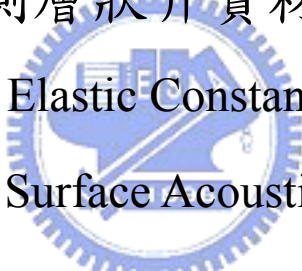


國立交通大學  
機械工程學系碩士班  
碩士論文

表面聲波量測層狀介質材料常數之研究  
Determination of Elastic Constants in Layered Media  
using Surface Acoustic Waves



研究生：許家豪

指導教授：尹慶中 博士

中華民國九十四年七月

表面聲波量測層狀介質材料常數之研究  
Determination of Elastic Constants in Layered Media  
using Surface Acoustic Waves

研究生：許家豪

Student : Chia-Hao Hsu

指導教授：尹慶中 博士

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin

國立交通大學

機械工程學系碩士班



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Mechanical Engineering  
July 2004  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年七月

# 表面聲波量測層狀介質材料常數之研究

研究生：許家豪

指導教授：尹慶中 博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

## 摘 要

本文主要探討雷射超音波技術量測層狀介質表面聲波相速度與薄膜鍍層材料常數的反算。以 Stroh 理論推導為基礎，數值計算層狀介質表面聲波的相速度頻散曲線。實驗試片採用微機電製程技術製作含壓電材料之層狀試片，以交指叉電極產生窄頻之表面聲波，並建立一套共焦式法布里派洛光干涉儀，量測介質表面粒子因表面聲波傳遞引致的都卜勒頻移訊號，應用相位頻譜法計算表面聲波的相速度。不論層狀介質為等向性或非等向性材料，表面聲波的波速與材料性質、波傳方向及頻率相關。本文採用準牛頓法則與簡單體法兩種最佳化搜尋法則，以延伸拉格蘭吉乘子取代材料常數反算的等式或不等式限制條件。並利用多起始點方式求得滿足最小平方誤差之層狀介質材料常數，可供反算程序的可靠度評估。

# Determination of Elastic Constants in Layered Media using Surface Acoustic Waves

Student: Chia-Hao Hsu

Advisor: Dr. Ching-Chung Yin

Department of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University

## Abstract

This thesis studies determination of material constants in a thin film deposited on a half space through the measurement of phase velocities of surface acoustic waves propagating in layered media using laser-based ultrasonic technique. Based on the Stroh formulation, the phase velocity dispersion equation of surface acoustic waves is derived and numerically calculated. The experimental specimens made of a thin film sputtered on a substrate or a layer of piezoelectric material are fabricated by micro-electro-mechanical system (MEMS) process. The inter-digital transducer (IDT) deposited on the surface of specimen is used to launch narrow-band surface acoustic waves. A system of confocal Fabry-Pérot interferometer was developed during this research and used to measure the Doppler frequency shifts due to surface particle oscillations during surface acoustic wave propagation. The phase spectrum method is used to calculate phase velocities of the surface acoustic waves, which depend on the material properties of the thin film and substrate, frequencies and directions of wave propagation. The quasi-Newton method with and/or without constraints and simplex method are employed to search the minimum values of sum of the squared roots of errors. The augmented Lagrange multipliers are introduced to replace the equality and inequality constraints on material properties in inversion scheme. A process of multiple initial guess selected by random number is adopted for reliability assessment.

## 致謝

在此論文定稿之際，忠心的感謝 尹慶中博士兩年來的殷切指導，引領家豪踏入學術的殿堂，尹老師的諄諄教誨，使家豪學習到許多的經驗並獲得成長，在此致上由衷的謝意。同時感謝蕭國模老師、楊哲化老師及李永春老師撥允擔任學生口試委員，給予指導。

家豪最感謝的是偉大的雙親，許同心先生及潘美娥女士，給予家豪無匱乏的生活及無限的關懷與支持，求學之路有您們的寬容與呵護，讓家豪在無憂無慮下成長且在無後顧之憂完成學業。感謝女友曉珊這兩年來的支持與鼓勵，由於你的諒解讓家豪得以安心的完成學業。

感謝學長鄭凱宇、劉育翔、許世明、王多聞、游泰和、溫子達、羅世青、徐家保及學姐楊秋華提供家豪生活上與學業上寶貴的經驗，幫助家豪提早適應實驗室的生活。同學蔡德新、孫繼增及黃俊傑，有你們的陪伴讓家豪的求學之路並不孤單，並給予了許多的扶持與幫助。感謝學弟張桓禎、陳俊宏、黃國彰過去一年來的陪伴，有你們的陪伴讓家豪的生活增添了不少的樂趣，在此也預祝你們論文順利。還有許多不及備載但曾經幫助過且指導過家豪的朋友，給予家豪許多的寶貴意見及協助，家豪亦銘記在心，在此僅以此論文獻給你們。

# 目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 文獻回顧	1
1.3 內容簡介	3
第二章 層狀介質的表面聲波	4
2.1 層狀介質表面波傳分析	4
2.2 層狀介質的波傳阻抗與界面反射係數	8
2.3 疊層介質之頻散曲線	10
2.3.1 半無限域之表面波	10
2.3.2 層狀半無限域之表面波	11
第三章 材料係數反算	13
3.1 最佳化	13
3.2 準牛頓法	14
3.3 簡單體法	15
3.4 延伸性拉格蘭吉乘子	15
3.5 具限制條件的目標函數	16
3.6 無限制條件的目標函數	16

3.7 材料常數的反算	17
第四章 結果與討論	19
4.1 實例驗證與收斂性測試	19
第五章 量測系統與實驗架構	21
5.1 共焦式法布里派洛光干涉儀	21
5.1.1 共振腔的設計與建立	21
5.1.2 都卜勒效應	22
5.2 相位頻譜法	25
5.3 表面聲波的生成與量測系統	27
5.3.1 試片的製作與表面聲波的生成	27
5.3.2 量測系統的建立	27
第六章 結論與未來展望	30
6.1 材料常數的反算	30
6.2 量測系統	30
6.2.1 共振腔	30
6.2.2 物鏡與工作平台	31
6.2.3 光源	32
參考文獻	33
附錄 A 座標轉換矩陣	36
附錄 B 六階矩陣元素	38
附錄 C 正交性材料的材料剛性矩陣	39
附錄 D 共振腔設計理論	40



## 表目錄

表 1 鋁之材料常數	42
表 2 鈉鈣玻璃之材料常數	42
表 3 氧化鋅之材料常數	43
表 4 鈮酸鋰之材料常數	43
表 5 交指叉換能器設計參數	44
表 6 簡單體法反算材料常數的結果	44
表 7 具限制條件之準牛頓法及有限差分法反算材料常數的結果	45
表 8 無限制條件之準牛頓法及有限差分法反算材料常數的結果	45





## 圖目錄

圖 2.1	半無限域基材及參考的卡氏座標	46
圖 2.2	層狀半無限域上下傳波的位移示意圖	46
圖 2.3	多層半無限域介質示意圖， $G_i(i=0,1,\dots,n)$ 為各層介質的全波阻	47
圖 2.4	波在Al(1 $\mu$ m)/SiO <sub>2</sub> 介質傳遞之表面聲波頻散曲線，實線代表雷利波，虛線為拉夫波	47
圖 2.5	在 ZnO(1 $\mu$ m)/SiO 介質傳遞之表面聲波頻散曲線，實線代表雷利波，虛線為拉夫波	48
圖 3.1	受限制之目標函數最佳化程式之流程圖	49
圖 3.2	延伸性拉格蘭吉乘子多起始點總域極小化程序	50
圖 4.1	不同積層材料常數所對應的頻散曲線圖	51
圖 4.2	頻率範圍在 1MHz~1 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	51
圖 4.3	頻率範圍在 1~3 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	52
圖 4.4	頻率範圍在 3~5 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	52
圖 4.5	頻率範圍在 5~7 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	53
圖 4.6	頻率範圍在 1MHz~1 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	53
圖 4.7	頻率範圍在 1~3 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	54
圖 4.8	頻率範圍在 3~5 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	54
圖 4.9	頻率範圍在 5~7 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖	55
圖 4.10	頻率範圍在 1 MHz~1 GHz 間且參數變動 10%時，無限制條件目標函數的等高線圖	55

圖 4.11 頻率範圍在 1~3 GHz 間且參數變動 10%時， 無限制條件目標函數的等高線圖	56
圖 4.12 頻率範圍在 3~5 GHz 間且參數變動 10%時， 無限制條件目標函數的等高線圖	56
圖 4.13 頻率範圍在 5~7 GHz 間且參數變動 10%時， 無限制條件目標函數的等高線圖	57
圖 5.1 超音波產生都卜勒頻移的示意圖	58
圖 5.2 CFPI 的共振腔長度與所能量測到之超音波頻 率與振幅的關係曲線	58
圖 5.3 雷射光於共振腔內的路徑示意圖	59
圖 5.4 CFPI 在 $R = 0.9$ 時的透射強度示意圖	59
圖 5.5 He: Ne 雷射光在兩偏極分光稜鏡中的傳遞， 圓點與箭頭為光之極化方向	60
圖 5.6 CFPI 量測表面聲波元件波動訊號之實驗示意圖	60
圖 5.7 表面聲波元件量測點示意圖	61
圖 5.8 表面聲波元件頻率響應	61
圖 5.9 交指叉換能器接收到之表面聲波訊號	62
圖 5.10 圖 5.9 表面聲波的頻譜	62
圖 5.11 表面聲波於第一接收點的 CFPI 訊號圖	63
圖 5.12 圖 5.11 表面聲波的頻譜	63
圖 5.13 表面聲波於第二接收點的 CFPI 訊號	64
圖 5.14 圖 5.13 表面聲波的頻譜	64
圖 5.15 以 2 週期弦波致動 IDT 產生表面聲波的 CFPI 訊號	65
圖 5.16 以 1 週期弦波致動 IDT 產生表面聲波的 CFPI 訊號	65

圖 5.17 位置 1 與 2 量測的表面聲波相位連續圖	66
圖 5.18 CFPI 量測表面聲波元件的照片	66
圖 5.19 CFPI 共振腔實體照片	67
圖 5.20 單相交指叉換能器的示意圖	67



# 第一章 緒論

## 1.1 研究背景

隨著工業科技的提升，層狀材料的應用日漸廣泛，有關厚度與材料性質的檢測是品質保證的重要課題。傳統的材料試驗法需要破壞材料本身，才能檢測出材料性質，只適合隨機抽樣檢測，相較之下，非破壞性檢測方法顯得更經濟與實用。

傳統的超音波檢測法已發展得相當成熟，利用壓電探頭激發出超音波，接收反射回波的波傳時間，量測相速度或群速度，可推算試片的材料係數。過去二十年間發展的雷射超音波檢測方法以一高能量的脈衝雷射，在試片上激發點或線波源，再以錐形探頭或壓電探頭作為接收器，可推算出材料內部的材料性質或偵測結構缺陷位置。一般來說，超音檢測法大都為接觸式或浸水式，不易與製程結合，量測上會造成誤差與不便，因此，非接觸的雷射超音波法檢測方法日益重要。由於錐形探頭和壓電探頭的靈敏度與頻寬限制，較高頻之訊號或惡劣的量測環境都不適用。光學干涉儀具有高靈敏度、寬頻與非接觸量測的特性，其中，都卜勒干涉儀不僅廣泛應用在結構及工業產品振動量測上，在高頻、微小振幅的超音波偵測已有成功的實例。

本論文應用層狀介質表面聲波之相速度頻散曲線，反算層狀介質之材料係數。以半導體製程在壓電材料上製作交指差電極，產生表面聲波，另以自行設置共焦式法布里派洛光干涉儀(confocal Fabry-Perot interferometer, CFPI)量測波速反算材料性質。

## 1.2 文獻回顧

在 1988 年，Braga 和 Herrmann [1]延續 Stroh 的理論，討論彈性

波傳在不同介質間產生的反射與折射現象，將彈性體的運動方程式以線性常微分方程組表示，並引入波傳阻抗，推導複合材料層板內的彈性波傳，分別討論無限制積層板與週期性積層板的彈性波頻散方程式。在 1991 年，Honein et al. [2]將[1]的推導擴展至週期性或非週期性層狀非等向性壓電材料的彈性波傳，考慮邊界條件後，求出各積層界面之波傳阻抗與反射係數，進而求出頻散曲線。

本文實驗要產生適當波長範圍的表面聲波，波長控制為一相當重要的因素，在 1994 年，Costley et al. [3]以 Fresnel 鏡片將紅寶石脈衝雷射聚焦於不同厚度的鋁板上，藉調整 Fresnel 鏡片與試片的距離，控制雷射生成藍姆波的波長，以接觸面積很小的壓電探頭接收藍姆波，再以二維快速傅立葉轉換獲得藍姆波相速度頻散曲線。在 1997 年，Shan et al. [4]利用雷射生成暫態光柵(laser-induced transient grating, LITGs)法，將兩束波長、能量相等的短脈衝雷射在試片上生成干涉條紋，產生窄頻之表面聲波，以麥克森干涉儀(Michelson Interferometer)量測表面聲波之波形，找出頻散曲線。

在 1994 年，Dewhurst 和 Shan [5]以數值模擬討論 CFPI 共振腔中，反射與透射光之光強度轉換方程式，並找出可將訊號放大至最大時的調變頻率，也就是干涉儀在進行量測時的操作點。在 1998 年，Shan et al. [6]討論 CFPI 的最佳操作點與其靈敏度，並將訊號以後處理方式，將光接收器所接收透射與反射光強度訊號的電壓相減，以加強接收到的都卜勒頻率響應，提高訊雜比。在 1998 年，Nakano et al. [7]討論以光學鑑別器來量測射頻之超音波，將 CFPI 之光源作相位調變，量測超音波訊號，共振腔中介電反射鏡(dielectric mirror)焦距為 500 mm，長度為 1000 mm，且在共振腔中央放置一焦距為 250 mm 之透鏡，以增加共振腔對都卜勒效應(Doppler effect)的鑑別能力，並以



相位調制器將 He: Ne laser 的相位調變至轉移函數(transfer function)的邊緣，可提高所量測到之超音波訊號之訊雜比。

在 2001 年，葉國泰[8]進行矽晶圓的非破壞評估，引用延伸性拉格蘭吉乘子(Augmented Lagrange Multiplier Method)改進簡單體法(simplex method)，反算矽晶圓之材料性質。在 2001 年，Wang 和 Kam[9]以限制性總域極小化程序，配合實驗結果，以多階段調整限制、隨機多起始點搜尋、設計變數單位化，以識別複合材料基層板與三明治板的彈性常數。在 2003 年，劉育翔[10]以藍姆波為基礎，作為複材層板健康監測之研究，以簡單體法反算複材層板之材料係數。

### 1.3 內容簡述

本文共分成四章，第二章將討論如何把彈性波波傳在非等向性層狀材料中之現象並將場向量方程式以矩陣方式表示，求出各層的全波阻與積層間反射張量及理論頻散方程式。第三章說明反算法與目標函數的建立。第四章以一層狀介質的相速度理論值與頻率作為實驗值，並驗證反算法搜尋結果的精準度。第五章介紹本研究自行建立的 CFPI 干涉儀，並探討其性能的驗證。雖然試片的製作無法如預期般，以交指叉換能器(interdigital transducer, IDT)產生表面聲波，無法透過實驗求得薄膜層狀介質的頻散曲線，並進一步反求材料常數，仍將實驗部分放置於第五章。第六章為本文的結論與展望。

## 第二章 層狀介質的表面聲波

本章將介紹層狀非等向性材料的彈性波動理論，分析層狀介質的波傳行為與頻散特性。參考 Braga 等人[1]在 1988 年討論彈性波傳在不具壓電性質層狀介質的界面產生的反射與折射，以 Stroh 的理論推導層狀介質的遞迴波傳方程式及層狀介質表面的全波阻，由表面的邊界條件，求得層狀介質表面聲波的頻散方程式。本文以下述及的小寫英文字母下標  $i, j, k, l=1,2,3$ ； $\alpha, \beta=1,2$ ； $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3)$  分別表示為在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸上的基底向量；微分運算子  $\partial_i$  表示沿試體座標之基底向量  $\mathbf{m}_i$  的偏微分。若材料主軸與試體參考座標不一致時須將材料主軸旋轉至與參考座標，旋轉矩陣參考附錄 A。

### 2.1 層狀介質的表面波傳分析

在不考慮微體力的作用下，彈性體的運動方程式與本構方程分別表示為

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2.2)$$

其中， $\sigma_{ij}$  為柯西應力張量(Cauchy stress tensor)， $u_i$  為位移向量， $\rho$  為試體材料的質量密度。

考慮試體之參考座標如圖 2.1 所示，表面法線向量為正  $z$  方向，表面的曳力向量  $T_i$  表示為

$$T_i = \sigma_{i3} n_3 \quad (2.3)$$

曳力向量對  $z$  座標的微分為

$$T_{i,3} = (\rho \ddot{u}_i - C_{i\beta k \alpha} u_{k,\beta\alpha} - C_{i\alpha k 3} u_{k,3\alpha}) n_3 \quad (2.4)$$

為計算上的方便，定義一組由材料彈性常數所組成的新張量，矩陣表示如下：

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv R_{ik}(a_j, b_l) = a_j C_{ijkl} b_l \quad (2.5)$$

則  $u_{k,3}$  與  $T_{i,3}$  可以表示為

$$u_{k,3} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) T_i - \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_\alpha) u_{k,\alpha} \quad (2.6)$$

$$T_{i,3} = \rho \ddot{u}_i + \mathbf{S}_1 \partial_\alpha \partial_\beta \mathbf{u} + \mathbf{S}_2 \partial_\alpha \mathbf{T} \quad (2.7)$$

其中，矩陣  $\mathbf{S}_1$  與  $\mathbf{S}_2$  詳列於附錄 B。位移與  $z$  平面的曳力向量滿足以下的偏微分方程組：

$$\partial_3 \xi = \Gamma \xi \quad (2.8)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

其中， $\xi = [\mathbf{u} \ \mathbf{T}]^T$  稱為狀態向量(state vector)，由位移向量  $\mathbf{u}$  與  $z$  平面的曳力向量  $\mathbf{T}$  所構成，矩陣  $\Gamma$  的各元素列於附錄 B。

考慮沿著正的  $x$  軸方向傳遞之時諧波(time harmonic wave)，位移與曳力向量分別表示為

$$\mathbf{U}(x, z, t) = \hat{\mathbf{U}}(z) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}(x, z, t) = \hat{\mathbf{T}}(z) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (2.11)$$

上式中， $k_x$  為沿著  $x$  軸方向之波數(wave number)， $\omega$  為角頻率(angular frequency)。將位移與曳力向量代入式(2.6)與(2.7)，可整理得狀態向量的微分方程式：

$$\partial_z \hat{\xi}(z) = i \hat{\Gamma} \hat{\xi}(z) \quad (2.12)$$

其中，



$$\hat{\xi}(z) = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}(z) \\ i\hat{\mathbf{T}}(z) \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\hat{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{11} & \hat{\Gamma}_{12} \\ \hat{\Gamma}_{21} & \hat{\Gamma}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

矩陣 $\hat{\Gamma}(z)$ 中各元素詳見附錄 B、C，若波傳介質為均質，矩陣 $\hat{\Gamma}$ 將由 $k_x$ 、 $\omega$ 和材料常數所決定，與 $z$ 座標無關。求解此一階常微分方程式，得

$$\hat{\xi}(z) = e^{i\hat{\Gamma}z}\hat{\xi}(0) \quad (2.15)$$

其中， $k_i (i=1,2,\dots,6)$ 為矩陣 $\hat{\Gamma}$ 的特徵值(eigenvalues)，且 $\mathbf{P}$ 為特徵向量所組成的 $6 \times 6$ 之矩陣。矩陣 $\hat{\Gamma}$ 可表示為

$$\hat{\Gamma} = \mathbf{P} \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_6\} \mathbf{P}^{-1} \quad (2.16)$$

