

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

平板受橢圓激震器激震之振動研究

**Vibration of the Plane Excited by Elliptic
Transducer**



研 究 生：戴建郎

指導教授：金大仁 教授

中華民國九十四年九月

平板受橢圓激震器激震之振動研究

Vibration of the Plane Excited by Elliptic Transducer

研 究 生：戴建郎

Student : Jian-Lang Dai

指導教授：金大仁 教授

Advisor : Dr. Tai-Yan Kam

國 立 交 通 大 學

機 械 工 程 學 系

碩士論文



A Thesis

Submitted to Institute of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

September 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年九月

平板受橢圓激震器激震之振動研究

研究生：戴建郎

指導教授：金大仁 博士

國立交通大學機械工程學系

中文摘要

本文使用多層一階剪變形理論及有限元素分析軟體 ANSYS 來模擬複合材料三明治振動板，並使用振動實驗來證明分析的正確性，來研究複合材料三明治振動板以不同橢圓形激振器激振的行為，並探討其聲傳行為。

由分析中發現，在長寬比大於 1.5 的振動板，其聲壓頻譜在中頻部分可能會產生中音谷，中音谷都是由第一個彎曲模態所造成。藉由適當地選擇激振器的參數，就可有效改變中音谷。特別是當激振器的長軸愈長，產生的中音谷落差值會愈小，中音谷的出現頻率愈向高頻移動，同時因為磁鐵變大的影響，激振器的出力也會比較大。

討論在振動板厚度、材料常數固定不變的情形下，藉由改變振動板長寬比及激振器尺寸，來找出第一個彎曲模態圖中節線到振動板中心距離與中音谷聲壓落差值、位置之間的關係。從這些關係中可以得到激振器長軸

是在自由邊界條件下，節線到振動板中心距離的 2.5 倍時，中音谷會得到比較平緩的結果。



Vibration of the Plane Excited by Elliptic Transducer

Student : Jian-Lang Dai

Advisor : Dr. Tai-Yan Kam

Institute of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this thesis, the finite element constructed on the basis of the theory of Multi-layer First Order Shear Deformation Theory is applied to simulate the vibration behavior of composite sandwich plates. Experiments on vibration testing of composite sandwich plates are performed to verify the correctness of the analysis. Vibration and sound radiation of the composite sandwich plates excited by different elliptical transducers are studied using the finite element method. The parameters that can affect the sound radiation behavior of the composite sandwich plate are identified through the analysis. It has been found that the first bending mode of the plates with aspect ratio larger than 1.5 may cause the first dip in mid frequency range in the SPL spectrum of the plate. By choosing the proper diameter of the transducer, the depth of the first dip in mid frequency range of SPL spectrum can be greatly reduced. When the major axis of the elliptical transducer gets longer, the depth of the first dip in mid frequency

range of SPL spectrum gets smaller and may move to higher frequency. At the same time, the force exerted by transducer to the plate will become larger due to the increase in magnet size and the sensitivity of the sound radiated from the plate will become higher.

For plates with same thickness and material constants but different aspect ratios, we have studied how the distance from the nodal line of the first bending mode to plate center and the size of transducer affect the depths and locations of the first dips in mid frequency ranges of the plates' SPL spectra. In the study, we have found that when the long axis of an elliptical transducer is 2.5 times of the distance between nodal line and the plate center under free boundary condition, the depth of the first dip in mid frequency range of SPL spectrum can be greatly reduced.

誌謝

在這短短的兩年碩士求學過程，充滿許多難忘的回憶，對我的人生影響重大，要感謝我的老師、家人、同學及朋友對我求學的全力支持，讓我可以無憂無慮地完成我的學業。

感謝指導教授金大仁博士的耐心指導，讓我能在完成學業及論文外，學習到正確的求學態度及做人處世的道理。感謝偉芬學姐、學長志明、清榮、昌毅、于昇、鎮隆、國晉、志鴻及巧鈴學姐的照顧，提供我許多學業上及生活上的協助，並在我遇到困難時，提供寶貴的意見。另外要感謝助理張馨櫻小姐，在我剛進實驗室時，提供生活上瑣事的協助和打點。

感謝同窗好友崧任、維成和加融在這兩年來的互相勉勵，讓我在學習過程中不會感到孤單，感謝學弟欣翰、慶博、建勳和哲偉讓我的生活充滿歡樂，僅以此文獻給所有關心我的人

建郎 2005.9 于交大

目錄

中文摘要	i
英文摘要	iii
誌謝	v
目錄	vi
表目錄	ix
圖目錄	xi
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	3
1.3 研究方法	4
第二章 複合材料三明治積層板的基本原理	5
2.1 複合材料三明治積層板位移場與應變	5
2.2 應力與應變關係	8
2.3 外力與變形的剛性矩陣	10
2.4 複合材料板的邊界條件	12
2.5 複合材料板的應變能與動能	13
2.6 瑞雷-黎次法(Rayleigh-Rize method)	14

第三章	聲壓值計算	16
3.1	聲壓公式推導	16
3.1.1	一維波動方程式的解	16
3.1.2	三維波動方程式	17
3.2	中音谷的形成及討論	20
第四章	有限元素法分析	22
4.1	有限元素法的理論	22
4.2	有限元素法板元素的選擇	23
4.3	有限元素法分析中其他參數的選取	27
4.4	有限元素法分析步驟	29
4.5	聲壓分析 Fortran 程式部分	31
第五章	製作及實驗程序	33
5.1	揚聲器製作	33
5.2	實驗	34
5.2.1	自然頻率量測	34
5.2.2	聲壓量測	36
第六章	理論分析與實驗結果	37
6.1	有限元素法分析與實驗的驗證	37
6.2	圓形激振器有限元素法分析	37

6.3	圓形激振器有限元素法分析結果討論	40
6.4	圓形激振器實際量測與分析的比較及討論	41
6.5	橢圓形激振器分析	43
6.5.1	激振器尺寸為 40*25	43
6.5.2	激振器尺寸為 55*25	44
6.6	橢圓形激振器參數對振動板的聲傳研究	45
6.6.1	激振器質量的影響	45
6.6.2	激振器剛性及質量的影響	46
第七章	激振器尺寸與振動板尺寸間的關係	47
7.1	自由邊界振動板長寬比和自然頻率及節線距離的關係	47
7.2	附加音圈振動板長寬比和自然頻率及節線距離的關係	49
7.3	音圈尺寸、振動板長寬比和中音谷落差值的關係	50
第八章	結論與未來研究方向	53
8.1	結論	53
8.2	未來研究方向	54
	參考文獻	55

表目錄

表 4.1	材料常數.....	57
表 4.2	瑞雷-黎次法與 SHELL99 分析.....	57
表 4.3	瑞雷-黎次法與 SHELL91 分析.....	58
表 6.1	自由邊界板實驗結果和有限元素法模擬分析之比較.....	59
表 6.2	MLSSA 量測激振器的參數整理	59
表 6.3	音圈數據.....	60
表 6.4	自然頻率有限元素法分析結果(25*25 激振器)	61
表 6.5	有限元素法分析和實驗量測的比較.....	62
表 6.6	自然頻率有限元素法分析結果(40*25 激振器)	63
表 6.7	不同尺寸的音圈的位置.....	64
表 6.8	自然頻率有限元素法分析結果(55*25 激振器)	65
表 6.9	第四個模態的自然頻率與中音谷頻率比較.....	66
表 6.10	中音谷最低點的變形程度比較	66
表 7.1.1	三種揚聲器分析整理.....	67
表 7.1.2	三種揚聲器實驗整理.....	67
表 7.2	不同振動板長寬比的整理.....	67

表 7.3	各種尺寸的音圈和揚聲器分析結果·····	68
表 7.4	附加音圈振動板和自然頻率的驗證·····	68
表 7.5	附加音圈振動板和節線距離的驗證·····	69



圖目錄

圖 2.1	多層一階剪變形位移場示意圖(三層).....	70
圖 2.2	座標逆時鐘旋轉 θ 角.....	70
圖 2.3	平板所受外力圖.....	71
圖 2.4	邊界條件.....	71
圖 3.1	振動板之聲場示意圖.....	72
圖 3.2	聲壓圖的平滑處理.....	72
圖 3.3	剛體振動產生的波.....	73
圖 3.4	非剛體振動產生的波.....	73
圖 4.1	SHELL99 和 SHELL91 變形後的不同.....	74
圖 4.2	Rayleigh-Ritz、Shell99、Shell91 前五個模態比較.....	75
圖 4.3	頻率響應圖.....	76
圖 5.1	揚聲器主要結構.....	77
圖 5.1.1	振動板.....	77
圖 5.1.2	懸邊.....	77
圖 5.2.1	音圈的結構.....	78
圖 5.2.2	場磁鐵的結構.....	78
圖 5.3	Pulse 頻譜分析儀-敲擊.....	78

圖 5.4	Pulse 頻譜分析儀-激振	79
圖 5.5	Pulse 頻譜分析儀-雷射量測	79
圖 6.1	實際的振動板尺寸	80
圖 6.2	量測的阻抗值(25*25 激振器)	80
圖 6.3.1	雷射量測的自然頻率 20Hz~200Hz	81
圖 6.3.2	雷射量測的自然頻率 1600Hz~2400Hz	81
圖 6.3.3	雷射量測的自然頻率 9000Hz~14000Hz	82
圖 6.3.4	雷射量測的自然頻率 14000Hz~20000Hz	82
圖 6.4	有限元素網格圖	83
圖 6.5	前 24 個模態分析結果(25*25 激振器)	84
圖 6.6	加邊界條件與未加邊界條件模態比較($r=2.58$)	85
圖 6.7	分析聲壓結果(25*25 激振器)	86
圖 6.8	聲壓分析前 10 個接近自然頻率的變形(25*25 激振器)	87
圖 6.9	頻率 20k Hz 以內的所有對稱模態(25*25 激振器)	88
圖 6.10	中音谷極大值處變形圖(25*25 激振器)	89
圖 6.11	中音谷極小值處變形圖(25*25 激振器)	89
圖 6.12	實驗量測聲壓與分析比較(25*25 激振器)	90
圖 6.13	量測環境的周邊聲壓	90
圖 6.14	頻率 20k Hz 以內的所有對稱模態(40*25 激振器)	91

圖 6.15	實驗量測聲壓與分析比較(40*25 激振器).....	92
圖 6.16	音圈大小與節線位置的關係	92
圖 6.17	頻率 20k Hz 以內的所有對稱模態(55*25 激振器).....	93
圖 6.18	實驗量測聲壓與分析比較(55*25 激振器).....	94
圖 6.19	25*25 激振器加 55*25 肋條圖形.....	94
圖 6.20	25*25 激振器加 55*25 肋條實驗比較(雙面膠).....	95
圖 6.21	25*25 激振器加 55*25 肋條分析結果比較(只有質量).....	95
圖 6.22	25*25 激振器加 55*25 肋條實驗比較(瞬間膠).....	96
圖 6.23	25*25 激振器加 55*25 肋條 ANSYS 比較(beam).....	96
圖 7.1	振動板長寬比和自然頻率.....	97
圖 7.2	振動板長寬比和自然頻率之間的關係.....	97
圖 7.3.1	振動板長寬比和節線之間的關係.....	98
圖 7.3.2	振動板長寬比、節線距離和板長的關係	98
圖 7.4	音圈長軸與自然頻率的關係.....	99
圖 7.5	音圈長軸、自然頻率和板長的關係.....	99
圖 7.6	音圈長軸、節線距離與板長的關係.....	100
圖 7.7	音圈長軸和中音谷落差的關係	100
圖 7.8	音圈長軸、中音谷落差值和節線的關係.....	101

第一章 緒論

1.1 前言

複合材料是兩種或兩種以上的材料，以協同加工法結合在一起，集合各種材料本身的優點來滿足所需，一般複合材料分為纖維強化及微粒強化兩種。纖維強化的複合材料在纖維方向具有高勁度、高強度的特點，所以在應用上更為廣泛。

複合材料三明治板有三層，依面層、心層、面層排列，面層使用高勁度的複合材料材質，心層使用低密度的材料。由面層承受彎曲外力，心層承受橫向剪力，並降低整體的密度。所以複合材料三明治板有極不易彎曲變形能力，同時質量也十分輕，所以振動板常使用複合材料三明治板。

大部分的揚聲器所使用的都是圓形的激振器，圓形的振動板。雖然圓板具有幾何軸對稱的特性，但常因為空間的限制而不得不有所妥協。若在長和寬上各有限制，揚聲器尺寸就必須使用較小的尺寸，若為矩形板，則長寬可任意改變成所需要的比例。所以相對來說，矩形板在使用上更方便。

使用矩形板為振動板，再配合使用圓形激振器，在激振器出力方面會比較弱，同時會產生較大的聲壓中音谷落差值。如果使用橢圓形激振器，一方面激振器磁鐵尺寸增加，產生較大的推力，平均聲壓值增加。另一方面因為橢圓形激振器的施力比圓形激振器還平均，所以聲壓頻譜的中音谷

落差會得到比較平緩的結果，而且激振器本身的剛性附加在振動板上，會使產生中音谷的頻率往高頻移動。

物體在平衡位置附近做往返的週期性運動稱之為振動，對結構體來說，各種結構物都有其自然頻率，而當我們已知物體的自然頻率之後，當外界激振頻率接近物體之自然頻率時，即發生共振(resonance)。共振在揚聲器上所產生的影響是聲音的音量明顯上升，量測的聲壓會變大，同時在共振點附近，會出現和別的自然頻率的模態互相混合，形成反共振的現象，即音量下降的情況，聲壓變小，因此在共振頻率附近，聲音聽起來會忽大忽小，一個好的揚聲器應儘量避免在人耳所能聽到的頻率範圍內，出現反共振的現象。



振動板振動時，不同的外力會造成不同的變形，這些不同的變形對聲傳方面是有影響的，振動板模態的節線是一條沒有位移的線，一旦有力量施在這條節線上，就必須要有大小相等方向相反的外力來抵消，如果沒有，這條節線就會有動，也就是這個模態會從振動板的變形中消失。

本文使用驗證正確的模型，分析在振動板厚度、材料常數固定不變的情形下，藉由改變振動板長寬比、音圈尺寸，找出自由邊界條件的第一個彎曲模態圖中節線到振動板中心距離、中音谷出現頻率、激振器尺寸大小、振動板長寬比、中音谷聲壓落差值之間的關係，提供以後有需要選擇激振器的一些參考，節省分析的時間。

1.2 文獻回顧

複合材料平板的理論方面，是由古典板理論[1]改進而成的古典積層板理論[2]，對於複合材料薄板的力學分析已經可以得到很不錯的結果，但由於此理論忽略了側向剪應力的影響，而複合材料沿纖維方向的楊氏係數(Young's modulus)比側向的剪力模數(Shear modulus)高很多，側向因受剪力而變形就要考慮，所以古典板理論並不適合分析厚板。因此，Mindlin 提出了一階剪變形理論[3]，首先將側向剪力的影響加以考慮，但是因為假設側向剪力分布為常數，並不符合實際的情況；於是 Whitney 提出了剪力修正係數來校正。之後，學者又提出了各種高階剪變形的理論，以改進古典板理論的缺點並提高理論與實際的精確值，不過由於其計算上比較複雜又常適用於寬厚比小於 15 的平板上，所以暫時不考慮。

對複合材料三明治板，一階剪變形理論已經不足以模擬，Reissner[4]推導統御方程式應用在小變形、等向性的三明治板，文獻假設面層像薄膜，而且忽略了中心層平行面層的應力。Liaw and Little 根據 Reissner 理論解出多層三明治結構彎曲的問題。Azar 使用 Liaw and Little 的結果來討論非等向性面層。Kanematsu[5]用黎次法來分析矩型板的彎曲和振動。本文使用 Kanematsu 的理論，將每一層用一階剪變形理論模擬，並考慮每一層與層之間位移的連續性，使用瑞雷-黎次法進行振動及力學的分析。

計算聲壓方面，Morse[6]中推導出了聲壓方程式，Tan[7]中討論了藉由驅動器(actuator)的主動控制對平板的聲場所產生的影響，彭國晉[8]對加強複合材料結構板的聲傳做過討論，本文討論以不同的施力方式為主。

1.3 研究方法

本文主要是探討複合材料三明治板受橢圓激振器激振的振動研究，討論各種不同尺寸的激振器下平板的自然頻率分布狀況及聲壓中音谷，並嘗試尋找受到長短軸不同的橢圓激振器及不同長寬比的振動板，其對聲傳方面的影響。實驗部分，使用振動板作自然頻率測試實驗，量測出振動板及激振器的各種參數，並觀察聲壓的分佈狀態，作為與理論分析對照。

在理論部份，在本文中使用多層一階剪變形理論及實驗室購買的有限元素分析軟體 ANSYS 建構與實體幾何外型相同之模型，經網目分割後由 ANSYS 進行後處理分析，取得各種分析上的數據，再使用聲壓理論計算聲壓，以圖表形式輸出，並與實驗作比較，並討論其中的差異。

模型正確性得到驗證後，使用這個模型，在振動板厚度、材料常數固定不變下，改變振動板長寬比、音圈尺寸，找出自由邊界條件的第一個彎曲變形圖中節線到振動板中心距離、中音谷出現頻率、激振器尺寸大小、振動板長寬比、中音谷聲壓落差值之間的關係。

第二章 複合材料三明治積層板的基本原理

由於複合材料三明治板的面層是由不同纖維方向的複合材料層板所組成，而且面層間的勁度會有很大的差異，所以複合材料板沿整個厚度方向的位移並不如一階剪變形位移場平板理論所假設的整個板厚度為一斜率相同的直線，故我們將整個複合材料三明治板的每一層當作一個一階剪變形的位移場，並考慮每一層與層之間位移的連續性(如圖 2.1)。之後將以此位移場為基礎，分析複合材料平板的自然頻率與模態。

2.1 複合材料三明治積層板位移場與應變

多層一階剪變形平板理論是將複合材料板的每一層當作一個一階剪變形的平板來分析。基本假設如下：

1. 板的厚度遠小於板的長、寬。(1/15 以下)。
2. 板的截面變形後仍保持平面。
3. 厚度仍保持不變，即 $\varepsilon_z = 0$ 。
4. 板的變形量 u, v, w 很小。

本文中將層數設為三層，如圖 2-1 所示，考量每一層於交界面上的位移必須連續，可得每一層的位移場為

$$u^{(1)} = u_0^{(1)}(x, y) + z^{(1)}\Psi_x^{(1)}(x, y)$$

$$v^{(1)} = v_0^{(1)}(x, y) + z^{(1)}\Psi_y^{(1)}(x, y) \quad (2.1a)$$

$$w^{(1)} = w^{(1)}(x, y) = w(x, y)$$

$$u^{(2)} = u_0^{(2)} + z^{(2)}\Psi_x^{(2)} = u_0^{(1)} + \frac{1}{2}t^{(1)}\Psi_x^{(1)} + \frac{1}{2}t^{(2)}\Psi_x^{(2)} + z^{(2)}\Psi_x^{(2)}$$

$$v^{(2)} = v_0^{(2)} + z^{(2)}\Psi_y^{(2)} = v_0^{(1)} + \frac{1}{2}t^{(1)}\Psi_y^{(1)} + \frac{1}{2}t^{(2)}\Psi_y^{(2)} + z^{(2)}\Psi_y^{(2)} \quad (2.1b)$$

$$w^{(2)} = w(x, y)$$

$$u^{(3)} = u_0^{(3)} + z^{(3)}\Psi_x^{(3)} = u_0^{(1)} - \frac{1}{2}t^{(1)}\Psi_x^{(1)} - \frac{1}{2}t^{(3)}\Psi_x^{(3)} + z^{(3)}\Psi_x^{(3)}$$

$$v^{(3)} = v_0^{(3)} + z^{(3)}\Psi_y^{(3)} = v_0^{(1)} - \frac{1}{2}t^{(1)}\Psi_y^{(1)} - \frac{1}{2}t^{(3)}\Psi_y^{(3)} + z^{(3)}\Psi_y^{(3)} \quad (2.1c)$$

$$w^{(3)} = w(x, y)$$

其中 $t^{(i)}$ 為第 i 層厚度。



中心層層板的位移場為

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\psi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\psi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) = w(x, y)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M)$$

(2.1a)

其中， u 、 v 、 w 分別為在平板參考座標中 x 、 y 、 z 上之位移分量，而 u_0 、 v_0 、

w_0 分別代表層板中間面(meddle surface)在方向 x 、 y 、 z 上之位移量， ψ_x 、 ψ_y

則分別代表為任一層垂直於 x 、 y 軸之截面的旋轉量，因為板的變形量很小，

所以旋轉量、為下：

$$\psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\psi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

(2.2)

所以位移場可以寫為：

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w(x, y) \\
 (i &= 1, 2, \dots, M)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

因厚度方向應變保持不變 $\varepsilon_z = 0$ ，應變可表示為：

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) = \varepsilon_{xx}^0 + z \kappa_x \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = \varepsilon_{yy}^0 + z \kappa_y \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) = \gamma_{xy}^0 + z \kappa_{xy}
 \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ $\varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}$ $\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$ (2.4)

為中間面的應變，

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \tag{2.5}$$

為中間面的曲率，即 κ_x 為中間面在 xz 平面的彎曲率(bending curvature)， κ_y 為中間面在 yz 平面的彎曲率， κ_{xy} 為中間面在 xy 平面的非平面扭轉率(out-of-plane twisting)。

寫成矩陣形式為：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

2.2 應力與應變關係

就一層平面的應力與應變關係可以表示如下：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\text{簡寫成} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

在軸對稱(orthotropic)的平板及平面應力的例子而言，

$$Q_{16} = Q_{26} = Q_{61} = Q_{62} = 0$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$



因為 γ_{12} 不是張量，全部改寫成張量形式為：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

若座標逆時鐘旋轉 θ 角，如圖 2.2，應力為：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

此時

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

其中 $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$

另外應變張量可寫成：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

將(2.8)和(2.9)代入(2.7)式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

其中

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$$

2.3 外力與變形的剛性矩陣

由(2.10)式及圖 2.1 知，第 k 層的應力與應變關係為：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_k] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

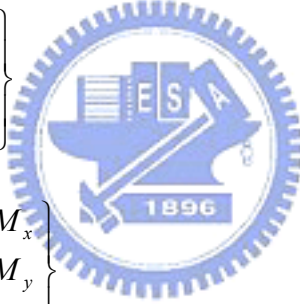
再將(2.6)式代入可得：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_k] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (2.11)$$

平板所受外力圖如圖 2.3，以矩陣表示如下：

單位長度所受外力為 $\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$

單位長度所受外力矩為 $\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$



外力與應力關係如下：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} dz \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} \cdot z dz \quad (2.13)$$

將已知的應力(2.11)式代入(2.12)和(2.13)式：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz = \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \cdot z dz \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_k] dz = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot (z_k - z_{k-1}) = [A]_{3 \times 3} \quad (2.14)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \cdot z dz = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) = [B]_{3 \times 3} \quad (2.15)$$

$$\text{所以 } \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \cdot z dz = \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \cdot z dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \cdot z^2 dz \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \cdot z dz = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) = [B]_{3 \times 3} \text{ 即為(2.15)式}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] \cdot z^2 dz = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_k] \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) = [D]_{3 \times 3} \quad (2.17)$$

$$\text{所以 } \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

將力與力矩的矩陣形式寫在一起，即為：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

或簡寫為：

$$\left\{ \frac{N}{M} \right\} = \left[\frac{A}{B} \middle| \frac{B}{D} \right] \left\{ \frac{\varepsilon}{\kappa} \right\}$$

2.4 複合材料板的邊界條件

對於在平板邊界上有彈性支承的情況，可模擬成如圖(2.4)所示，邊界之彈性支承以橫向(Translation)及旋轉(Rotation)彈簧加以表示，而其所引起的應變能為：

$$U_T = \frac{1}{2} \int_S V_n w dS \quad (2.20)$$

$$U_R = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \int_S M_n \phi^{(i)} dS \quad (2.21)$$

其中， U_T 為橫向彈簧所引起的應變能， U_R 為旋轉彈簧所引起的應變能， S 為彈性支承的邊界， V_n 為橫向力， M_n 為彎矩。

橫向力 V_n 及彎矩 M_n 可分別表示為：

$$V_n = K_{Ln} w \quad (2.22)$$

$$M_n = \sum_{i=1}^3 K_{Rn} \phi^{(i)} \quad (2.23)$$

將式(2.22)和(2.23)代入式(2.20)及(2.21)可將應變能表示為：

$$U_T = \frac{K_{L1}}{2} \int_0^b w^2 \Big|_{x=0} dy + \frac{K_{L2}}{2} \int_0^b w^2 \Big|_{x=a} dy + \frac{K_{L3}}{2} \int_0^a w^2 \Big|_{y=0} dx + \frac{K_{L4}}{2} \int_0^a w^2 \Big|_{y=b} dx \quad (2.24)$$

$$U_R = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{K_{R1}}{2} \int_0^b (\phi_x^{(i)})^2 \Big|_{x=0} dy + \frac{K_{R2}}{2} \int_0^b (\phi_x^{(i)})^2 \Big|_{x=a} dy + \frac{K_{R3}}{2} \int_0^a (\phi_y^{(i)})^2 \Big|_{y=0} dx + \frac{K_{R4}}{2} \int_0^a (\phi_y^{(i)})^2 \Big|_{y=b} dx \right] \quad (2.25)$$

其中， K_{Ln} 為平板四邊的橫向剛性(Translational stiffness)， K_{Rn} 為平板四邊的旋轉剛性(Rotational stiffness)。

2.5 複合材料板的應變能與動能

考慮任一個單層複合材料層板，應變能可表示為：

$$U_p^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V [\sigma^{(i)}]^T [\varepsilon^{(i)}] dV \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.26)$$

應用上式與(2.1)、(2.7)式，可求得 $U_p^{(1)}$ 、 $U_p^{(2)}$ 及 $U_p^{(3)}$ ，複合材料層板彎曲的應變能為：

$$U_p = \sum_{k=1}^3 U_p^{(k)} \quad (2.27)$$

總應變能 U 為複合材料層板彎曲的應變能(U_p)與彈性支承引起的應變能(U_T 、 U_R)之總和。

$$U = U_p + U_T + U_R \quad (2.28)$$

每一單層板的動能 $T^{(i)}$ 為：

$$T^{(i)} = \frac{\rho^{(i)}}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0^{(i)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy + \frac{\rho^{(i)}}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \phi_x^{(i)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y^{(i)}}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (2.29)$$

應用上式與(2.3)式，可求得 $T^{(1)}$ 、 $T^{(2)}$ 及 $T^{(3)}$ ，複合材料層板的最大動能為：

$$T = \sum_{i=1}^3 T^{(i)} \quad (2.30)$$

複合材料層板的總能量泛函 Π 可表示為：

$$\Pi = U - T \quad (2.31)$$

2.6 瑞雷-黎次法(Rayleigh-Rize method)

在本文中，利用Rayleigh-Ritz method，假設位移函數(deflection function)及橫切面轉角函數(cross-sectional rotation function)共有七個分別是 w 、 $\phi_x^{(1)}$ 、 $\phi_y^{(1)}$ 、 $\phi_x^{(2)}$ 、 $\phi_y^{(2)}$ 、 $\phi_x^{(3)}$ 及 $\phi_y^{(3)}$ ，每一個函數以無因次化可表示為：

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{j_1=1}^{J_1} C_{i_1 j_1}^{(1)} \Phi_{x i_1}(\xi) \Psi_{y j_1}(\eta) \quad (2.24a)$$

$$\phi_x^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{j_2=1}^{J_2} C_{i_2 j_2}^{(2)} \Phi_{x i_2}(\xi) \Psi_{y j_2}(\eta) \quad (2.24b)$$

$$\phi_y^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{i_3=1}^{I_3} \sum_{j_3=1}^{J_3} C_{i_3 j_3}^{(3)} \Phi_{x i_3}(\xi) \Psi_{y j_3}(\eta) \quad (2.24c)$$

$$\phi_x^{(2)}(\xi, \eta) = \sum_{i_4=1}^{I_4} \sum_{j_4=1}^{J_4} C_{i_4 j_4}^{(4)} \Phi_{x i_4}(\xi) \Psi_{y j_4}(\eta) \quad (2.24d)$$

$$\phi_y^{(2)}(\xi, \eta) = \sum_{i_5=1}^{I_5} \sum_{j_5=1}^{J_5} C_{i_5 j_5}^{(5)} \Phi_{x i_5}(\xi) \Psi_{y j_5}(\eta) \quad (2.24e)$$

$$\phi_x^{(3)}(\xi, \eta) = \sum_{i_6=1}^{I_6} \sum_{j_6=1}^{J_6} C_{i_6 j_6}^{(6)} \Phi_{x i_6}(\xi) \Psi_{y j_6}(\eta) \quad (2.24f)$$

$$\phi_y^{(3)}(\xi, \eta) = \sum_{i_7=1}^{I_7} \sum_{j_7=1}^{J_7} C_{i_7 j_7}^{(7)} \Phi_{x i_7}(\xi) \Psi_{y j_7}(\eta) \quad (2.24g)$$

