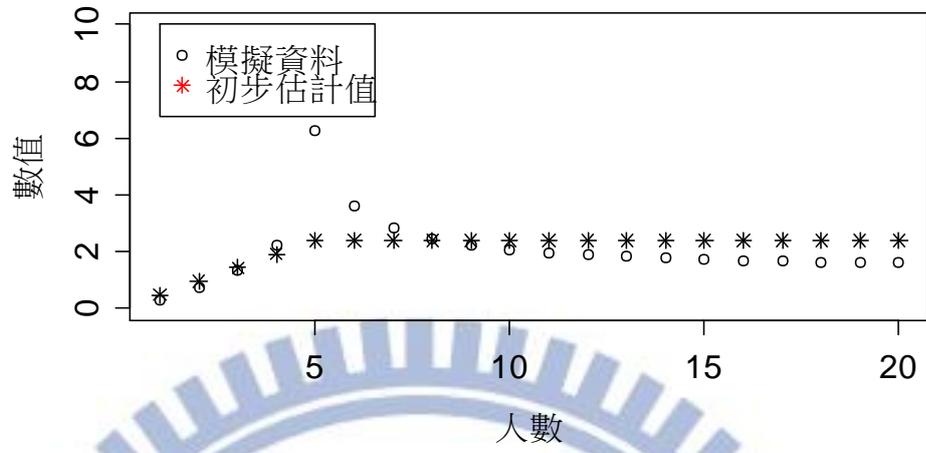
< 個案 1 >

顧客進來時間服從韋伯分配 $Weibull(0.4, 2)$ ， $\lambda = 0.15$ ，服務時間

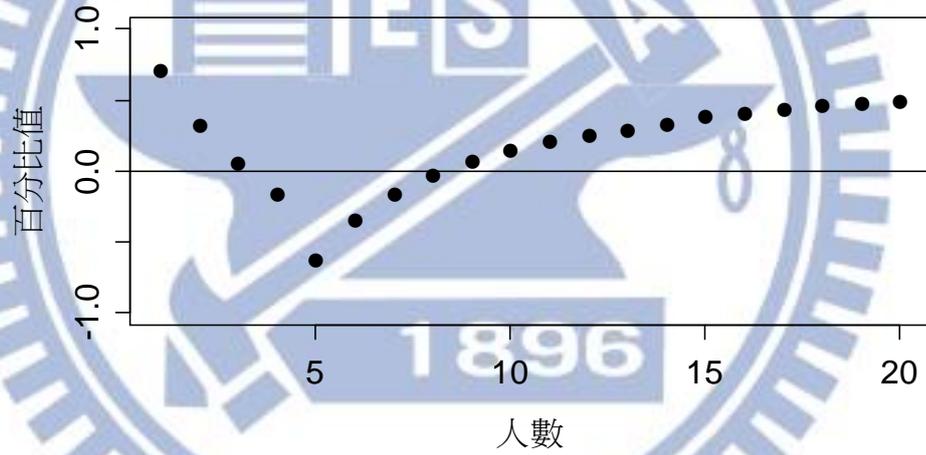
服從韋伯分配 $Weibull(0.3, 1.5)$ ， $\mu = 0.072$ ，則 $\rho = 0.418$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.1869117	0.0702536	0.2783378	0.478497	0.7191232
1	0.2524041	0.1566771	0.7219103	0.956994	0.3256411
2	0.2170313	0.1982169	1.345692	1.435491	0.06673097
3	0.1472974	0.1838072	2.254546	1.913988	-0.151054
4	0.08152737	0.1347581	6.263774	2.392485	-0.6180442
5	0.02151388	0.058714	3.597489	2.392485	-0.334957
6	0.01632083	0.0365415	2.830342	2.392485	-0.1547012
7	0.01291063	0.0258553	2.454065	2.392485	-0.02509329
8	0.0105357	0.0195708	2.227203	2.392485	0.07421024
9	0.008787163	0.0154081	2.078057	2.392485	0.1513086
10	0.007414667	0.0124525	1.963324	2.392485	0.2185889
11	6.34E-03	1.03E-02	1.887484	2.392485	0.2675523
12	5.44E-03	8.65E-03	1.837637	2.392485	0.3019355
13	4.70E-03	7.31E-03	1.780994	2.392485	0.3433427
14	4.11E-03	6.31E-03	1.715617	2.392485	0.3945331
15	3.68E-03	5.46E-03	1.689408	2.392485	0.4161678
16	3.23E-03	4.77E-03	1.654671	2.392485	0.445898
17	2.89E-03	4.20E-03	1.616716	2.392485	0.4798423
18	2.60E-03	3.73E-03	1.615488	2.392485	0.4809673
19	2.31E-03	3.27E-03	1.596381	2.392485	0.4986925