求得 $e^{i\hat{\Gamma}z}$ 函數矩陣後，狀態張量可寫成

$$\hat{\xi}(z) = \mathbf{P} \text{diag}\{e^{ik_1z}, e^{ik_2z}, \dots, e^{ik_6z}\} \mathbf{P}^{-1} \hat{\xi}(0) \quad (2.17)$$

$k_i$ 為平面時諧波沿 $z$ 軸正負方向傳遞的波數分量，其所對應的特徵向量即為偏振向量。將此六個特徵值所對應的時諧波分成上傳波與下傳波，沿著正 $z$ 方向傳遞或衰減者稱為上傳波，反之即為下傳波。

上傳波：

$$\text{Re}(k_i) > 0, \text{ 若 } \text{Im}(k_i) = 0$$

$$\text{Im}(k_i) > 0 \quad \text{其他情形}$$

下傳波：

$$\text{Re}(k_i) < 0, \text{ 若 } \text{Im}(k_i) = 0$$

$$\text{Im}(k_i) < 0 \quad \text{其他情形}$$

將 $z$ 軸的上傳波與下傳波之波數分量對應的特徵向量分隔成上傳波

與下傳波子矩陣。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

其中， $[\mathbf{A}_1 \ \mathbf{L}_1]^T$  為上傳波對應的特徵向量，對應的特徵值為  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ ； $[\mathbf{A}_2 \ \mathbf{L}_2]^T$  為下傳波對應的特徵向量，對應的特徵值為  $k_4$ 、 $k_5$ 、 $k_6$ 。在  $z=0$  處，狀態向量可表示為六組特徵向量的線性組合，

$$\hat{\xi}(0) = \mathbf{P}\mathbf{C} \quad (2.19)$$

其中， $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2\}^T$  為一  $6 \times 1$  的特定係數向量，必須由邊界條件得知。最後，狀態向量可表為

$$\hat{\xi}(z) = \mathbf{P} \text{diag}\{e^{ik_1z}, e^{ik_2z}, \dots, e^{ik_6z}\} \mathbf{C} \quad (2.20)$$

或

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{T}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

其中，

$$\Phi_1 = \text{diag}(e^{ik_1z}, e^{ik_2z}, e^{ik_3z}) \quad (2.22)$$

$$\Phi_2 = \text{diag}(e^{ik_4z}, e^{ik_5z}, e^{ik_6z}) \quad (2.23)$$

式(2.21)中  $\hat{\mathbf{U}}$  與  $\hat{\mathbf{T}}$  可分成上傳波與下傳波所對應的廣義位移向量與曳力向量，即  $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_1 + \hat{\mathbf{U}}_2$ ， $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_1 + \hat{\mathbf{T}}_2$ 。其中， $\hat{\mathbf{U}}_1$  與  $\hat{\mathbf{T}}_1$  所對應的是上傳波的廣義位移與曳力向量，而  $\hat{\mathbf{U}}_2$  與  $\hat{\mathbf{T}}_2$  所對應的是下傳波的廣義位移與曳力向量。依定義可表示如下：

$$\hat{\mathbf{U}}_\alpha(z) = \mathbf{A}_\alpha \Phi_\alpha \mathbf{C}_\alpha \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\alpha}(z) = \mathbf{L}_{\alpha} \Phi_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.25)$$

## 2.2 層狀介質的波傳阻抗與界面反射係數

將區域波傳阻抗張量  $\mathbf{Z}$  (local impedance tensor) 定義為廣義曳力向量  $\hat{\mathbf{T}}$  與廣義位移向量  $\hat{\mathbf{U}}$  的比值，對一平面波而言，區域波傳阻抗  $\mathbf{Z}$  表示為

$$\mathbf{Z} \equiv \frac{\hat{\mathbf{T}}}{\hat{\mathbf{U}}} \quad (2.26)$$

代入上，下傳波之位移與曳力向量，可推得局部波阻張量  $\mathbf{Z}_{\alpha}$  為

$$\mathbf{Z}_{\alpha} = \mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha}^{-1} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.27)$$

由上式知，均勻介質中之局部波阻只與材料性質有關，與深度位置或介質邊界無關。上傳波與下傳波在表面  $z=0$  處的廣義位移向量可表示為

$$\hat{\mathbf{U}}_{\alpha}(z) = \mathbf{W}_{\alpha}(z) \hat{\mathbf{U}}_{\alpha}(0) \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.28)$$

其中，

$$\mathbf{W}_{\alpha}(z) = \mathbf{A}_{\alpha} \cdot \Phi_{\alpha}(z) \cdot \mathbf{A}_{\alpha}^{-1} \quad (2.29)$$

上傳波與下傳波的廣義曳力向量與位移向量之關係可表示為

$$\hat{\mathbf{T}}_{\alpha}(z) = \mathbf{Z}_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha}(z) \hat{\mathbf{U}}_{\alpha}(0) \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.30)$$

在層狀介質的彈性波傳問題中，還須考慮彈性波在不同介質界面的反射與折射問題，在此另外定義一廣義表面全波阻(global impedance)來表示兩者的比值：

$$\hat{\mathbf{T}}(z) = \mathbf{G}(z) \hat{\mathbf{U}}(z) \quad (2.31)$$

如圖 2.2 中，假設在介質 A 與 B 之界面 ( $z=0$ )，上傳波與下傳波的廣義位移向量滿足下列關係：

$$\hat{\mathbf{U}}_1(0) = \mathbf{R}_0 \hat{\mathbf{U}}_2(0) \quad (2.32)$$

其中， $\mathbf{R}_0$  為介質 A 與 B 界面的反射張量。將反射張量代入廣義位移場，則

$$\hat{\mathbf{U}}(z) = [\mathbf{W}_1(z) \cdot \mathbf{R}_0 + \mathbf{W}_2(z)] \cdot \hat{\mathbf{U}}_2(0) \quad (2.33)$$

廣義曳力場表示為

$$\hat{\mathbf{T}}(z) = [\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{W}_1(z) \cdot \mathbf{R}_0 + \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{W}_2(z)] \cdot \hat{\mathbf{U}}_2(0) \quad (2.34)$$

由上述兩式可知，廣義位移場與廣義曳力場的關係式表示為

$$\hat{\mathbf{T}}(z) = [\mathbf{Z}_1 \mathbf{W}_1(z) \mathbf{R}_0 \mathbf{W}_2^{-1}(z) + \mathbf{Z}_2] [\mathbf{W}_1(z) \mathbf{R}_0 \mathbf{W}_2^{-1}(z) + \mathbf{I}]^{-1} \hat{\mathbf{U}}(z) \quad (2.35)$$

由全波阻之定義，得

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{Z}_1 \mathbf{W}_1(z) \mathbf{R}_0 \mathbf{W}_2^{-1}(z) + \mathbf{Z}_2] [\mathbf{W}_1(z) \mathbf{R}_0 \mathbf{W}_2^{-1}(z) + \mathbf{I}]^{-1} \quad (2.36)$$

給定  $k_x$ 、 $\omega$  與積層介質的材料常數後，上式中只剩下反射張量  $\mathbf{R}_0$  未知，代入層狀介質的邊界條件可獲得反射張量  $\mathbf{R}_0$ ，進而計算得試體的全波阻。

參考圖 2.2 所示， $z = 0$  處為材料 A 與 B 的界面，考慮  $z \leq 0$  屬於半無限域的範圍，在半無限域中不會有彈性波自無窮遠處反射至表面，故只需考慮下傳波，不需考慮上傳波，此時全波阻  $\mathbf{G}_0$  等於半無限域下波傳的局部波阻  $\mathbf{Z}_2$ ，在介質 A 中與 B 界面上的廣義位移場與廣義曳力場的關係為

$$\hat{\mathbf{T}}(0^-) = \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{U}}(0^-) \quad (2.37)$$

由式(2.35)可得，介質 B 與 A 界面上的廣義位移場與廣義曳力場之關係式，

$$\hat{\mathbf{T}}(0^+) = [\mathbf{Z}_{11} \cdot \mathbf{R}_0 + \mathbf{Z}_{21}] \cdot [\mathbf{R}_0 + \mathbf{I}]^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}(0^+) \quad (2.38)$$

由介質 A 與 B 界面之位移與曳力向量的連續條件，獲得

$$\mathbf{G}_0 = [\mathbf{Z}_{11} \mathbf{R}_0 + \mathbf{Z}_{21}] [\mathbf{R}_0 + \mathbf{I}]^{-1} \quad (2.39)$$

最後求得反射張量  $\mathbf{R}_0$  為

$$\mathbf{R}_0 = [\mathbf{Z}_1 - \mathbf{G}_0]^{-1} [\mathbf{G}_0 - \mathbf{Z}_2] \quad (2.40)$$

反射張量  $\mathbf{R}_0$  求得後，介質 B 中的全波阻即可求得。

考慮如圖 2.3 之多層介質，只要半無限域中之全波阻  $\mathbf{G}_0$  為已知，即可利用各界面之連續條件，逐一推導出每一層之全波阻。n 層之層狀介質的遞迴關係式可表示為

$$\mathbf{R}_{j-1} = [\mathbf{Z}_{1j} - \mathbf{G}_{j-1}]^{-1} [\mathbf{G}_{j-1} - \mathbf{Z}_{2j}] \quad (2.41)$$

$$\mathbf{G}_j = [\mathbf{Z}_{1j} \cdot \mathbf{H}_j + \mathbf{Z}_{2j} [\mathbf{H}_j + \mathbf{I}]]^{-1} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{H}_j = [\mathbf{W}_{1j}(h_j) \mathbf{R}_{j-1} \mathbf{W}_{2j}^{-1}(h_j)] \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.43)$$

其中，下標  $j$  代表第  $j$  層， $h_j$  為第  $j$  層的厚度。由全波阻的定義及上述推導，求得整體材料的表面全波阻後，代入邊界條件求得表面聲波在層狀介質傳遞的頻散方程式。

## 2.3 層狀介質之頻散曲線

### 2.3.1 半無限域之表面波

考慮  $z \leq 0$  範圍的半無限域中，不會有彈性波自無窮遠處反射回到表面，故半無限域中不需考慮上傳波部分，表面全波阻等於下傳波之局部波阻。

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{Z}_2 \quad (2.44)$$

曳力與位移向量的關係可表示成

$$\hat{\mathbf{T}}_2(z) = \mathbf{Z}_2 \hat{\mathbf{U}}_2(z) \quad (2.45)$$

表面  $z=0$  處為介質表面，故曳力為零 ( $\hat{\mathbf{T}}_2(0) = 0$ ) 但位移向量存在非零解 (nontrivial solution)，因此全波阻張量必須滿足

$$\det \mathbf{Z}_2 = 0 \quad (2.46)$$

若等向性介質傳遞的表面聲波為雷利波 (Rayleigh wave)，則須滿足

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{31} & Z_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

由滿足上式中之 $k_x$ 和 $\omega$ ，可計算雷利波的相速度。在半無限域中，雷利波的相速度為非頻散(nondispersion)，在同一個波傳方向的 $k_x$ 和 $\omega$ 之比值為一常數。矩陣 $\mathbf{Z}_2$ 的任一個特徵值對應的特徵向量，即為晶體表面的廣義位移向量 $\hat{\mathbf{U}}_2(0)$ 。將 $\hat{\mathbf{U}}_2(0)$ 代回式(2.28)與式(2.30)中，得到表面位移張量沿深度方向的分量比例關係，各深度的位移向量及曳力向量之比例關係為

$$\hat{\mathbf{U}}_2(z) = \mathbf{W}_2(z)\hat{\mathbf{U}}_2(0) \quad (2.48)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_2(z) = \mathbf{Z}_2\hat{\mathbf{U}}_2(z) \quad (2.49)$$

### 2.3.2 層狀半無限域之表面波

參考圖 2.3 所示，考慮半無限域基材上覆蓋兩層等向性薄膜介質。依據上節敘述，在半無限域材料中的全波阻為

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{Z}_{20} \quad (2.50)$$

將上式代回上節的遞迴公式，可得

第一層( $j=1$ ):

$$\mathbf{R}_0 = [\mathbf{Z}_{11} - \mathbf{Z}_{20}]^{-1}[\mathbf{Z}_{20} - \mathbf{Z}_{21}] \quad (2.51)$$

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{W}_{11}(h_1)\mathbf{R}_0\mathbf{W}_{21}^{-1}(h_1)] \quad (2.52)$$

$$\mathbf{G}_1 = [\mathbf{Z}_{11}\mathbf{H}_1 + \mathbf{Z}_{21}][\mathbf{H}_1 + \mathbf{I}]^{-1} \quad (2.53)$$

第二層( $j=2$ ):

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{Z}_{12} - \mathbf{G}_1]^{-1}[\mathbf{G}_1 - \mathbf{Z}_{22}] \quad (2.54)$$

$$\mathbf{H}_2 = [\mathbf{W}_{12}(h_2)\mathbf{R}_1\mathbf{W}_{22}^{-1}(h_2)] \quad (2.55)$$

$$\mathbf{G}_2 = [\mathbf{Z}_{12}\mathbf{H}_2 + \mathbf{Z}_{22}][\mathbf{H}_2 + \mathbf{I}]^{-1} \quad (2.56)$$

在 $z=h_2$ 處，表面曳力為零，由式(2.31)可知

$$\mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{U}}(h_2) = 0 \quad (2.57)$$

上式存在非零解的條件為

$$\det \mathbf{G}_2 = 0 \quad (2.58)$$

雷利波需滿足條件

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{13} \\ G_{31} & G_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.59)$$

由式(2.58)與式(2.59)可求得雷利波在層狀介質中傳遞的頻散方程式。所求得之結果代回式(2.57)，即可獲得對應的特徵向量。頻散方程式由積層材料性質所決定，可利用實驗量測的頻散曲線反算積層介質之材料常數。圖 2.4 所示為不具壓電性質層狀介質 Al(1  $\mu\text{m}$ )/Glass 之 dc~8GHz 表面聲波頻散曲線，圖 2.5 則為具壓電性質層狀介質 ZnO(1  $\mu\text{m}$ )/Glass 之 dc~3GHz 的表面聲波頻散曲線，有關具壓電性質之層狀介質的表面聲波頻散曲線的推導與計算詳於孫繼增[11]。





## 第三章 材料係數反算

最佳設計的概念是將工程問題轉換成一個具有完整數學程序的迭代過程，找出一個最佳的數值。層狀介質的材料性質決定了表面聲波的頻散曲線，由表面聲波的相速度可反算層狀介質之材料性質。然而反算問題通常不是一個唯一解，會遭遇到區域最小值與全域最小值不一致的問題。本文在反算程序上，以準牛頓法(quasi-Newton method)及有限差分(finite difference)法，搭配多起始點之方式，搜尋目標函數在極小值時所對應的材料常數，並與簡單體法(simplex method)的搜尋結果及效率比較。

### 3.1 最佳化

最佳化設計是為了找出一組變數  $x_i$  (此即為層狀介質之材料常數)，使系統在受限制條件或無限制條件下，達至最佳狀態。通常先依最佳化程序建立一套正確之數學模式，再以數值方法找尋最佳的數值解。數學模式建立如下：

$$\text{Minimize } Q(x) = Q(x_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

$$\text{subject to } h(x) = h_j(x_i) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$g(x) = g_k(x_i) \leq 0; \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (3.2)$$

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu}$$

其中， $Q(x)$  為目標函數； $h(x)$  與  $g(x)$  分別為等式與不等式的限制條件； $p$  和  $q$  為此系統之等式與不等式限制條件的數目； $x_{il}$  與  $x_{iu}$  為設計變數的上下限。

首先在變數區間隨機找出一系列的起始點，並以此為猜測值，開



始作軌跡搜尋的方式，以準牛頓法與有限差分法找出限制條件下目標函數的極小值及對應的參數  $x_j$ 。

### 3.2 準牛頓法

IMSL 中的副程式 BCONF/DBCONF 與 UMINF/DUMINF 以準牛頓法與有限差分法，搜尋具限制條件與無限制條件之目標函數的極小值。其運算的理論與過程為

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} \quad Q(x_i) \quad (3.3)$$

$$\text{subject to} \quad x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad (3.4)$$

將  $Q(x)$  對初始值作泰勒展開與二次逼近，求得二次逼近最小值對應之  $x$ ，以此點作為下次搜尋的起始點，

$$x_{m+1} = x_m - \delta_m \quad (3.5)$$

其中，

$$\delta_m = [Q''(x_m)]^{-1} Q'(x_m) = H_m^{-1} g_m \quad (3.6)$$

$H(x_m)$  為黑森(Hessian)矩陣； $g_m$  為目標函數的梯度(gradient)， $H(x_m) = Q''(x_m)$  決定梯度的角度。若函數本身為隱函數，無法精確的計算出黑森矩陣與梯度，可以有限差分法計算之。為增加搜尋的速度，(3.5)式加入一加速參數  $\alpha_m$ ，

$$x_{m+1} = x_m - \alpha_m \delta_m \quad (3.7)$$

搜尋過程中，此函數將趨近於最小值，可得

$$Q(x_m - \alpha_m \delta_m) < Q(x_m) \quad (3.8)$$

若在每次搜尋過程，皆需以有限差分法計算其梯度與黑森矩陣，此計算量過大。在此重新定義黑森矩陣為兩次搜尋梯度差與步徑長度的比值，建立黑森矩陣的迭代方程式。

在搜尋中， $x$  所移動的步徑為

$$s_m = x_{m+1} - x_m = \alpha_m \delta_m \quad (3.9)$$

且梯度的變化量為

$$\eta_m = g_{m+1} - g_m \quad (3.10)$$

故可知

$$H_{m+1} s_m = \eta_m$$

$$H_{m+1} = H_m + \frac{\eta_m \eta_m^t}{\eta_m^t s_m} - \frac{g_m g_m^t}{\delta_m^t g_m} \quad (3.11)$$

### 3.3 簡單體法

參考 Caceci 和 Cacheris[12]所提供的簡單體法數值程式及擬合(fitting)範例，簡單體法需先建立一系統之數學模型，其頂點數為參數數目加一不斷地比較及建立此幾何圖形頂點的目標函數值搜尋目標函數為最小值時所對應的參數值。由實驗獲得表面聲波的頻率與相速度測量值後，建立一餘數平方和(sum of the squared residuals)作為目標函數，並找出目標函數之極小值，搜尋過程不需計算目標函數的梯度，僅比較目標函數值的大小。目標函數的特性決定目標函數是否存在全域極小值，若目標函數選擇不當，將會造成目標函數存在較多的區域極小值，造成搜尋全域極小值的效率低落。

### 3.4 延伸性拉格蘭吉乘子

本文參考了 Wang 和 Kam[10]，將系統的限制條件加入目標函數，先將不等式之限制條件加上放鬆變數，再與等式條件各分別乘上拉格蘭吉乘子(augmented Lagrange multiplier)與原始之目標函數相加，使原始受限制的目標函數  $Q(x)$  轉換成不受限制的新目標函數  $\Psi(x, \mu, \eta, r_p)$ 。