其中 $C_{i_1 j_1}^{(1)}$ 、 $C_{i_2 j_2}^{(2)}$ 、 $C_{i_3 j_3}^{(3)}$ 、 $C_{i_4 j_4}^{(4)}$ 、 $C_{i_5 j_5}^{(5)}$ 、 $C_{i_6 j_6}^{(6)}$ 、 $C_{i_7 j_7}^{(7)}$ 為未定係數， ξ 、 η 為無因次參數，且 $x = a\xi$ ， $y = b\eta$ ， Φ_x 、 Ψ_y 係由Gram-Schmidt正交化法所產生的多項式函數(polynomial functions)，亦是所謂之形狀函數(shape function)。

以 Φ_x 為例：

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= (\xi - B_1) \Phi_0 \\ \Phi_k(\xi) &= (\xi - B_k) \Phi_{k-1} - C_k \Phi_{k-2}(\xi) \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中

$$B_k = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \xi \Phi_{xk-1}^2(\xi) d\xi}{\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_{xk-1}^2(\xi) d\xi} \quad C_n = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \xi \Phi_{xk-1}(\xi) \Phi_{xk-2}(\xi) d\xi}{\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_{xk-2}^2(\xi) d\xi} \quad (2.26)$$

此多項式函數必符合：

$$\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_{xi}(\xi) \Phi_{xj}(\xi) d\xi = \delta_{ij} \quad (2.27)$$

其中 δ_{ij} 是Kronecker，

令 $\Phi_{x1}(\xi) = 1$ 及 $\Psi_{y1}(\eta) = 1$

為求未定係數，令

$$\begin{aligned} \partial \Pi / \partial C_{i_1 j_1}^{(1)} &= 0, \quad \partial \Pi / \partial C_{i_2 j_2}^{(2)} = 0, \quad \partial \Pi / \partial C_{i_3 j_3}^{(3)} = 0, \quad \partial \Pi / \partial C_{i_4 j_4}^{(4)} = 0, \\ \partial \Pi / \partial C_{i_5 j_5}^{(5)} &= 0, \quad \partial \Pi / \partial C_{i_6 j_6}^{(6)} = 0, \quad \partial \Pi / \partial C_{i_7 j_7}^{(7)} = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

將(2.24)代入上式可得一典型的特徵值方程：

$$(K - \omega^2 M)\{C\} = \{0\} \quad (2.29)$$

求解上式即可得到複合材料層板振動的自然頻率 ω 。



第三章 聲壓值計算

3.1 聲壓公式推導

3.1.1 一維波動方程式的解

對平面波而言，一維波動方程式為：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

其中， c 為聲音之速度，在室溫 24°C 時， $c=343 \text{ m/s}$ 。

利用一維波動問題 D'Alembert 解，可求得：

$$p(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

f_1, f_2 為任意函數，其中 f_1 的方向和 f_2 的方向相反，對於諧波聲場，可直接求解：

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{p} = 0 \quad (3.2)$$

令 $k = \omega/c$ ，為波數(wave number)，可求得：

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}e^{-jkx} + \tilde{B}e^{jkx} \quad (3.3)$$

還原成時間域的表示法：

$$p(x, t) = \tilde{A}e^{-j(\omega t - kx)} + \tilde{B}e^{j(\omega t - kx)} \quad (3.4)$$

其中 $\tilde{A}, \tilde{B}$ 為未定複數。

3.1.2 三維波動方程式

對於點聲源而言，三維波動方程式在球面座標(Spherical coordinate)為：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

因為點聲源是一個完全對稱的聲源，所以我們可以預期它所產生的聲場應該不會有方向性，所以可忽略角度相關的項，式(3.5)可簡化成：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

r 為點聲源距量測的距離

上式可改寫成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) = \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rp) \quad (3.7)$$

故

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

觀察(3.8)的型式和前面的一維波動方程式一樣的，所以其解為：

$$rp = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)$$

所以

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct) + \frac{1}{r} f_2(r+ct) \quad (3.9)$$

由於一個點聲源只會發出外傳波(Outgoing wave)，所以

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct) \quad (3.10)$$

對於簡諧球面波(Harmonic spherical wave)而言

$$p(r,t) = \frac{\tilde{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3.11)$$

對微小的振動板 δS 而言，距離振動板 r 的聲壓 $p(r,t)$ 可由 Rayleigh's first integral 計算出來，積分型式如下：

$$p(r,t) = \left(\frac{j\omega\rho_{\text{air}} u_d \delta S}{2\pi r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \quad (3.12)$$

其中 u_d 為振動板元素表面之速度， r 為量測點至振動板元素之距離， $\rho_{\text{air}} = 1.1614 \text{ kg/m}^3$ 為空氣密度， $j = \sqrt{-1}$ ，因此對一塊振動板而言，聲壓可寫為：

$$p(r,t) = \frac{j\omega\rho_{\text{air}}}{2\pi r} e^{j\omega t} \int_S \frac{u_d(x,y) e^{-jkr}}{r} ds \quad (3.13)$$

設振動板表面元素之振幅大小 $w(r,t) = A e^{j(\omega t - kr)}$ ，則

$$u_d(x,y) = j\omega A e^{j(\omega t - kr)} = j\omega w(r,t)$$

所以

$$p(r,t) = -\frac{\omega^2 \rho_{\text{air}}}{2\pi r} e^{j\omega t} \int_S \frac{w(r,t) e^{-jkr}}{r} ds \quad (3.14)$$

因以振動板之聲壓可改寫為

$$P = \left(\frac{-\rho_{\text{air}} \omega^2}{2\pi} \right) \sum_i \|w(r,t)\| e^{j(\theta_i - kr_i)} \frac{\Delta S}{r_i} \quad (3.15)$$

其中 θ_i 為相角(Phase angle)

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c_i \omega}{k_i - m_i \omega^2}$$

如果把振動板分成許多微小的元素(elements)，則整個振動板之聲場可改寫成：

$$p(r, t) = -\frac{\omega^2 \rho_{\text{air}}}{2\pi} \sum_i A(r_i) e^{j(\omega t + \theta_i - kr)} \frac{\delta s_i}{r_i} \quad (3.16)$$

其中 $A(r_i)$ 為振動板上各點之振幅， θ_i 為振動板上各點之相位， r_i 為振動板上之元素與量測點之距離， δs_i 為振動板元素之面積，如圖 3.1。

在實務上，通常量測聲音使用的尺度主要原因是聲音的動態範圍非常大，同時人耳對音量的感覺也是比較接近對數尺度。所以定義聲壓位準 (Sound Pressure Level)

$$\text{SPL} = 20 \log \left(\frac{P_{\text{rms}}}{P_{\text{ref}}} \right) \quad (3.17)$$

其中 P_{rms} 為量測點聲壓之均方根值為：

$$P_{\text{rms}} = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |p(r, t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.18)$$

聲壓參考值 $P_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$

一般在量測聲壓的儀器看到的聲壓曲線即為頻率響應曲線，縱軸為 SPL(dB) 聲壓位準，橫軸為激振頻率。

因為人耳無法很精準的聽到某個頻率下的聲壓，在某頻率下聽到的聲壓會和附近的聲壓混合，所以聲壓研究上對聲壓曲線都會作平滑處理，研

究它的趨勢，圖 3.2 是一個實驗聲壓值在平滑處理前和平滑處理後的差別。

3.2 中音谷的形成及討論

一個振動板的振動可以使空氣產生縱波(疏密波)，如果這個振動板是一個剛體，如圖 3.3，產生的波動也是很整齊的縱波，振動板在平衡位置之間往復振動，由空氣密度的不同，傳遞到接收器如人耳或麥克風，即可聽到聲音。如果產生的縱波強度很強，也就是說空氣的疏密程度相差的愈大，聲音就會愈大聲，即聲壓值比較大，反之，如果空氣的疏密程度相差很小，聲壓值就愈小，如果空氣密度沒有任何變化，麥克風就接收不到沒有任何訊號。



無論是什麼振動板，皆不是真實的剛體，所以振動板一定會變形，如圖 3.4，振動板仍在平衡位置附近作往復振動，但對聲壓量測點而言，中心產生的空氣疏密程度剛好和兩邊產生的疏密程度相反，使量測點的疏密程度變小了，聲壓值就會降低，這種聲壓值特別低的情況通常在中音的位置，所以就稱為中音谷。

如果因中心產生的聲壓(p)定義為正的話，也兩邊產生的聲壓即為負，累加後正負相消，再代入 3.17 式計算聲壓位準。所以我們可以從振動板變形圖上即可粗略判斷聲壓的高低，即是變形圖以平衡位置，定義一方為正，正方的所有體積累加，負方的所有體積累加，比較正負方的體積，如果相差太小，這個頻率的聲壓值也會比較低。

避免中音谷產生，大部分的方法都是加強振動板的剛度，使振動板儘量成為理想的剛體，本文提供另一個想法，即施力於其節線上。



第四章 有限元素法分析

4.1 有限元素法的理論

有限單元法是以變分原理為基礎發展出來的理論，將模型分成有限數目的元素，跟據個別元素所受的外力等影響，配合形狀函數，列出其位移及變形的方程式，再組合聯立計算原本整體的位移及變形。

以下是使用虛功法在有限元素模型的應用：

對每個節點有五個自由度利用等參單元的形狀函數來表示位移場

$$\begin{aligned} u_0 &= N_i u_i \\ v_0 &= N_i v_i \\ w &= N_i w_i \\ \theta_x &= N_i \theta_{xi} \\ \theta_y &= N_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (4.1)$$

對各元素而言，位移場可表示如下：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & zN_i & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & zN_i \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

或寫成：

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m N_i \underline{I} \nabla_i \quad (4.3)$$

將對(4.1)式的導數 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ ，再代入應變-位移關係如下：

$$[\varepsilon] = [B][\underline{v}_i]$$

由有限元素法得知元素勁度矩陣為：

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.4)$$

再將平板的虛功方程式以 n 個元素的組合表示：

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \frac{1}{2} \delta \int_{V_e} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_{V_e} \delta u_i F_i dA \right\} = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{M}^e \underline{\ddot{\nabla}}^e$$

$$\frac{1}{2} \delta \int_{V_e} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{K}_L^e \underline{\ddot{\nabla}}^e$$

$$\int_{V_e} \delta u_i F_i dA = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{F}^e$$

可得：

$$\underline{M} \underline{\ddot{\nabla}} + \underline{K}_L \underline{\nabla} = \underline{F}$$

其中 $\underline{M}$ ， $\underline{K}_L$ ， $\underline{F}$ ， $\underline{\nabla}$ 分別代表廣義的質量矩陣、勁度矩陣、載荷矩陣和位移向量。



對有限元素法分析，除了可以跟據上面的方法自己寫程式計算外，市面上也有許多有限元素法的套裝軟體，本文使用實驗室購買的有限元素軟體 ANSYS，計算分析本文所需要的振動變形，再使用 Fortran 程式語言寫的程式讀取結果，計算最後的聲壓解等。

4.2 有限單元法板元素的選擇

利用 ANSYS 來建立平板有限單元模型並分析，ANSYS 分析複合材料

可以用 2 種元素(element)，一種是 SHELL99，另一種是 SHELL91，兩種元素不同點如下所示。

由 ANSYS Help 檔案中可找到 SHELL99 板及 SHELL91 板相關的資料，SHELL99 板為線性的疊層板結構，通常用在薄板上，其主要假設為：

1. 變形後截面仍然維持平面，但不一定要再和中間面(centerplane)垂直。
2. 每對積分點上假設有相同的材料傾向性(material orientation)。

每個單位元素的外力和外力矩表示如下：

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [E_0] & [E_1] \\ [E_1] & [E_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}$$

其中：

$$[E_0] = \sum_{j=1}^{N_l} \int_{r_j^{bt}}^{r_j^{tp}} [T_m]_j^T [D]_j [T_m]_j dr$$

$$[E_1] = \sum_{j=1}^{N_l} \int_{r_j^{bt}}^{r_j^{tp}} r [T_m]_j^T [D]_j [T_m]_j dr$$

$$[E_2] = \sum_{j=1}^{N_l} \int_{r_j^{bt}}^{r_j^{tp}} r^2 [T_m]_j^T [D]_j [T_m]_j dr$$

N_l = 疊層數

$[D]_j$ = 第 j 層的應力應變關係式

$[T_m]$ = 元素轉疊層的旋轉矩陣

$\{N\}$ = 單位長度的外力

$\{M\}$ = 單位長度的外力矩



$\{\varepsilon\}$ =應變

$\{\kappa\}$ =曲率

ANSYS 中的 SHELL91 板為非線性的疊層板結構，通常用在厚板上，第 j

層的材料性質矩陣 $[D]_j$ 為：

$$[D] = \begin{bmatrix} BE_x & B\nu_{xy}E_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B\nu_{xy}E_x & BE_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_{yz}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_{xz}}{f} \end{bmatrix}$$

其中

$$B = \frac{E_{y,j}}{E_{y,j} - (\nu_{xy,j})^2 E_{x,j}}$$

$E_{x,j}$ =第 j 層 x 方向的楊氏係數

$\nu_{xy,j}$ =第 j 層 x-y 平面的波松比

$G_{xy,j}$ =第 j 層 x-y 平面的剪力係數

$$f = \left\{ \begin{matrix} 1.2 \\ 1.0 + 2 \frac{A}{25t^2} \end{matrix} \right\} \text{取較大的值}$$

A = 元素面積

t = 總厚度

如果使用三明治的選項分析，則：



1. 中間的心層(core)的 f 設為 1.0
2. 在上下兩層面層(faceplates)的剪力係數 G_{yz} 和 G_{xz} 設為 0
3. 在不是心層的橫向剪應變和剪應力設為 0

即假設中心層承受所有的橫向剪力(transverse shear)，面層不承受任何的橫向剪力，同時面層承受所有的彎曲負載(bending load)。如圖 4.1，一端固定之板受外力的橫截面，變形後 SHELL99 和使用三明治選項的 SHELL91 是有差異性的。本文中提到的 SHELL91 皆為 SHELL91 三明治板。

因為 SHELL91 三明治分析使用上面幾個設定，所以須加上一些特殊條件

1. 在中心層厚度方面建議最好佔三明治板厚度的 $5/6$ 以上(一定要大於 $5/7$)。
2. 在楊氏係數方面，面層的楊氏係數最好比中心層的楊氏係數大於 100 倍(一定要大於 4 倍)；面層的楊氏係數最好比中心層的楊氏係數不能大於 10000 倍(一定不能大於 1000000 倍)，
3. 在板彎曲時，其曲率半徑要是總厚度的 10 倍以上(一定要大於 8 倍以上)。

由以上可知，SHELL99 使用的是一階剪變形理論為主，SHELL91 使用多層一階剪變形理論。再以瑞雷-黎次法做為基準，討論 ANSYS 中的 SHELL99 和 SHELL91 所分析出來的自然頻率的不同。

驗證：

矩形板 100.5 mm × 36 mm

疊層：[0° 碳纖/ 0° 巴沙木/ 0° 碳纖]

材料常數：如表 4.1

邊界條件：自由邊界條件(Free)

自然頻率：SHELL99 分析的自然頻率及與瑞雷-黎次法的誤差在表 4.2

SHELL91 分析的自然頻率及與瑞雷-黎次法的誤差在表 4.3

模態：列出前五個模態於圖 4.2

由上面分析可知，表 4.1 是本論文所有材料的常數，比較其與 ANSYS SHELL91 的限制如下：

- 1.中心層厚 2.01 mm，占全部厚度的 0.885 倍，比其建議的 0.83 還好。
- 2.中心層和面層的楊氏係數相比為 40 倍，雖然沒有符合它建議的 100 倍，但符合最低需求 4 倍。
- 3.在振動分析上，板變形的曲率半徑並不會小於厚度的 10 倍。

所以 SHELL 91 來模擬會比較好的結果，本文皆以 SHELL91 元素來分析振動板。

4.3 有限元素法分析中其他參數的選取

量測三明治板的重量與音圈與彈波之重量，三明治板、音圈及彈波三者的重量總和即為振動系統之運動質量，再以 MLSSA 聲壓頻譜儀量測激振

器參數，經由比較 MLSSA 量測的振動系統之運動質量 M_{ms} 和秤重所得的運動質量，所得的結果應該要一致。將 MLSSA 量測的系統柔度 C_{ms} 取其倒數，即為系統剛度 k 。再分析激振器性質，彈波的剛度 k_b 約為 395.35N/m，本文的懸邊剛度($k-k_b$)平均分布在振動板的四周，即橫向剛度 K_L ，而旋轉剛度 K_R 經量測後因數值太小忽略。由振動時電阻值 R_e ，反求功率在 1 瓦時，流經音圈的電流值，電流和 BL 值之乘積即為量測聲壓時音圈之推力 F 。

阻尼值是使用雷射測速儀進行振動板之頻率-響應量測，並藉由 Bandwidth Method 來計算各激振頻率之系統阻尼比。如圖 4.3 所示為一振動板中心之頻率-響應圖，其中 Peak response 為某一共振頻率相對應之振幅，

f_1 及 f_2 為曲線和 $\frac{peak}{\sqrt{2}}$ 之交點。利用下式求得共振頻率之阻尼比：

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

再利用 Rayleigh Damping 將頻率響應得到系統阻尼比利用下式可以求得系統 α -damping 和 β -damping：

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta\omega}{2}$$

從上式可知阻尼比會隨著頻率的不同而改變，由 α 影響所造成之阻尼效應在愈低頻時效應愈大，但 β 影響所造成之阻尼效應則相反，在愈高頻時阻尼效應才愈顯著，而在低頻時阻尼效應卻逐漸趨於無。

ANSYS 所需的常數即為材料常數，幾何的尺寸大小，系統剛度 k ，音

圈所施的外力 F ，及系統的阻尼值 α 、 β 。

4.4 有限元素法分析步驟

前處理部分：

1. Preprocessor → Element type：選擇振動板 shell91，彈簧元素 spring-damper 14，音圈強度 beam188
2. Preprocessor → Real constant：設定元素之參數，如彈簧常數等。
3. Preprocessor → Material Props → Material Models：設定振動板元素之各材料性質。
4. Preprocessor → Modeling：由點、線、面建立振動板的模型外觀。
5. Preprocessor → MeshTool：選擇元素參數、材料性質、各元素之尺寸大小，並分割元素。
6. Preprocessor → Modeling → Copy → Nodes：將必須建立懸邊(彈簧)的地方偏移複製，偏移之距離即為彈簧之長度。
7. Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes：逐一點選以兩個節點為一組之節點來建立彈簧元素，亦可由迴圈程式輔助完成此重複性動作。
8. Preprocessor → Modeling → Copy → Lines：將音圈部分所需的線再複製出來。
9. Preprocessor → MeshTool：選擇音圈的元素參數、材料性質等，再切

割元素。

10. Preprocessor → Coupling/Ceqn → Coincident Nodes：將音圈元素與振動板模型上相同位置之節點設定成具有相同的自由度，來模擬振動板上附加音圈的真實狀況。

到此前處理即算完成，接下來可以做模態分析或是聲聲分析部分。

首先說明模態分析部分：

11. Solution → Analysis Type → New Analysis：選擇分析型態，自然頻率模態分析點選“Modal”。

12. Solution → Analysis Type → Analysis Options：No. of modes to extract 為要分析的模態個數，暫定前 100 個模態，即數字為 100。No. of modes to expand 也為 100。頻率範圍設 1~20000 Hz。

13. Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes：限制彈簧元素另一端節點的全部自由度。

14. Solution → Solve → Current Ls：求解。

15. General Postproc → Results Summary：列出所有的自然頻率。

16. General Postproc → Read Results → By Pick：選出想看 Mode Shapes 的自然頻率。

17. General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu：再選 Nodal Solution → Z-Component of displacement，列出 Z 方向的位移。

即可得到自然頻率及模態。

如果要分析聲壓，在 ANSYS 部分如下：

11. Solution → Analysis Type → New Analysis：選擇分析型態，簡諧頻率響應分析點選“Harmonic”。

12. Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes：限制彈簧元素另一端節點的全部自由度。

13. Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes：在位於音圈位置上的節點施予 Z 方向且相角為零之推力。

14. Solution → Load Step Opts → Time/Frequenc → Damping：輸入系統阻尼 α 、 β 的值。

15. Solution → Load Step Opts → Time/Frequenc → Freq and Substps：輸入欲分析頻率響應之頻寬。

16. Solution → Solve → Current Ls：求解。

17. TimeHist Postpro → List Variables：輸出振動板模型全部節點的振幅及相角。

由上面聲壓分析可得到以下資料：

1. 節點編號 NodeNo(i) 及位置 $x(i), y(i), z(i)$

2. 第 i 節點在第 j 頻率的振幅 Amplitude(i,j) 及相角 phase(i,j)

4.5 聲壓分析 Fortran 程式部分

由 ANSYS Harmonic 分析所得到的

1.節點編號 NodeNo(i)及位置 x(i),y(i),z(i)

2.第 i 節點在第 j 頻率的振幅 Amplitude(i,j)及相角 phase(i,j)

以 Fortran 程式語言寫的程式讀入 ANSYS 分析的資料後，按照第三章聲壓分析的結果，計算聲壓。

計算聲壓副程式部分為：

P=dcmplx(0.d0,0.d0) ! P=0

w=Hz*2.d0*pi ! $\omega = 2\pi f$

k=w/c ! $k = \omega/c$

第三章的(3.16)式中的 $j(\omega t + \theta - kr)$ 中，因為 t 在此為 0，所以改成下式：

jw=dcmplx(0.d0,(phase(i,j)/180.D0*pi)-k*Ri) ! $j\omega t = \sqrt{-1}$ (相角 $-kr_i$)

p=dcmplx(Amplitude(i,j),0.d0)*cdexp(jw)*dcmplx(Area,0.d0)/dcmplx(Ri,0.d0)

! $p = A \times e^{j\omega t} \times \frac{\Delta s}{r_i}$

將 p 累加，即 $\text{SumP} = -\frac{\omega^2 \rho_{\text{air}}}{2\pi} \sum p$ ，並取其均方根，即

SumP=dcmplx(-(w**2.d0)*density/2.d0/pi/dsqrt(2.D0),0.d0)*P

再將 SumP 代進

$$\text{SPL} = 20 \log \left(\frac{P_{\text{rms}}}{P_{\text{ref}}} \right)$$

即

$$\text{SPL}(i) = 20.d0 * (\text{dlog10}(\text{cdabs}(\text{sumP})/2.d-5))$$

第五章 製作及實驗程序

5.1 揚聲器製作

揚聲器主要結構分為振動板、懸邊、音圈、彈波、場磁鐵、及外面的外殼，示意圖如圖 5.1。

振動板為碳纖三明治複材板，中心層為巴沙木，面層為碳纖，皆為 0° 方向，製作方法為先熱壓面層的碳纖，再和心層以 AB 膠黏合，如圖 5.1.1。振動板的主要功能是推動空氣，形成疏密波，即聲壓產生源。

懸邊為一已成型的塑膠片，如圖 5.1.2。懸邊的功能是固定振動板，避免振動板左右搖動，本身的質量、剛度愈小愈好。

音圈部分先用碳纖放在模具中，中間打氣使碳纖和模具密合，再以熱壓機熱壓成型。成型好的音圈壓成圓形，放在繞線機上繞上線徑 ϕ 為 0.04 mm 的漆包線，如圖 5.2.1，其中 d_1 為內徑， d_2 為外徑， t 為厚度， t_v 為捲幅， h 為高度。音圈功能是依據電磁感應效應，配合場磁鐵，將電能轉換成動能，提供振動時所需的外力。

彈波的功能是固定音圈，使音圈不會因振動板上不均勻的振動，撞擊場磁鐵。

場磁鐵部分則先開好模具，製作外型，以 AB 膠黏好成型後再充磁，結構如圖 5.2.2。

整體組合是先以 AB 膠將振動板、懸邊及外殼黏在一起，再將音圈和彈波黏好，彈波黏於場磁鐵上，再黏接音圈和振動板，最後固定場磁鐵和外殼。

5.2 實驗

5.2.1 自然頻率量測

自然頻率以必凱(B&K) 科技股份有限公司出的 Pulse 頻譜分析儀量測，量測方式可分為 3 種，衝擊槌敲擊，加速規接收信息(以下簡稱敲擊測試)、激振器激振，加速規接收信息(以下簡稱激振測試)、及激振器激振，雷射測速儀接收信息(以下簡稱雷射測試)三種方式，其中有加裝加速規的方式，因為加速規有額外的質量，所以量測出來的自然頻率會略低。

設備介紹如下：

- (1) PULSE 信號收集處理器及 Pulse 頻譜分析軟體。
- (2) 個人筆記型電腦
- (3) 衝擊槌 AU02。(敲擊測試需要)
- (4) 必凱科技股份有限公司出廠的加速規(2250A-10)及信號線。(敲擊測試及激振測試需要)
- (5) Polytec OFV350 雷射測速儀(雷射測試需要)
- (6) Polytec OFV2500 測速儀控制器(雷射測試需要)

量測步驟如下：

- (1)將揚聲器放置妥當，敲擊測試的分析儀 Input 位置上分別接上衝擊槌及加速規，並將加速規固定於揚聲器任一量測點位置(如圖 5.3)。激振測試則需分析儀 Input 位置上接上加速規，Output 連接到揚聲器的激振器部分(如圖 5.4)。雷射測試則需分析儀 Input 位置上接上雷射測速儀，Output 連接到揚聲器的激振器部分(如圖 5.5)，並將反光紙貼於所需量測的位置。
- (2)將頻譜分析軟體的環境設定完成(如：測試頻寬、測試速度、解析度)。
- (3)敲擊測試用需用衝擊槌敲擊揚聲器，敲擊後電腦開始擷取速度振幅資料，經由頻譜分析儀以快速傅利葉轉換(Fast Fourier Transform)算出頻譜區域(Frequency Domain)中的頻譜。另外兩種則由電腦自行開始激振揚聲器，並擷取資料。
- (4)過濾雜訊，讀取頻譜圖上峰值較高的振動頻率數值。
- (5)把加速規或反光紙放置在試片其他量測點，並重複(2)至(4)。
- (6)平均量測到的頻率數值，即為此試片的自然頻率。

敲擊測試、激振測試都需要用到加速規，加速規本身質量為 0.4 公克，加上加速規後方的線材，對量測較輕物體的自然頻率將會有影響。

激振測試及雷射測試都使用激振器激振，激振器對某些自然頻率會無法激振出來，如果需要量測所有的自然頻率，避免使用這兩種方式量測。

5.2.2 聲壓量測

聲壓量測以 LINEARX 公司出的 LMS 聲壓測試系統。

設備介紹如下：

- (1)LMS 聲壓測試系統(內含寬頻雜訊產生器、聲壓頻譜分析)
- (2)桌上型電腦
- (3)訊號放大器(Amplifier)
- (4)麥克風

量測步驟如下：

- (1)將揚聲器架設妥當。
- (2)軟體內部校正及外部校正，並將環境設定完成(如：測試頻寬、測試速度、解析度)。
- (3)麥克風放置在離揚聲器中心一公尺外之同一高度腳架上。
- (4)待一切準備就緒，啟動電腦發出訊號，由麥克風接收聲壓訊號，傳回電腦。
- (5)將曲線平滑處理，平滑的參數是 $1/3$ (Octave Width to Smooth By 0.3333)，即可得出頻率響應之聲壓分貝圖。



第六章 理論分析與實驗結果

6.1 有限元素法分析與實驗的驗證

使用 ANSYS 的 SHELL91 元素進行分析，必須先驗證 ANSYS 有限元素分析結果的正確性，只有正確的 ANSYS 分析才能拿來和實驗的結果比較，並討論各種變數與聲壓等的影響。