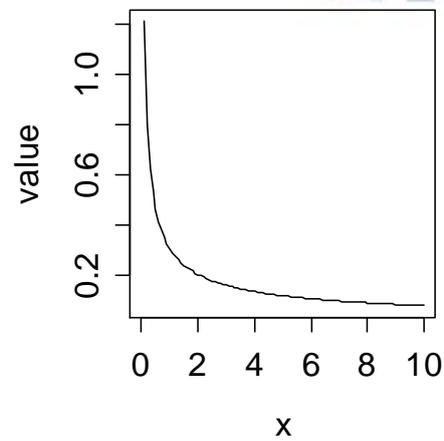
模擬值



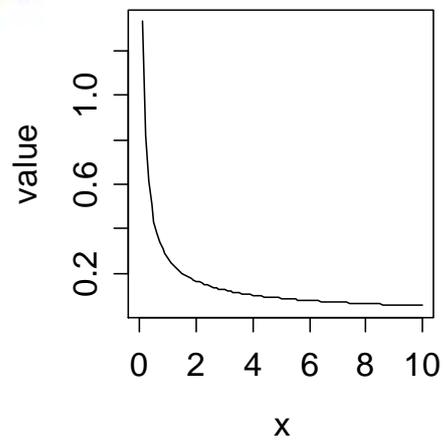
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