### 3.5 具限制條件之目標函數

由第二章求得的層狀介質之全波阻  $\mathbf{G}$  的行列式值，即  $\det \mathbf{G} = 0$  為層狀介質表面聲波之頻散方程式。頻散方程式  $\det \mathbf{G} = \left\| Q(C_{ij}^p, \theta, \omega^p, c_{ph}^p) \right\| = 0$  是由積層角度與材料性質決定。以相速度與對應之頻率逼近實驗所得表面聲波的相速度與對應的頻率，建立一平方誤差函數，求得此函數的極值。

$$\text{Minimize } Q(x) = w_c \mathbf{c}^T \mathbf{c} + w_\omega \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \quad (3.12)$$

$$\text{subject to } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i=1, \dots, n \quad (3.13)$$

其中， $Q(x)$  為具限制條件之目標函數 (objective function with constraints)，設定為  $N$  組實驗量測值與頻散方程理論值的最小平方差， $w_c$  與  $w_\omega$  分別為相速度與頻率的權重，迭代過程中知  $w_\omega = 0.8$ ， $w_c = 1.0$ ； $x_j$  為最佳化程序的參數，即層狀介質之材料常數； $x_i^L, x_i^U$  為材料常數的上、下限， $n$  為材料常數之個數。 $\mathbf{c}$  與  $\boldsymbol{\omega}$  的分量分別定義如下：

$$c_j = \frac{c_j^p - c_j^m}{c_j^m} \quad (3.14)$$

$$\omega_j = \frac{\omega_j^p - \omega_j^m}{\omega_j^m} \quad (3.15)$$

$c_j^p$ 、 $\omega_j^p$  是滿足將一組猜測材料常數的層狀介質表面聲波頻散線方程式的相速度與頻率理論值。 $c_j^m$ 、 $\omega_j^m$  是層狀介質表面聲波之相速度與頻率的實驗量測值。

### 3.6 無限制條件之目標函數

具限制條件的目標函數可以轉換成無限制條件的目標函數表示

為

$$\Psi(x, \mu, \eta, r_p) = Q(x) + \sum_{j=1}^n [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \varphi_j + r_p \varphi_j^2] \quad (3.16)$$

其中，

$$z_j = \max \left[ g_j(\tilde{x}_j), \frac{-\mu_j}{2r_p} \right] \quad (3.17)$$

$$g_j(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_j - \tilde{x}_j^U \leq 0 \quad (3.18)$$

$$\varphi_j = \max \left[ H_j(\tilde{x}_j), \frac{-\eta_j}{2r_p} \right] \quad (3.19)$$

$$H_j(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_j^L - \tilde{x}_j \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.20)$$

此處， $\mu_j$ 、 $\eta_j$ 及 $r_p$ 為拉格蘭吉乘子，其迭代方程式如下：

$$\mu_j^{k+1} = \mu_j^k + 2r_p^k z_j^k \quad (3.21)$$

$$\eta_j^{k+1} = \eta_j^k + 2r_p^k \varphi_j^k \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.22)$$

$$r_p^{k+1} = \begin{cases} \gamma_0 r_p^k & \text{if } r_p^{k+1} < r_p^{\max} \\ r_p^k & \text{if } r_p^{k+1} \geq r_p^{\max} \end{cases} \quad (3.23)$$

其中， $k$ 為選代次數。上述中各變數之起始值設為

$$\mu_j^0 = 1.0 \quad , \quad \eta_j^0 = 1.0 \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

$$r_p^0 = 0.4 \quad , \quad r_p^{\max} = 100 \quad , \quad \gamma_0 = 2.5$$

### 3.7 材料常數的反算

準牛頓法與簡單體法最佳化程序都採用多起始點的式，在參數 $x_i$ 的合理上、下限範圍內，以亂數(random numbers)取出一系列的起始點，開始搜尋目標函數極小值對應的材料常數。搜尋極值 $\Psi^*$ 時，必須滿足下列的式子：

$$\Psi^* = \min\{\Psi_j\} \quad (3.24)$$

運算上，先將實驗量測的表面聲波訊號，以相位頻譜法(phase spectrum)[]求出層狀介質表面聲波的頻散曲線，找出  $N$  組頻率  $\omega_j^m$  與對應的相速度  $c_j^m$  然後，將材料常數的搜尋起始值  $x_j^0$  代入頻散方程式，求得一組對應的理論值  $\omega_j^p$  與  $c_j^p$  ( $j=1, \dots, N$ )。將上述的相速度與頻率實驗值與理論值代入目標函數，求出區域極小值的  $\Psi^*(x)$ 。重複上述的步驟，得到多組的區域小值，比較各區域極小值，得到全域極小值，此極小值所對應的材料常數即為反算之材料常數。

IMSL 庫存程式 UMINF/DUMINF 與 BCONF/DBCONF 的搜尋過程只要符合梯度的變化小於 RPARAM(1)設定值，且兩參數變化步徑小於 RPARAM(2)時，即告搜尋完畢。



## 第四章 結果與討論

為先確定材料常數反算收斂的精確度，首先以一等向性、不具壓電性質的 1  $\mu\text{m}$  金屬鋁為鍍膜，其彈性係數為 63.32 GPa，浦松比為 0.362，層狀介質的基材為 1.1 mm 的玻璃以頻散方程式的理論值為實驗值，反算層狀介質的材料常數，作為驗證演算法的計算例子。等向性材料的材料常數，只有兩個獨立變數  $E$  與  $\nu$ ，將密度視為已知值，以下將討論應用簡單體法與準牛頓法搜尋目標函數極小值對應的材料常數，即等向性薄膜的材料常數  $E$  與  $\nu$ 。彈性係數  $E$  與浦松比  $\nu$  的數值大小有很大的差異，在搜尋目標函數下降最快的方向時，參數的跨步大小差異很大，造成浦松比在最佳化演算過程中顯得不靈敏，故將最佳化演算程序中的參數重新修正如下：

$$\tilde{x} = \left[ \frac{E}{\alpha}, \nu \right] \quad (4.1)$$

其中， $\alpha = 100 \text{ GPa}$ 。如圖 4.1 所示，頻率越高時，材料常數對頻散曲線趨勢的影響越大。

### 4.1 實例驗證與收斂性測試

表面聲波的第一模態為雷利波，依頻散曲線的分佈趨勢，將頻率分成 1 MHz~1 GHz、1 GHz~3 GHz、3 GHz~5 GHz 與 5 GHz~7 GHz 四個頻段，在各頻段任取雷利波頻散曲線的 6 組頻率與相速度數據，作為實驗值。目標函數定義如(3.12)，以彈性常數  $E$  與浦松比  $\nu$  為變數，繪製目標函數等高線圖，分別如圖 4.2~4.9 所示。在 1 MHz~1 GHz 範圍內出現兩極小值，由圖形可知落入全域極小值的機會比落入區域極小值機率要大。在其他頻段於參數變動範圍內，目標函數具有多個極小值，此現象將會影響演算結果。



呼叫 IMSL 程式庫中 RNUN 副程式，在頻率範圍 1 MHz~1 GHz 之間，分別給定  $10 \text{ GPa} \leq E \leq 200 \text{ GPa}$  與  $0.1 \leq \nu \leq 0.5$ ，任意選取 3 個隨機亂數，作為初始猜測值，3 種不同的最佳化演算的結果詳列於表 6、7 與 8。

由搜尋結果可知，上述三種最佳化程序在 1 MHz~1 GHz 間求得全域極小值的機率相當高，可得到精度高的收斂值，亂數選定三次不同的起始值皆可收斂至近似理論值。在頻率為 1 MHz~1 GHz 時，可以順利反算求得材料常數。但在其他頻段，由於頻率越高，層狀介質表面聲波的相速度越趨近於等向性薄膜的表面聲波相速度，且不具頻散現象，造成收斂結果並不甚理想，在此不列出其結果。簡單體法在演算的過程中無需計算目標函數的梯度，只比較目標函數值的大小，作為判斷下一次演算方向的依據。IMSL 程式庫 BCONF/DBCONF 與 UMINF/DUMINF 皆以有限差分法計算梯度，作為判斷收斂方向的依據。因此，後兩者演算的次數將比簡單體法少，但是搜尋結果的精確度無顯著的差異。

頻率越高收斂結果越差，且收斂到正確值的機率越小。原因應是頻率越高頻散方程式的缺根情況越嚴重。演算時會造成判斷錯誤。數值計算時，雖然將初始尋根的搜尋增量調降兩個數量級，仍無法改善頻率 5~7 GHz 範圍的失根情況。當收斂過程落入如圖 4.3~4.5 及圖 4.7~4.9 中上下兩處凹陷區域時，程式將依第一收斂法則(即最後兩次的目標函數值差值小於收斂誤差)停止演算，可改善 1~5 GHz 搜尋的結果。雖然如此，成功率仍未達 80%。目前在技術上不易激發出如此高頻的表面聲波，故以上這三種演算法皆符合反算材料常數的要求。

## 第五章 量測系統與實驗架構

超音波量測技術已是相當純熟的技術，目前以接觸式壓電探頭為主要量測工具，接觸式壓電探頭的頻寬有限，量測時所受到的限制較多。相較之下，以非接觸式、頻寬寬且靈敏度較高的光干涉儀作為量測工具更為恰當。本研究之量測系統以波長 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 之 He: Ne 雷射，經過 CFPI 之共振腔，將試片表面粒子運動速率造成雷射光的都卜勒頻移 (Doppler frequency shift) 放大，量測表面聲波訊號。經數位訊號處理，可量測表面聲波的相速度。

### 5.1 共焦式法布里派洛光干涉儀

#### 5.1.1 共振腔的設計與建立

CFPI 應用都卜勒效應求得待測物表面粒子的運動速度，CFPI 利用一共振腔將都卜勒頻移轉換為能量變化。為了使干涉儀能量測頻率高且波長短的表面聲波，共振腔的設計相當嚴苛且重要。

靈敏度(Finesse)、FSR (free spectral range,  $\text{FSR} = c/4d$ )及解析能力(resolution power)決定共振腔長度的重要參數。FSR必須大於都卜勒頻移 $\Delta\nu$ ，否則將無法判定 $\Delta\nu$ 。 $\Delta f_{1/2}$ 不可大於 $\Delta\nu$ ，否則無法解析出 $\Delta\nu$ 。解析能力越大，對 $\Delta\nu$ 之解析能力就越好。超音波引致試體表面粒子運動造成的都卜勒頻移可表示為

$$\Delta\nu = \frac{2v}{\lambda} \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \quad (5.1)$$

其中， $v$ 為表面聲波造成材料粒子振動的速度； $\lambda$ 為 He: Ne 雷射的波長，角度 $\alpha$ 與 $\beta$ 分別如圖 5.1 所示。

圖 5.2 為共振腔長度與所能量測到的超音波振幅及頻率之關係圖，只要超音波的頻率與振幅的乘積落在對應曲線的上方區域，就能被量測



到。共振腔的長度越長，解析能力越好，靈敏度是由共振腔兩端的反射鏡之反射率決定，反射率越高之反射鏡，其靈敏度就越好，解析能力也越好，相對的，所能透射或反射出共振腔之光強度越小，故為提高訊號之訊雜比，需選用能量較強之雷射光源。本研究自行建立的共振腔使用反射率與焦距分別為 99% 與 1  $\mu\text{m}$  的反射鏡。

### 5.1.2 都普勒效應

圖 5.3 所示為雷射光在 CFPI 共振腔中的路徑，雷射光入射共振腔後，經過四次的折射與反射，分別在 1、2、3 及 4 處透射，稱為透射光 1 和 2 及反射光 3 和 4。雷射光在共振腔中不斷的反射與透射，但只在共振腔長度達四分之一波長的整數倍時，雷射光才會在 1、2、3 及 4 處發生透射。光在共振腔中傳遞所造成的光程差為  $\Lambda = 4n_f d$ ，其中， $n_f$  為在共振腔中空氣的折射率 ( $n_f = 1$ )。另外，光在共振腔中傳遞時，所造成的相位延遲為  $\delta = 8\pi d \cos\theta / \lambda$ ，若光為正向進入共振腔，則  $\cos\theta = 1$ 。

令待測物表面法線方向上反射光的光向量(light vector)函數為：

$$E_i = E_{i0} \exp i \left[ 2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_0 \right] \quad (5.2)$$

其中， $E_{i0}$ ， $\nu$ ， $\lambda$  和  $\varphi_0$  分別為 He: Ne 雷射的振幅、頻率、波長和起始相位， $z$  為雷射光源至觀測點之距離。若超音波位移的方程式為

$$\delta(t) = U \cos(2\pi f_u t + \psi) \quad (5.3)$$

$U$ 、 $f_u$  和  $\psi$  分別為超音波位移之振幅、頻率和相位。觀測點至雷射波源的距離為  $z = z_0 + 2\delta(t)$ ，其中， $z_0$  為觀測點靜止時，雷射光源至觀測點的距離。將  $z$  代入(5.2)式可得

$$E_i = E_{i0} \exp i \left[ 2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} z_0 - \frac{4\pi}{\lambda} \delta(t) + \varphi_0 \right] \quad (5.4)$$

$z_0$  和  $\varphi_0$  皆為常數，與超音波位移無關，因此，將(5.4)式改寫為

$$E_i = E_{i0} \exp(i2\pi\nu t) \exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}\delta(t)\right] \quad (5.5)$$

表面聲波的振幅通常小於 1 nm，因此  $U \ll \lambda$ ，將上式以級數展開如下：

$$E_1 = E_{i0} e^{i2\pi\nu t} \left[ \frac{(1-R)e^{-i\delta(t)/4}}{1-R^2e^{-i\delta(t)}} - i\frac{2\pi U}{\lambda} \frac{(1-R)e^{-i\delta(t)/4}}{1-R^2e^{-i\delta(t)}} (e^{i(2\pi f_u t + \psi)} + e^{-i(2\pi f_u t + \psi)}) \right] \quad (5.6)$$

共振腔中兩次反射的相位延遲  $\delta$  與時間延遲分別為

$$\delta = \frac{8\pi d}{\lambda} = 2\pi\tau\nu = 2\pi\tau\nu_0 + 2m\pi \quad (5.7)$$

$$\tau = \frac{4d}{c} \quad (5.8)$$

若校準的精度越高，達到共振條件時，透射出共振腔的光強度越強，因此可將都卜勒頻移量以最佳的倍數放大能量變化。定義一無因次部分調變頻率 (dimensionless fractional detuning frequency)  $f_r$ ，表示為

$$f_r = \frac{\nu_0}{\Delta f_{1/2}} \quad (5.9)$$

$$\Delta f_{1/2} = 2df = \frac{c(1-R^2)}{4\pi dR} = \frac{1}{(\tau F)} \quad (5.10)$$

其中， $F$  為靈敏度， $\nu_0$  為透射光強度的頻率寬度。如圖 5.4 所示，最佳的操作位置為  $f_r = 0.5$ ，即透射能量位於最大值的二分之一處。能否將干涉儀控制在操作點，決定了量測到都卜勒頻移訊號的大小。第  $m$  階透射光訊號量測到的都卜勒頻移  $\nu_m \pm \Delta\nu$  與第 0 階透射光量測到的光頻率變化  $\nu_0 \pm \Delta\nu$  相同。因此，雷射光在共振腔中兩次反射光之相位差可表示為

$$\delta = 2\pi\tau(\nu \pm \Delta\nu) = \frac{2\pi}{F}(f_r \pm \tau F\Delta\nu) = \frac{2\pi}{F}x \quad (5.11)$$

其中， $x = f_r \pm \tau F\Delta\nu$ 。光場強度可表示為

$$E_1 = E_{i0} e^{i2\pi\nu t} \left\{ t_1(f_r) - i \frac{2\pi U}{\lambda} \left[ t_1(f_r + \tau F \Delta\nu) e^{i(2\pi f_u t + \psi)} + t_1(f_r - \tau F \Delta\nu) e^{-i(2\pi f_u t + \psi)} \right] \right\} \quad (5.12)$$

其中，

$$t_1(x) = \frac{(1-R)e^{-i\pi x/2F}}{1-R^2 e^{-i2\pi x/F}} \quad (5.13)$$

光強度定義為  $I_1 = E_1 E_1^*$ ，故透射光強度可表示為

$$I_1 = I_i \left\{ |t_1(f_r)|^2 + \frac{4\pi U}{\lambda} (A \cos(2\pi f_u t + \psi) + B \sin(2\pi f_u t + \psi)) \right\} \quad (5.14)$$

令  $\tan[\theta_1(\Delta\nu)] = B/A$ ，則

$$I_1 = I_i \left\{ |t_1(f_r)|^2 + \frac{4\pi U}{\lambda} \bar{S}_1(\Delta\nu) \cos(2\pi f_u t + \psi - \theta_1(\Delta\nu)) \right\} \quad (5.15)$$

其中， $A$ 與 $B$ 分別為

$$A = \frac{i}{2} [t_1(f_r)t_1(-f_r - \tau F \Delta\nu) + t_1(f_r)t_1(-f_r + \tau F \Delta\nu) - t_1(-f_r)t_1(f_r + \tau F \Delta\nu) - t_1(-f_r)t_1(f_r - \tau F \Delta\nu)] \quad (5.16)$$

$$B = \frac{1}{2} [t_1(f_r)t_1(-f_r - \tau F \Delta\nu) - t_1(f_r)t_1(-f_r + \tau F \Delta\nu) + t_1(-f_r)t_1(f_r + \tau F \Delta\nu) - t_1(-f_r)t_1(f_r - \tau F \Delta\nu)] \quad (5.17)$$

透射光 1 的轉換方程式  $\bar{S}_1$  為

$$\begin{aligned} \bar{S}_1(\Delta\nu) &= A + iB \\ &= i[t_1(f_r)t_1(-f_r - \tau F \Delta\nu) - t_1(-f_r)t_1(f_r + \tau F \Delta\nu)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

同理可得

$$I_2 = I_i \left\{ |t_2(f_r)|^2 + \frac{4\pi U}{\lambda} \bar{S}_2(\Delta\nu) \cos(2\pi f_u t + \psi - \theta_1(\Delta\nu)) \right\} \quad (5.19)$$

透射光 2 的轉換方程式  $\bar{S}_2$  為

$$\begin{aligned}\overline{S_2}(\Delta\nu) &= R^2 \overline{S_1}(\Delta\nu) \\ &= iR^2 [t_1(f_r)t_1(-f_t - \tau F\Delta\nu) - t_1(-f_r)t_1(f_t + \tau F\Delta\nu)]\end{aligned}\quad (5.20)$$

透射光的總能量為  $I_t = I_1 + I_2$ ，故

$$I_t = I_i \left\{ |t_1(f_r)|^2 + |t_2(f_r)|^2 + \frac{4\pi U}{\lambda} S_t(\Delta\nu) \cos(2\pi f_u t + \psi - \theta_t(\Delta\nu)) \right\}\quad (5.21)$$

其中， $S_t = \overline{S_1} + \overline{S_2}$ ； $S_t(\Delta\nu)4\pi U/\lambda$  為經過放大後之都卜勒頻移訊號的振幅。同理，可得反射光能量的總和如下：

$$I_r = I_i \left\{ |t_3(f_r)|^2 + |t_4(f_r)|^2 + \frac{4\pi U}{\lambda} S_r(\Delta\nu) \cos(2\pi f_u t + \psi - \theta_r(\Delta\nu)) \right\}\quad (5.22)$$