以 ANSYS 分析一塊自由邊界條件的振動板，材料常數如表 4.1，尺寸大小為圖 6.1，振動板的長寬比約 2.58，邊界條件為自由的邊界條件，分析自然頻率的值。再使用第五章的自然頻率量測法，使用敲擊測試，量測實際自由邊界條件的振動板，比較的結果如表 6.1，誤差皆在 6 % 左右，其中 ANSYS 分析的第 5 個與第 6 個自然頻率，因為十分接近，所以實驗上只能量到一個。

這部分的自然頻率量測以敲擊測試而不以其他方式量測的原因是因為其他量測方式都是使用激振器，使用激振器會造成部分模態無法出現，其自然頻率就無法量測到，這部分在下面有更詳細的說明。

6.2 圓形激振器有限元素法分析

前一節驗證了 ANSYS 所分析的振動板和實驗結果是一致的，以前一節的模型加上邊界條件，建立揚聲器的模型，探討振動板的行為及為何會造成這些行為的原因。

由實際量測系統，三明治板的重量為 2.7 g，音圈與彈波之總重為 0.785 g，三明治板、音圈及彈波三者的重量總和 3.485 g，即為振動系統之運動質量，以 MLSSA 聲壓頻譜儀量測激振器參數並整理於表 6.2，經由比較 MLSSA 量測的振動系統之運動質量 M_{ms} 和秤重所得的運動質量，可知 MLSSA 量測所得的結果是準確的。將 MLSSA 量測的系統柔度 C_{ms} 取其倒數，其 k 值為 971.82 N/m。並由振動時電阻值 R_e 為 $8.196\ \Omega$ ，反求功率在 1 瓦時，流經音圈的電流值為 0.349 安培(A)，電流和 BL 值之乘積即為量測聲壓時音圈之推力，其推力大小為 1.186 N。



三明治板的量測尺寸大小如圖 6.1，厚度 $t = 2.27\text{ mm}$ ，音圈尺寸為直徑 25 mm，本文所提到 25*25 即為此種音圈的揚聲器。音圈其餘數據如表 6.3 所示。音圈隨頻率不同所量測的阻抗值如圖 6.2，阻抗圖在自然頻率附近，會因為板的共振，只要有小量的電流即可產生很大的位移，板的最大位移量是固定的，電流會驟減，阻抗隨之大增，阻抗圖就可以看出上升。由阻抗圖也可以看出在頻率 90 Hz 附近有一個共振頻率，約 1800 Hz 與 2400 Hz 附近也有共振頻率，可以和之後的 ANSYS 分析互相比較分析是否正確。

材料常數表即為表 4.1，以第五章的自然頻率雷射量測可得到前幾個自然頻率，結果如圖 6.3.1 到圖 6.3.4，由第四章的 Bandwidth Method 及 Rayleigh Damping 找出 α 及 β ，在求 α 和 β 時自然頻率至少要取超過 2000 Hz 以上才

會得到比較好的值，所以取自然頻率為 81Hz 與 13090Hz：

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

$$\xi_{81} = \frac{94 - 68}{94 + 68} = 0.16049382716$$

$$\xi_{13090} = \frac{13470 - 12680}{13470 + 12680} = 0.0302103250478$$

$$\text{代入 } \xi = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta\omega}{2} \text{ 解聯立方程式}$$

求出 $\alpha = 25.97$ ， $\beta = 4.46 \times 10^{-6}$ 。

以上面的參數依第四章 ANSYS 分析方法代入 ANSYS 分析，分割元素使用 ANSYS 的 free mesh，結果如圖 6.4，最後得到分析出來的自然頻率及其模態，20k Hz 內的自然頻率如表 6.4，前 24 個模態(即 10000Hz 內)分析結果如圖 6.5。比較第一個剛體自然頻率(1st mode)與第一個板彎曲(bending)變形的自然頻率(4th mode)，與雷射測位移的值比較，如表 6.5。

圖 6.6 為加邊界條件和音圈剛性與未加邊界條件之間的模態比較，可以很清楚看出前三個 Mode 為剛體運動，只有有加彈簧和音圈的分析會出現，未加這些邊界條件的分析不會出現這三個模態，所以前三個模態是邊界彈簧產生的模態。接下來後面的模態，因為有加音圈的分析，模態會受到音圈影響，不但自然頻率的值增加及模態出現的次序改變，模態也和只有振

動板的不一樣。所以可以很明顯看出音圈的楊氏係數、質量皆附加在振動板上。

聲壓分析部分，因為要畫出來的聲壓圖 x 軸(頻率)為對數尺度，所以從頻率範圍從 0 Hz 到 1k Hz 之間取 100 等分，即一等分為 10 Hz，頻率範圍從 1k Hz 到 20k Hz 之間取 380 等分，即一等分為 50 Hz，並將兩者畫在同一份圖上，並作平滑處理，分析結果如圖 6.7，將分析聲壓的結果，在自然頻率附近的地方列出變形圖，如圖 6.8 即為前 10 個接近自然頻率的變形圖。

6.3 圓形激振器有限元素法分析結果討論

觀察圖 6.8 和圖 6.5，雖然變形圖的變形是模態混合而成的，但還是可以明顯看出，並非所有的模態皆能出現在聲壓分析的變形圖上，前 10 個模態中，只有 1st mode、4th mode、8th mode 三個模態出現過，即變形圖皆為上下左右對稱的圖形，同時節線未通過施力點，由這些模態互相混合而成的圖形。

圖 6.10 為頻率在 20k Hz 以內所有對稱的模態的圖，這些圖的組合成聲壓在所有頻率下的變形圖。

觀察聲壓曲線上的極大值，發現極大極出現的地方皆在上下左右對稱模態的自然頻率附近。除了第一個剛體振動(1st mode)外，極大值出現後，

其後就會出現極小值，又以第一個板彎曲變形的模態(4th mode)後的極小值最為嚴重，中音谷就是指在第一個板彎曲變形的模態後的極小值。

分析中音谷附近聲壓的極大值及極小值的部分，圖 6.11.1 為在中音谷最大值的頂視圖，此變形圖可以很明顯的看出是 4th Mode 對此圖影響最大，如果定義平衡位置的正 Z 方向為正，中心位置產生的聲壓為正，兩邊產生的聲壓為負，明顯可以看出正值遠小於負值。也可以由位移最大值和最小值看出來，正向的位移最大值為 0.865×10^{-5} ，負向的位移最大值為 -0.237×10^{-4} ，相差達 3 倍左右，這樣的變形已經是中音谷附近的聲壓最大值。



圖 6.11.2 為中音谷的谷底，變形圖也是 4th mode 影響最大，若中心的聲壓為負值，兩旁的聲壓為正值，正向的位移最大值為 0.977×10^{-5} ，負向的位移最大值為 -0.737×10^{-5} ，正負極為平衡，所以聲壓值也十分低。正向的位移和負向的位移相差愈大，振動板的變形就愈大，這部分以此數值來代替振動板的變形程度。

6.4 圓形激振器實際量測與分析的比較及討論

由實驗量測出來的聲壓值，並與 ANSYS 分析出來的聲壓值做比較，如圖 6.12，兩者的誤差討論如下。

首先討論頻率在 150 Hz 以前聲壓值明顯受到環境的影響，圖 6.13 為一

未接任何揚聲器的環境聲壓，在頻率 150 Hz 以前，明顯拉高起來，所以 150 Hz 以前可以判斷為環境影響。其餘部分主要的趨勢和分析聲壓是一致的。

聲壓實驗與 ANSYS 分析的差異主要原因如下：

1.懸邊聲壓的影響，懸邊當初不考慮的原因為它的剛性極低，對中音谷的影響沒有極大的影響，由分析和實驗比較，在中音谷的地方，分析和量測皆能明顯看出落差。且並非整體懸邊都會振動，但其對整體的聲壓仍有一定的影響，懸邊總面積約為 1565.68 mm^2 ，和整塊振動板的面積 3339.876 mm^2 相比，推動空氣就會使整體量測聲壓偏高，即本文分析出來的聲壓是純振動板產生的聲壓，量測的聲壓有包含懸邊的影響。

2.巴沙木的材料性質與 ANSYS 模擬時假設的不一致，巴沙木本身的質量、楊氏係數、密度分布每塊皆不一樣，而且內部一定有孔隙，與 ANSYS 假設的質量均勻分佈、材料內部沒有孔隙的假設不一致，有孔隙會造成楊氏係數、密度等材料常數不能均勻分布在振動板上，實驗的變形與 ANSYS 分析的變形圖就會出現差異，就會造成實驗的聲壓不如 ANSYS 分析一樣穩定。

3.ANSYS 分析時，所給的力只能是固定的力，而在量測時，從阻抗圖可以很清楚的看出力是不固定的，但分析在 20000 Hz 時，阻抗為 12Ω ，聲壓為 64.778 dB，和未修改力時的 66.642 dB，約下降 2 dB，所

以這部分並不是聲壓差異的主因。

6.5 橢圓形激振器分析

6.5.1 激振器尺寸為 40*25

一般圓形的揚聲器都會產生中音谷，中音谷通常是受到第一個板彎曲變形後產生的，以同樣大小的訊號強度輸入，在中音谷附近會產生忽大忽小的聲音，所以一般揚聲器都儘量避免或減緩中音谷的形成。

為了避免中音谷，最常見的方法是在振動板上加強強度，使其自然頻率儘量往後移，增加 1st mode 到 4th mode 之間平緩曲線的長度。我們由 6.3 節可以看出，若施力點太接近節線位置，則變形圖上就不會明顯出現此模式的形狀，如果施力點出現在節線上，我們即可假設不會出現此模式，所以若我們找出振動板的自然頻率上的節線，並把音圈放大到節線位置，即可避開中音谷。

為了討論各種不同尺寸的激振器對聲壓的影響，選擇長軸為 40 mm、短軸為 25 mm 的橢圓形激振器(以下以 40*25 代表之)，分析其自然頻率、模式及聲壓，自然頻率如表 6.6，頻率在 20000 Hz 以內的對稱模式如圖 6.14。

依照第五章的製作方法製作 40*25 的揚聲器，量測其聲壓。聲壓分析和量測比較如圖 6.15，與 25*25 的圖比較起來，中音谷明顯有變比較小，

而聲壓分析的結果，4th mode 並沒有消失，討論其原因在於，音圈本身的楊氏係數在這個揚聲器分析上是不能忽略不計的，而音圈的楊氏係數會造成 4th mode 模態的節線向兩旁偏移，造成節線無法通過音圈，不過節線已經接近音圈的位置，不像 25*25 距離那麼遠，所以聲壓有變平緩的趨勢。

6.5.2 激振器尺寸為 55*25

分析各種不同尺寸的音圈，找出其 4th mode 的節線位置，並計算節線與音圈(施力點)的距離，結果如表 6.7，繪製成圖如圖 6.16，音圈的長軸愈長，節線和施力點的距離就愈短，理論聲壓的中音谷將愈平緩，考慮實體製作與其趨勢，選擇長軸為 55 mm，短軸為 25 mm 的橢圓形揚聲器分析，並製作出成品測試。



ANSYS 分析自然頻率如表 6.8，頻率在 20000 Hz 以內的對稱模態如圖 6.17。

依第五章製作 55*25 的揚聲器，量測其聲壓。聲壓分析和量測比較如圖 6.18，可以看出實驗聲壓和理論聲壓趨勢是一致的，在這部分中音谷大小已經可以限制在 10 dB 左右，比起 25*25 的 20 dB 有明顯改善，且因為音圈的楊氏係數和施力方式，其他因素造成的誤差也有明顯改善。

整理上面三種揚聲器，中音谷的極大值會出現在發生中音谷的模態的

自然頻率附近，其後若沒有其他自然頻率的影響，就會產生中音谷的極小值，如表 6.9。

再整理三種揚聲器在中音谷最低點的彎曲變形程度，如表 6.10，發現音圈長軸愈長，彎曲變形程度愈小，主要原因是長軸長比長軸短的施力於振動板上更加平均，同時以能量觀點來看，能量固定，板彎曲變形量小者，彎曲變形的能量就會比較小，剛體變形的能量就會比較大，也就是愈偏向剛體變形，所以中音谷就會減緩。

6.6 橢圓形激振器參數對振動板的聲傳研究

激振器的音圈附著在振動板上，會把本身的質量、楊氏係數和外力皆附加於振動板上，而平緩中音谷是振動板受到外力不同的影響還是受到激振器上音圈的質量與楊氏係數影響就不得而知了。為了分析是哪個變因的影響，以圓形的激振器，加上橢圓形的肋條加強，如果加上橢圓形的肋條會造成中音谷平緩，則造成平緩變因就是音圈的質量或楊氏係數，反之，則是橢圓形外力產生平緩中音谷的功能。

6.6.1 激振器質量的影響

使用 55*25 的橢圓形肋條，如圖 6.19，量測其聲壓，並與未加肋條的 25*25 尺寸揚聲器作比較，聲壓量測的結果如圖 6.20，這部分使用雙面膠黏合肋條與板子，結果造成聲壓普遍下移一點距離，這和以 ANSYS 分析只有

質量在板子上而沒有肋條的楊氏係數一致，如圖 6.21，也就是說使用雙面膠的結果是肋條的楊氏係數無法附著在板子上，這和雙面膠有厚度在其中作緩衝有關。

由此可知，圓形激振器加上橢圓形質量並不是造成聲壓平緩，即橢圓形激振器造成中音谷平緩的原因不是因為其音圈上面的質量。

6.6.2 激振器剛性及質量的影響

使用瞬間膠或 AB 膠黏合肋條與振動板，肋條的剛度和質量都可以附加在板子，而只附加剛度在振動板而不附加質量是不可能，但質量的因素在上一小節討論過不會對中音谷的聲壓有所影響。所以如果附加剛性及質量時，中音谷明顯平緩的話，可以判斷中音谷平緩是剛性的影響，反之剛性及質量皆不會影響中音谷平緩的結果。

經過附加剛度及質量於振動板的聲壓量測實驗後，結果如圖 6.22，可以發現加上有剛度的肋條，對聲壓的平緩作用並沒有太大的影響，只能對第 4 個模態的位置稍微向後移，即中音谷部分因為肋條產生的剛性向右偏移，和 ANSYS 分析的圖一致，如圖 6.23。

由以上分析和實驗可以看出：橢圓形揚聲器平緩中音谷的功能是因為其橢圓形的外力，不是音圈上的質量或剛性。

第七章 激振器尺寸與振動板尺寸間的關係

7.1 自由邊界振動板長寬比和自然頻率及節線距離的關係

在使用第四章的 ANSYS 分析方法分析聲壓，在分析時間上，十分費時，如分析第六章的一條 20 Hz 到 20000 Hz 的聲壓曲線，ANSYS 需要約四個小時的分析，再加上建立模型，增加邊界條件的時間，需要大量的時間才可以得到一條曲線，如果能使用一些式子計算代替 ANSYS 分析，得到一個誤差在可靠的範圍，可以在設計時節省寶貴的時間。

由第六章分析及實驗的三個揚聲器分析，整理數據如表 7.1.1 及表 7.1.2，同時第六章實驗也驗證分析的正確性。由於中音谷的起因都是由節線平行於 y 軸的模態所引起的，以下分析都以節線平行 y 軸的模態為主。

因為振動板不是單純的矩形板，所以性質並非有跡可循，如果改成矩形板分析後，性質將會比較穩定。將分析改成矩形板後，除了聲壓值和振動板形狀有強烈的相關外，其他性質都可以導成近似曲線，並用第六章的揚聲器做驗證。

分析方面先固定振動板的面積為 3339.876 mm^2 ，第六章部分的振動板改成長為 $a = 92.774 \text{ mm}$ ，寬為 $b = 36 \text{ mm}$ ，長寬比 $r = a/b \doteq 2.57$ ，其餘使用第六章的數據做驗證。改變振動板的長寬比(r)，依第四章的分析方法及

表 4.1 的材料常數，分析單一的振動板，先找出振動板長寬比(r)和自然頻率(f)之間的關係，在選擇長寬比方面，以長寬比為 1.5 開始分析， $r = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0$ 五種，長寬比小於 1.5 的振動板第一個彎曲變形模態的節線為平行 x 軸，如圖 7.1，平行 x 軸節線在增加 x 方向的音圈長度沒有太大的功效，而且長寬比小於 1.5 的振動板在使用上建議使用圓形激振器。

將振動板長寬比和中音谷出現的自然頻率畫在圖形上，並找出回歸線，如圖 7.2，導出第一個式子是板面積為 3339.876 mm^2 ，材料常數為表 4.1，振動板長寬比和中音谷出現的自然頻率之間的關係為：

$$f = 3521.4 r^{-0.6774}, \quad r \geq 1.5 \quad (7.1)$$

這個式子成立條件與振動板的面積有關，所以之前分析的面積才會固定為 3339.876 mm^2 。驗證第六章的振動板，分析的自然頻率為 1827.4 Hz ，固定振動板寬為 36 mm ，以(7.1)式計算 $r = 2.57$ ， $f = 1853.7 \text{ Hz}$ ，誤差約 1.44% ，誤差主要原因是第六章的振動板不是矩形板。

以幾何中心為原點，找出長寬比改變時，第一個彎曲變形模態的節線中心位置，邊界一樣是自由邊界條件，分析不同振動板長寬比(r)，取出每個節線到原點的最短距離(d_{node})，整理如表 7.2 與圖 7.3.1。

回歸曲線以多項式趨近， d_{node} 單位為 mm ：

$$d_{\text{node}} = 0.3631 r^3 - 4.0838 r^2 + 19.119 r - 3.9773, \quad r \geq 1.5 \quad (7.2.1)$$

這個式子也是和面積有關，不過使用不同的面積作分析，即可發現振動板的長(a)和節線距離的比是一樣的，即可使兩張圖的節線到原點的最短距離重合，如面積為 10000 mm^2 的面積，長寬比 $r = 2.0$ ，節線到原點的最短距離 $d_{\text{node}} = 36.25 \text{ mm}$ ， $d_{\text{node}}/a = 0.256$ ，與面積為 3339.876 mm^2 相比， $d_{\text{node}}/a = 0.256$ ，結果是一致的，如果可以找出 d_{node}/a 的曲線，結果就可以適用所有面積。

計算 d_{node}/a 並畫成如圖 7.3.2 的圖，在無因次化節線距離後發現，無法使用一條較簡單的曲線去近似它，所以面積固定就使用(7.2.1)式即可，如果要導一個節線距離無因次化近似曲線，可以導出：

$$\frac{d_{\text{node}}}{a} = \frac{0.3631r^3 - 4.0838r^2 + 19.119r - 3.9773}{\sqrt{3339.876 \times r}}, \quad r \geq 1.5 \quad (7.2.2)$$

一樣以第六張的振動板驗證，ANSYS 分析得到節線到原點的距離為 24.35 mm ，以(7.2.1)式計算得 $d_{\text{node}} = 24.3861 \text{ mm}$ ，誤差為 0.148% 。

7.2 附加音圈振動板長寬比和自然頻率及節線距離的關係

考慮各種不同尺寸的音圈與不同的振動板長寬比，觀察不同變因與自然頻率及節線距離的關係。

分析不同尺寸的音圈與不同的振動板長寬比，記錄各種數據，整理如表 7.3，音圈長軸與自然頻率的關係畫成圖形如圖 7.4，不同的振動板長寬比會造成不同的結果，經過整理後，音圈長軸與板長的比值(a_b/a)和自然頻

率與板長的乘積($f \times a$)是有相關的趨勢，如圖 7.5，近似曲線為：

$$f \times a = \left[17.75 \left(\frac{a_b}{a} \right)^3 - 19.205 \left(\frac{a_b}{a} \right)^2 + 8.2351 \left(\frac{a_b}{a} \right) + 0.5787 \right] \times 10^5 \quad (7.3)$$

(7.3)式的近似曲線已經把面積的因素考慮進去，所以與面積無關，使用第六章的三種振動板和分析不同面積與不同的音圈短軸作驗證，證明與音圈短軸和振動板面積無關，整理如表 7.4，驗證結果誤差最大約 5 % 左右。

節線到原點的最短距離也依上面的方法，找到趨近的曲線，如圖 7.6，橫軸為音圈長軸與板長的比值(a_b/a)，縱軸為節線距離與板長的比值(d_{node}/a)，近似曲線如下：

$$\frac{d_{\text{node}}}{a} = 0.3355 \left(\frac{a_b}{a} \right)^2 - 0.0307 \left(\frac{a_b}{a} \right) + 0.2158 \quad (7.4)$$

(7.4)式已經做無因次化了，所以可以使用在任何面積上，使用 ANSYS 分析後的結果和使用(7.4)式計算結果互相驗證，結果如表 7.5。

7.3 音圈尺寸、振動板長寬比和中音谷落差值的關係

影響中音谷峰值到谷值之間落差的主要原因是音圈的長軸及振動板的形狀面積，分析幾種不同振動板長寬比的音圈的長軸與中音谷落差間的關係，邊界的彈性常數 k 與第六章的 k 一致，分析結果如圖 7.7。

因為 ANSYS 在分析聲壓上無法很精準的抓到最高峰和最低谷的值，所以在分析出來的值有些不整齊，不過趨勢上是可以看得出來音圈長軸愈

大，中音谷的聲壓值會愈平緩，再多加考慮未加音圈的節線距離，如圖 7.8，可以發現在音圈長軸和未加音圈的節線距離比值為 1.4，即音圈長軸是未加音圈的振動板節線到中心距離的 1.4 倍時，會產生最高的中音谷落差，如果要一個比較小的中音谷落差值，可以考慮音圈長軸是未加音圈節線到中心距離的 2.5 倍以上，即可得到很好的結果。同時由圖 7.8 也可以看出，振動板的長寬比愈大，使用橢圓形音圈產生的中音谷落差下降的比較就愈大，如果長寬比只有 1.5，使用橢圓形音圈所平緩中音谷的落差是有限的。

圖 7.8 曲線的四條近似曲線如下，中音谷的落差為 S：

$$r=1.5, S = 8.964 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^3 - 53.853 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^2 + 104.54 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right) - 51.443 \quad (7.5a)$$

$$r=2.0, S = 3.4098 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^3 - 25.772 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^2 + 55.076 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right) - 19.426 \quad (7.5b)$$

$$r=2.5, S = 6.6484 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^3 - 43.827 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^2 + 83.426 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right) - 28.861 \quad (7.5c)$$

$$r=3.0, S = 6.813 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^3 - 45.197 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right)^2 + 85.554 \left(\frac{a_b}{d_{\text{node}}} \right) - 28.725 \quad (7.5d)$$

這些近似曲線與板面積和形狀有極大的關聯，而外力、邊界條件在這些分析也會影響到中音谷落差值，不過只是對曲線放大比例，曲線及式子只是明顯表示出中音谷的趨勢。

使用圖 7.7 來驗證第六章分析的橢圓形揚聲器，長寬比約 2.5 的曲線，

在長軸為 55 mm 的時候，中音谷就比較平緩，也可以使用圖 7.8，音圈長軸和節線距離的比值為 2.26，中音谷會得到比較平緩，使用(7.5c)式計算中音谷落差的數值為 12.4408，和分析的 11.43 不符合的原因是因為第六章的振動板不是矩形板，和矩形板相比，總共有 117.4918 mm^2 的面積與矩形板不同，對聲壓有極大的影響，不過趨勢是可信的。

圖 7.8 有三個點是實驗值，分別是第六章三種尺寸的激振器的實驗值，並經過計算的聲壓落差值，比對振動板長寬比為 2.5 的曲線，再次證明這些曲線是可靠的。



所以對於一個的矩形振動板，如果只是要一個適合的音圈，選擇音圈的長軸和短軸愈長愈好，不過音圈長軸短軸比愈大，製作上愈困難，選擇音圈長軸時，先找尋其自由邊界條件分析時的節線位置，再跟據圖 7.8，選擇符合需要的音圈長軸，控制可以接受的中音谷落差，而選擇音圈的短軸為音圈長軸的 0.3 倍以上，在製作方面會比較方便，中音谷的落差再經過平滑處理後，會更加平緩。也可以計算長寬比，選擇音圈短軸為 25 mm，依圖 7.7，並配合製作上的方便性，選擇一個適當的長軸。

使用(7.3)式可以得到中音谷出現的頻率，無論是在實際實驗或分析時，可以只對中音谷出現的頻率附近分析即可，不需要做從 20 Hz 到 20000 Hz 全部的研究，可以節省大量的時間。

第八章 結論與未來研究方向

8.1 結論

振動板受到音圈振動時，振動板的變形以上下左右皆對稱的振動模態混合為主，同時音圈的剛性、質量及產生的外力皆會附加振動板上，影響振動板的變形。

在聲傳方面，中音谷產生的原因是在第一個板彎曲模態和第一個板剛體變形模態互相混合產生造成的。影響中音谷的原因是振動板的變形，所以振動板的材料常數、外力施加方式及振動板本身的節線位置都會影響，振動板的節線位置及楊氏係數在振動板成型後就固定了，只有外力位置會影響聲壓變形圖出現的模態，所以只要使用適當的音圈，就能有效降低中音谷。因為音圈施力愈靠近模態的節線，這個模態對聲壓變形圖的影響就愈小，所以選擇適當的音圈，就能有效降低中音谷。

選擇音圈尺寸方面，音圈尺寸愈大，愈能有效降低中音谷，如果音圈尺寸不能無限制增加，可以依照第七章的圖 7.8，選擇一個可以接受的中音谷落差，算出可接受的最小音圈長軸。

8.2 未來研究方向

本文使用 ANSYS 建立模型分析聲壓，再與實驗比較，對中音谷的模擬部分雖然十分相似，但其他部分仍有誤差產生，產生的誤差只是出現在 ANSYS 模擬與實際情況不同的地方，所以未來研究方向可以儘量使兩者更加一致。

數值方法和 ANSYS 有限元素分析軟體都能分析聲壓模擬和簡諧激振，但數值方法的計算效率比 ANSYS 好太多，希望未來能建立使用高階的板理論進行分析聲壓模擬和簡諧激振。



第七章分析出來的式子有很多都未無因次化，或只能使用在某些特定的邊界條件中，未來希望可以把各種參數變化都考慮進去，例如邊界條件、外力、材料常數、面積大小及長寬比等都考慮成一個式子，以後有需要只要把各種條件代入，即可得到中音谷落差值及其產生的頻率等資訊。

在實驗中，希望三明治的巴沙木心層可以找到一種材料性質更穩定，內部沒有孔洞，強度更強，密度更輕，密度分布更均勻的材料來替代。

參考文獻

1. Reddy, J. N., 1945, Energy and Variational Methods in Applied Mechanics., Junuthula Narasimha.
2. Jones, R.M., 1975, Mechanics of Composite Material, McGraw-Hill Inc.
3. Mindlin, R. D., 1951, Influence of Rotatory Inertia and Shear Deformation on Flexural Motion of Isotropic, Elastic Plates., J. Applied Mechanics, 18, pp. 33-38.
4. Reissner, E., Finite deflection of sandwich plates. J. Aeronaut. Sci. July, 435-440(1948)
5. Kanematsu H. H., Hirano Y. and Iyama H., Bending and vibration of CFRP-faced rectangular sandwich plates. Compos. Struct. 10,145-163(1988)
6. Morse, P. M. and Ingard, K. U., 1986, Theoretical Acoustics. McGraw-Hill, NY, 1968;rpt. Princeton University Press, NJ, pp.375-379.
7. Tan C. C. and Hird C. I., 1997, Active Control of the Sound Field of a Constrained Panel by an Electromagnetic Actuator-an Experimental Study., Applied Acoustics, 52, pp. 31-51.
8. 彭國晉, “具加勁複合材料結構板之聲傳研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 新竹市, 2004。
9. 周紹儒編著, “揚聲器的認識與製造”, 徐氏基金會出版
10. 賴耿陽編譯, “揚聲器之設計與製作”, 啟學出版, 1979
11. 卓永剛, “複合材料積層板的振動及聲射分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 新竹市, 2002

- 12.陳正義, “具彈性支承複合材料板之聲傳研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 新竹市, 2003。
- 13.詹東恩, “複合材料三明治板之振動與聲射研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 新竹市, 2003。
- 14.王栢村編著, “振動學”, 全華書局, 台北市, 1996。
- 15.莊啟正, “複合材料積層板之振動模態分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 新竹市, 2000。
- 16.施志鴻, “具彈性支撐複合材料圓板之振動與聲傳研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 新竹市, 2004。
17. ANSYS Release Documentation