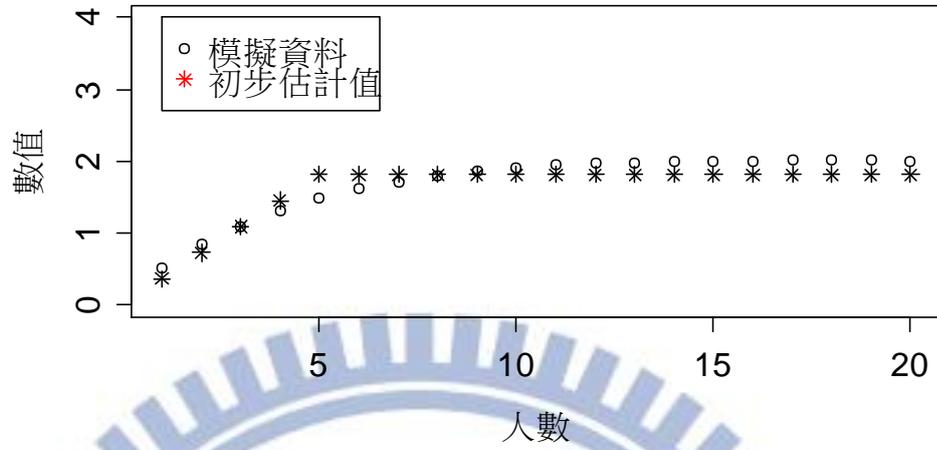
< 個案 2 >

顧客進來時間服從韋伯分配 $Weibull(0.5, 2)$ ， $\lambda = 0.25$ ，服務時間

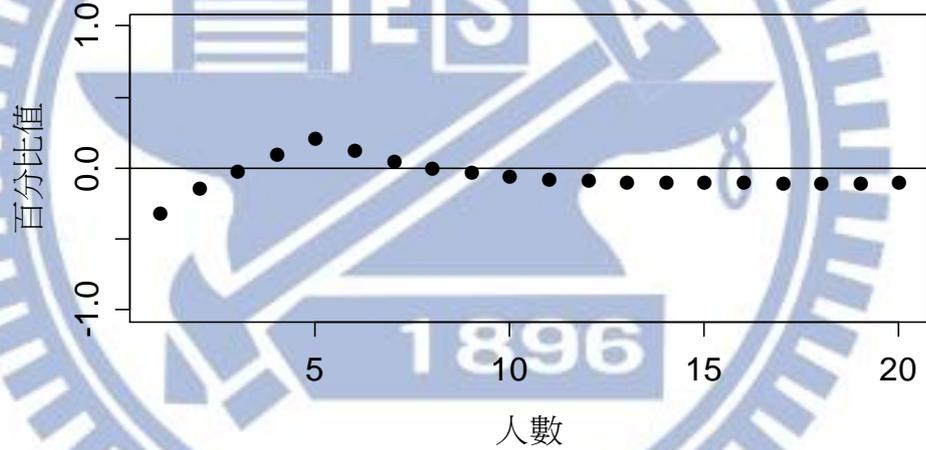
服從卡方分配 $\chi^2(11)$ ， $\mu = 1/11$ ，則 $\rho = 0.55$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.2296135	0.064248	0.5242086	0.363636	-0.3063136
1	0.1225619	0.0943068	0.841812	0.727273	-0.1360628
2	0.1120283	0.1106014	1.09984	1.090909	-0.00812045
3	0.1005613	0.114724	1.31468	1.454545	0.1063875
4	0.08726382	0.1091422	1.484488	1.818182	0.2247868
5	0.07352176	0.0976768	1.614074	1.818182	0.126455
6	0.06051569	0.0838599	1.717586	1.818182	0.05856816
7	0.04882428	0.0696222	1.803074	1.818182	0.008378844
8	0.03861305	0.0563551	1.861576	1.818182	-0.02331045
9	0.03027279	0.045007	1.909865	1.818182	-0.04800497
10	0.02356554	0.0353343	1.943294	1.818182	-0.0643816
11	1.82E-02	2.76E-02	1.969982	1.818182	-0.07705656
12	1.40E-02	2.14E-02	1.985331	1.818182	-0.08419204
13	1.08E-02	1.65E-02	2.003964	1.818182	-0.09270739
14	8.21E-03	1.26E-02	1.999716	1.818182	-0.09077993
15	6.30E-03	9.71E-03	2.003458	1.818182	-0.09247831
16	4.85E-03	7.47E-03	2.011573	1.818182	-0.09613916
17	3.71E-03	5.69E-03	2.010438	1.818182	-0.09562879
18	2.83E-03	4.35E-03	2.014903	1.818182	-0.09763312
19	2.16E-03	3.31E-03	2.002413	1.818182	-0.09200442

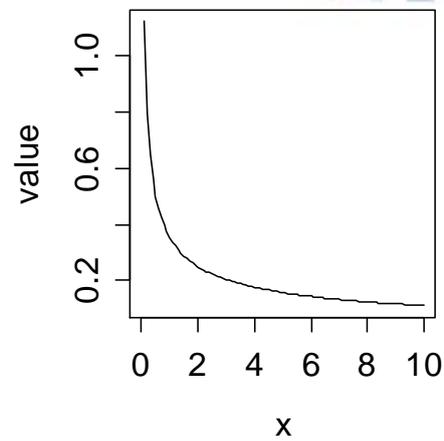
模擬值



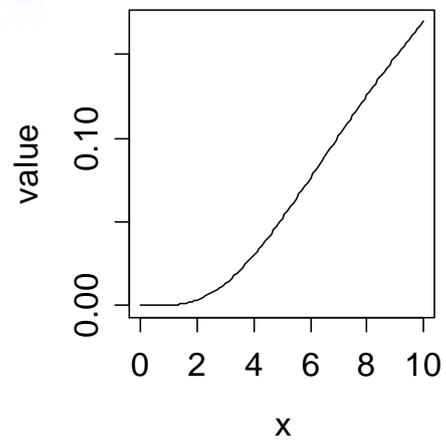
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