此處， $\overline{S_r} = \overline{S_3} + \overline{S_4}$ ； $S_r(\Delta\nu)4\pi U/\lambda$  為經過放大後之都卜勒頻移訊號的振幅。(5.21)式與(5.22)式中的第一項與第二項為 DC 訊號，第三項為 AC 訊號。理論上，由量測到的光強度訊號可計算介質表面粒子之振動速度與位移，如圖 5.13 與圖 5.14 所示。但要將操作點穩定的控制在  $f_r = 0.5$  是相當的不容易，故由訊號的振幅反求介質表面粒子振動速度，會存在一定的誤差。

## 5.2 相位頻譜法

本研究利用實驗量測獲得的表面聲波訊號，計算層狀介質表面聲波的頻散曲線。因為彈性波在層狀介質有頻散現象，不同頻率或波長的彈性波以不同的速度傳播，波形隨著傳遞過程逐漸發生變化，直接由時域訊號分析層狀介質的波傳特性是相當複雜的。本文將以相位頻譜法 (phase spectrum method)[13]，計算獲得不同頻率的表面聲波相速度。

考慮點波源激發的表面聲波暫態訊號，因為採用寬頻波源，故假設波傳為不同頻率的平面諧波組成

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[i(\omega_n t - k_n x)] \quad (5.23)$$

其中， $\omega_n$  為角頻率， $k_n$  與  $C_n$  則為角頻率  $\omega_n$  對應的波數與振幅頻譜。

將時域訊號予以傅立葉轉換，利用傅立葉轉換的正交性獲得角頻率  $\omega = \omega_n$  之頻域函數，

$$R(f) = \hat{u}(x, \omega_n) = C_n \exp(-ik_n x) \quad (5.24)$$

其中， $R(f)$  為時域位移訊號  $u(x,t)$  對應的頻域函數。將不同觀察點  $x = x_1$ 、 $x_2$  量測的表面聲波時域訊號對時間作傅立葉轉換，獲得以下的頻域函數

$$R_1(f) = \hat{u}(x_1, \omega_n) = C_n \exp(-ik_n x_1) \quad (5.25)$$

$$R_2(f) = \hat{u}(x_2, \omega_n) = C_n \exp(-ik_n x_2) \quad (5.26)$$

由上式可知，角頻率  $\omega_n$  的時諧波傳遞至不同位置  $x = x_1$ 、 $x_2$  時，相位差可表示為

$$\phi_n = k_n (x_1 - x_2) \quad (5.27)$$

不同位置  $x = x_1$ 、 $x_2$  量測的表面聲波時域訊號對應頻域函數  $R_1(f)$  及  $R_2(f)$  代入下列關係式：

$$S_{x_1, x_2}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_1(f)_i R_2^*(f)_i \quad (5.28)$$

其中， $R_2^*(f)$  為  $R_2(f)$  的共軛複數， $n$  為實驗重複次數。複數函數  $S_{x_1, x_2}(f)$  的相角代表頻率  $f$  的表面聲波行經不同位置  $x = x_1$ 、 $x_2$  時所產生的相位差。實驗的重複性及可靠度可由同調函數(coherence function)予以判斷，同調函數定義為

$$r^2(f) = \frac{|S_{x_1, x_2}(f)|^2}{A_{x_1}(f)A_{x_2}(f)} \quad (5.29)$$

其中，

$$A_{x_i}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(f)_i R^*(f)_i \quad (5.30)$$

當同調函數  $r^2(f)$  的值越趨近於 1 時，表示該實驗於此頻率區間的重複性與可靠度越高。

式(5.28)中的相位角受到主幅角的限制在  $\pm\pi$  間變動，有不連續的現象必須進一步將之連續化處理，求得連續變化的相位差。最後，由量測訊號的波程差  $x_1 - x_2$  以及相位差  $\phi$ ，可得表面聲波的相速度，

$$v = 2\pi f \frac{x_1 - x_2}{\phi} \quad (5.31)$$

### 5.3 表面聲波的生成與量測系統

#### 5.3.1 試片的製作與表面聲波的生成

產生表面聲波方法有很多種，如高能量脈衝雷射透過光罩(mask)在試片上以條紋方式激發、雙光束干涉(fringe)或是交指叉換能器(inter-digital transducer, IDT)等方法，都可以在試片上產生表面聲波。本研究利用 IDT 產生短波長且窄頻之表面聲波。

試片製作以 1 mm 厚的 Y+128° cut 鈮酸鋰(LiNbO<sub>3</sub>)為基材，濺鍍(sputtering)一層厚度為 1 μm 鋁，作為反算材料常數之表面聲波試片。以線寬 100 μm、10.5 對、電極距 100 μm、電極週期 400 μm 的 IDT，在鈮酸鋰表面產生表面聲波，再透射進入鋁鍍層區，由於鋁鍍層區的厚度很薄，寬度較波長寬甚多，故可忽略界面的反射對於表面聲波所造成的影響。

#### 5.3.2 量測系統之建立

本文採用的表面聲波量測系統如圖 5.5 和 5.6 所示，為減少量測時所需的光路調整工作，光路設計利用偏極分光稜鏡(polarizing beam



splitter ; PBS)作為光導的元件。以線偏極率 500:1 的 He: Ne 雷射之 S 極偏光，入射下方的 PBS，經反射至 PBS 下方並通過一個四分之一波片與透鏡，此四分之一波片之光軸與 S 偏極光的偏振方向夾角  $45^\circ$ 。使自待測物反射回的雷射光轉成 P 偏極光，透射過 PBS，再以 S 偏極光入射至上方的 PBS。此時雷射光會反射至 CFPI 共振腔，通過另一個光軸與 S 偏極光偏振方向夾角  $45^\circ$  的四分之一波片，進入共振腔參與共振，符合共振腔共振條件的反射光強度(reflective intensity)會以 P 偏極光模式參與干涉，然後透射過 PBS 進入光接收器(photo-receiver)，將光強度訊號轉成電壓值。最後，透過 GaGe A/D 卡與圖控軟體 LabView 擷取訊號，構成一組反射式 CFPI 量測系統。

CFPI 共振腔腔體是由兩個焦距同為 1 m 的凹面反射鏡(concave mirror)所構成，根據前節所述，共振腔的共振條件相當嚴苛，必須在共振腔的長度  $d$  達到雷射光波長四分之一的整數倍時，才會產生共振，而且需要將共振腔保持在操作點  $f_r = 0.5$  時，才可使都卜勒頻移訊號放大到最大效果。本研究採用一個 PZT 壓電圖管，置於腔體透射端，微調控制共振腔的長度，反射端設置一個旋扭，粗調腔體長度，並透過 Stanford Research Systems 公司的類比式 PID 控制器(SIM960) 與 Burleigh 公司的 PZT 放大器 RG-91，以 PID 回饋控制法則控制腔體的長度，維持共振腔的長度在操作點時，進行量測。

如附錄D所述，本研究建立的CFPI干涉儀可量測粒子的最小振動速度為 0.01206 m/s，本研究以上述之表面聲波元件作為干涉儀量測表面聲波的驗證。實驗以振幅為  $4V_{pp}$ 、頻率為 9.725 MHz 的 20 個週期之弦波、叢發週期(burst period) 1 秒的波群(burst) 驅動交指叉換能器，接收器距離致動器為 50 mm，以CFPI干涉儀與交指叉換能器作為表面聲波量測的接收器，量測點距離致動器分別為 29.8 mm與 30 mm，實驗裝置如圖 5.7

所示。鈦酸鋰的表面聲波波速之理論值為 3992 m/s，表面聲波在觸發後約 7.13  $\mu\text{sec}$  抵達第一量測點，7.26  $\mu\text{sec}$  抵達第二量測點，約 12.5  $\mu\text{sec}$  才抵達交指叉換能器之位置。由圖 5.8、5.10 與圖 5.11，確實觀察到表面聲波的抵達時間約為 7.13  $\mu\text{sec}$ 、7.26  $\mu\text{sec}$  與 12.5  $\mu\text{sec}$ ，由時域訊號可明顯的發現此三組訊號具波程時間差，此現象符合波傳特性。將訊號做快速傅利葉轉換後，發現訊號的頻率約為 9.7 MHz 與 9.65 MHz (如圖 5.9、11 與 13)。將干涉儀於第一與第二接收點擷取的訊號以相位頻譜法分析，可得知工作頻率下的表面聲波相速度為 3936.482m/s，與理論值接近。





## 第六章 結論與未來展望

本研究成功的建立了一套 CFPI 量測系統，量測層狀介質表面聲波的相速度頻散曲線，並探討具限制條件、無限制條件之準牛頓法與簡單體法反算材料常數的效能。CFPI 光學量測系統與材料常數反算的演算法均仍有待改進。本章節綜合反算分析與實驗的結果，並提出相關的改進建議，作為日後參考。

### 6.1 材料常數的反算

本研究根據第一模態的表面聲波(及雷利波)相速度頻散曲線，進行鍍膜材料常數的反算。本文採用隨機亂數選定多猜測起始點，兼顧反算的可靠度及測試區域與全域極小值。頻率在 1GHz 以下的雷利波相速度數據之反算，不論是可靠度，或是精確度，都已達到可接受的程度。證實具限制條件，無限制條件的準牛頓法及簡單體法都適用於表面聲波相速度反算鍍膜材料常數的需求。倘若實驗系統可激發與接收更高頻的表面聲波，本研究的演算程式必須克服失根的數值問題。

### 6.2 量測系統

#### 6.2.1 共振腔

CFPI 具有高靈敏度與解析度，適合量測波長短且頻率高的表面聲波。本研究設計的 CFPI 共振腔長度為 1 m，共振腔長度越長，受到環境擾動的影響也越高。當 Nd: YAG 脈衝雷射激發時，所引致的振動致使共振腔發生低頻振動，增加共振腔控制的難度，影響共振腔的穩定性。以下有幾點仍須改進與注意的地方：

- (1) 共振腔基座應採用剛性較強的結構，增加反射鏡面間距調整裝置

的接觸面積，以免發生較大的局部變形，減少共振腔受到環境擾動的影響。

- (2) 雷射光在共振腔中來回反射共振時，腔體內空氣粒子的布朗運動和凹面鏡鏡面的潔淨度都將會減低雷射光強度，影響量測訊號的訊雜比，造成共振腔腔體長度控制的難度與量測上的誤差，建議增設外罩包裹腔體以改善此現象。

CFPI 量測前的校準是一個相當重要的步驟，初始校準越精確，共振腔中將只存在單一頻率的雷射光參與共振，透射或反射的光強度將會越強，可以大幅提高量測訊號的訊雜比。共振腔腔體各元件的同軸性會影響初始校準的效率，製作過程需要相當的精準，但各元件加工時，皆會有些許的誤差，可在共振腔體前後鏡座加上 $\theta$ 與 $\phi$ 維度的微調機構，作為補償。微調後，腔體兩端凹面鏡仍必須共焦，保持與腔體同軸。

本研究在共振腔體長控制部分，採用壓電管作為腔體長度微調的主動機構，以 PID 控制器進行回饋控制。當外界擾動較低的狀況下，只需設定 I 參數，即能將腔體長度維持在操作點處，若外界擾動過大，腔體便無法鎖於定操作點。光學干涉儀為寬頻量測系統，量測時將會引入許多來自系統以外的雜訊，未來系統可針對量測訊號作頻寬分析，採用主動或被動濾波器濾掉不需要的訊號。

## 6.2.2 物鏡與工作平台

頻率越高的表面聲波，波長越短，量測時須將光點聚焦在試片上，光點須小於表面聲波波長的四分之一。若表面聲波的波長小於光學繞射尺寸的極限( $0.61\lambda/N.A.$ )時，便達到干涉儀的量測極限。目前這部分的設置為採用焦距 50 mm 的透鏡將雷射光聚焦在試片上。要將雷射光準確地聚焦在試片上，是一件很不容易的事情，倘若量測的

試片厚度皆不同，每換一次試片，就要重新調整光路，使得量測複雜且耗時。建議可以 XYZ 三維平台放置試片，只要試片的厚度差異不大，微調平台的 Z 軸，便可將雷射光輕易地聚焦在試片上，不會改變初始校準的狀況。

### 6.2.3 光源

光源是影響干涉儀量測品質的主要因素之一，若以穩頻雷射為光源，共振腔較容易校正且控制，但是一般穩頻雷射功率通常較低，無法使用在表面粗糙度高的試片的量測，能量較高的氣體雷射之頻率通常較不穩定，若要提高干涉儀的實用性，必須慎選能量高且頻率穩定的雷射光源。

為能確定干涉儀量測表面聲波的工作範圍，製作標準試片測試干涉儀的工作範圍將是必要的。



## 參考文獻

- [1] A. M. B. Braga and G. Herrmann, "Plane waves in anisotropic layered composites," *Symposium on Wave Propagation in Structural Composites*, ASME, AMD-Vol. **90**, 81-98, 1988.
- [2] B. Honein, A. M. B. Braga and P. Barbone, "Wave propagation in piezoelectric layered media with some applications," *J. of Intell. Mater. Syst. and Struct.*, **2**, 542-557, 1991.
- [3] R. D. Costley, H. Berthelot, L. J. Jacobs, and Y. L. Lam, "Laser based techniques to resolve mode propagation of Lamb waves in plates," *Journal of Acoustic Emission*, **12**, 27-38, 1994.
- [4] Y.-C. Shen and Peter Hess, "Real-time detection of laser-induced transient gratings and surface acoustic wave pulses with a Michelson interferometer," *Journal of Applied Physics*, **82**, 4758-4762, 1997.
- [5] R. J. Dewhurst and Q. Shan, "Modelling of confocal Fabry-Perot interferometers for the measurement of ultrasound" *Meas. Sci. Technol.*, **5**, 655-665, 1994.
- [6] Q. Shan, A. S. Bradford, and R. J. Dewhurst, "New field formulas for the Fabry-Perot interferometer and their application to ultrasound detection," *Meas. Sci. Technol.*, **9**, 24-37, 1999.
- [7] H. Nakano, Y. Matsuda, and S. Nagai, "Ultrasound detection by using a confocal Fabry-Perot interferometer with phase-modulated light," *Ultrasonics*, **37**, 257-259, 1999.
- [8] 葉國泰(2001), 矽晶圓的板波波傳與雷射超音波非破壞評估, 國立交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹市。
- [9] W. T. Wang and T. Y. Kam, "Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates," *Journal of Engineering Mechanics*, **127**, 1117-1123, 2001.

- [10] 劉育翔(2002)，板波波傳為基礎之複材層板結構健康監測研究，國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，新竹市。
- [11] 孫繼增(2004)，表面聲波元件之條紋陣列的反射與透射，國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，新竹市。
- [12] M. S. Caceci and W. P. Cacheris “Fitting curves to data: The simplex algorithm is the answer,” *Byte*, **9**, 340-362, 1984.
- [13] W. Sachse and Y.H. Pao, “On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids,” *Journal of Applied Physics*, **49**(8), 4320-4327, 1978.
- [14] J. P. Monchalin, “Optical Detection of Ultrasound,” *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **5**, 485-499, 1986.
- [15] M. Rakhmanov, “Doppler-induced dynamics of fields in Fabry-Perot cavities with suspended mirror,” *Applied Optics*, **40**, 1942-1949, 2001.
- [16] A. S. Murfin, R. A. J. Soden, D. Hatrick and R. J. Dewhurst, “Laser-ultrasound detection systems: a comparative study with Rayleigh waves,” *Meas. Sci. Technol.*, **11**, 1208-1219, 2000.
- [17] R. J. Dewhurst and Q. Shan, “Optical remote measurement of ultrasound,” *Meas. Sci. Technol.*, **10**, 139-168, 1999.
- [18] J. M. Vaughan, *The Fabry-Perot Interferometer: History, Theory, Practice and Applications*, 187, Adam Hilger, Bristol, England, 1989.
- [19] P. C. Beard, “Interrogation of free-space Fabry-Perot sensing interferometers by angle tuning,” *Meas. Sci. Technol.*, **14**, 1998-2005, 2003.
- [20] A. Cand and J. P. Monchalin, “Detection of in-plane and out-of-plane ultrasonic displacements by a two-channel confocal Fabry-Perot interferometer,” *Applied Physics Letters*, **64**, 414-416, 1994.

- [21] L. E. Drain, *The Laser Doppler Technique*, 36-42, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [22] C. B. Scruby and L. E. Drain, *Laser Ultrasonics Techniques and Applications*, 132-146, Adam Hilger, Bristol, England, 1990.
- [23] J. P. Monchalin and R. Heon, "Laser ultrasonic generation and optical detection with a confocal Fabry-Perot interferometer," *Materials Evaluation*, **44**, 1231-1237, 1986.
- [24] Y. Sohn and S. Krishnaswamy, "Mass spring lattice modeling of the scanning laser source technique," *Ultrasonics*, **39**, 543-551, 2002.
- [25] H. Nishino and Y. Tsukahara, "Excitation of high frequency surface acoustic waves by phase velocity scanning of a laser interference fringe," *Applied Physics Letters*, **62**, 2036-2038, 1993.
- [26] M. F. Hamilton, Y. A. Il'inskii and E. A. Zabolotskaya, "Nonlinear surface acoustic wave in crystals," *Journal of Acoustical Society of America*, **105**, 639-651, 1999.
- [27] G. N. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Application*, McGraw-Hill Inc, New York, 1993.
- [28] M. A. Baali, "Numerical experience with a class of self-scaling quasi-newton algorithms," *Journal of Optimization Theory and Applications*, **96**, 533-553, 1998.