表 4.1 材料常數

	碳纖復合材料	巴沙木
$E_1(\text{GPa})$	148	3.7
$E_2(\text{GPa})$	10.5	0.15
ν_{12}	0.3	0.02
$G_{12}(\text{GPa})$	5.6	0.02
$\rho (\text{Kg/m}^3)$	1585.4	218.86
$t (\text{mm})$	0.13	2.01

表 4.2 瑞雷-黎次法與 SHELL99 分析

	瑞雷-黎次法	SHELL 99	誤差
1	1099.387948	1284.9	16.87%
2	1907.854390	2542.6	33.27%
3	2560.630541	3580.9	39.84%
4	3488.059345	5310.4	52.25%
5	4106.924550	5830.1	41.96%
6	4776.445583	6603.3	38.25%
7	5040.301579	7465.5	48.12%
8	5090.145942	7641.9	50.13%
9	5675.923130	10929.	92.55%
10	5780.687065	11859.	105.15%

表 4.3 瑞雷-黎次法與 SHELL91 分析

	瑞雷-黎次法	SHELL91	誤差
1	1099.387948	1109.9	0.96%
2	1907.854390	1934.5	1.40%
3	2560.630541	2602.0	1.62%
4	3488.059345	3563.1	2.15%
5	4106.924550	4190.5	2.03%
6	4776.445583	4848.8	1.51%
7	5040.301579	5121.2	1.61%
8	5090.145942	5194.2	2.04%
9	5675.923130	5787.6	1.97%
10	5780.687065	5886.5	1.83%

表 6.1 自由邊界板實驗結果和 ANSYS 模擬分析之比較

Mode	ANSYS	實驗	誤差
1	1287.6	1266.7	1.623 %
2	1827.4	1722.2	5.757 %
3	2722	2708.3	0.503 %
4	3010.2	3202.1	-6.375 %
5	4075.5	4036.1	-0.967 %
6	4175.7		
7	4812.9	5025	-4.407 %

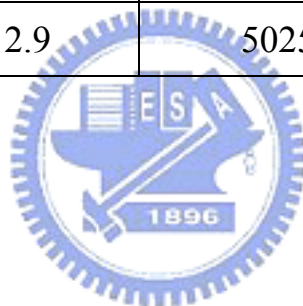


表 6.2 MLSSA 量測激振器的參數整理

參數	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	平均
Fs(Hz)	83.45	83.96	83.43	84.12	83.79	83.75
Re(Ω)	8.20	8.13	8.25	8.20	8.20	8.196
Mms(g)	3.23	3.59	3.41	3.65	3.72	3.52
Cms(μ m/Newton)	1125	1002	1067	981	970	1029
BL(Telsa-m)	3.25	3.42	3.37	3.46	3.48	3.396

表 6.3 音圈數據

漆包線長度 $L(\text{m})$	4.68
內徑 $d_1(\text{mm})$	25.25
外徑 $d_2(\text{mm})$	25.79
厚度 $t(\text{mm})$	0.27
捲幅 $t_v(\text{mm})$	4.24
高度 $h(\text{mm})$	19.55
線徑 $\phi(\text{mm})$	0.04
質量 $m(\text{g})$	0.785

表 6.4 自然頻率有限元素法分析結果(25*25 激振器)

Mode	Freq.	Mode	Freq.	Mode	Freq.	Mode	Freq.
1	82.339	21	9242.1	41	14141.	61	18067.
2	86.838	22	9486.0	42	14433.	62	18073.
3	102.41	23	9841.5	43	14546.	63	18185.
4	1864.9	24	9890.2	44	14891.	64	18675.
5	1943.9	25	11006.	45	14967.	65	18863.
6	2541.5	26	11013.	46	15564.	66	19001.
7	3556.6	27	11103.	47	15749.	67	19427.
8	4306.2	28	11117.	48	15768.	68	19467.
9	4579.1	29	11697.	49	15905.	69	19531.
10	5169.2	30	11794.	50	16138.	70	19642.
11	5429.4	31	11871.	51	16559.	71	19850.
12	6472.3	32	11881.	52	16575.		
13	6480.7	33	12011.	53	16714.		
14	6715.3	34	12785.	54	16873.		
15	6854.7	35	13015.	55	17009.		
16	7734.5	36	13129.	56	17069.		
17	7908.9	37	13380.	57	17070.		
18	8453.9	38	13423.	58	17622.		
19	8777.7	39	13678.	59	17925.		
20	8898.7	40	13853.	60	18059.		

表 6.5 有限元素法分析和實驗量測的比較

	ANSYS 分析	實驗量測	誤差
第一個剛體自然頻率	82.339	81	1.626 %
第一個板變形的自然頻率	1864.9	1961	5.15 %

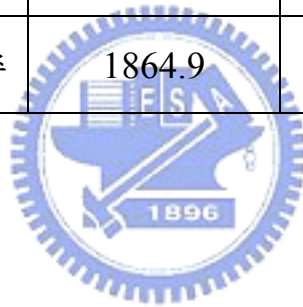


表 6.6 自然頻率有限元素法分析結果(40*25 激振器)

Mode	Freq.	Mode	Freq.	Mode	Freq.	Mode	Freq.
1	81.435	21	9869.9	41	14545.	61	18843.
2	87.434	22	10578.	42	14713.	62	18900.
3	100.84	23	10581.	43	14716.	63	18928.
4	2152.8	24	10817.	44	14955.	64	19043.
5	2341.8	25	10938.	45	15462.	65	19220.
6	2888.9	26	11411.	46	15496.	66	19257.
7	3524.5	27	11634.	47	16284.	67	19408.
8	4971.1	28	11753.	48	16348.	68	19593.
9	5149.3	29	11806.	49	16483.	69	19821.
10	6005.8	30	12184.	50	16744.		
11	6273.1	31	12472.	51	16771.		
12	7023.7	32	12661.	52	16874.		
13	7049.5	33	12884.	53	17135.		
14	7244.8	34	13427.	54	17278.		
15	7803.2	35	13572.	55	17330.		
16	8169.2	36	13779.	56	17406.		
17	8581.9	37	13972.	57	17420.		
18	8846.8	38	14125.	58	17710.		
19	9493.5	39	14128.	59	18247.		
20	9779.5	40	14242.	60	18259.		

表 6.7 不同尺寸的音圈的位置

音圈尺寸	節線到中心距離(mm)	節線到音圈距離(mm)
25*25	21.455	8.955
30*25	22.66666	7.6666
35*25	23.492	5.992
40*25	24.726	4.726
55*25	29.49	1.99
70*25	35.953	0.953

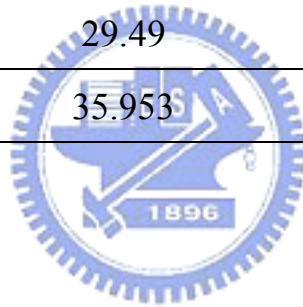


表 6.8 自然頻率有限元素法分析結果(55*25 激振器)

Mode	Freq.	Mode	Freq.	Mode	Freq.	Mode	Freq.
1	79.093	21	10743.	41	15094.	61	18684.
2	86.895	22	11004.	42	15124.	62	19312.
3	96.480	23	11538.	43	15519.	63	19315.
4	2644.6	24	11587.	44	15954.	64	19584.
5	2971.8	25	11700.	45	15975.	65	19611.
6	3463.3	26	12270.	46	16355.	66	19630.
7	3641.6	27	12404.	47	16540.		
8	5747.9	28	12531.	48	16706.		
9	5946.2	29	12605.	49	16868.		
10	7006.0	30	12778.	50	16889.		
11	7185.8	31	13049.	51	17147.		
12	7314.5	32	13139.	52	17175.		
13	8178.2	33	13292.	53	17177.		
14	8231.3	34	13326.	54	17724.		
15	8289.6	35	13341.	55	17768.		
16	9041.0	36	13965.	56	17966.		
17	9318.2	37	14175.	57	18000.		
18	9403.0	38	14267.	58	18578.		
19	9732.5	39	14300.	59	18651.		
20	9905.2	40	15088.	60	18660.		

表 6.9 4th mode 的自然頻率與中音谷頻率比較

音圈大小	4 th mode 的自然頻率	中音谷附近 極大值的頻率	中音谷附近 極小值的頻率
25*25	1864.9	1850	2200
40*25	2152.8	2150	2450
55*25	2644.6	2600	2950

表 6.10 中音谷最低點的變形量比較

音圈大小	最大值	最小值	變形量
25*25	0.977×10^{-5}	-0.737×10^{-5}	1.714×10^{-5}
40*25	0.847×10^{-5}	-0.544×10^{-5}	1.391×10^{-5}
55*25	0.561×10^{-5}	-0.304×10^{-5}	0.865×10^{-5}

表 7.1.1 三種揚聲器分析整理

音圈長軸 (mm)	音圈短軸 (mm)	板子的長 (mm)	板子的寬 (mm)	中音谷出 現頻率(Hz)	節線到中心的 距離(mm)	中音谷落 差(dB)
25	25	100.5	36	1864.9	21.42141904	20.53
40	25	100.5	36	2152.8	24.8125	15.73
55	25	100.5	36	2644.6	29.47916667	11.43
只有板子		100.5	36		24.35	

表 7.1.2 三種揚聲器實驗整理

音圈長軸 (mm)	音圈短軸 (mm)	板子的長 (mm)	板子的寬 (mm)	中音谷落差 (dB)	反求未 Smooth 的聲 壓(dB)
25	25	100.5	36	14.13	21.195
40	25	100.5	36	11.17	16.755
55	25	100.5	36	6.73	10.095

表 7.2 不同振動板長寬比的整理

r	板長(mm)	板寬(mm)	自然頻率(Hz)	節線到中心距離(mm)
1.5	70.78004	47.18669	2655	16.71195378
2	81.72975	40.86487	2212	20.93078958
2.5	91.37664	36.55066	1906	23.83738387
3	100.0981	33.36603	1680	26.49655374
4	115.5833	28.89583	1366	30.39044205

表 7.3 各種尺寸的音圈和揚聲器分析結果

長寬 比 r	板長(mm)	板寬(mm)	音圈 (mm)	自然頻率 (Hz)	節線到中心的距離 (mm)	中音谷落差 (dB)
1.5	70.78004	47.18669	25*25	2647	18.01693434	14.439
			30*25	2774	19.15831402	14.53629796
			35*25	2933	21.07040191	13.63483708
			40*25	3136	22.78616009	13.175008
2.0	81.72975	40.86487	25*25	2219.4	19.3581476	15.38917668
			35*25	2435	21.64795211	16.63483708
			40*25	2590	22.97144694	15.35163049
			55*25	3347	28.78407551	11.6211832
2.5	91.37664	36.55066	25*25	1929.8	21.28467152	18.09628085
			40*25	2203	24.27068087	19.13525152
			55*25	2751	29.01519877	11.97080067
			70*25	3828	35.64150543	6.542412748
3.0	100.0981	33.36603	25*25	1713	22.81297932	17.47942151
			40*25	1948	25.07681321	20.88465799
			55*25	2333	30.06822524	15.0177
			64*25	2732	33.14942714	10.27340101
			80*25	4031	40.39111745	5.085790152

表 7.4 附加音圈振動板和自然頻率的驗證

板長 a(mm)	板寬 b(mm)	音圈長軸 a _b (mm)	音圈短軸 b _b (mm)	分析中音谷 頻率(Hz)	計算中音谷頻 率(Hz)	誤差 (%)
92.77	36	25	25	1864.9	1886.92	1.18
92.77	36	40	25	2152.8	2136.2	0.77
92.77	36	55	25	2644.6	2597.03	1.8
81.7	40.9	25	35	2210	2213.12	0.14
115.6	57.8	50	25	1634	1716.61	5.06

表 7.5 附加音圈振動板和節線距離的驗證

音圈長軸(a_b)	分析的節線距離(mm)	近似曲線計算的節線距離(mm)	誤差(%)
25 mm	21.42141904	21.5084	0.406
40 mm	24.8125	24.7986	0.056
55 mm	29.47916667	29.4863	0.024

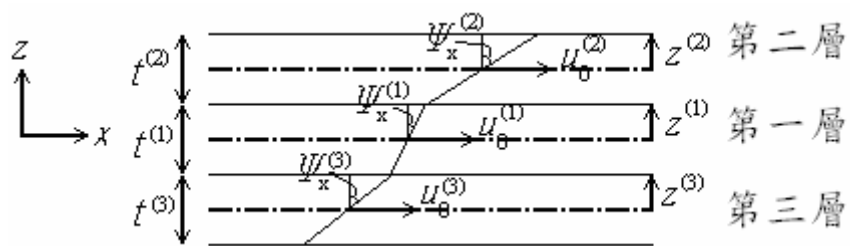


圖 2.1 多層一階剪變形位移場示意圖(三層)