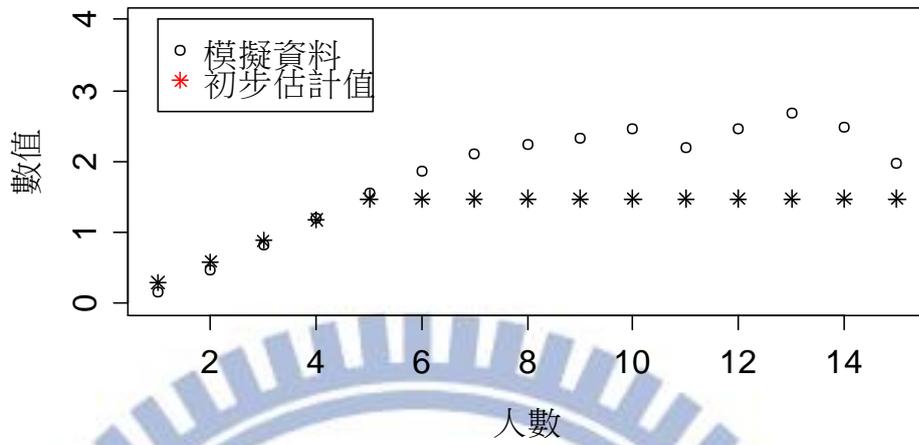
< 個案 3 >

顧客進來時間服從韋伯分配 $Weibull(2, 3)$ ， $\lambda = 0.376$ ，服務時間服

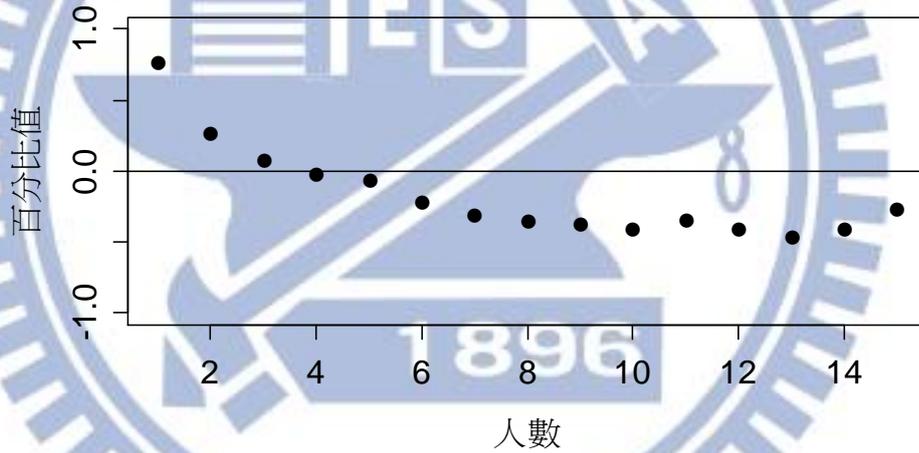
從卡方分配 $\chi^2(9)$ ， $\mu = 1/9$ ，則 $\rho = 0.677$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.002821631	0.0080079	0.1661216	0.295409	0.7782695
1	0.04820505	0.086596	0.4647413	0.590818	0.2712835
2	0.1863316	0.2439433	0.8188981	0.886227	0.08221882
3	0.2978921	0.3046322	1.195907	1.181636	-0.01193351
4	0.2547289	0.2130559	1.561574	1.477045	-0.05413084
5	0.1364366	0.0976499	1.873456	1.477045	-0.2115936
6	0.05212286	0.0334319	2.106611	1.477045	-0.2988525
7	0.01586999	0.0094714	2.245005	1.477045	-0.3420751
8	0.004218877	0.0024457	2.318906	1.477045	-0.3630423
9	0.001054678	0.0005916	2.455225	1.477045	-0.3984076
10	0.000240956	0.0001299	2.20614	1.477045	-0.3304844
11	5.89E-05	3.63E-05	2.465834	1.477045	-0.4009958
12	1.47E-05	6.60E-06	2.692039	1.477045	-0.4513285
13	2.45E-06	1.30E-06	2.475014	1.477045	-0.4032176
14	5.25E-07	1.00E-07	1.971548	1.477045	-0.2508197