## 附錄 A 座標轉換矩陣

在層狀介質中，若積層材料為非等向性材料，材料之主軸方向會影響彈性波之波傳行為。對應同一卡氏座標系統，材料因主軸旋轉方向不同，對應不同之材料轉換矩陣。

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}, \quad \beta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (\text{A.1})$$

其中， $\boldsymbol{\beta}$  為  $3 \times 3$  的正交矩陣，稱為轉換矩陣(transformation matrix)。 $\mathbf{e}'_i$  和  $\mathbf{e}_j$  分別為積層之材料主軸與全域座標軸之基底向量，如圖 A.1 所示。若將本文中之二階張量表示成矩陣，轉換關係可整理為

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \beta_{11}^2 & \beta_{12}^2 & \beta_{13}^2 & 2\beta_{12}\beta_{13} & 2\beta_{11}\beta_{13} & 2\beta_{11}\beta_{12} \\ \beta_{21}^2 & \beta_{22}^2 & \beta_{23}^2 & 2\beta_{22}\beta_{23} & 2\beta_{21}\beta_{23} & 2\beta_{21}\beta_{22} \\ \beta_{31}^2 & \beta_{32}^2 & \beta_{33}^2 & 2\beta_{32}\beta_{33} & 2\beta_{31}\beta_{33} & 2\beta_{31}\beta_{32} \\ \beta_{21}\beta_{31} & \beta_{22}\beta_{32} & \beta_{23}\beta_{33} & \beta_{22}\beta_{33} + \beta_{23}\beta_{32} & \beta_{23}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{33} & \beta_{31}\beta_{22} + \beta_{21}\beta_{32} \\ \beta_{11}\beta_{31} & \beta_{12}\beta_{32} & \beta_{13}\beta_{33} & \beta_{13}\beta_{32} + \beta_{12}\beta_{33} & \beta_{11}\beta_{33} + \beta_{13}\beta_{31} & \beta_{11}\beta_{32} + \beta_{12}\beta_{31} \\ \beta_{11}\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{22} & \beta_{13}\beta_{23} & \beta_{12}\beta_{23} + \beta_{13}\beta_{22} & \beta_{11}\beta_{23} + \beta_{13}\beta_{21} & \beta_{11}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \beta_{11}^2 & \beta_{12}^2 & \beta_{13}^2 & \beta_{12}\beta_{13} & \beta_{11}\beta_{13} & \beta_{11}\beta_{12} \\ \beta_{21}^2 & \beta_{22}^2 & \beta_{23}^2 & \beta_{22}\beta_{23} & \beta_{21}\beta_{23} & \beta_{21}\beta_{22} \\ \beta_{31}^2 & \beta_{32}^2 & \beta_{33}^2 & \beta_{32}\beta_{33} & \beta_{31}\beta_{33} & \beta_{31}\beta_{32} \\ 2\beta_{21}\beta_{31} & 2\beta_{22}\beta_{32} & 2\beta_{23}\beta_{33} & \beta_{22}\beta_{33} + \beta_{23}\beta_{32} & \beta_{23}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{33} & \beta_{31}\beta_{22} + \beta_{21}\beta_{32} \\ 2\beta_{11}\beta_{31} & 2\beta_{12}\beta_{32} & 2\beta_{13}\beta_{33} & \beta_{13}\beta_{32} + \beta_{12}\beta_{33} & \beta_{11}\beta_{33} + \beta_{13}\beta_{31} & \beta_{11}\beta_{32} + \beta_{12}\beta_{31} \\ 2\beta_{11}\beta_{21} & 2\beta_{12}\beta_{22} & 2\beta_{13}\beta_{23} & \beta_{12}\beta_{23} + \beta_{13}\beta_{22} & \beta_{11}\beta_{23} + \beta_{13}\beta_{21} & \beta_{11}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{21} \end{bmatrix}$$

且  $\mathbf{T}_\sigma^T = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}$ ， $\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \mathbf{T}_\varepsilon^T$

二階張量(例如：介電常數矩陣)的轉換為

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\beta}^T \quad (\text{A.2})$$

三階張量(例如：壓電矩陣)的轉換為

$$\mathbf{e}' = \boldsymbol{\beta} \mathbf{e} \mathbf{T}_\sigma^T \quad (\text{A.3})$$

四階張量(例如：材料剛性係數  $C_{ijkl}$ )的轉換為

$$C_{ijkl} = \beta_{iM} \beta_{jJ} \beta_{kK} \beta_{lL} C_{IJKL}$$

轉換至全域座標後的材料剛性係數矩陣為

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{C} \mathbf{T}_\sigma^T \quad (\text{A.4})$$

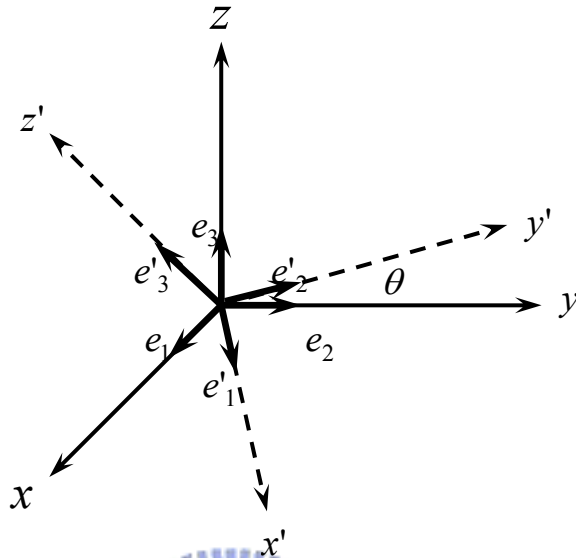


圖 A.1 兩個正交座標系統， $x$ 、 $y$ 、 $z$ 與 $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$ 分別為旋轉前、後的主軸。

## 附錄 B 六階矩陣元素

1.  $S_1$ 與 $S_2$ 矩陣為

$$S_1 = \mathbf{R}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_\beta) - \mathbf{R}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \quad (\text{B.1})$$

$$S_2 = -\mathbf{R}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \quad (\text{B.2})$$

2.  $\Gamma$ 矩陣為

$$\Gamma_{11} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_\alpha) \partial_\alpha \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_{12} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_{21} = \rho \ddot{u} + \left[ \mathbf{R}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_\beta) - \mathbf{R}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \right] \partial_\alpha \partial_\beta \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_{22} = \left[ -\mathbf{R}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \right] \partial_\alpha \quad (\text{B.6})$$

3.  $\hat{\Gamma}$ 矩陣為

$$\hat{\Gamma}_{11} = -k_x \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_1) \quad (\text{B.7})$$

$$\hat{\Gamma}_{12} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{\Gamma}_{21} = -\rho \omega^2 \mathbf{I} - k_x^2 \left[ \mathbf{R}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_1) - \mathbf{R}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1) \right] \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{\Gamma}_{22} = -k_x \mathbf{R}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \quad (\text{B.10})$$

## 附錄 C 正交性材料的材料剛性矩陣

正交性材料(orthogonal material)的材料剛性矩陣  $\mathbf{C}$  為

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

沿著  $x$  軸方向傳遞之平面諧波，的狀態向量  $\xi = [\mathbf{u}, \mathbf{T}]^T$  可表示成

$$\partial_z \hat{\xi}(z) = i \hat{\Gamma} \hat{\xi}(z)$$

其中

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_x & -\frac{1}{C_{55}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{44}} & 0 \\ -\frac{k_x C_{13}}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{33}} \\ -\frac{\rho\omega^2 C_{33} + k_x^2 C_{13}^2 - k_x^2 C_{11} C_{33}}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_x C_{13}}{C_{33}} \\ 0 & -\rho\omega^2 + k_x^2 C_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 & -k_x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 附錄 D 共振腔設計理論

CFPI 的解析度取決於雷射光的頻率、共振腔的長度及共振腔兩端的反射透鏡，以下的推導可計算 CFPI 的解析度。

$$\text{FSR} = \frac{c}{4nd} \quad (\text{D.1})$$

其中， $n$  為空氣的折射率，故上式可表示成

$$\text{FSR} = \frac{c}{4d} \quad (\text{D.2})$$

$$\text{Finesse} = \frac{\pi R}{1 - R^2} \quad (\text{D.3})$$

$$\text{FWHM} = \frac{\text{FSR}}{\text{Finesse}} \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Resolving Power} = \frac{4d}{\lambda} \cdot (\text{Finesse}) \quad (\text{D.5})$$

$$\Delta\nu = \frac{\nu}{\text{Resolving Power}} \quad (\text{D.7})$$

其中，所採用的光源條件為  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、 $\lambda = 633 \text{ nm}$ ；凹面鏡之反射率  $R = 99.5\%$ ；共振腔長度  $d = 1 \text{ m}$ 。依據上述的共振腔計算公式，得知可量測的都卜勒頻移最小值為  $0.239 \text{ MHz}$ ，假設沿  $x$  正向傳遞之諧波(harmonic wave)位移為

$$U(x) = A \sin(\omega t - kx) \quad (\text{D.8})$$

對時間一次微分後，介質表面粒子的振動速率為

$$\bar{v}(x) = U'(x) = \omega A \cos(\omega t - kx) \quad (\text{D.9})$$

表面粒子最大速度為  $\omega A$ 。代入式(5.1)，若共振腔長度約為  $1 \text{ m}$ ，超音波振幅與頻率之關係為

$$fA = 0.01206 \text{ m/s} \quad (\text{D.10})$$

由此關係可得圖 5.2，共振腔長度對應的曲線上半部分為該共振

腔長度的可量測範圍區，曲線下方則為不可量測區。





表 1 鋁之材料常數

密度(g/cm <sup>3</sup> )	楊氏係數 (GPa)	蒲松比	介電係數(10 <sup>-12</sup> F/m)
$\rho$	$E$	$\nu$	$\epsilon$
2.703	70	0.33	15.045



表 2 鈉鈣玻璃之材料常數

密度(g/cm <sup>3</sup> )	拉梅常數 (GPa)		蒲松比	介電常數(10 <sup>-12</sup> F/m)
$\rho$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\epsilon_{11}$
2.484	23.953	29.228	0.229	64.634

註 1：除介電係數外，其餘皆以應力波實驗量測數據

表 3 氧化鋅之材料常數

密度(g/cm <sup>3</sup> )		剛性係數(GPa)			
$\rho$	$C_{11}^E$	$C_{12}^E$	$C_{13}^E$	$C_{33}^E$	$C_{44}^E$
5.676	209.7	121.1	105.1	210.9	42.5

註： $C_{66}^E = (C_{11}^E - C_{12}^E)/2$

壓電常數(C/m <sup>2</sup> )			介電常數(10 <sup>-12</sup> F/m)	
$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$
-0.59	-0.61	1.14	73.8	78.3



表 4 鋁酸鋰之材料常數

密度(g/cm <sup>3</sup> )		剛性係數(GPa)				
$\rho$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$
4.7	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$	$C_{44}^E$

註： $C_{66}^E = (C_{11}^E - C_{12}^E)/2$

壓電常數(C/m <sup>2</sup> )				介電常數(10 <sup>-12</sup> F/m)	
$e_{15}$	$e_{22}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$
3.7	2.5	0.2	1.3	38.9	25.7

表 5 交指叉換能器設計參數

交指叉換能器電極週期	$(p)$	400 $\mu\text{m}$
交指叉換能器電極寬度	$(d_e)$	100 $\mu\text{m}$
交指叉換能器兩電極間距	$(d_b)$	100 $\mu\text{m}$
交指叉換能器重疊區域	$(w)$	固定值



表 6 簡單體法反算材料常數的結果

次數	材料常數	猜測值	參數下限	參數上限	搜尋結果	搜尋次數
1	E (GPa)	105.1164	10	200	63.3186	300
	$\nu$	0.416969	0.1	0.5	0.361689	
2	E (GPa)	148.9371	10	200	63.3186	84
	$\nu$	0.131801	0.1	0.5	0.361689	
3	E (GPa)	167.1247	10	200	63.3186	87
	$\nu$	0.467275	0.1	0.5	0.361689	

表 7 具限制條件之準牛頓法及有限差分法反算材料常數的結果

次數	材料常數	猜測值	參數下據	參數上限	搜尋結果	搜尋次數
1	E (GPa)	100.0156	10	200	63.3186	164
	$\nu$	0.30000	0.1	0.5	0.36169	
2	E (GPa)	46.4347	10	200	63.3000	32
	$\nu$	0.47555	0.1	0.5	0.36200	
3	E (GPa)	48.5342	10	200	63.3163	73
	$\nu$	0.33405	0.1	0.5	0.36184	



表 8 無限制條件之準牛頓法及有限差分法反算材料常數的結果

次數	材料常數	猜測值	參數下據	參數上限	搜尋結果	搜尋次數
1	E (GPa)	75.3255	10	200	63.3182	62
	$\nu$	0.32575	0.1	0.5	0.36169	
2	E (GPa)	119.3857	10	200	63.3181	169
	$\nu$	0.11162	0.1	0.5	0.36167	
3	E (GPa)	28.0107	10	200	63.3182	267
	$\nu$	0.17428	0.1	0.5	0.36169	