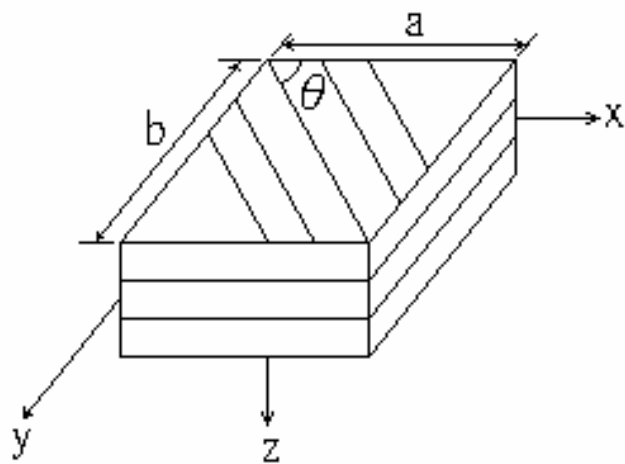


圖 2.2 座標逆時鐘旋轉 θ 角

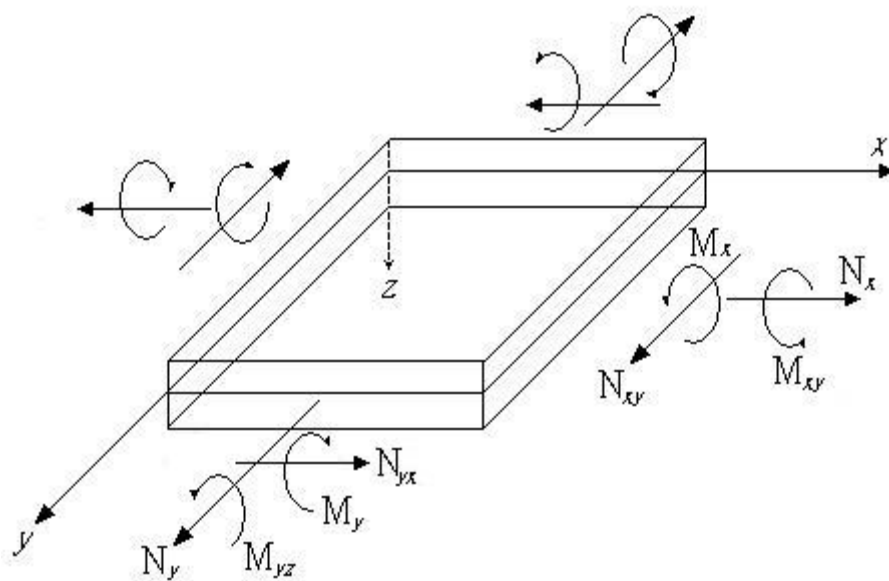


圖 2.3 平板所受外力圖

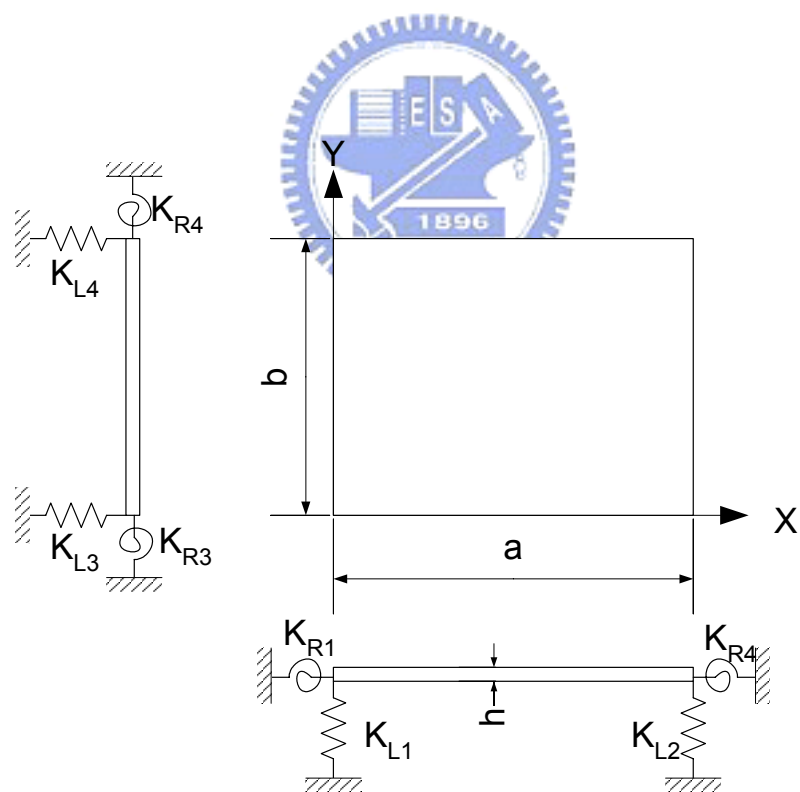


圖 2.4 邊界條件

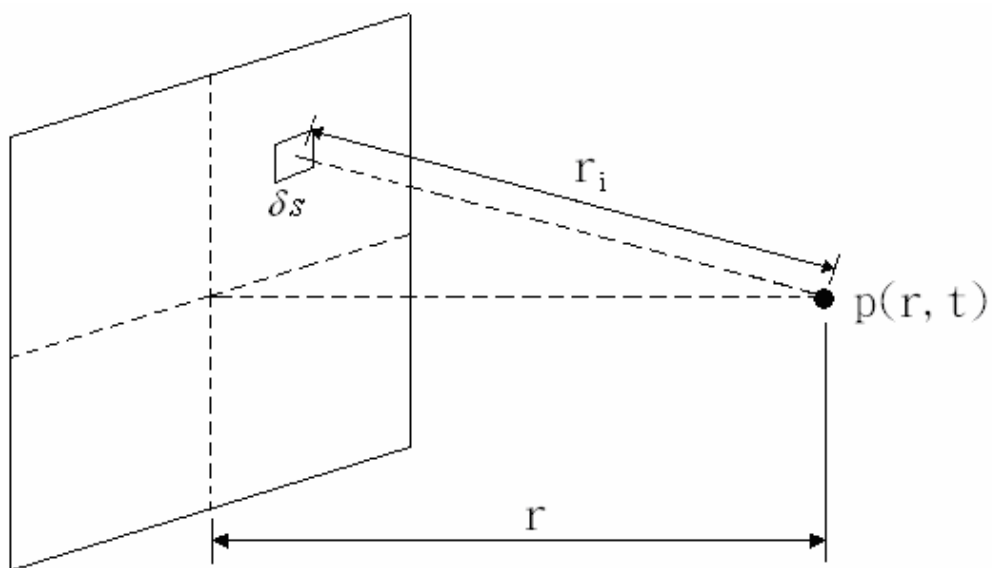


圖 3.1 振動板之聲場示意圖

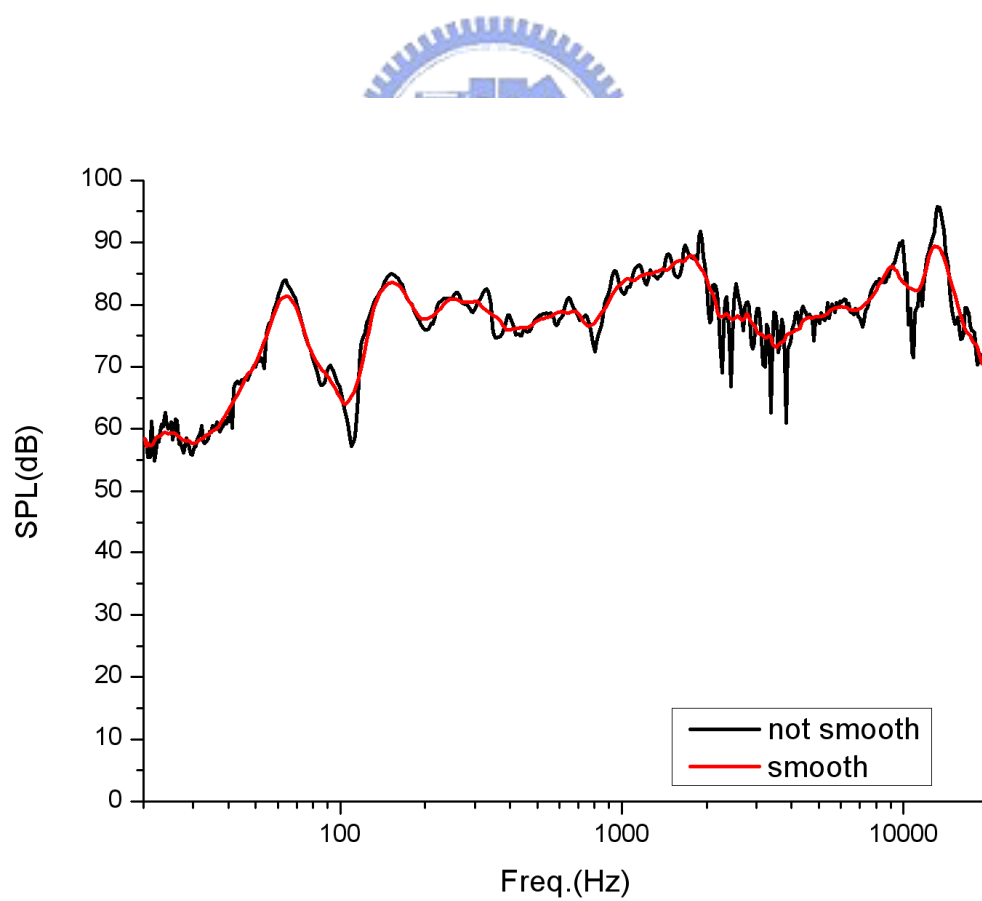


圖 3.2 聲壓圖的平滑處理

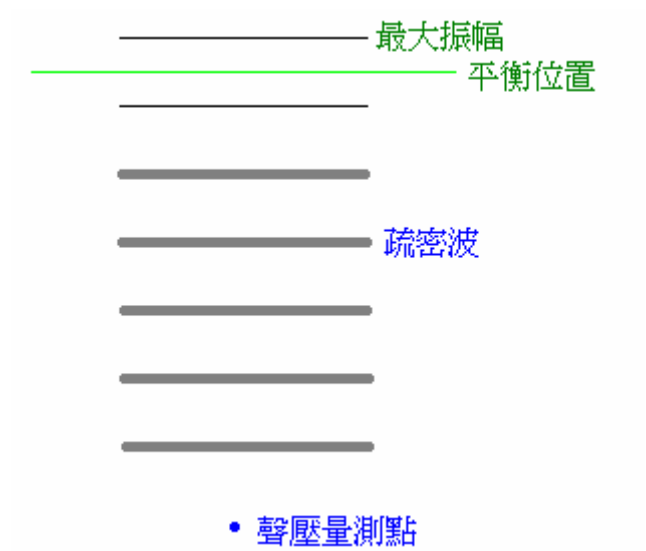


圖 3.3 剛體振動產生的波

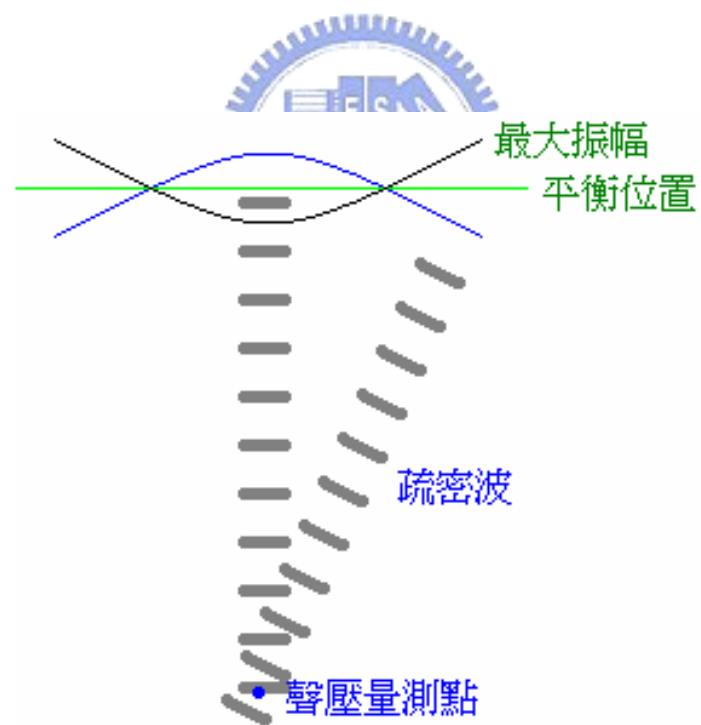


圖 3.4 非剛體振動產生的波

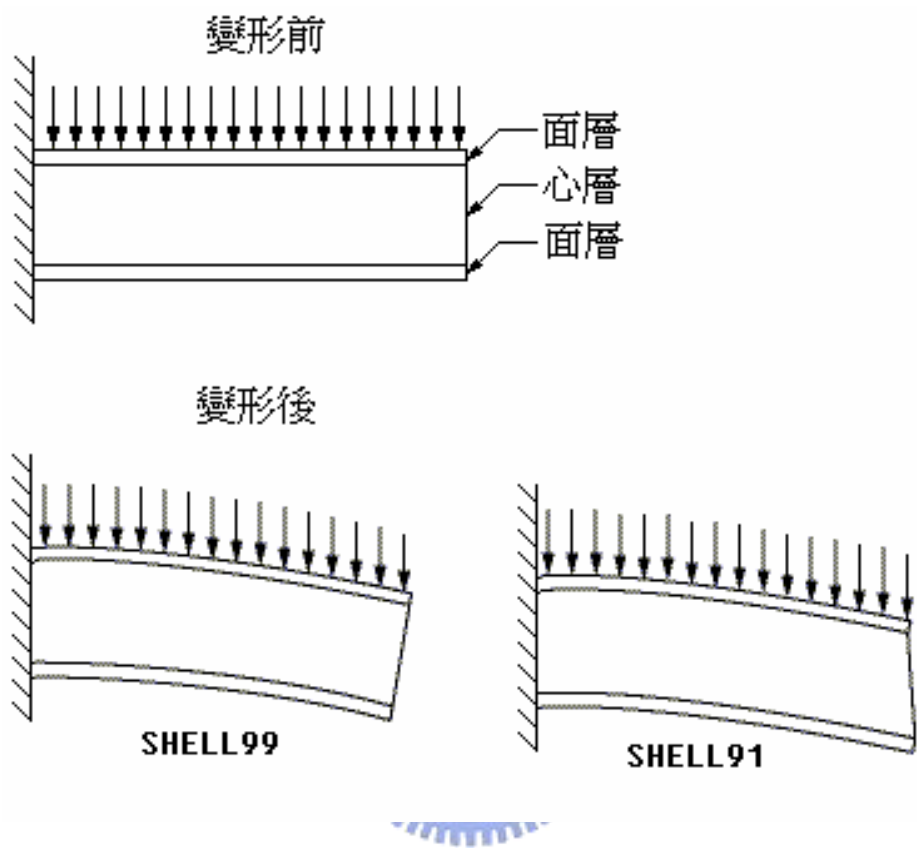


圖 4.1 SHELL99 和 SHELL91 變形後的不同

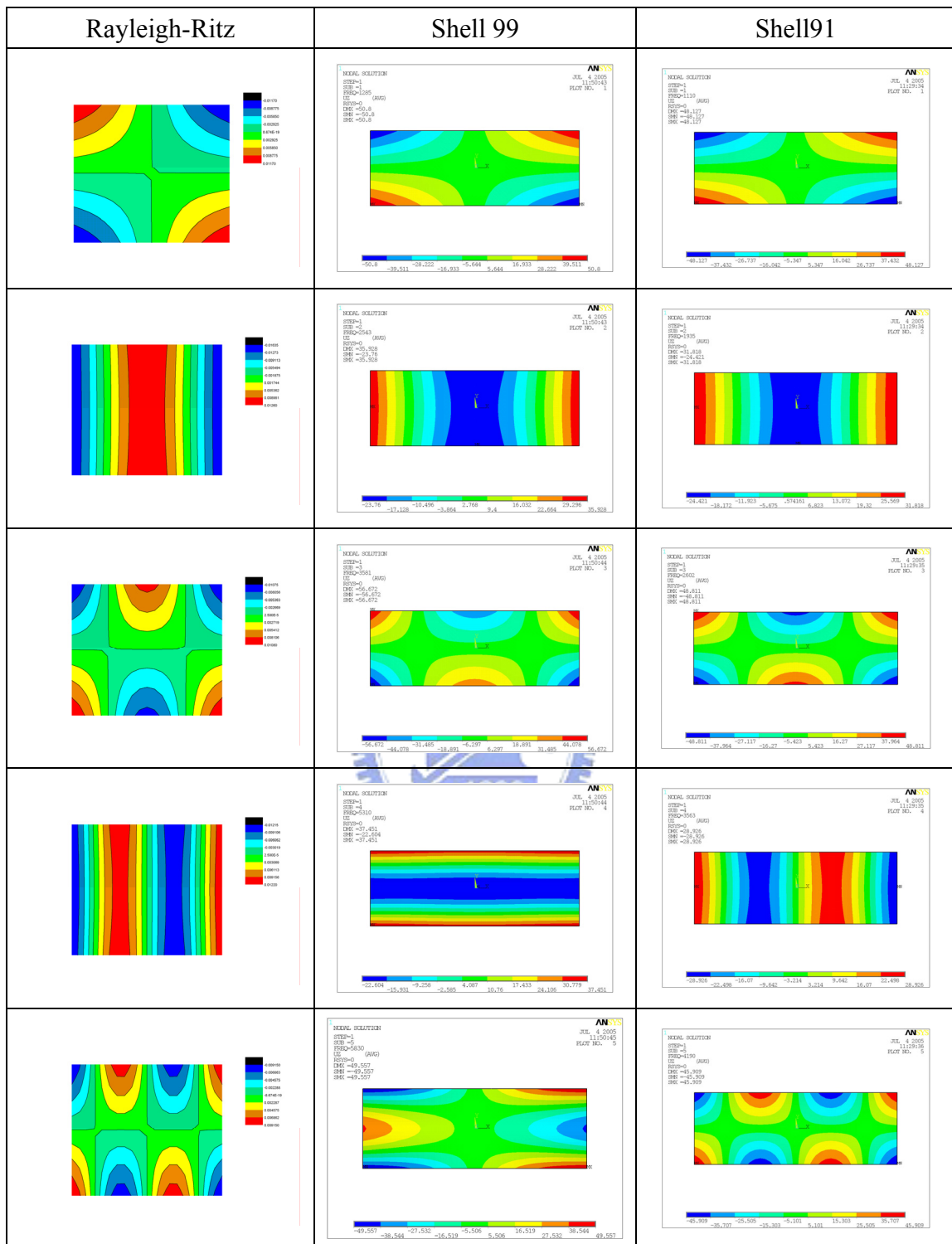


圖 4.2 Rayleigh-Ritz、Shell99、Shell91 前五個模態比較

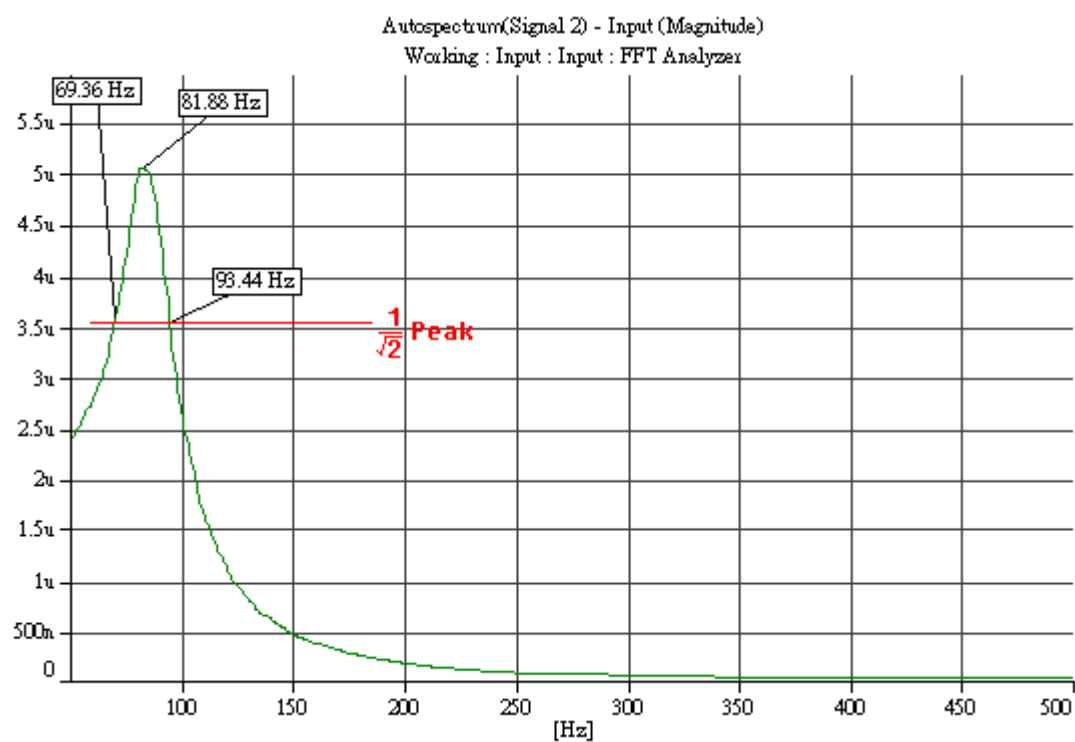


圖 4.3 頻率響應圖

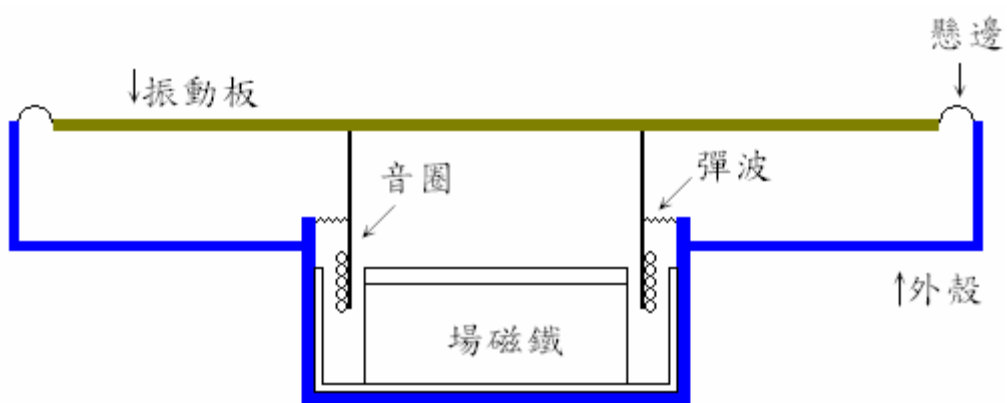


圖 5.1 揚聲器主要結構

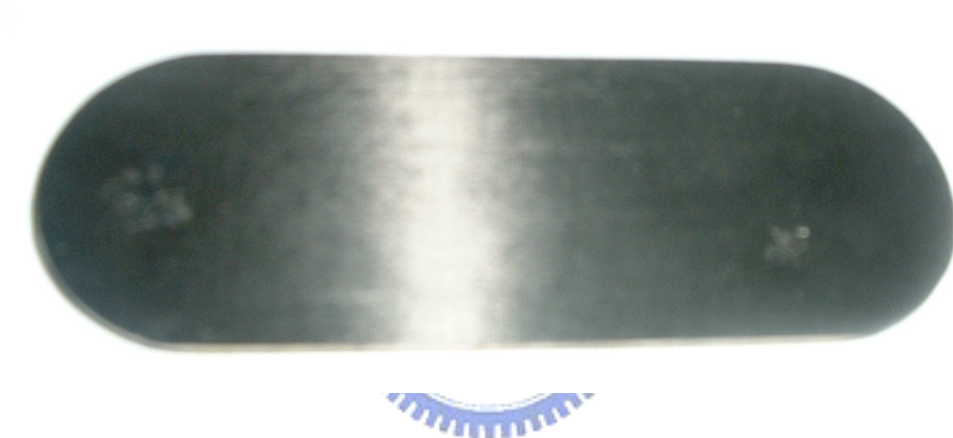


圖 5.1.1 振動板



圖 5.1.2 懸邊

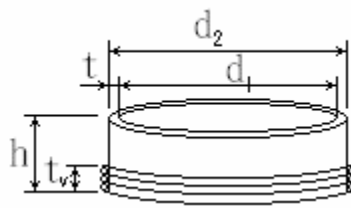


圖 5.2.1 音圈的結構

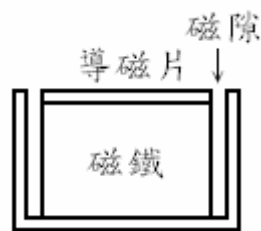


圖 5.2.2 場磁鐵的結構

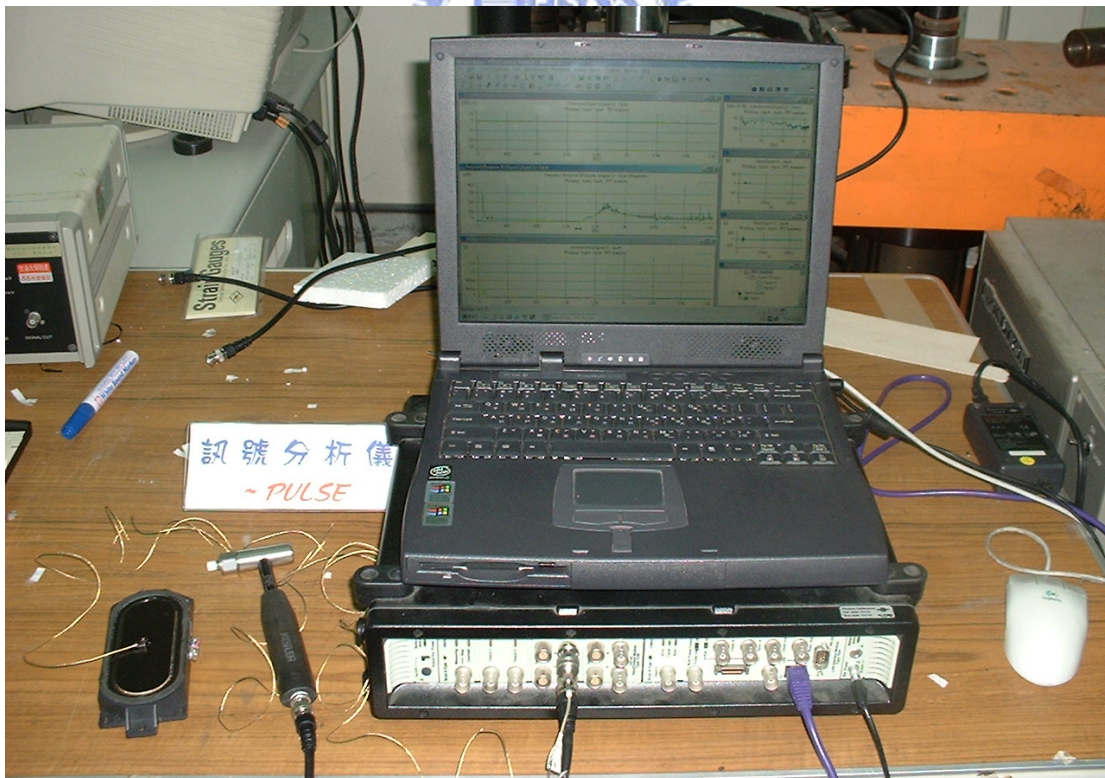


圖 5.3 Pulse 頻譜分析儀-敲擊

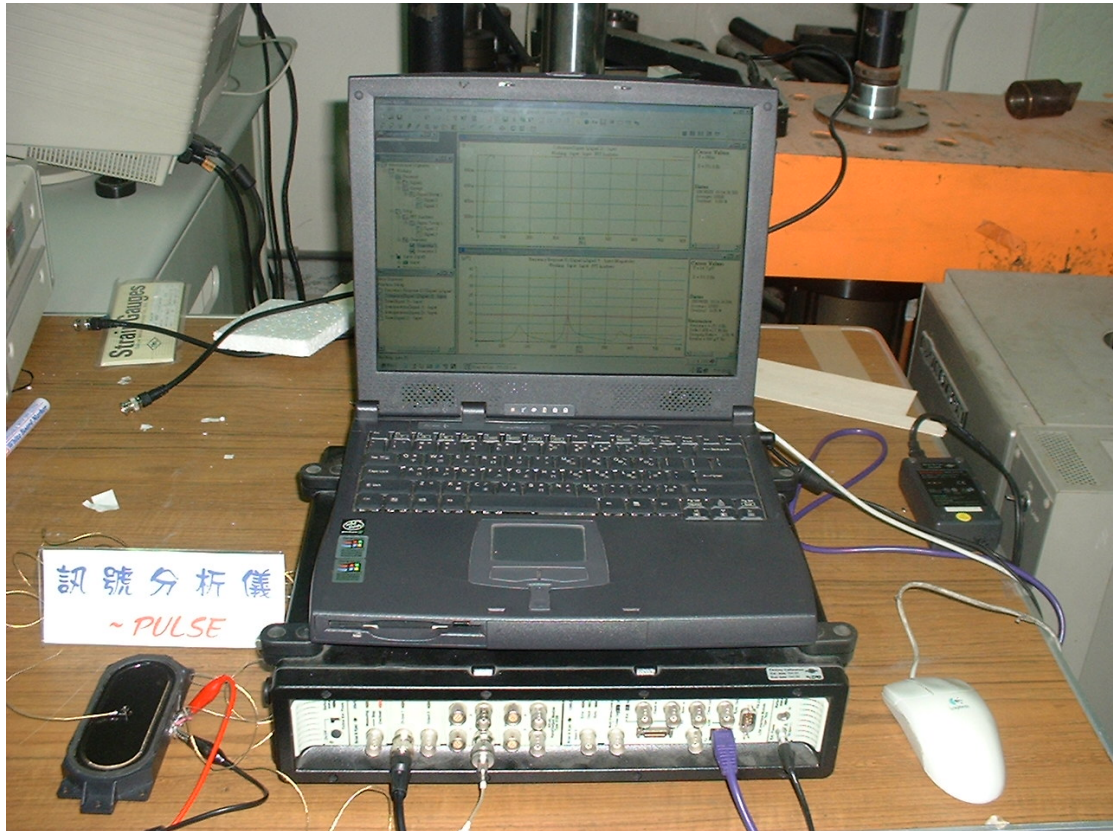


圖 5.4 Pulse 頻譜分析儀-激振



圖 5.5 Pulse 頻譜分析儀-雷射量測

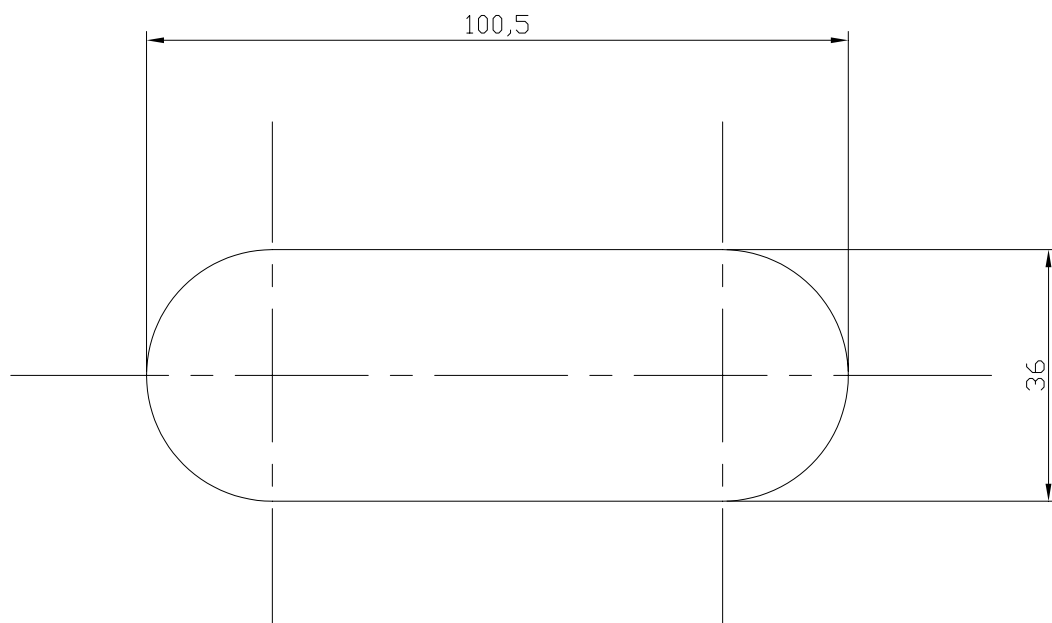
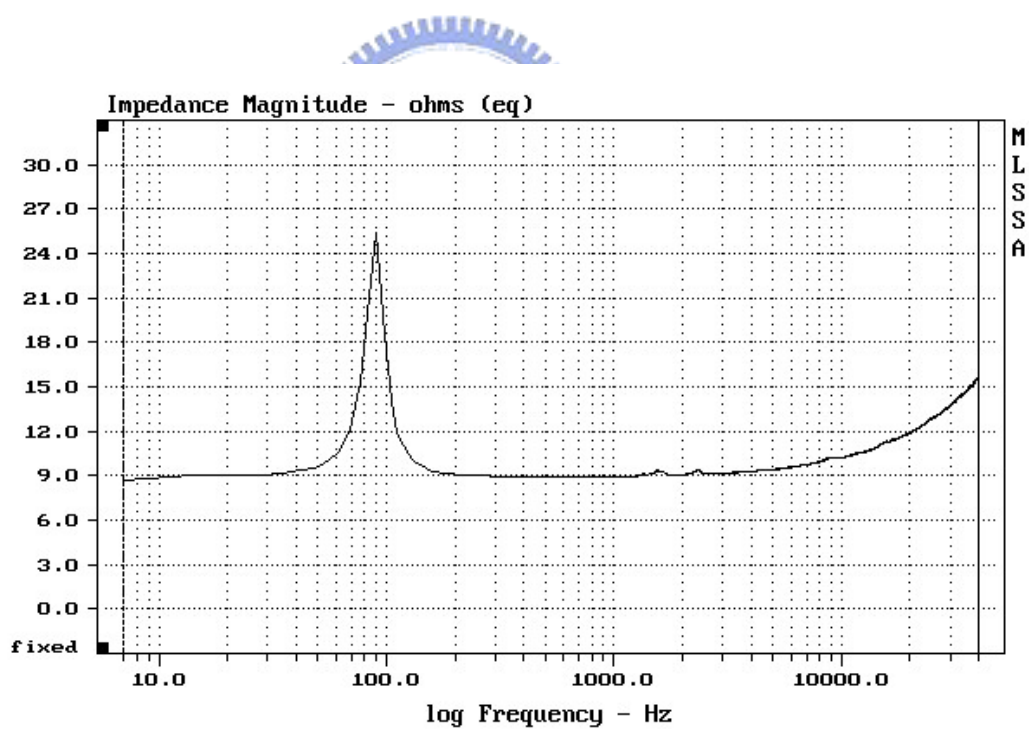


圖 6.1 實際的振動板尺寸



CURSOR: y = 15.6181 x = 40004.1849 (5735)

FREQUENCY DOMAIN MENU: Go View Reference Acquisition Setup Transfer Macro QC
 Overlay Calculate Printer DOS Units Library Info Exit
 F1 for Help MLSSA: Frequency Domain