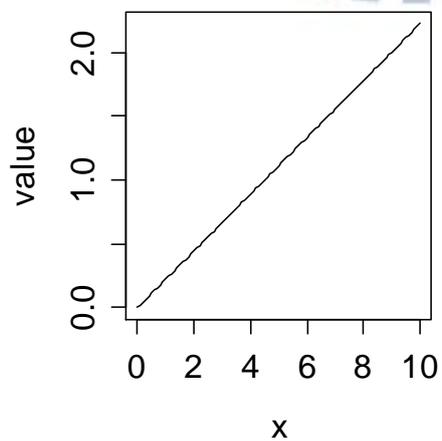
模擬值



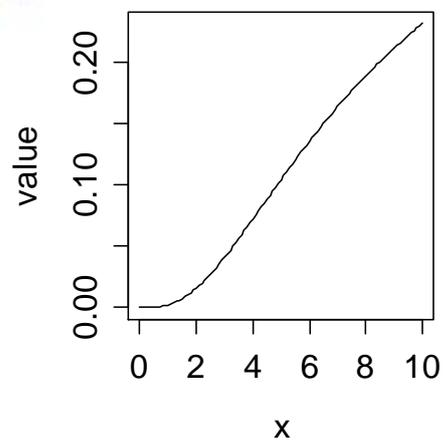
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate