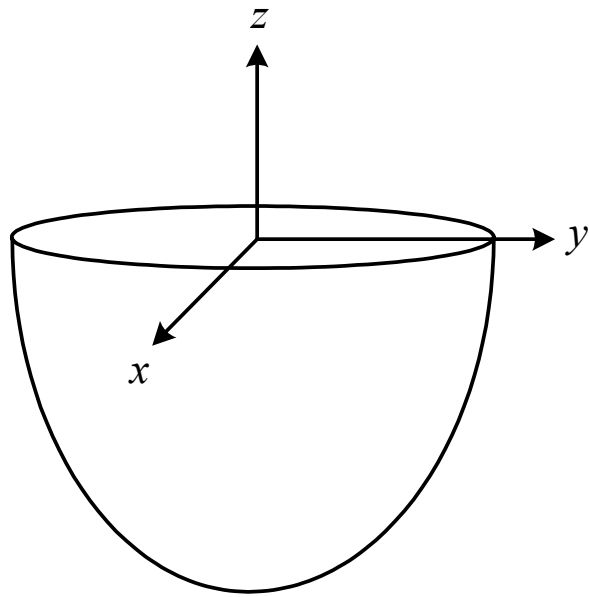


圖 2.1 半無限域基材及參考的卡氏座標。

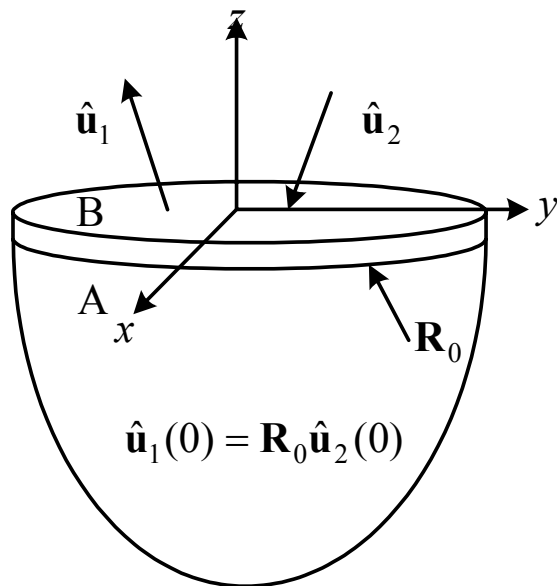


圖 2.2 層狀半無限域上下傳波的位移示意圖。

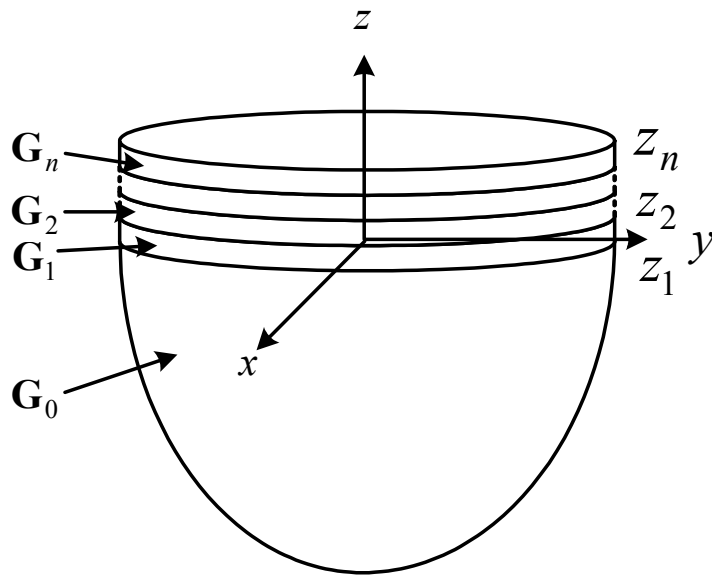


圖 2.3 多層半無限域介質示意圖， $G_i (i = 0, 1, \dots, n)$  為各層介質的全波阻。

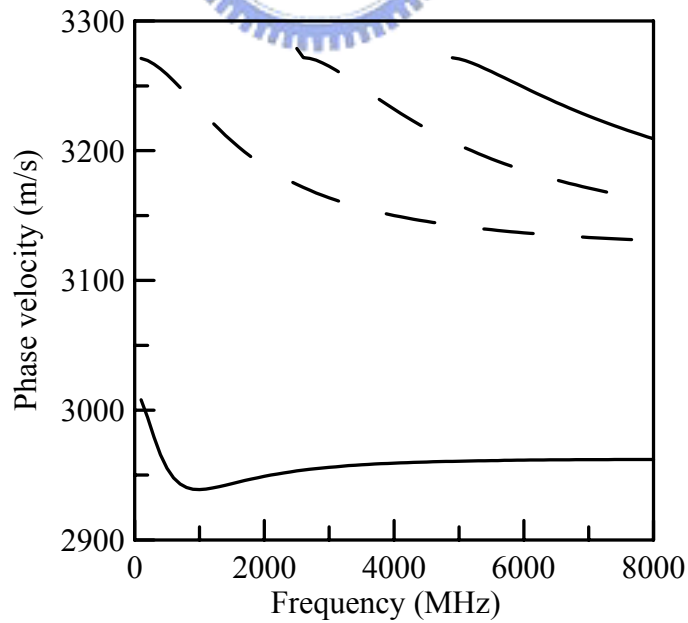


圖 2.4 波在 $\text{Al}(1 \mu\text{m})/\text{SiO}_2$ 介質傳遞之表面聲波頻散曲線，實線代表雷利波，虛線為拉夫波。



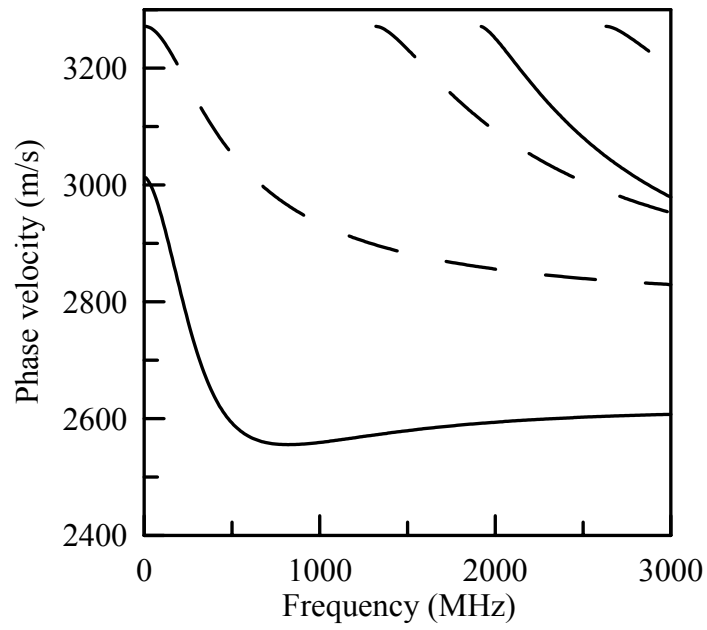


圖 2.5 在 ZnO(1  $\mu\text{m}$ )/SiO 介質傳遞之表面聲波頻散曲線，實線代表雷利波，虛線為拉夫波。



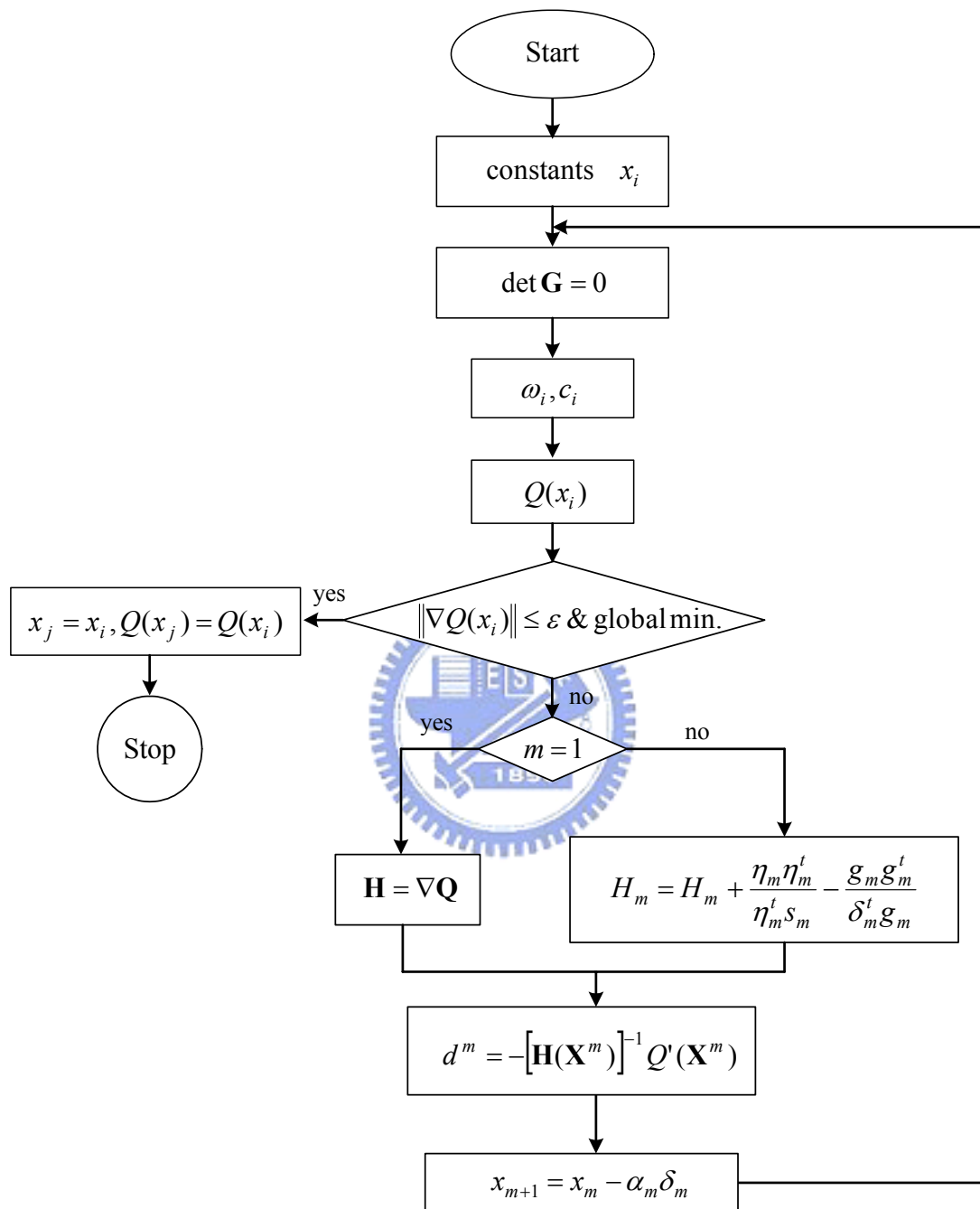


圖 3.1 受限制之目標函數最佳化程式之流程圖。

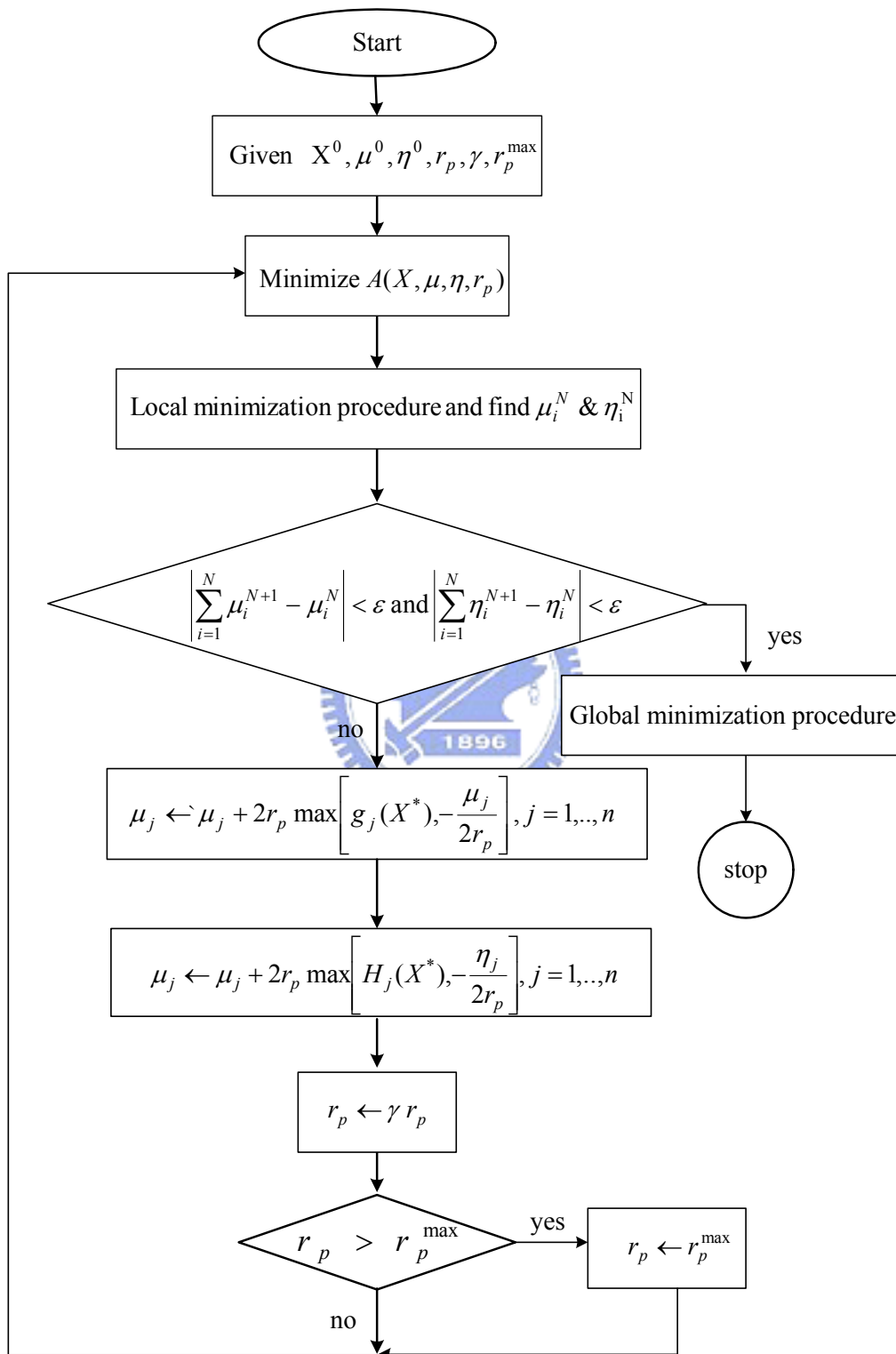


圖 3.2 延伸性拉格蘭吉乘子多起始點總域極小化程序。

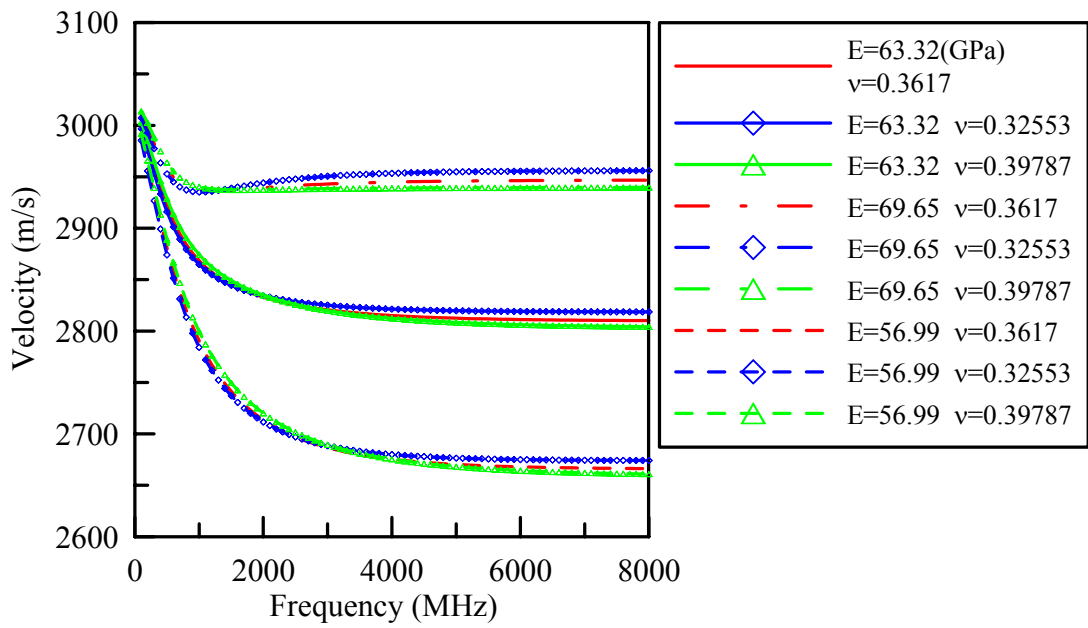


圖 4.1 不同積層材料常數所對應的頻散曲線圖。

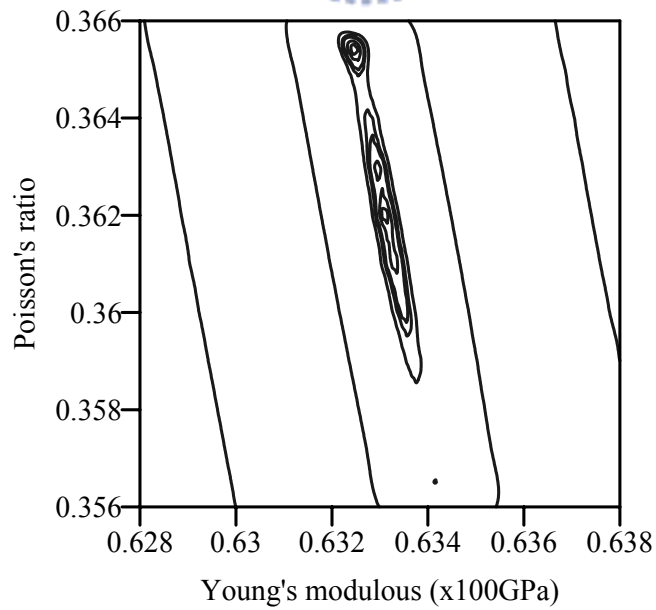


圖 4.2 頻率範圍在 1MHz~1 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

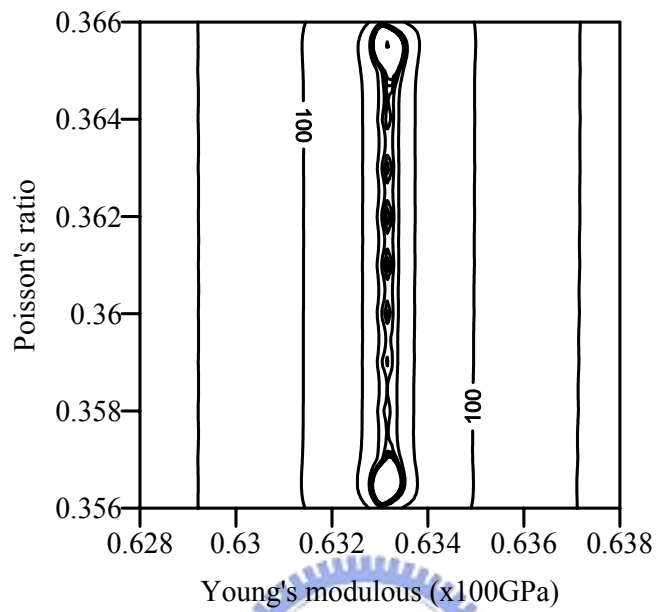


圖 4.3 頻率範圍在 1~3 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

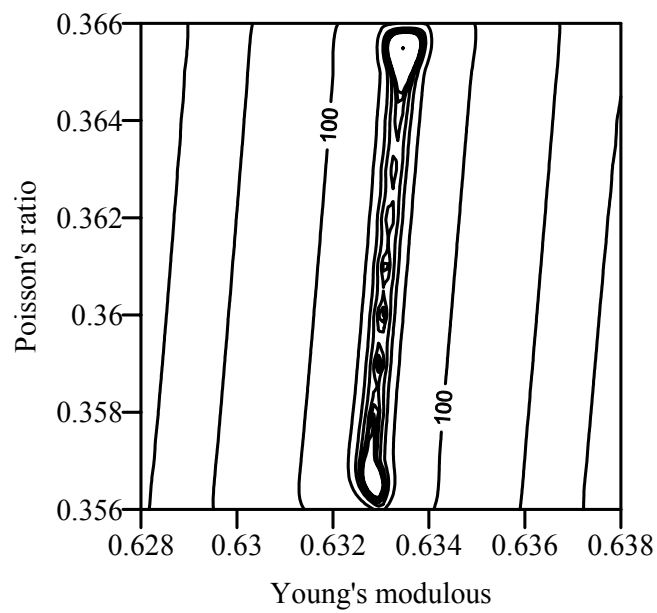


圖 4.4 頻率範圍在 3~5 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

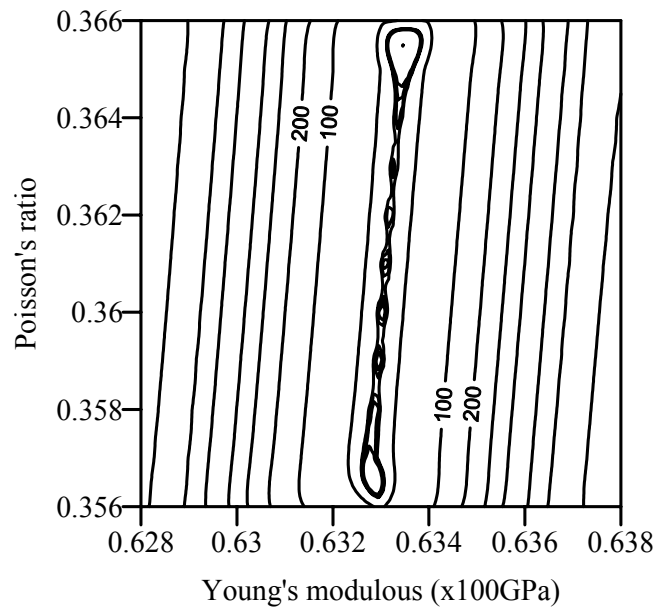


圖 4.5 頻率範圍在 5~7 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