圖 6.2 25*25 量測的阻抗值

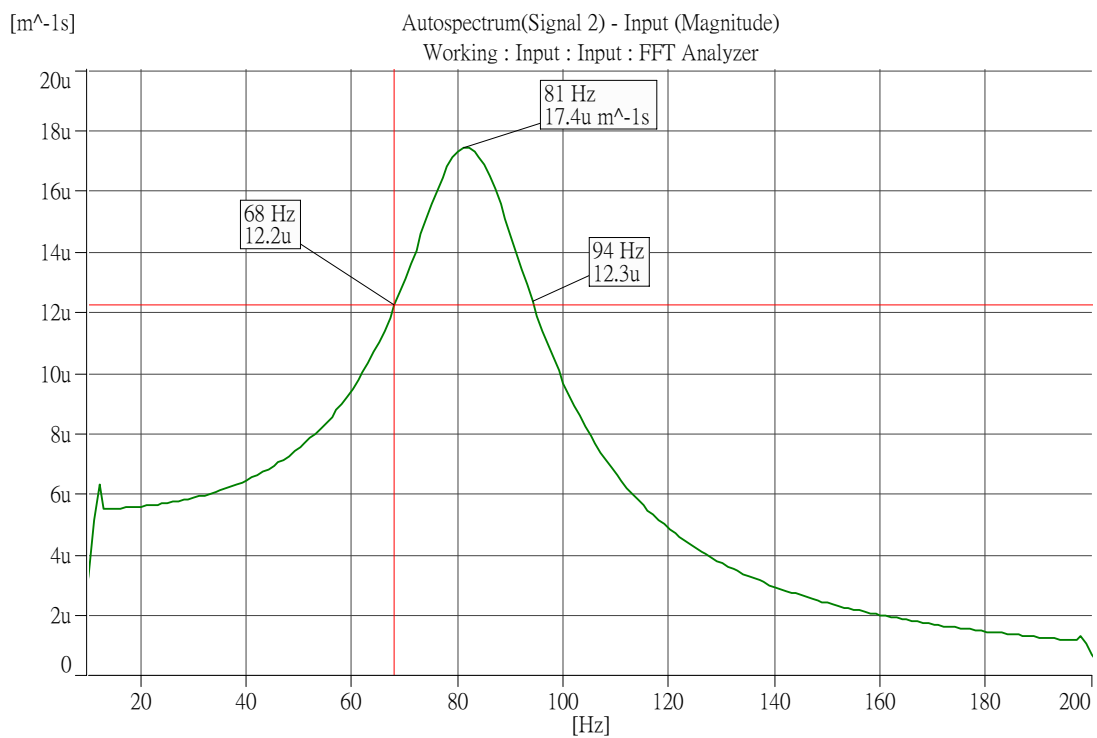


圖 6.3.1 雷射量測的自然頻率 20Hz~200Hz

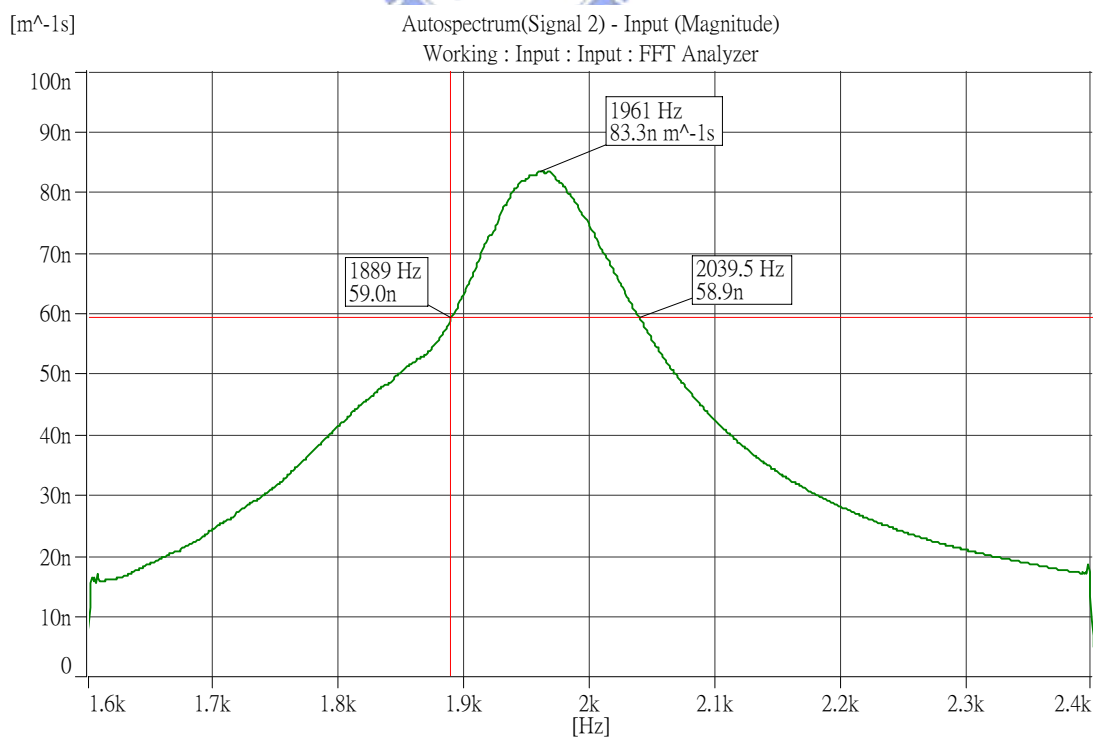


圖 6.3.2 雷射量測的自然頻率 1600Hz~2400Hz

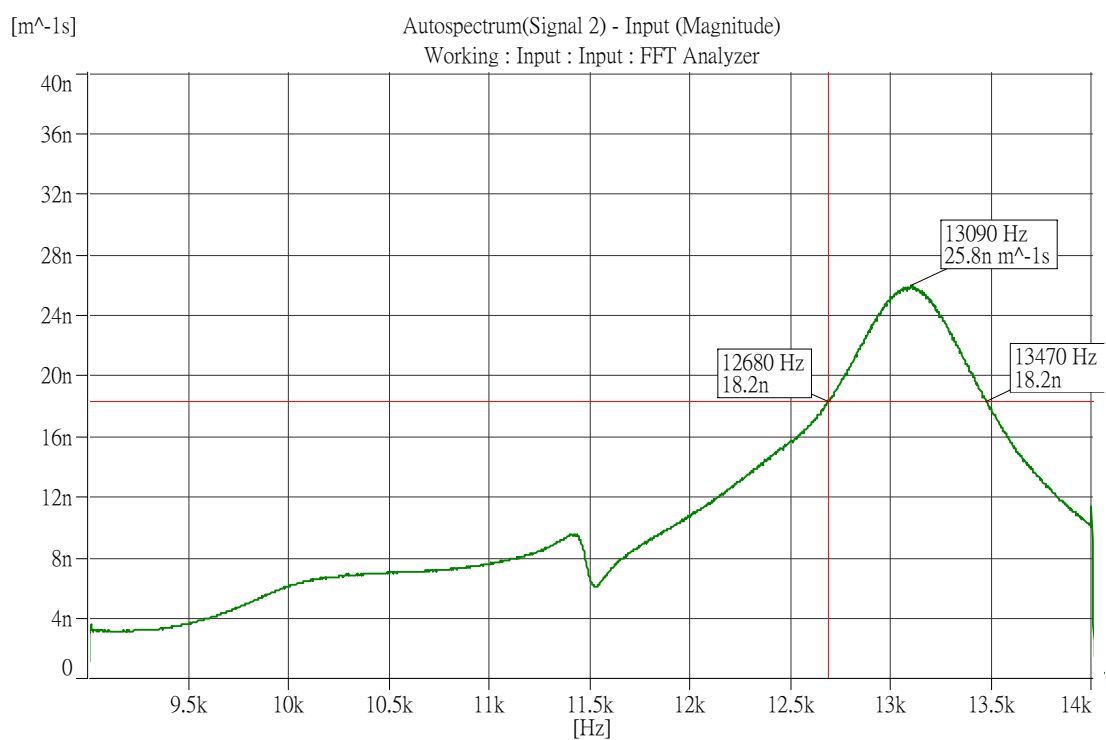


圖 6.3.3 雷射量測的自然頻率 9000Hz~14000Hz

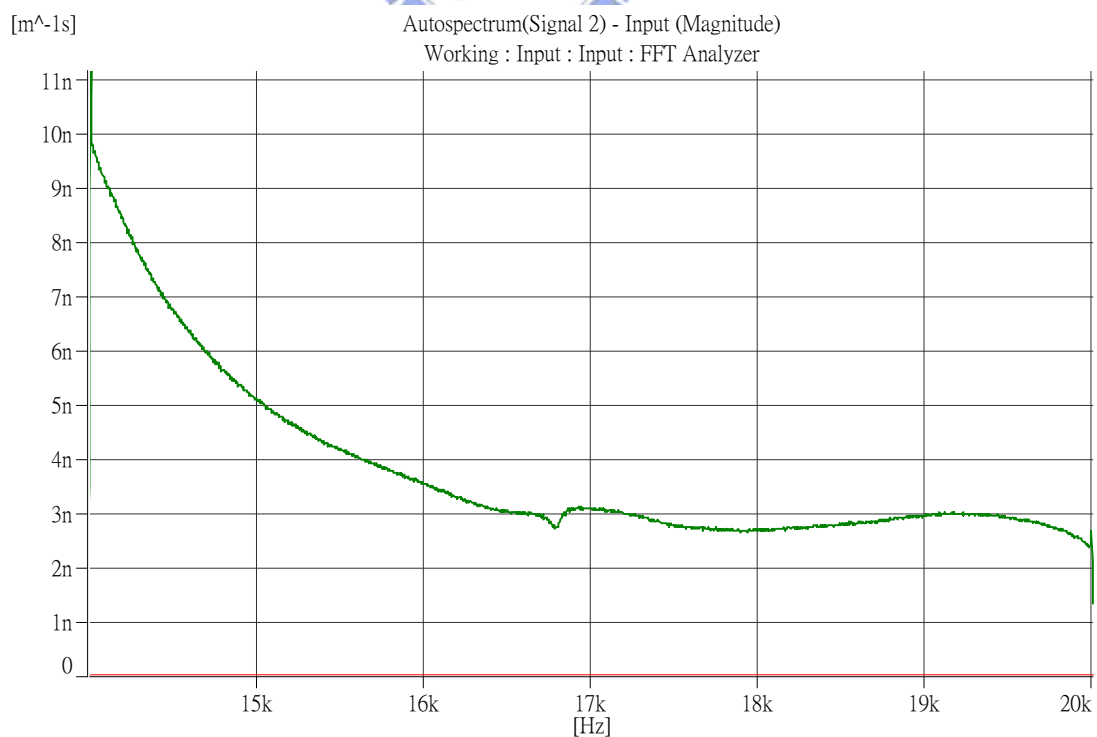


圖 6.3.4 雷射量測的自然頻率 14000Hz~20000Hz

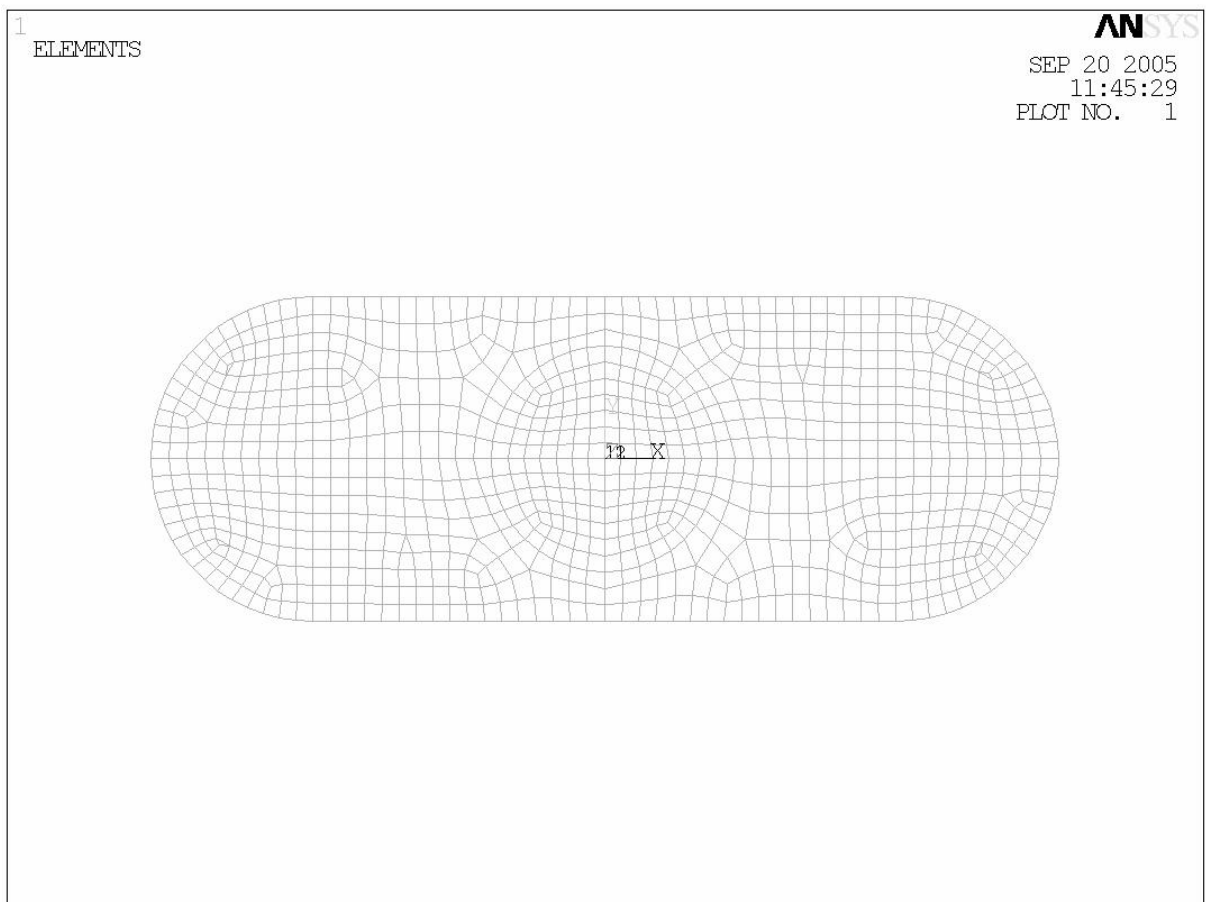


圖 6.4 有限元素網格圖

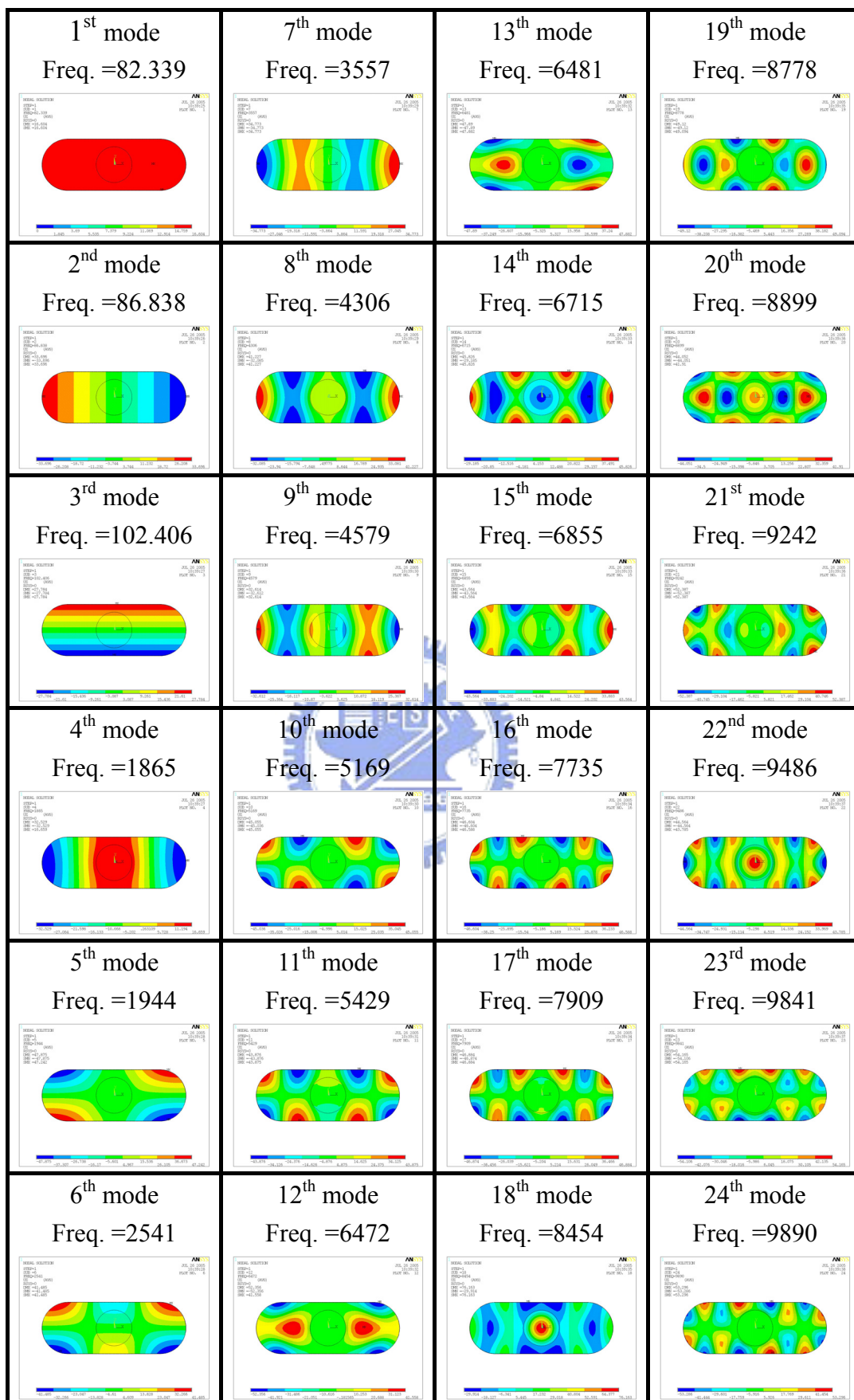


圖 6.5 前 24 個模態分析結果(25*25 激振器)

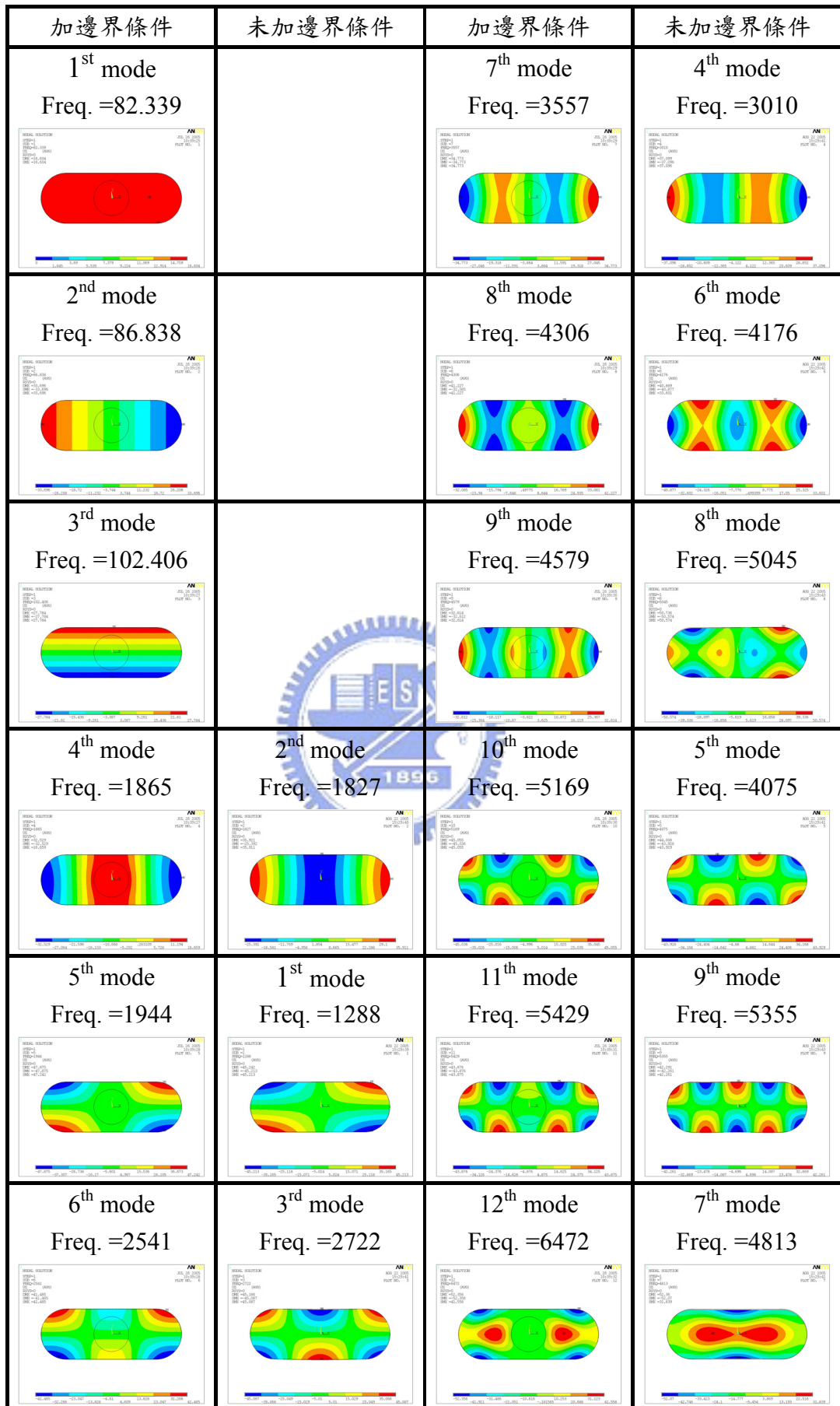


圖 6.6 加邊界條件與未加邊界條件模態比較($r=2.58$)

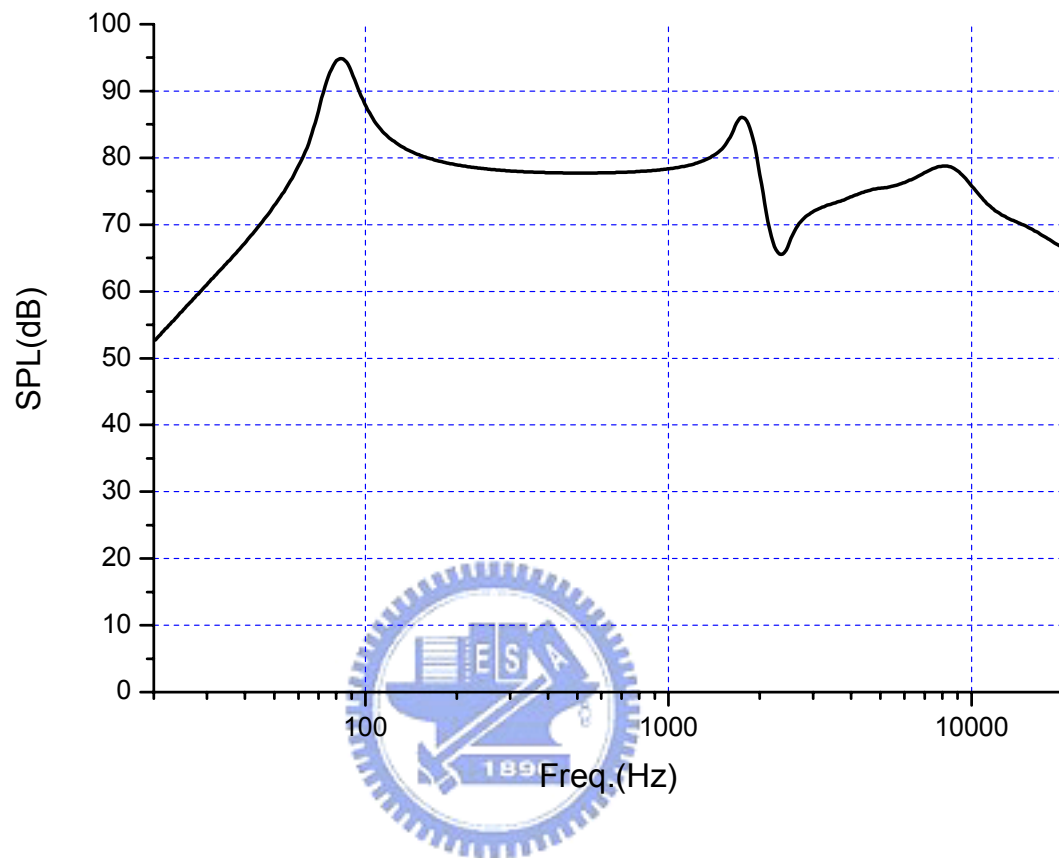


圖 6.7 分析聲壓結果(25*25 激振器)

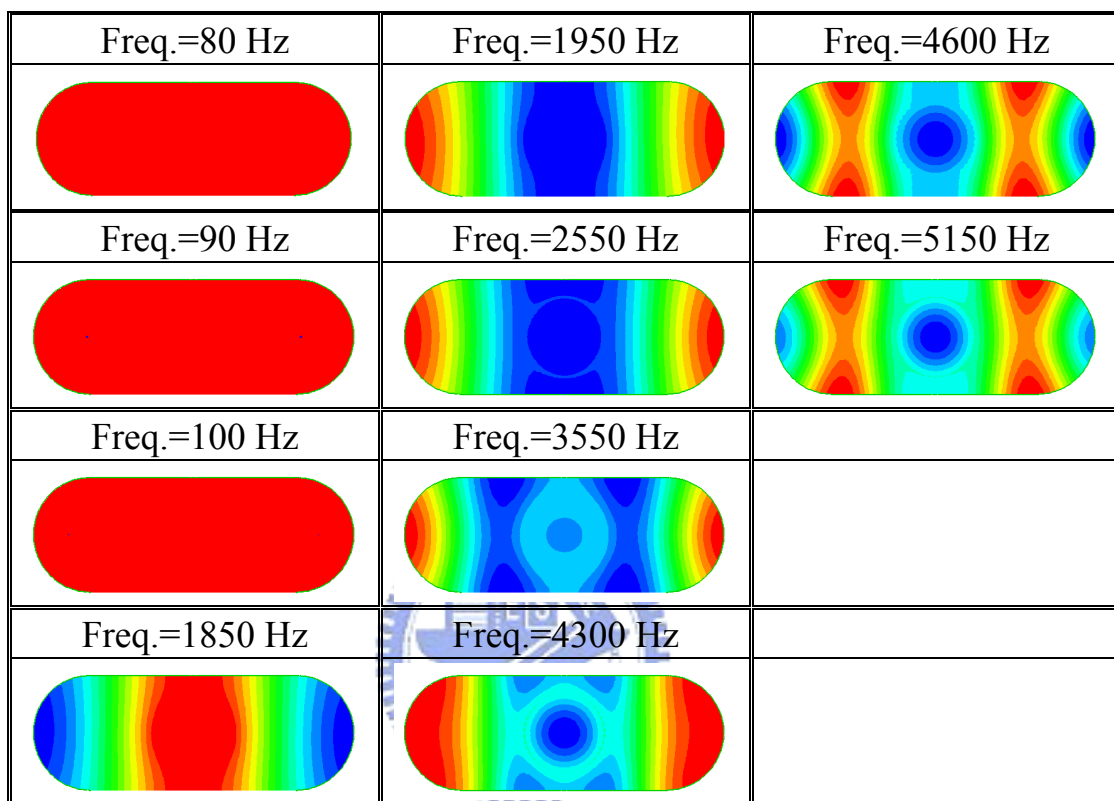


圖 6.8 聲壓分析前 10 個接近自然頻率的變形(25*25 激振器)

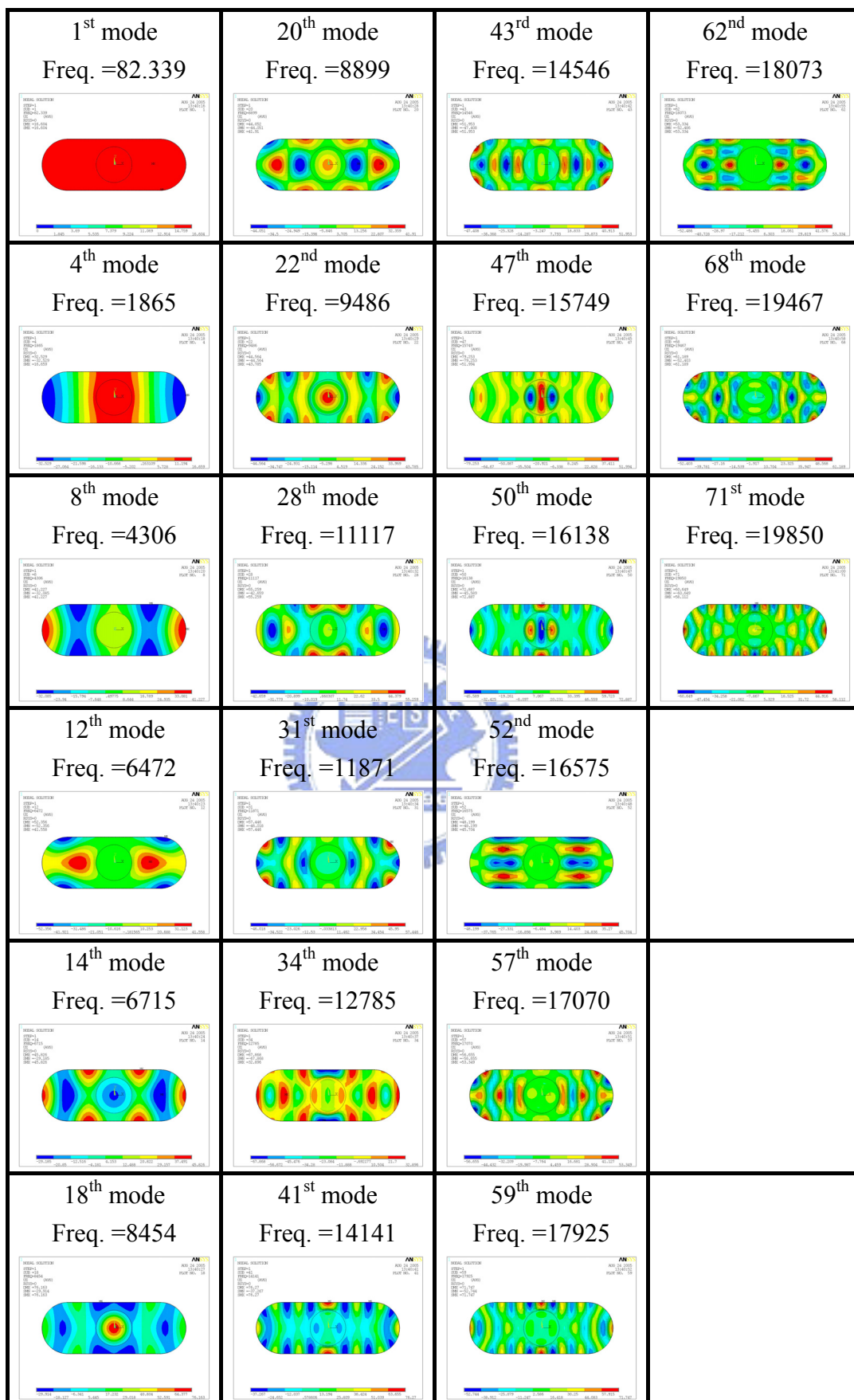


圖 6.9 頻率 20 k Hz 以內的所有對稱模態(25*25 激振器)

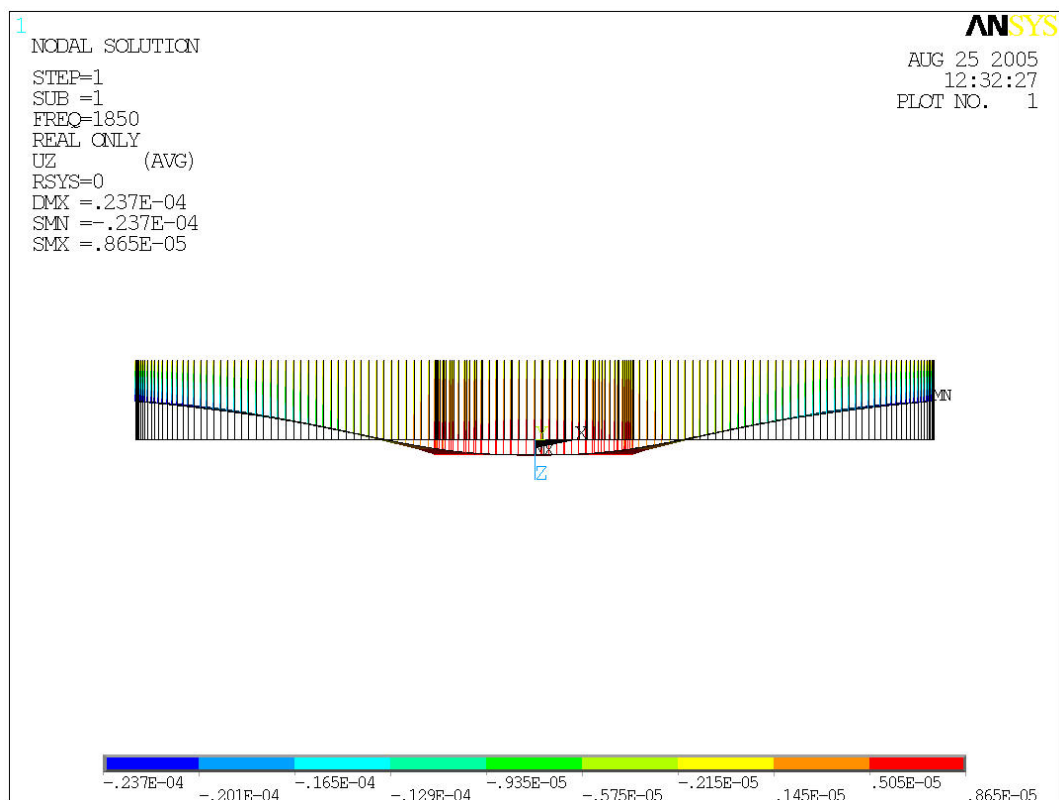


圖 6.10 中音谷極大值處變形圖(25*25 激振器)

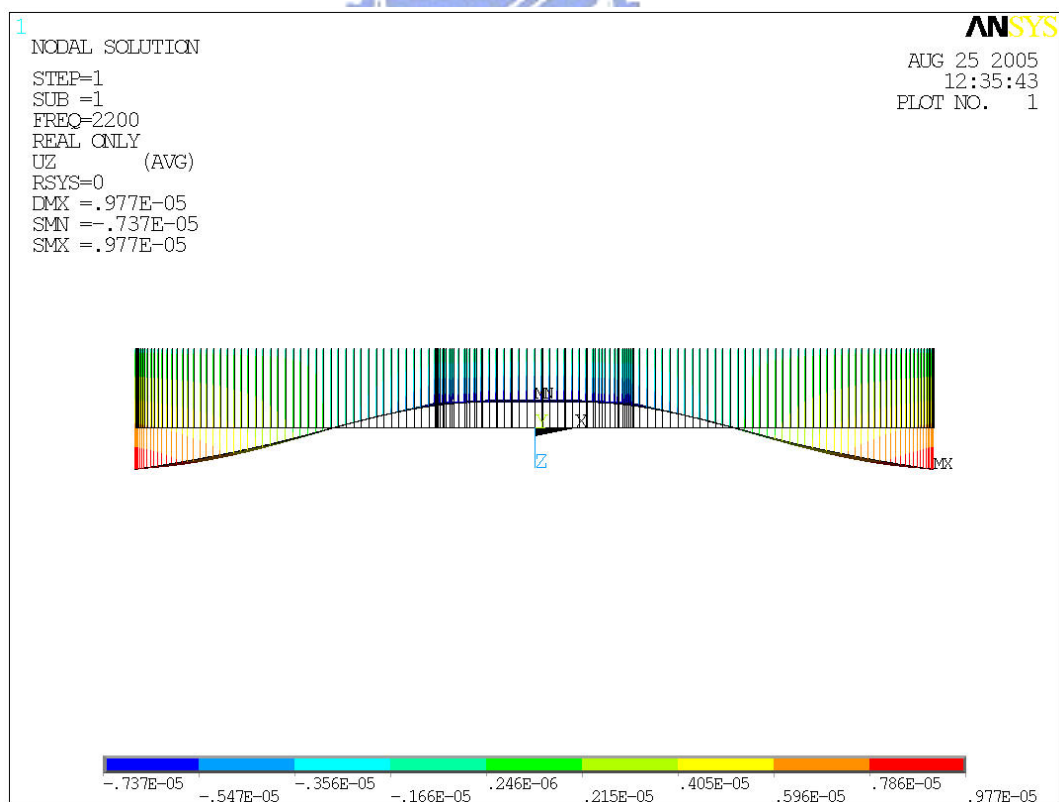


圖 6.11 中音谷極小值處變形圖(25*25 激振器)