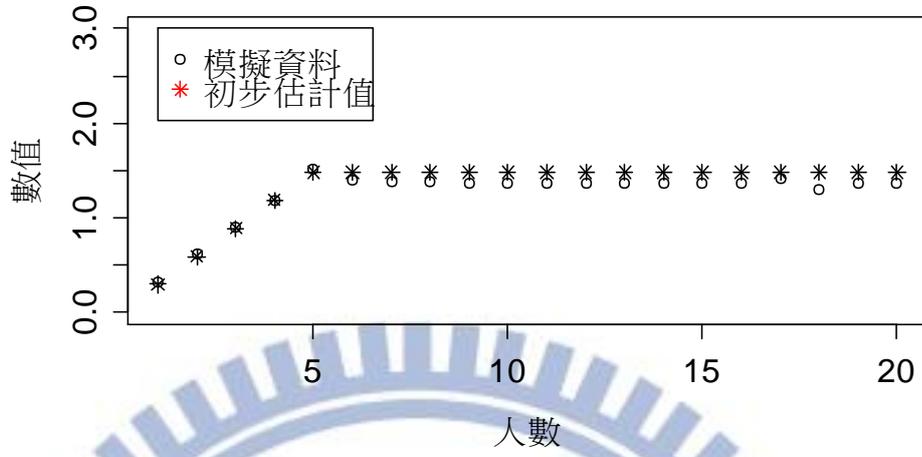


< 個案 4 >

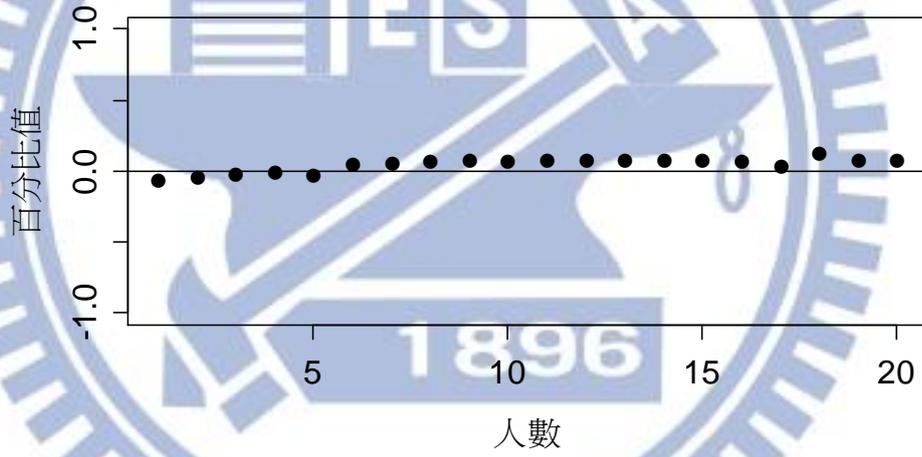
顧客進來時間服從分配 $Beta(4, 5)$ ， $\lambda = 9/4$ ，服務時間服從卡方分配 $\chi^2(1.5)$ ， $\mu = 2/3$ ，則 $\rho = 0.675$ 。

系統人數	時間平均	人數平均	$P(N=i)/P(T=i+1)$	估計值	誤差百分比
0	0.01118421	0.022774	0.312736	0.296296	-0.05256746
1	0.0728218	0.1134831	0.6132627	0.592593	-0.03370518
2	0.1850481	0.2292356	0.9028543	0.888889	-0.01546803
3	0.253901	0.2569853	1.190165	1.185185	-0.00418452
4	0.215924	0.1828049	1.509739	1.481481	-0.01871659
5	0.1210838	0.0884889	1.40483	1.481481	0.05456251
6	0.06298903	0.0473751	1.385816	1.481481	0.06903218
7	0.03418572	0.0260048	1.377896	1.481481	0.07517638
8	0.01887283	0.0144025	1.367662	1.481481	0.08322169
9	0.01053074	0.0080759	1.372243	1.481481	0.07960587
10	0.005885183	0.0045213	1.366135	1.481481	0.08443232
11	3.31E-03	2.53E-03	1.364216	1.481481	0.08595831
12	1.86E-03	1.45E-03	1.362519	1.481481	0.08731066
13	1.07E-03	8.15E-04	1.357432	1.481481	0.09138526
14	6.00E-04	4.61E-04	1.368279	1.481481	0.08273312
15	3.37E-04	2.59E-04	1.373852	1.481481	0.07834152
16	1.88E-04	1.45E-04	1.416641	1.481481	0.04577067
17	1.02E-04	7.54E-05	1.307351	1.481481	0.1331936
18	5.77E-05	5.00E-05	1.362684	1.481481	0.08717917
19	3.67E-05	2.82E-05	1.364614	1.481481	0.08564121

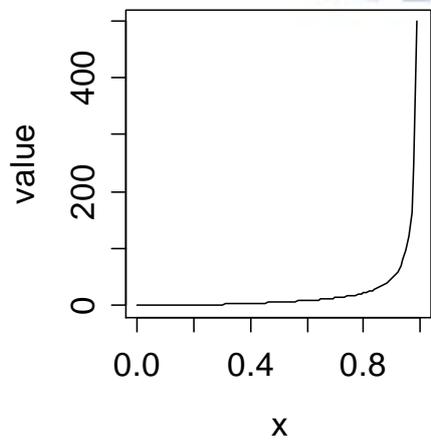
模擬值



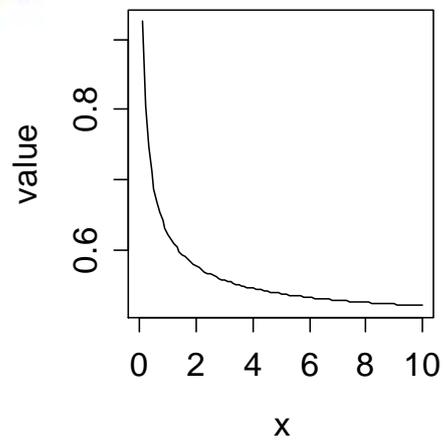
誤差百分比



Interarrival Hazard rate



Service Hazard rate



3-3. 結果分析

根據以上在各種隊伍系統下的模擬結果，會觀察到一個現象，當排隊模型為 $M/G/k$ 時，如果服務時間分配為 IFR，我們得到的估計值會低估，為 DFR 時，我們得到的估計值會高估。在 $G/M/k$ 下，無論顧客到達分配為 IFR 或 DFR，都可以得到相當準確的估計。而在 $G/G/k$ 下，當服務時間分配為 IFR 時，我們得到的估計值會低估，為 DFR 時，我們得到的估計值會高估，反而顧客到達時間分配的 hazard rate 較不影響結果。