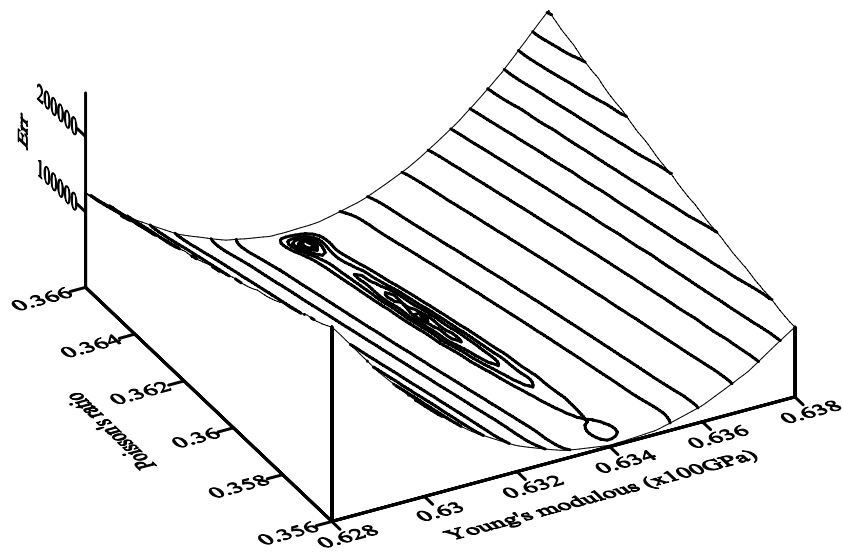


圖 4.6 頻率範圍在 1MHz~1 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。



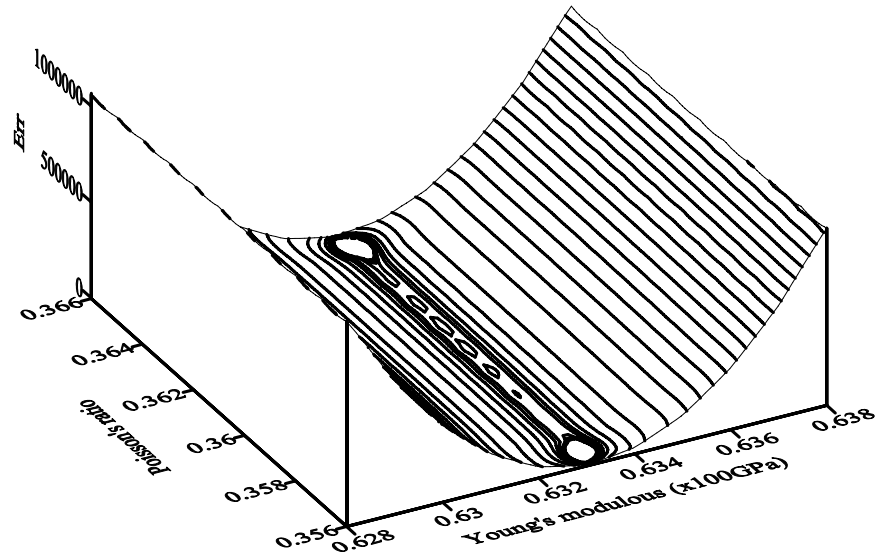


圖 4.7 頻率範圍在 1~3 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

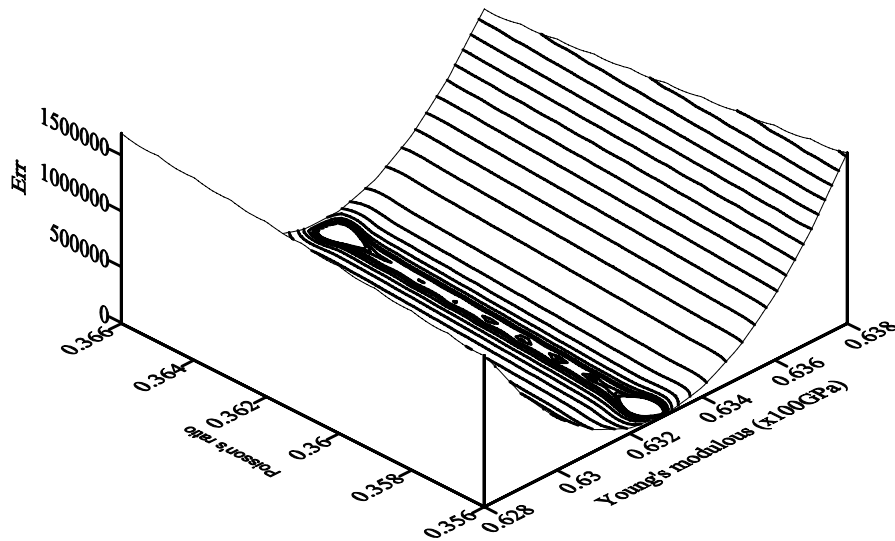


圖 4.8 頻率範圍在 3~5 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

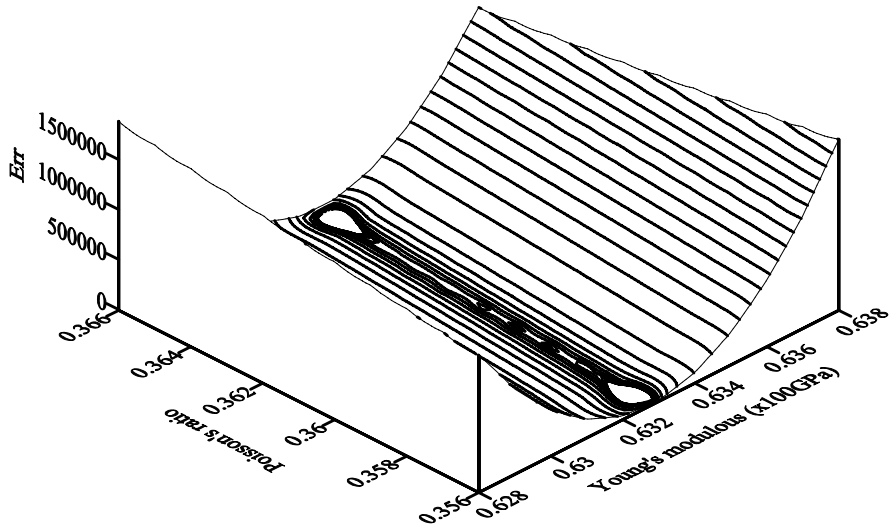


圖 4.9 頻率範圍在 5~7 GHz 間，無限制條件目標函數的等高線圖。

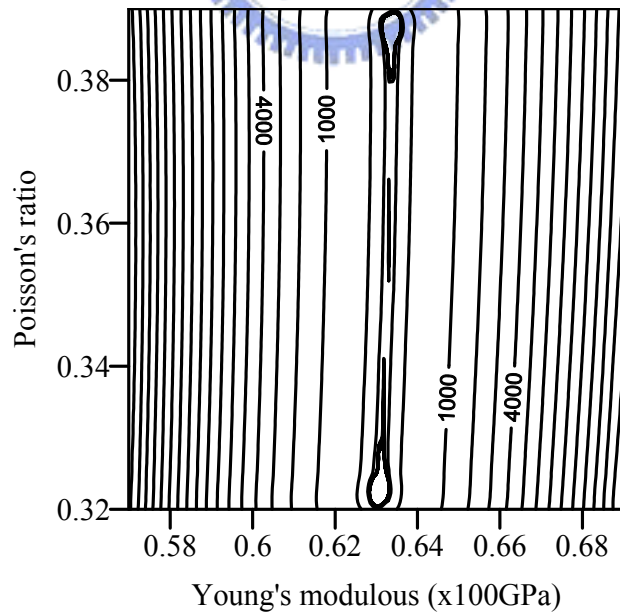


圖 4.10 頻率範圍在 1 MHz~1 GHz 間且參數變動 10%時，無限制條件目標函數的等高線圖。

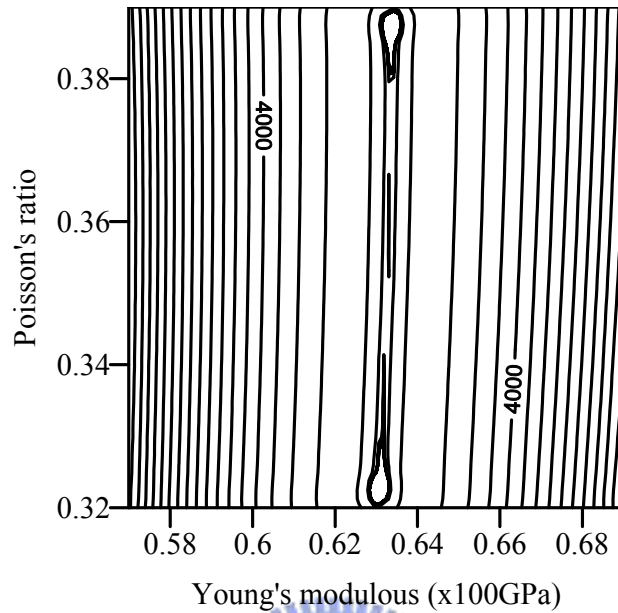


圖 4.11 頻率範圍在 1~3 GHz 間且參數變動 10%時，  
無限制條件目標函數的等高線圖。

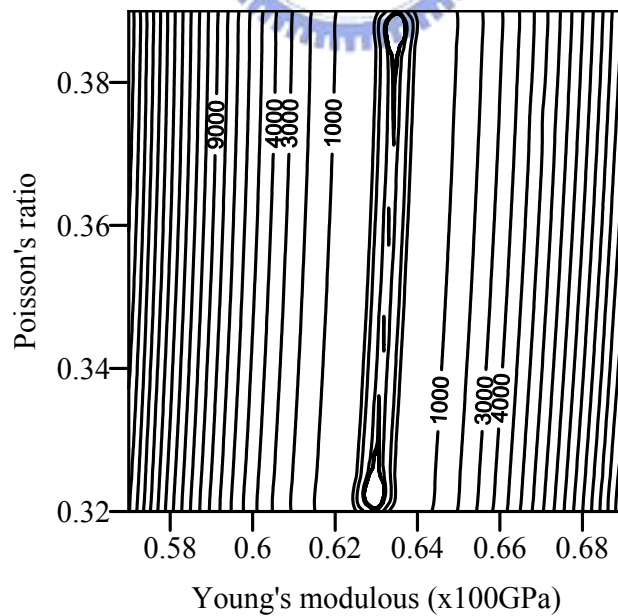


圖 4.12 頻率範圍在 3~5 GHz 間且參數變動 10%時，  
無限制條件目標函數的等高線圖。

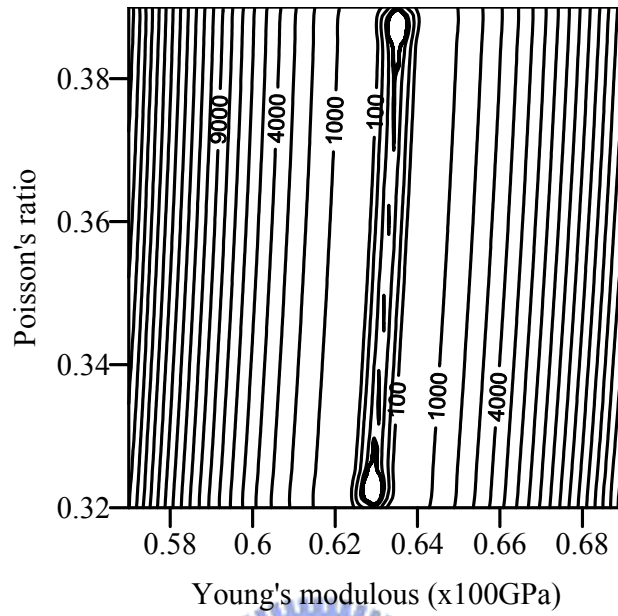


圖 4.13 頻率範圍在 5~7 GHz 間且參數變動 10%時，  
無限制條件目標函數的等高線圖。

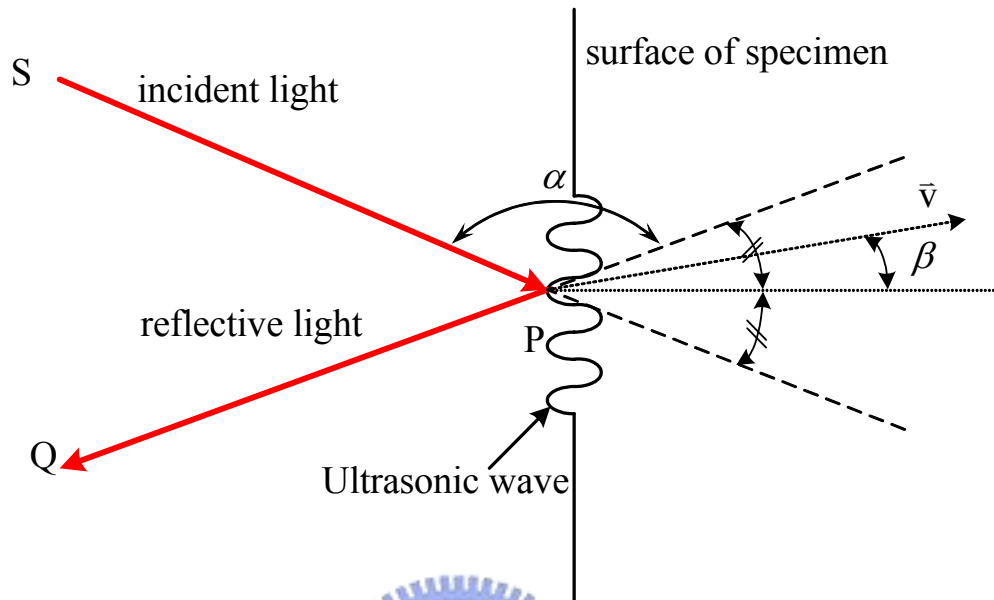


圖 5.1 超音波產生都卜勒頻移的示意圖。

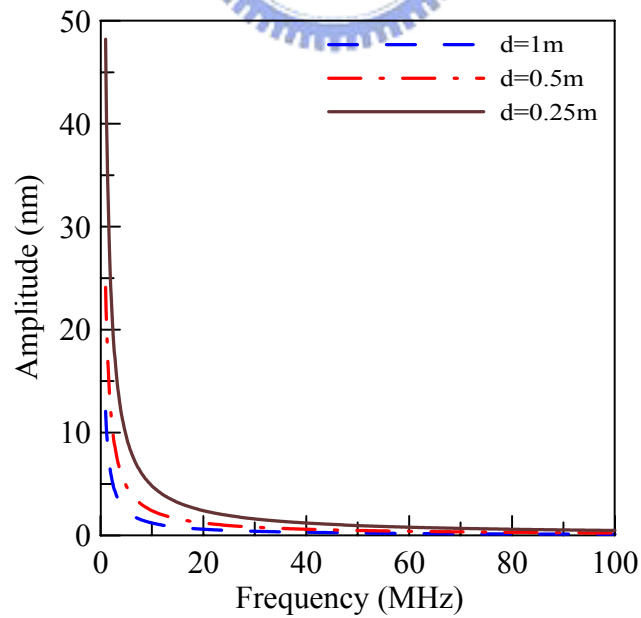


圖 5.2 CFPI 的共振腔長度與所能量測到之超音波頻率與振幅的關係曲線。

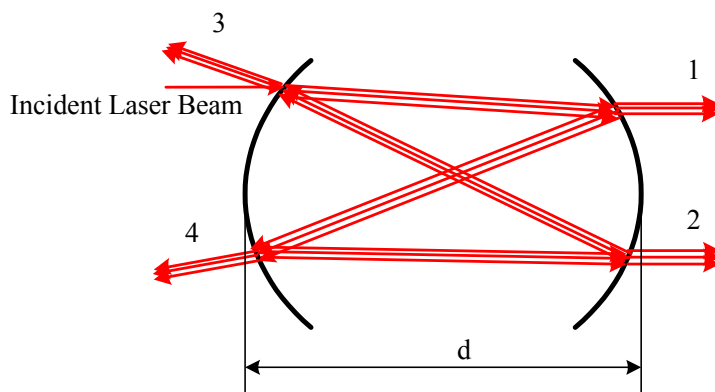


圖 5.3 雷射光於共振腔內的路徑示意圖。

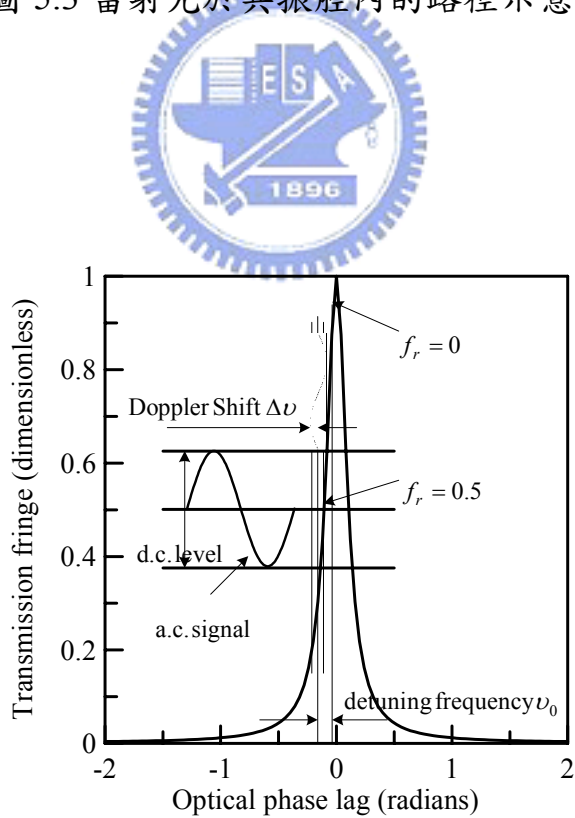


圖 5.4 CFPI 在  $R = 0.9$  時的透射強度示意圖。