25*25聲壓圖

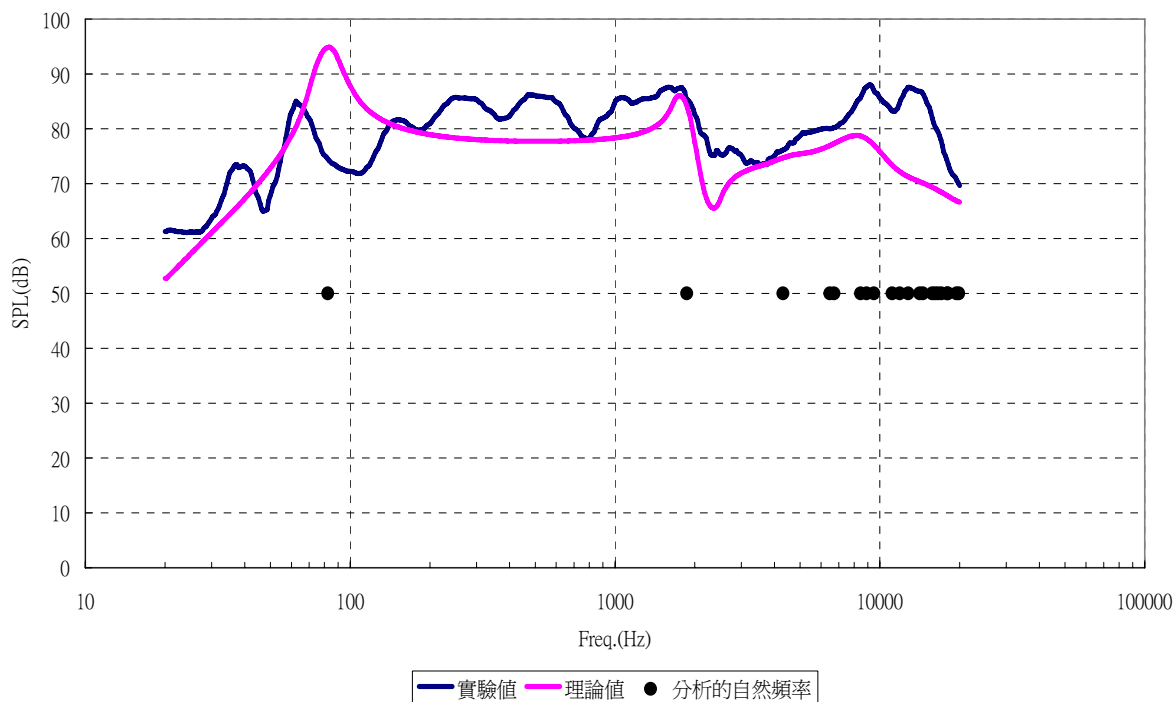


圖 6.12 實驗量測聲壓與分析比較(25*25 激振器)

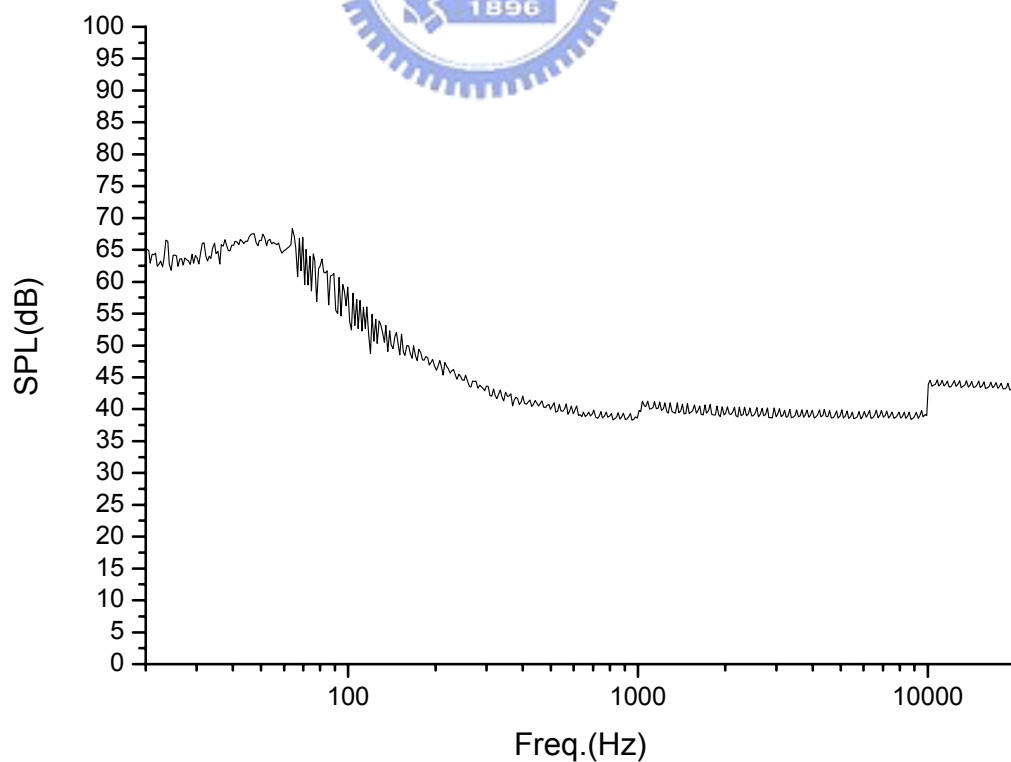


圖 6.13 量測環境的周邊聲壓

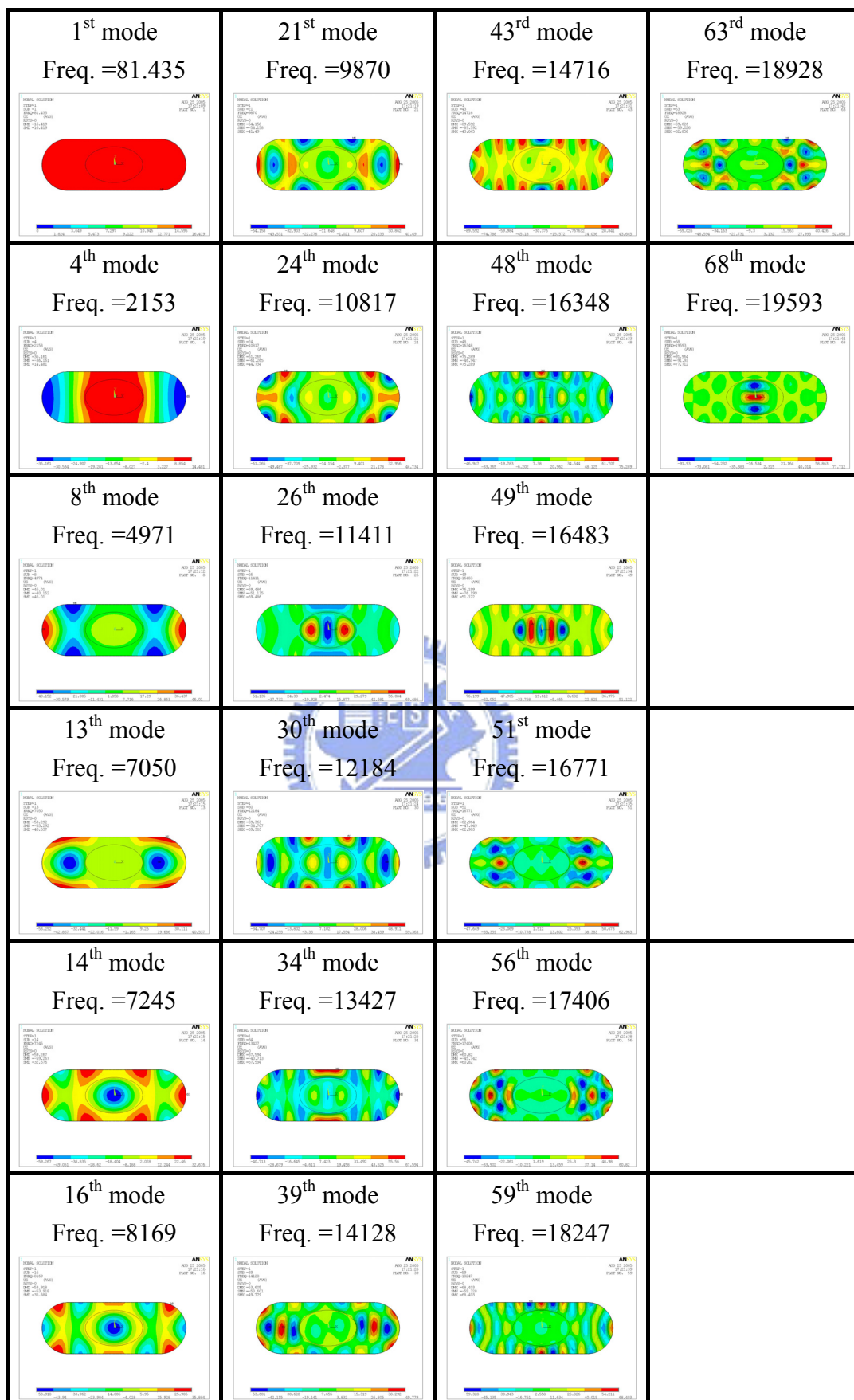


圖 6.14 頻率 20k Hz 以內的所有對稱模態(40*25 激振器)

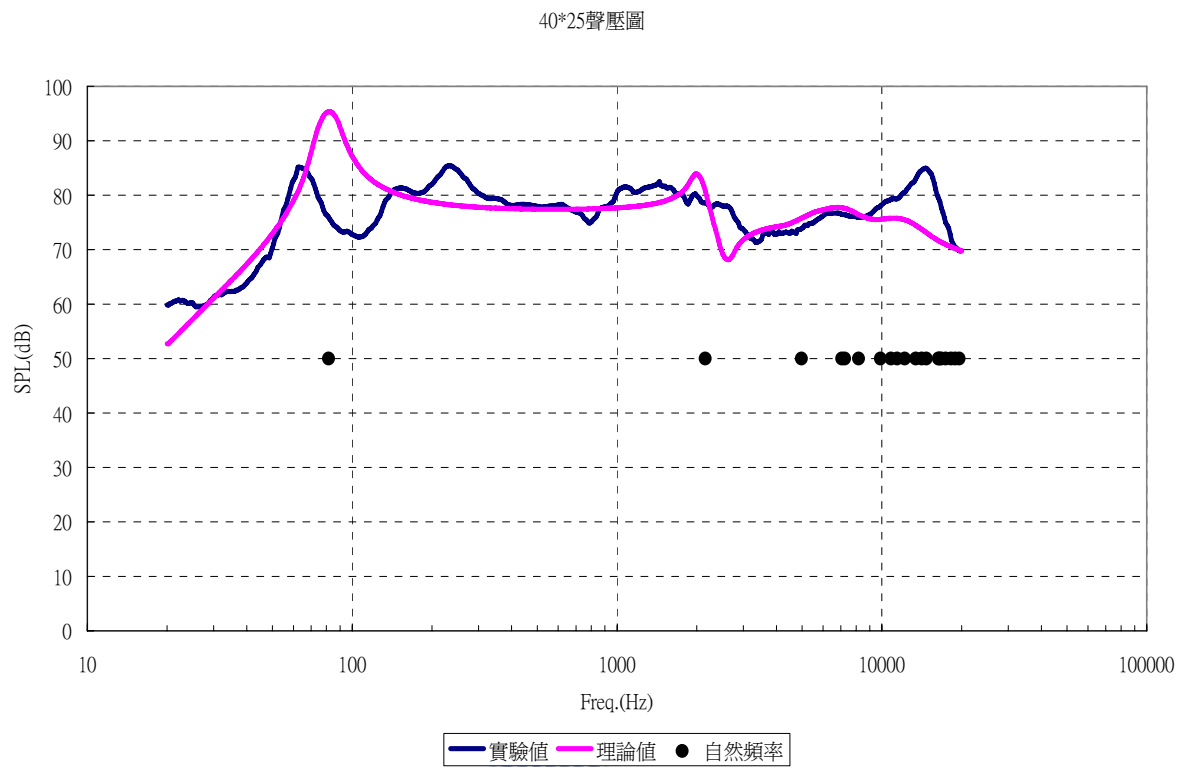


圖 6.15 實驗量測聲壓與分析比較(40*25 激振器)

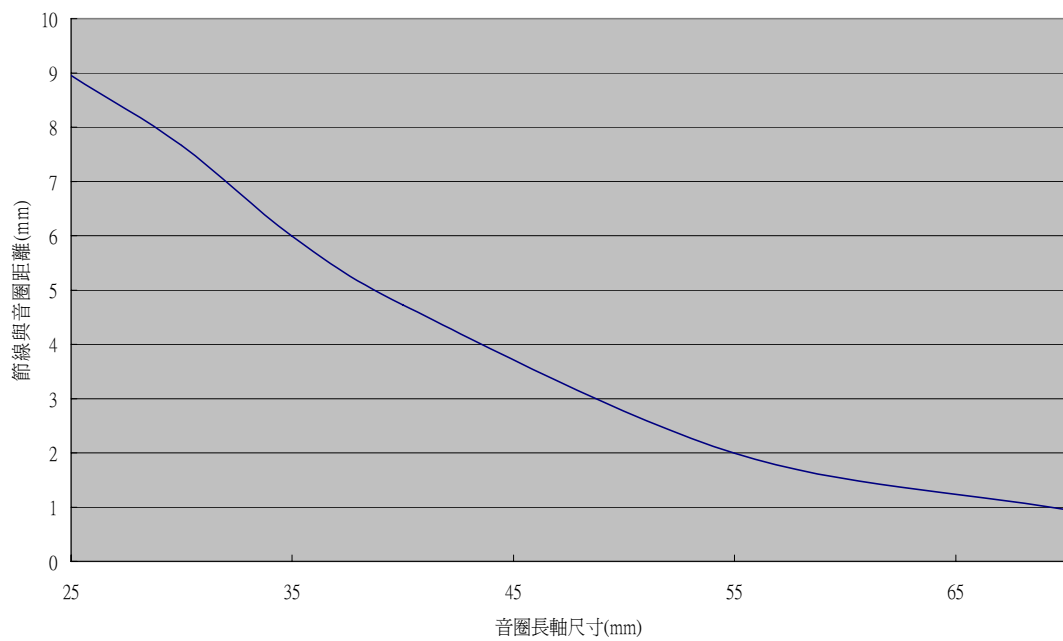


圖 6.16 音圈大小與節線位置的關係

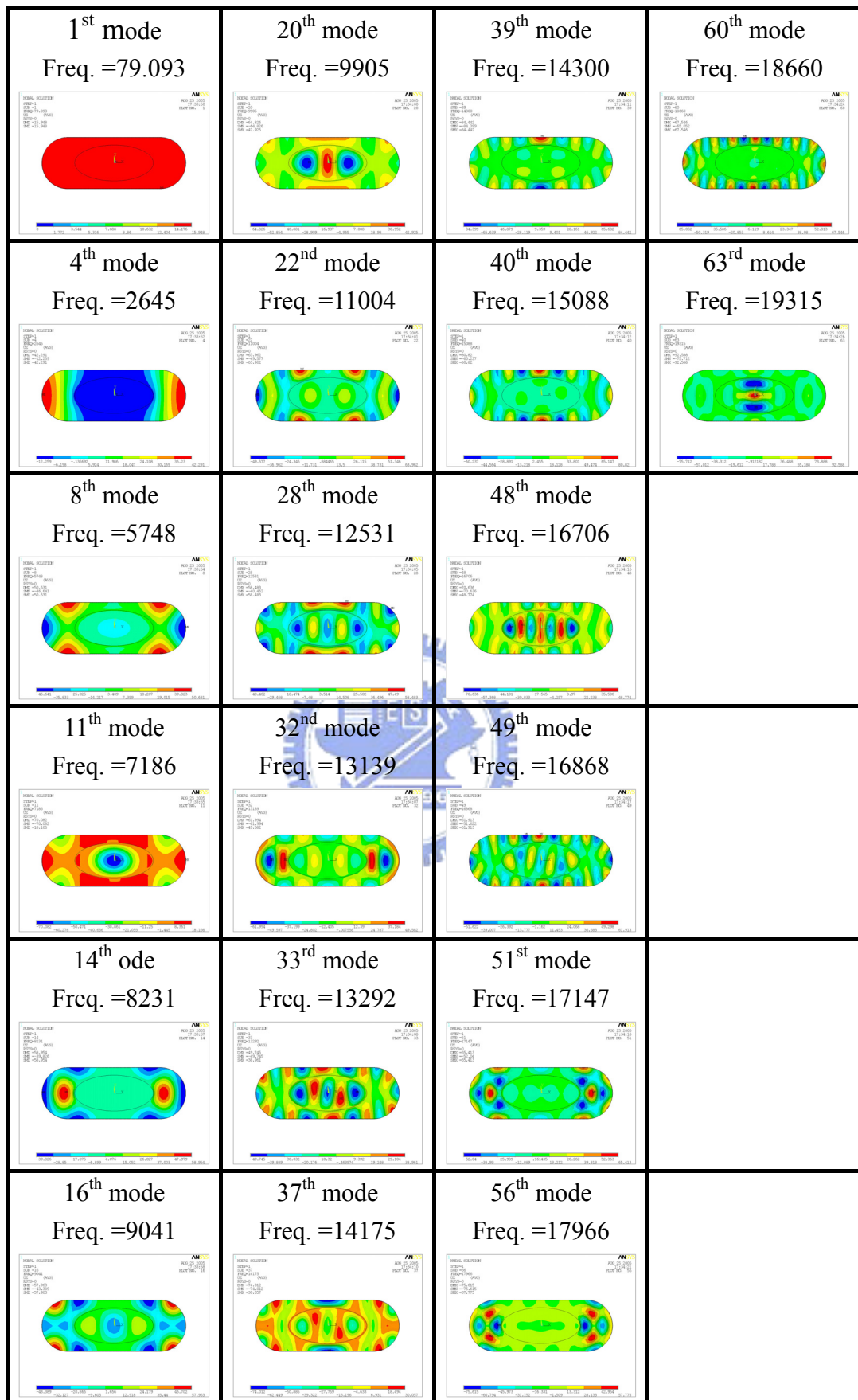


圖 6.17 頻率 20k Hz 以內的所有對稱模態(55*25 激振器)

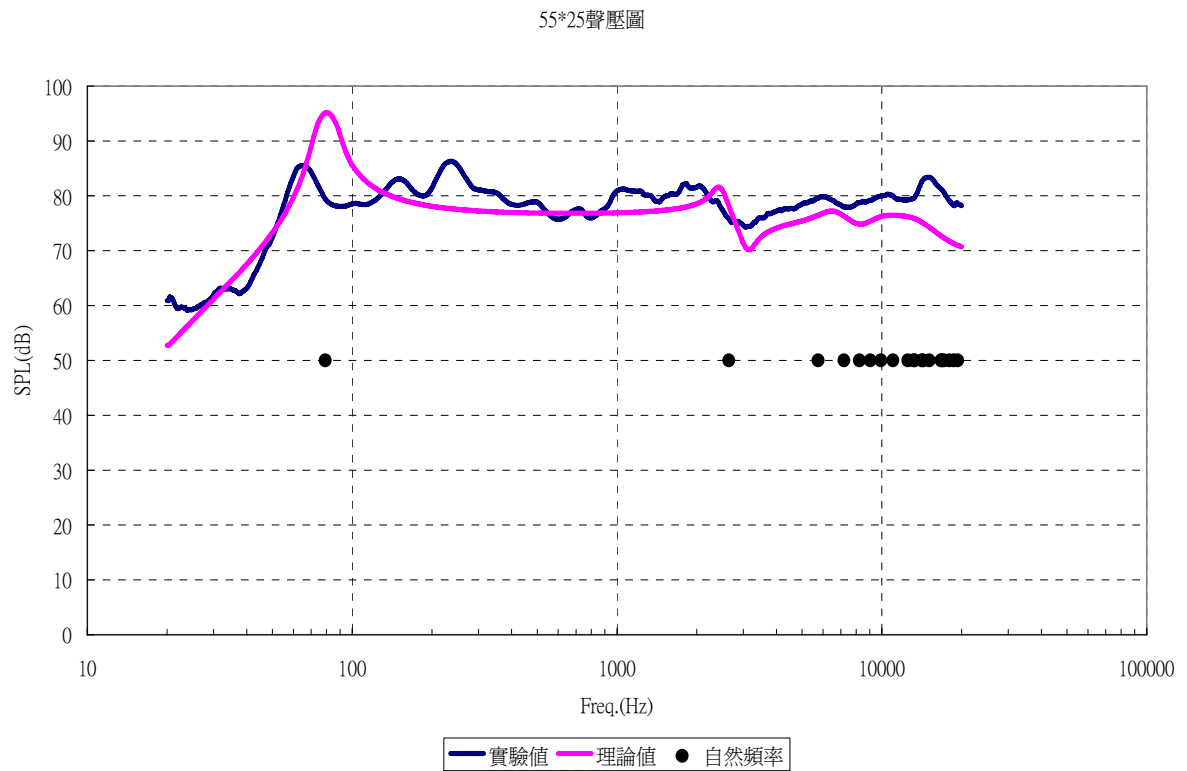


圖 6.18 實驗量測聲壓與分析比較(55*25 激振器)

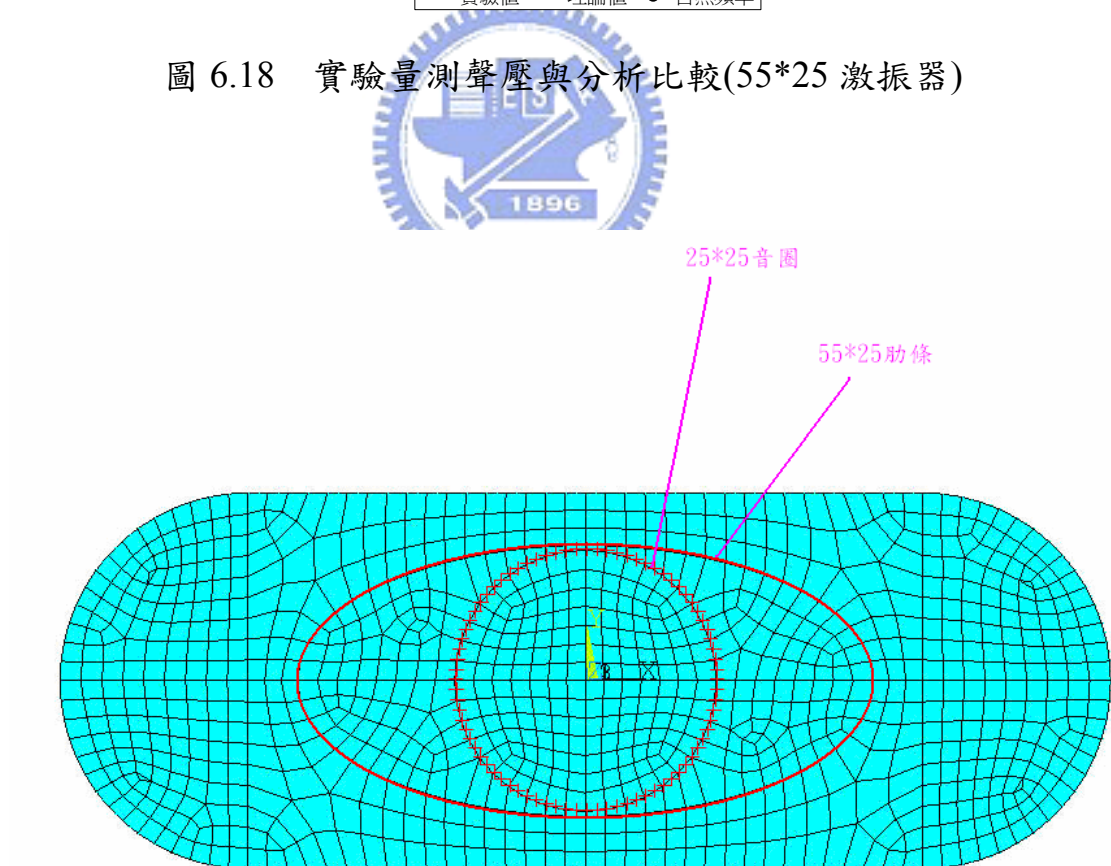


圖 6.19 25*25 激振器加 55*25 肋條圖形

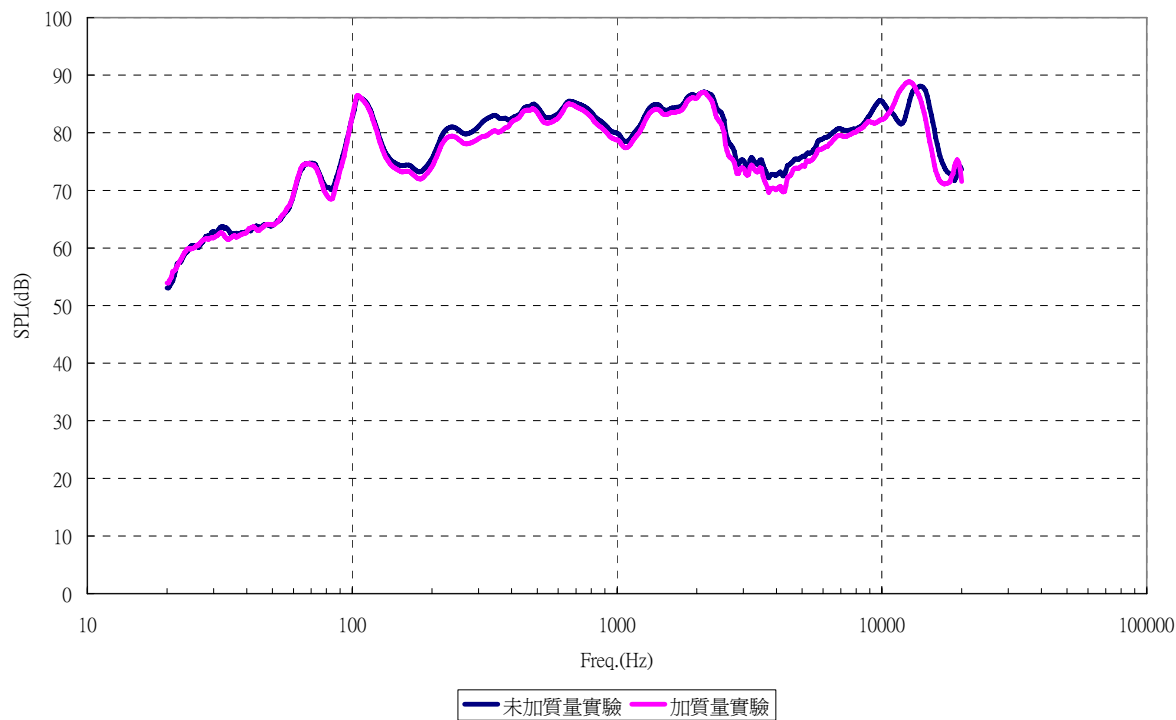


圖 6.20 25*25 激振器加 55*25 肋條實驗比較(雙面膠)