我們試著猜測為何會發生此現象。由於本文中初步估計值是定義在顧客已經進入平穩狀態，但實際上並不是每個客人都進入了平穩狀態。假設排隊模型是 $M/G/k$ ，服務時間分配為 DFR，當有顧客還未進入平穩狀態，顧客一進入系統，馬上就服務完畢的機率較高，所以顧客進入系統中，看到系統通常會比較不擁塞，換句話說， i 較高的時候， $P(a \text{ customer arrived and see } i \text{ in the system})$ 就會較低，則 $\frac{P(a \text{ customer arrived and see } i \text{ in the system})}{P(a \text{ RO arrived and see } i+1 \text{ in the system})}$ 的值就會降低，此時我們的初步估計值就會高估，反之亦然。

而在 $G/M/k$ 排隊模型中，由於服務時間分配為指數分配，其 hazard rate 為一水平線，無論顧客進入系統多久的時間，離開系統的機率都是一樣的，此時顧客就會進入平穩狀態，故我們的初步估計值結果是相當的準確。

第四章 結論

本文目的在於找出顧客平均極限分配,和時間平均極限分配的等式關係,由於此函數與隨機過程的逆向過程有關,這是一個少被探討的領域,故本文只表示分配之間的函數關係,並無法求得此函數的特性。但在 $M/G/k/k$ 損失排隊模型與 $M/M/k$ 排隊模型中,由於逆向過程已經找到,故可確實找出此等式函數。

本文模擬了 $M/G/k$ 、 $G/M/k$ 與 $G/G/k$ 排隊模型,觀察到服務時間分配為 IFR 或 DFR 時,初步估計值會低估或高估。我們猜測因為有零散的顧客還未進入平穩狀態,所以初步估計值會有誤差的現象。而在 $G/M/k$ 排隊模型,由於服務時間分配為指數分配,其 hazard rate 為一水平線,故初步估計值相當準確。

因此將來在做排隊模型的研究時,可以運用此定理,得到顧客平均極限分配與時間平均極限分配之間的等式關係。

參考文獻

- [1] PIERRE BRÉMAUD, RAGHAVAN KANNURPATTI AND RAVI MAZUMDAR (1992). *Event and time averages: a review. Adv. Appl. Prob.* **24**, 377-411.
- [2] LEONARD KLEINROCK (1975). *Queueing Systems. John Wiley & Sons*
- [3] BENJAMIN MELAMED AND WARD WHITT (1990a). On arrivals that see time averages . *Operat. Res.* **38**, 156-172
- [4] SHUN-SHEN NIU (1983). Inequalities between arrival averages and time averages in stochastic processes arising from queueing theory. *Prob. Eng. Inf. Sci.* **13**, 293-308.
- [5] EROL A. PEKÖZ AND SHELDON M. ROSS (2008). *Relating Time and Customer Averages for Queues Using 'Forward' Coupling from the past. Adv. Appl. Prob.* **45**, 568-574.
- [6] EROL A. PEKÖZ, SHELDON M. ROSS AND SRIDHAR SESHADRI (2008). How Nearly Do Arriving Customers See Time-Average Behavior? *Adv. Appl. Prob.* **45**, 963-971.
- [7] SHELDON M. ROSS (1983). *Stochastic process. John Wiley & Sons*
- [8] RONALD W. WOLFF (1982). Poisson arrivals see time averages. *Operat. Res.* **30**, 223-231.