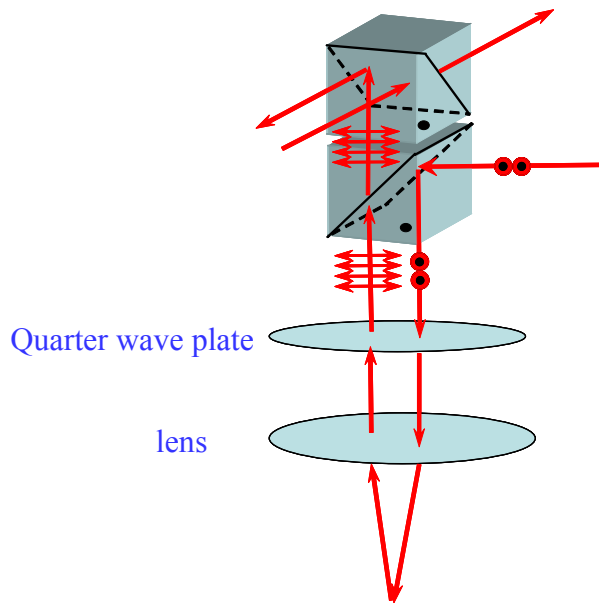


圖 5.5 He: Ne 雷射光在兩偏極分光稜鏡中的傳遞，  
圓點與箭頭為光之極化方向。

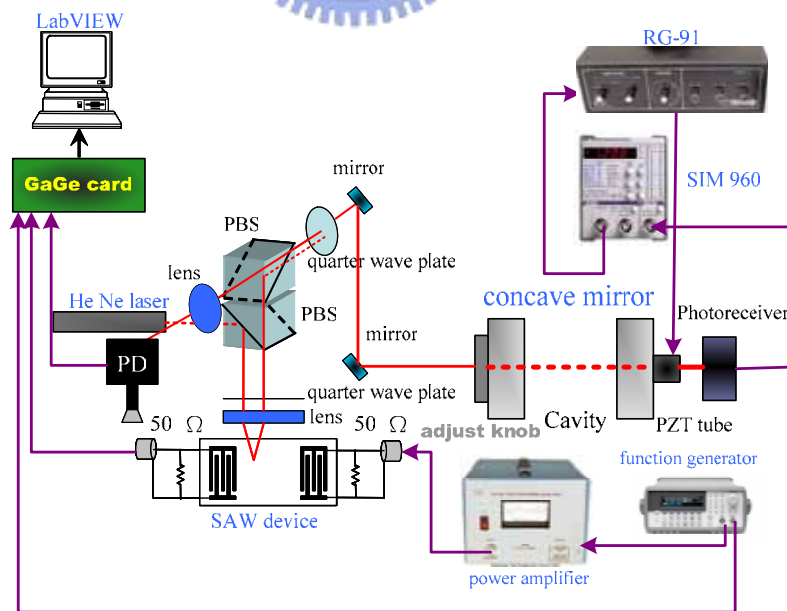


圖 5.6 CFPI 量測表面聲波元件波動訊號之實驗示意圖。



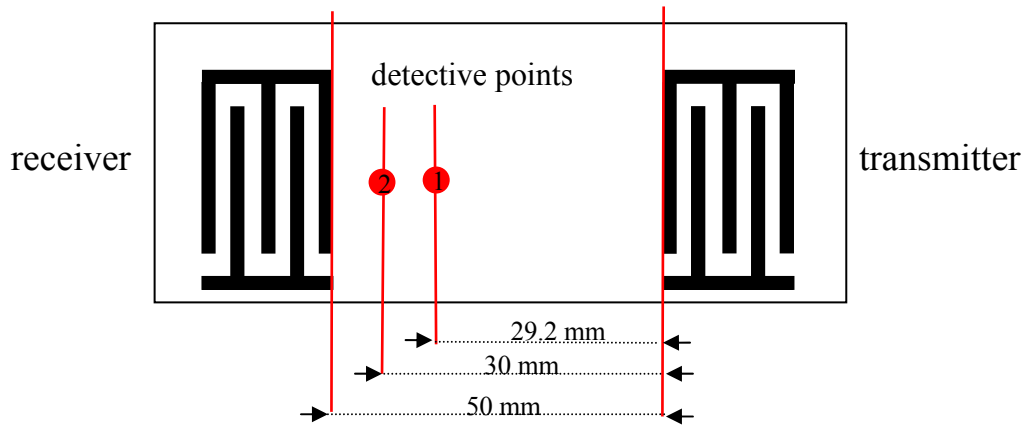


圖 5.7 表面聲波元件量測點示意圖。

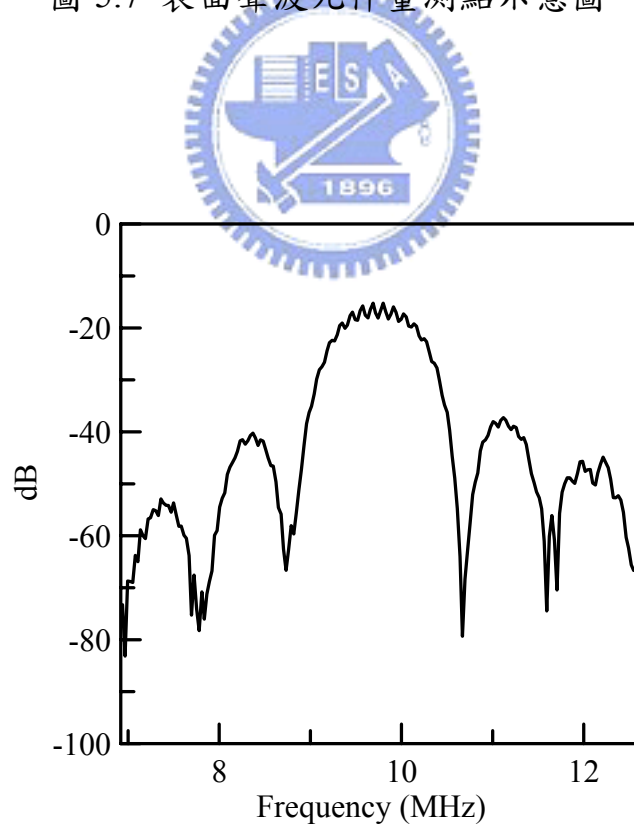


圖 5.8 表面聲波元件頻率響應。

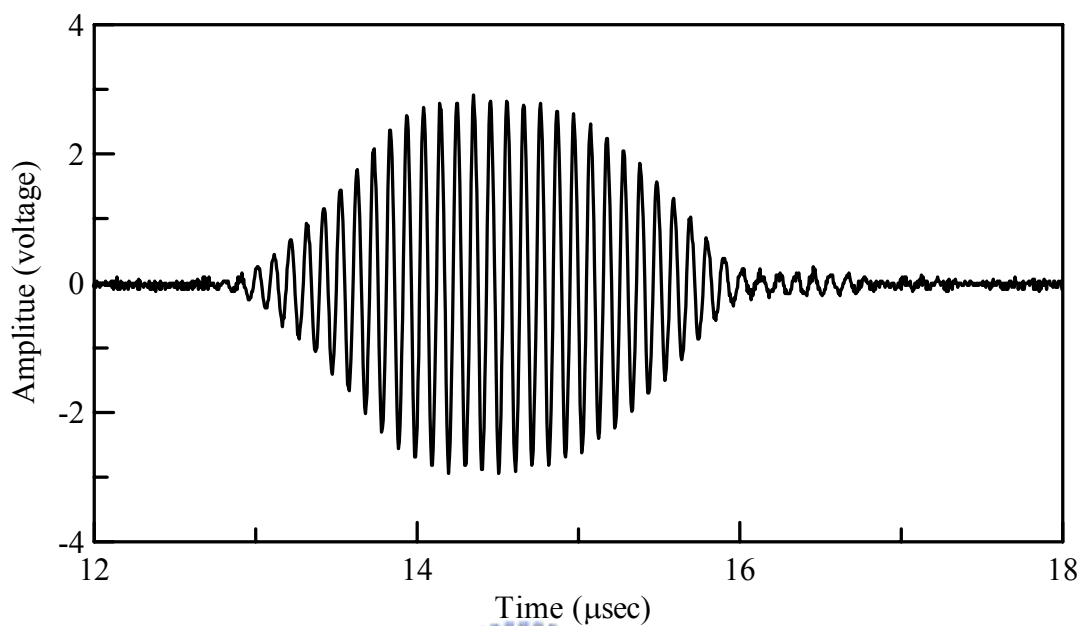


圖 5.9 交指叉換能器接收到之表面聲波訊號。

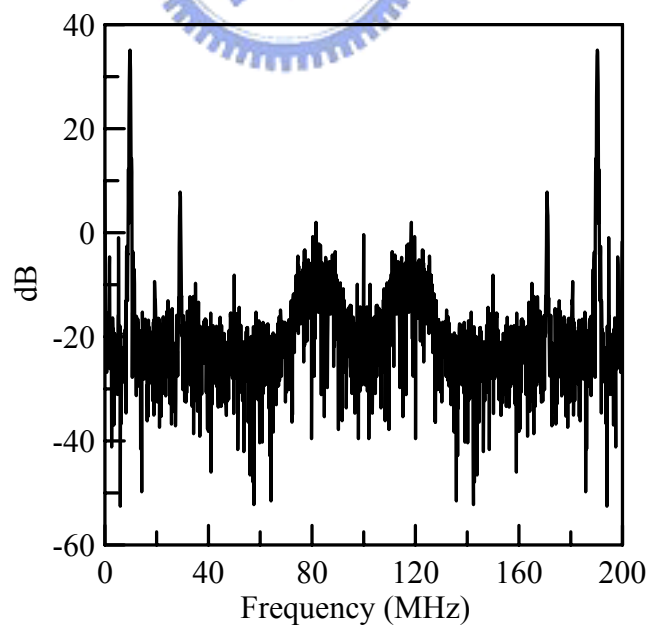


圖 5.10 圖 5.9 表面聲波的頻譜。

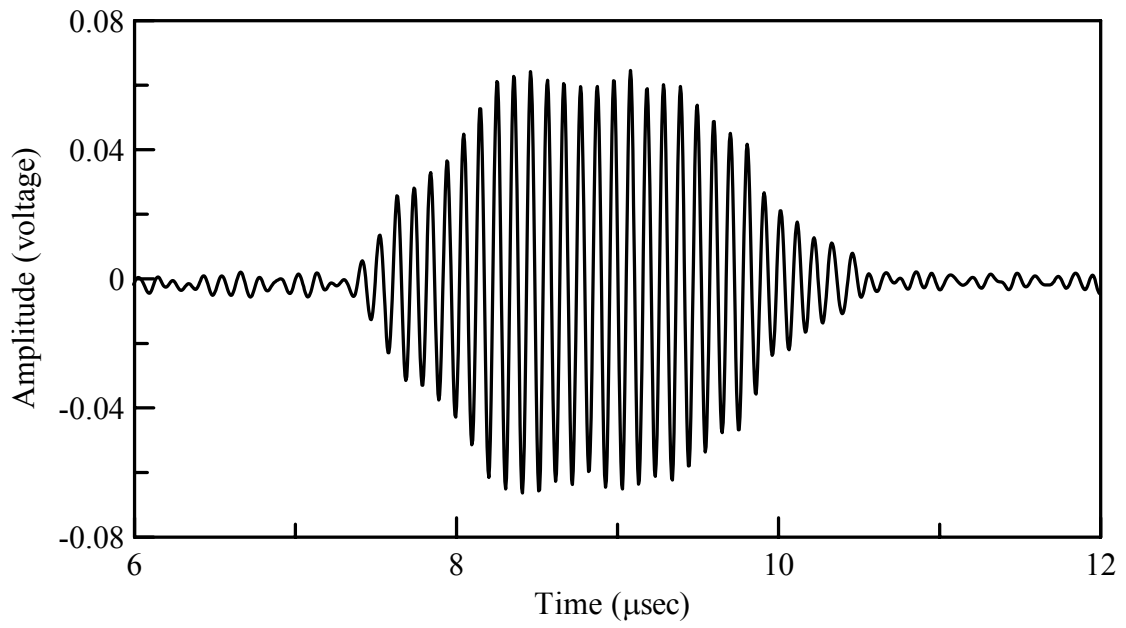


圖 5.11 表面聲波於第一接收點的 CFPI 訊號圖。

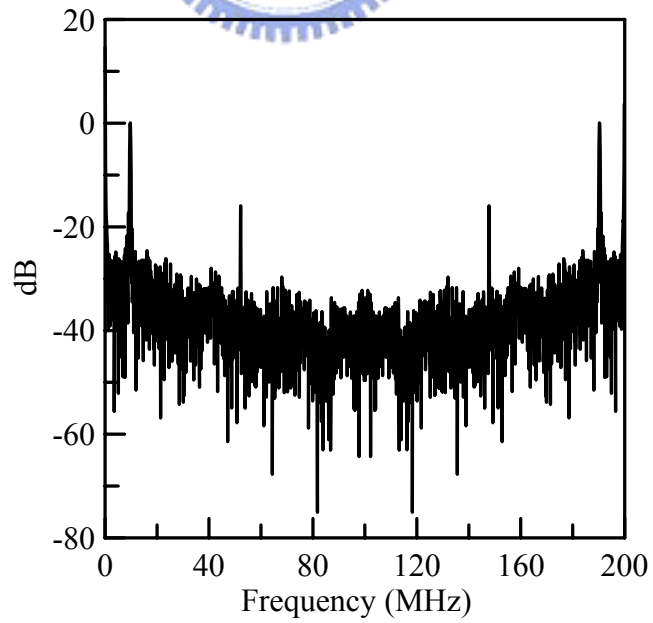


圖 5.12 圖 5.11 表面聲波的頻譜。

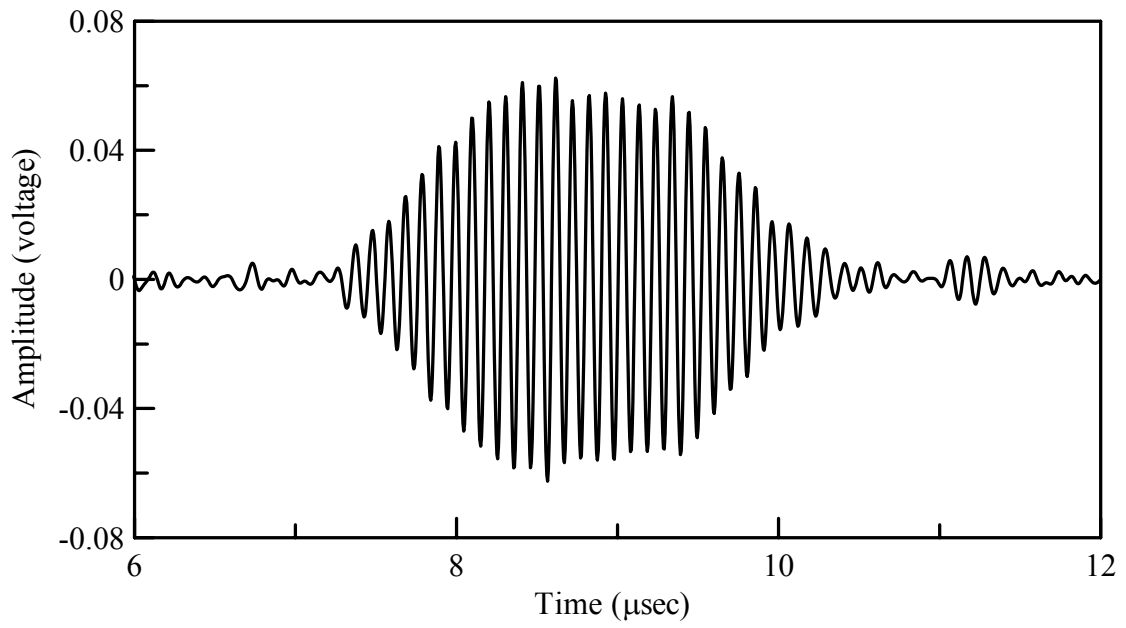


圖 5.13 表面聲波於第二接收點的 CFPI 訊號。

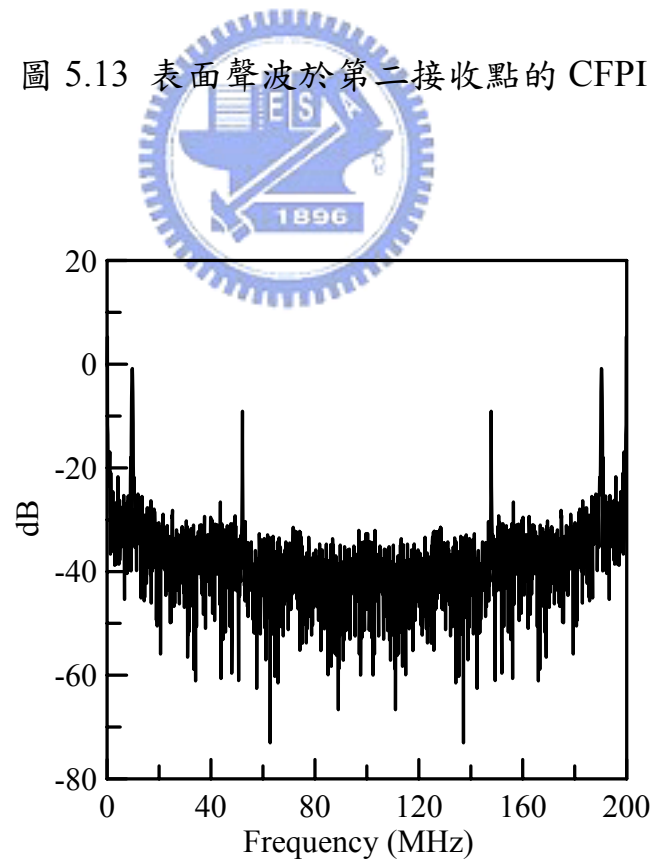


圖 5.14 圖 5.13 表面聲波的頻譜。

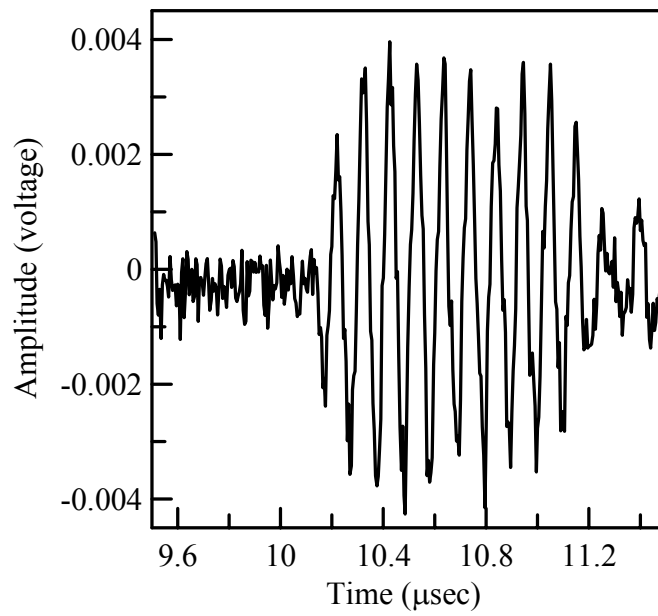


圖 5.15 以 2 週期弦波致動 IDT 產生表面聲波的 CFPI 訊號。

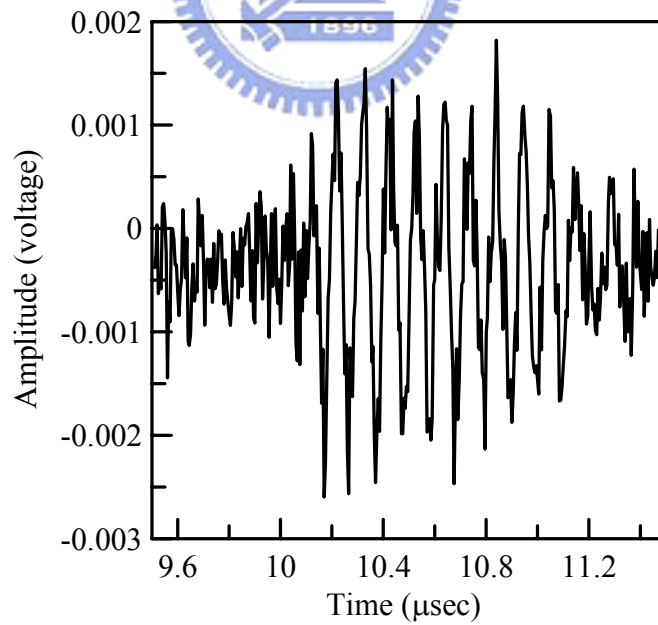


圖 5.16 以 1 週期弦波致動 IDT 產生表面聲波的 CFPI 訊號。

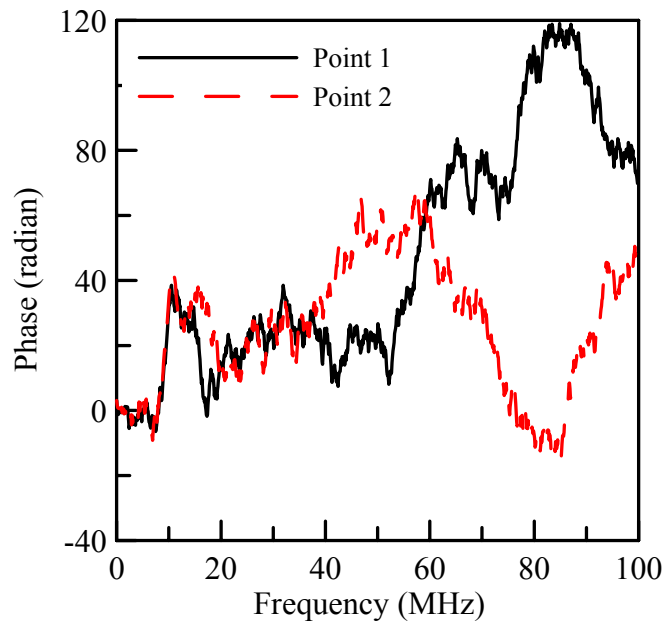


圖 5.17 位置 1 與 2 量測的表面聲波相位連續圖。

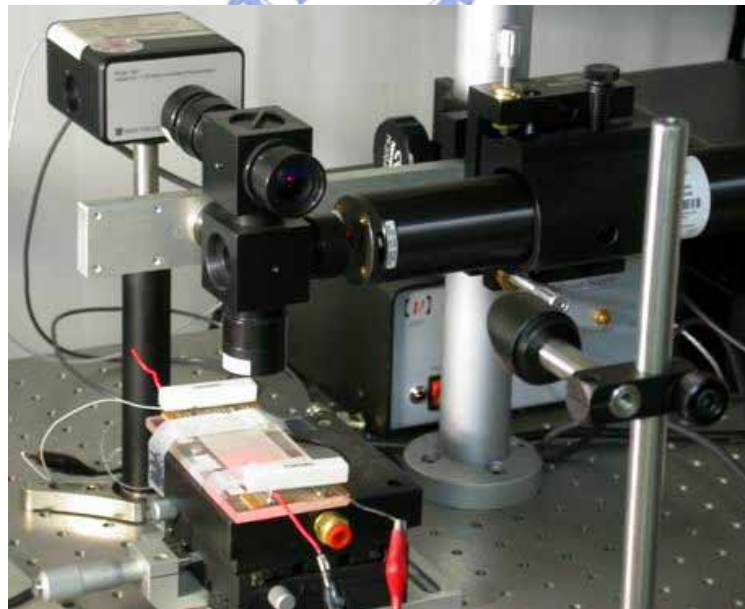


圖 5.18 CFPI 量測表面聲波元件的照片。

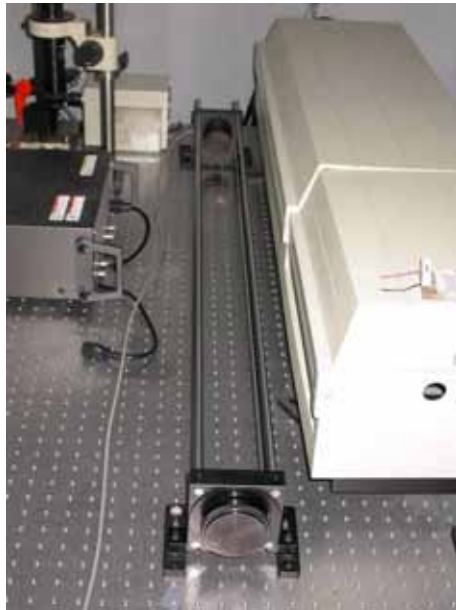


圖 5.19 CFPI 共振腔實體照片。

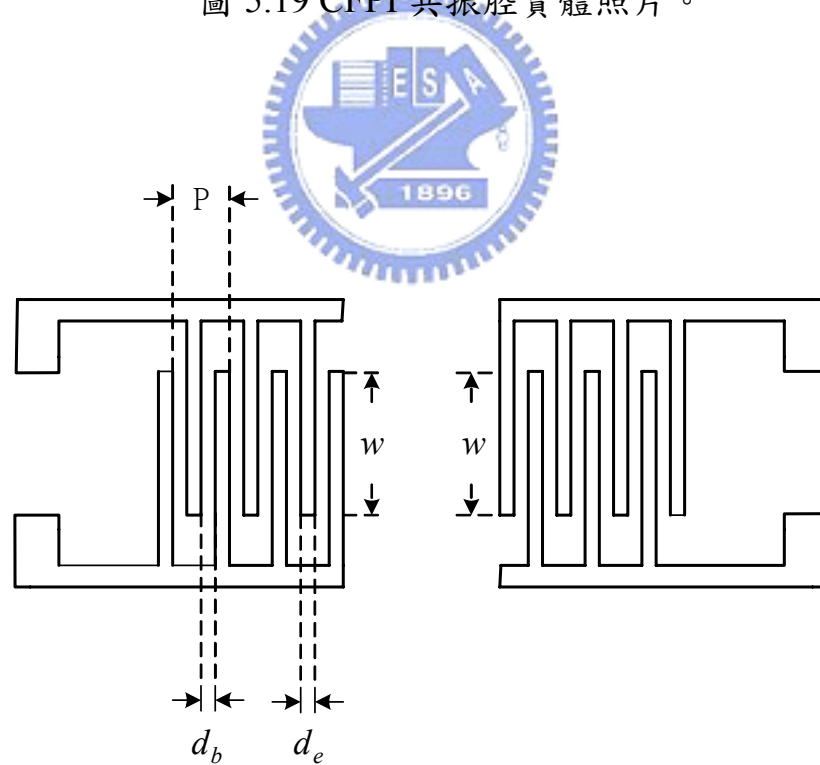


圖 5.20 單相交指叉換能器的示意圖。