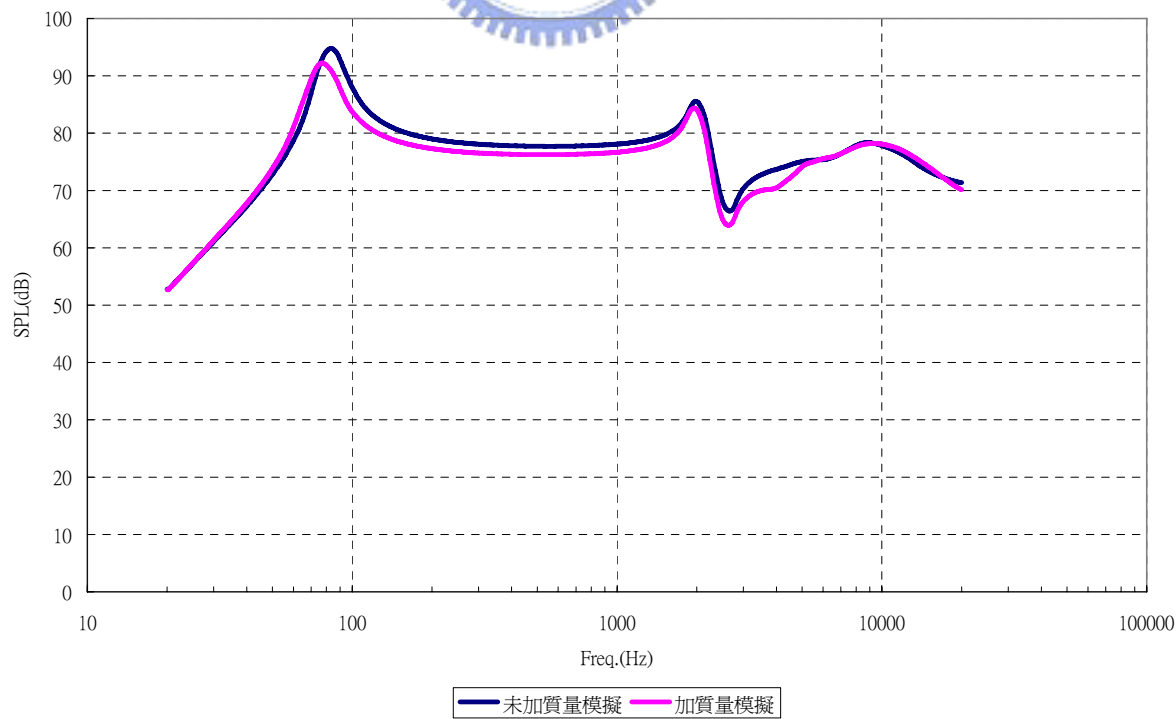


圖 6.21 25*25 激振器加 55*25 肋條 ANSYS 比較(只有質量)

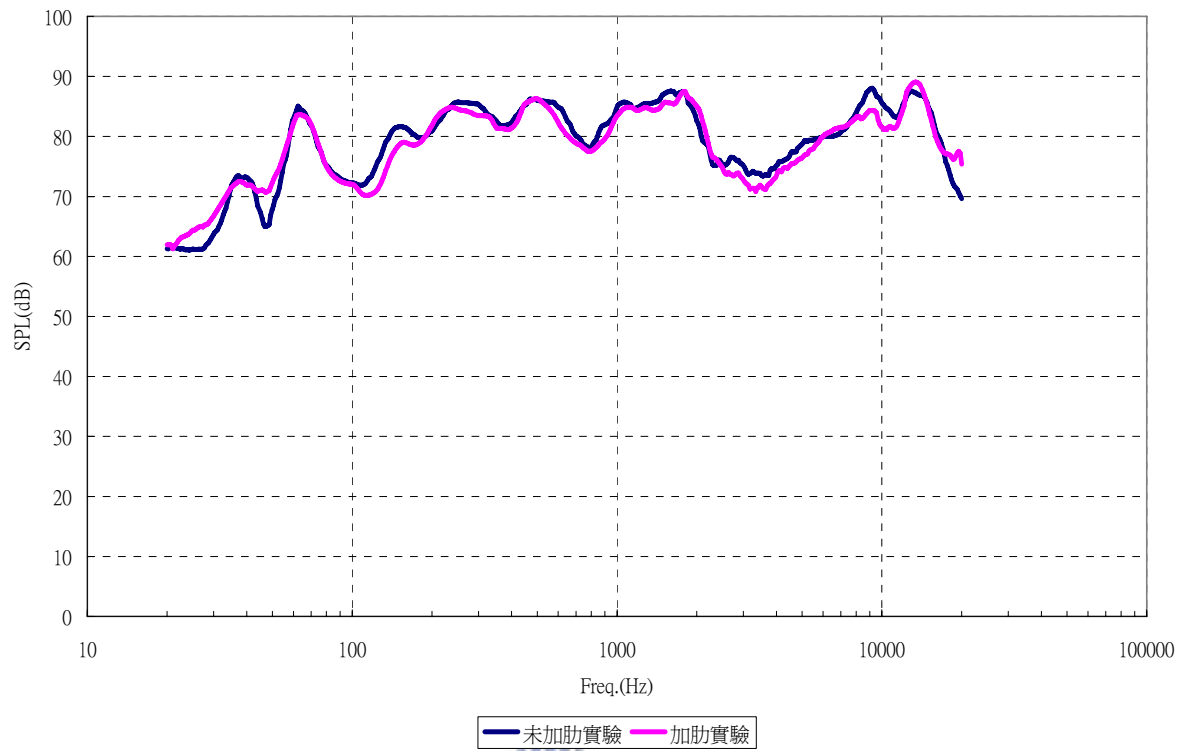


圖 6.22 25*25 激振器加 55*25 肋條實驗比較(瞬間膠)

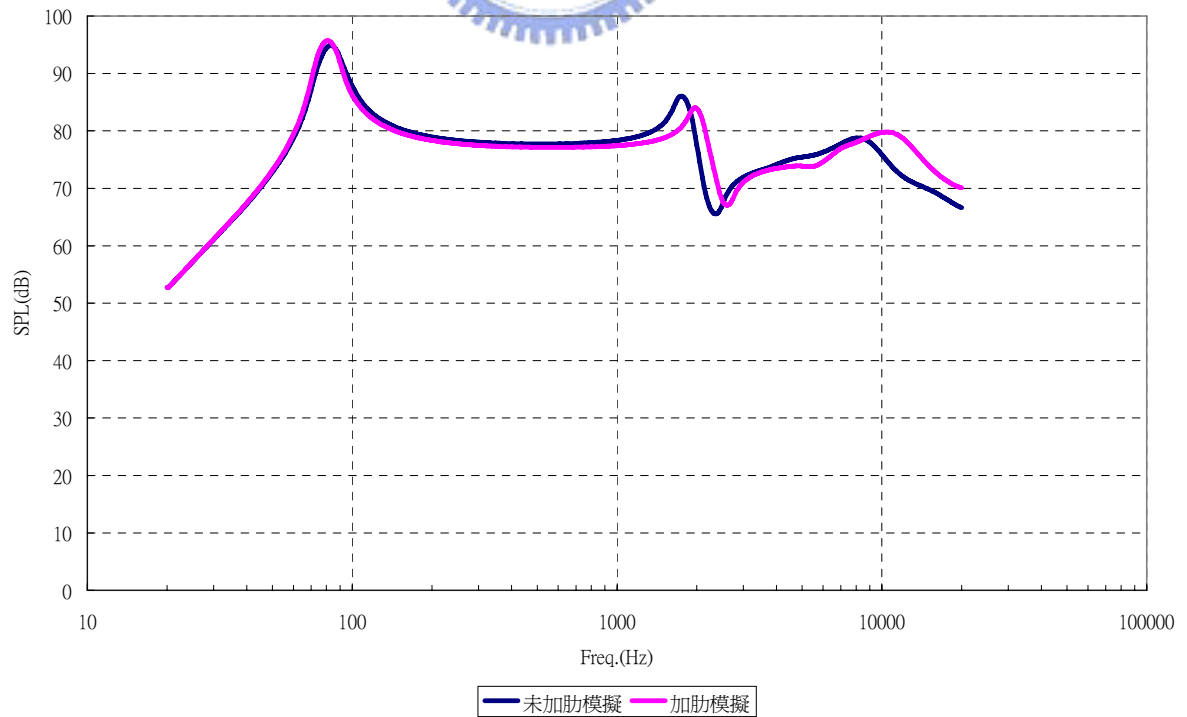


圖 6.23 25*25 激振器加 55*25 肋條 ANSYS 比較(beam)

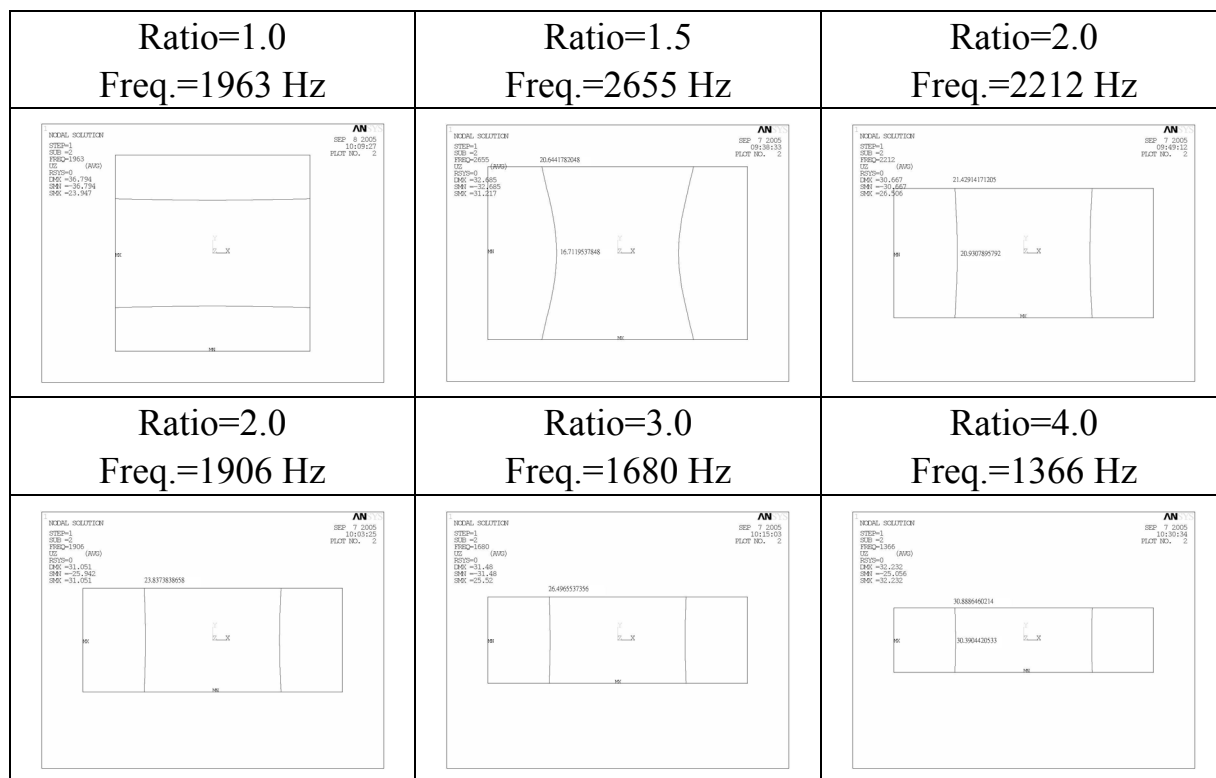


圖 7.1 振動板長寬比和自然頻率

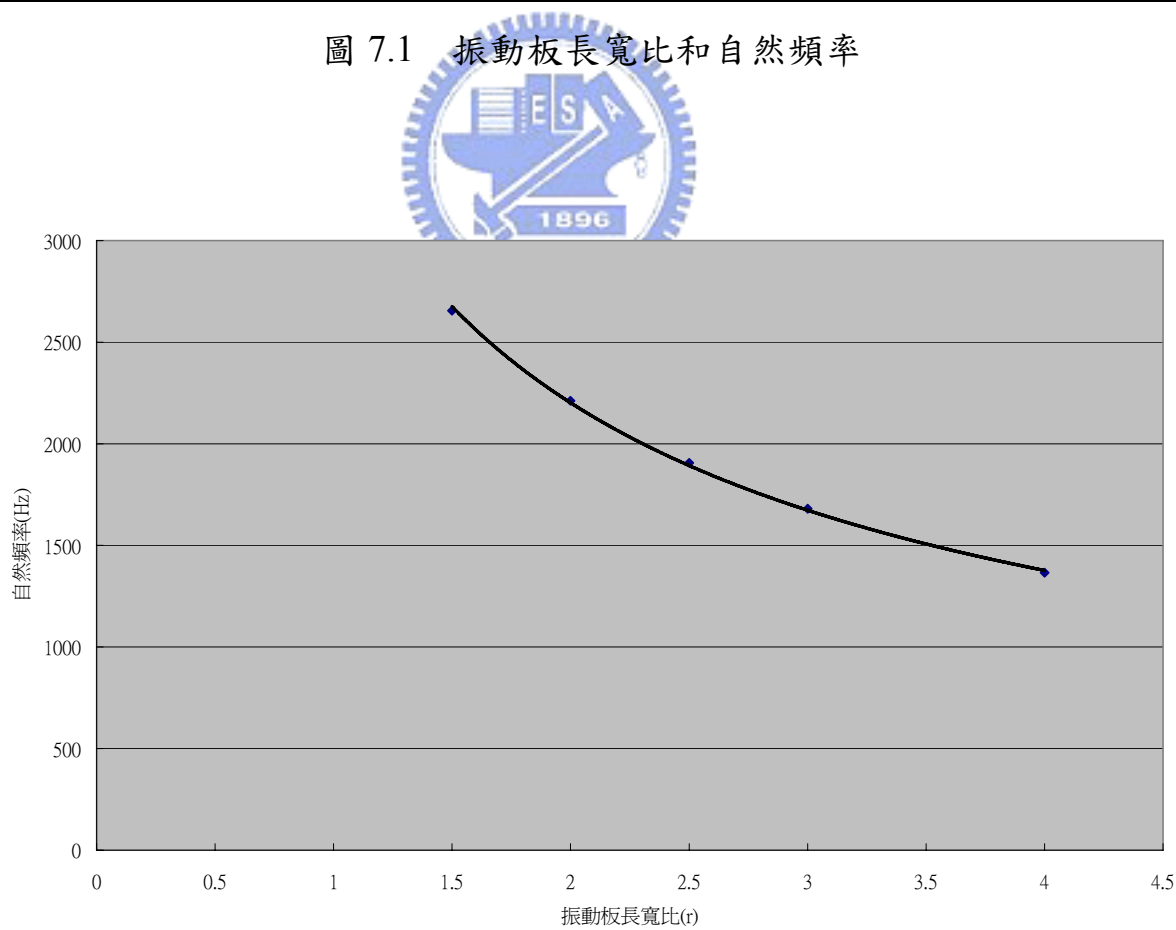


圖 7.2 振動板長寬比和自然頻率之間的關係

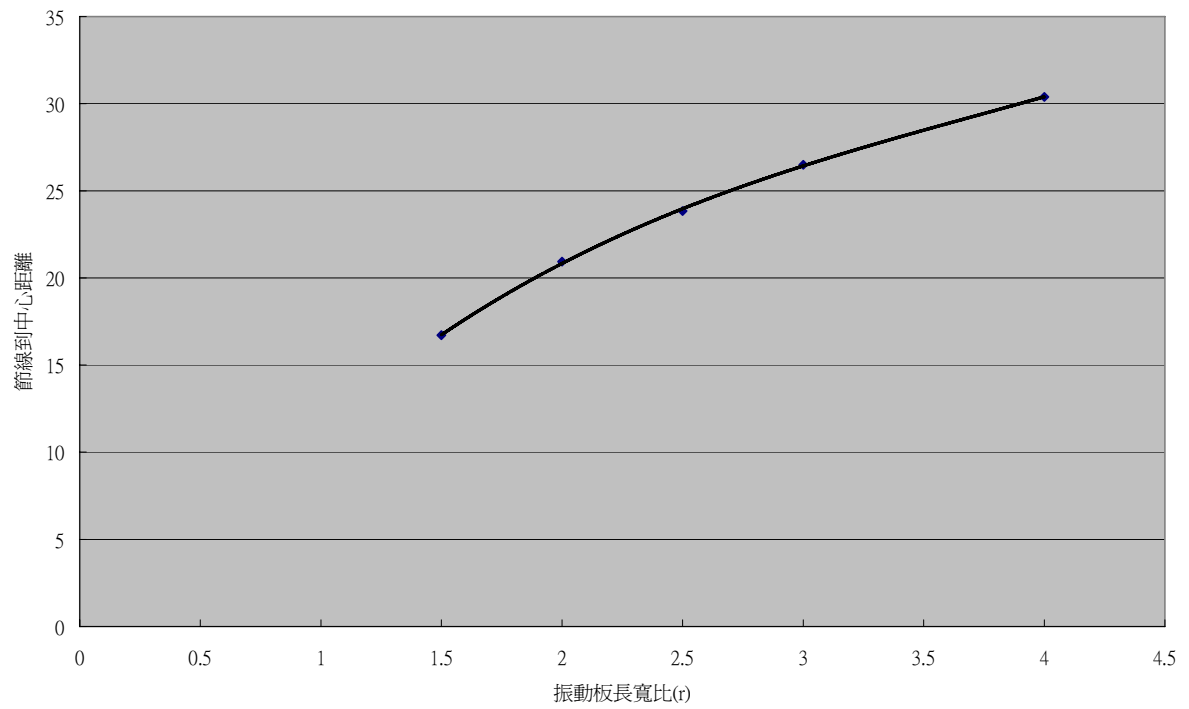


圖 7.3.1 振動板長寬比和節線之間的關係

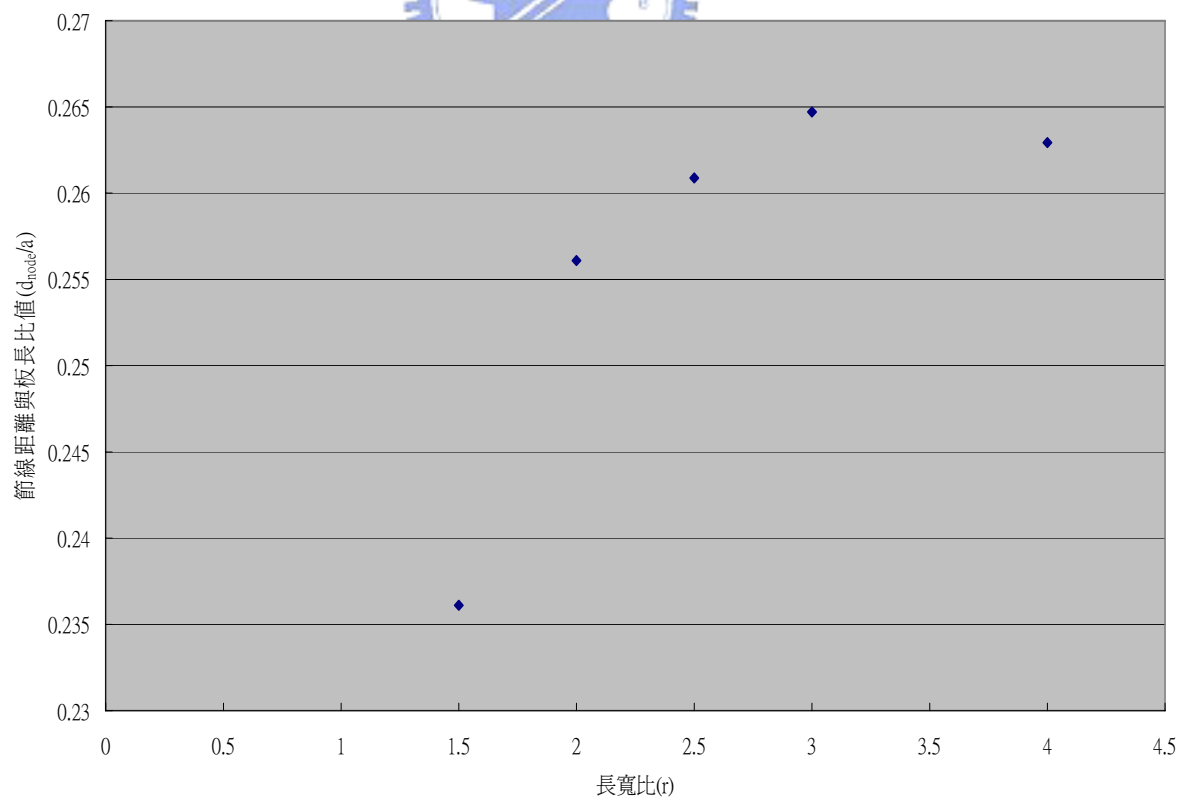


圖 7.3.2 振動板長寬比、節線距離和板長的關係

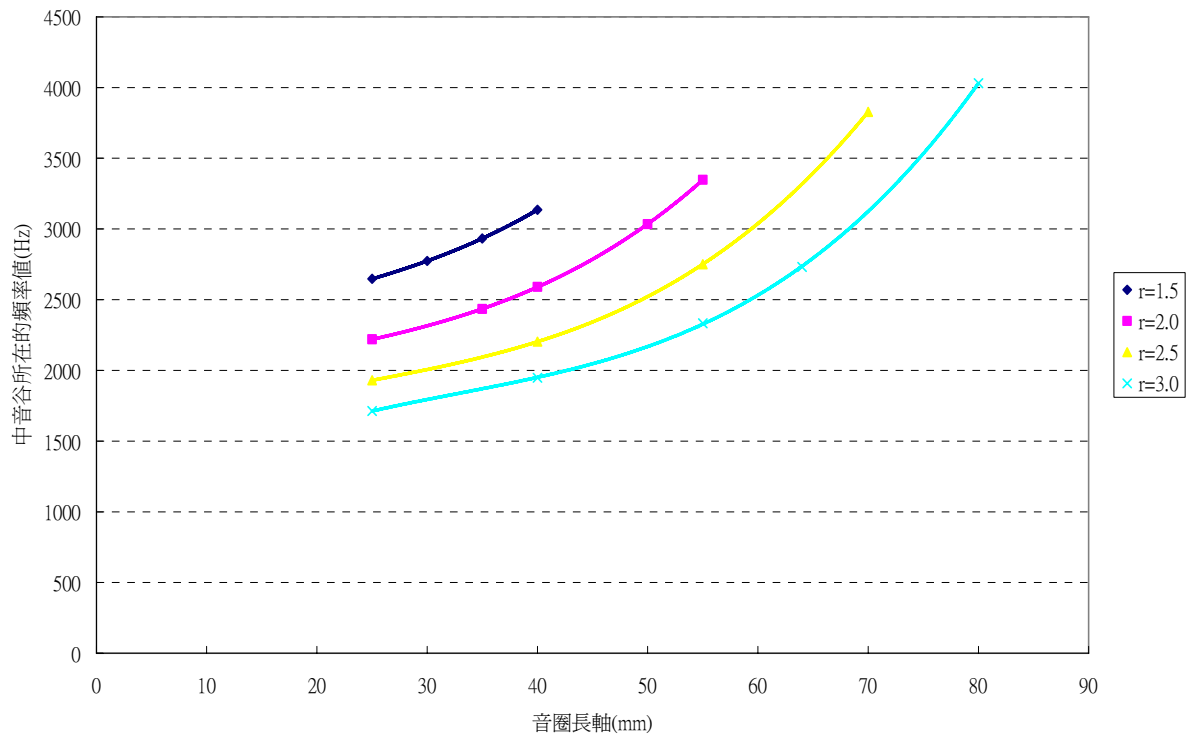


圖 7.4 音圈長軸與中音谷所在的自然頻率的關係

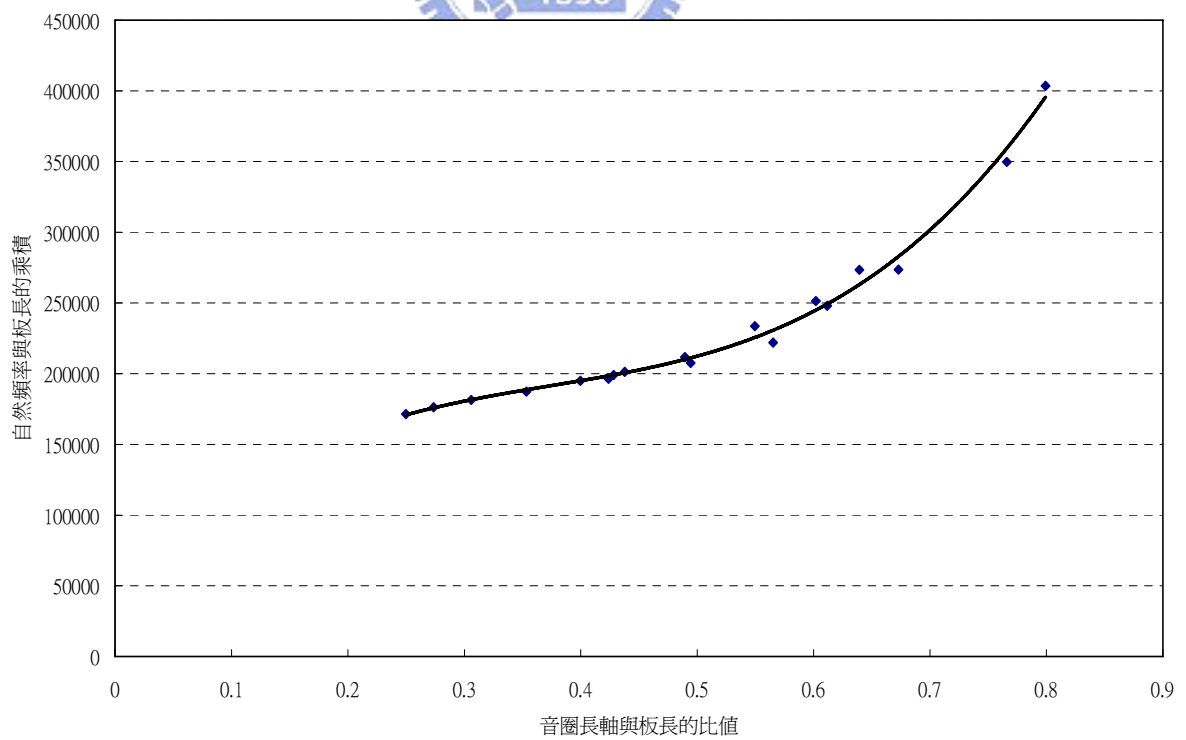


圖 7.5 音圈長軸、自然頻率和板長的關係

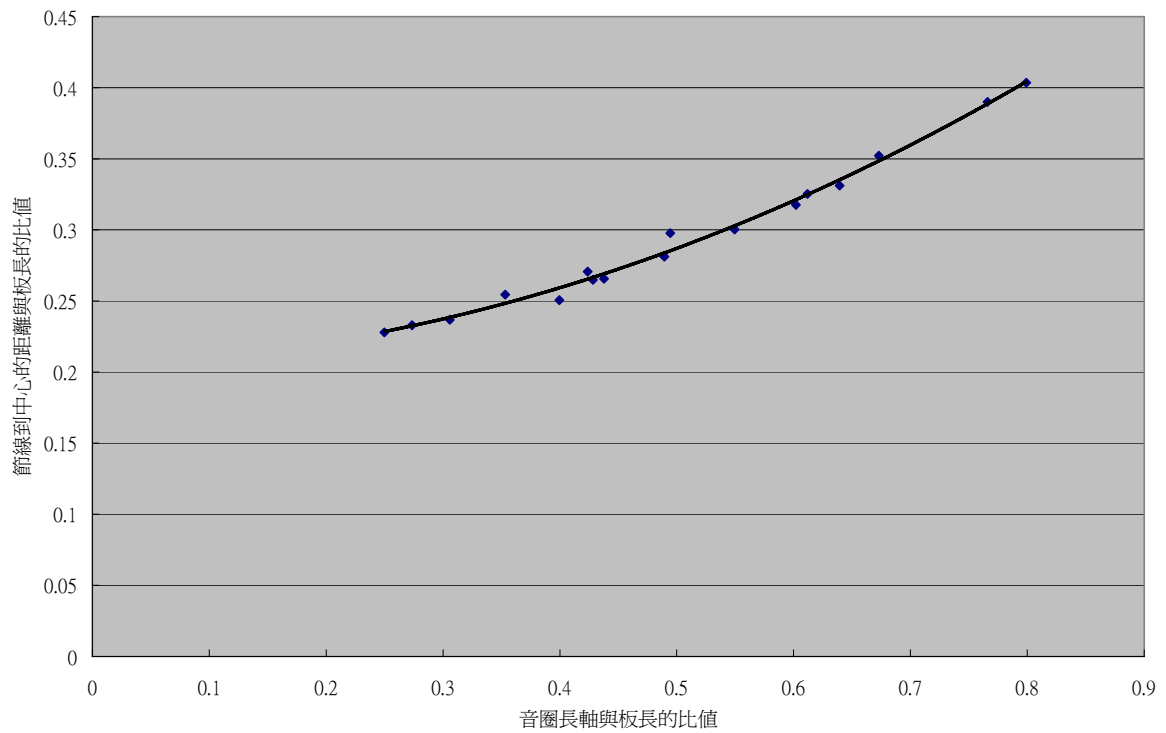


圖 7.6 音圈長軸、節線距離與板長的關係

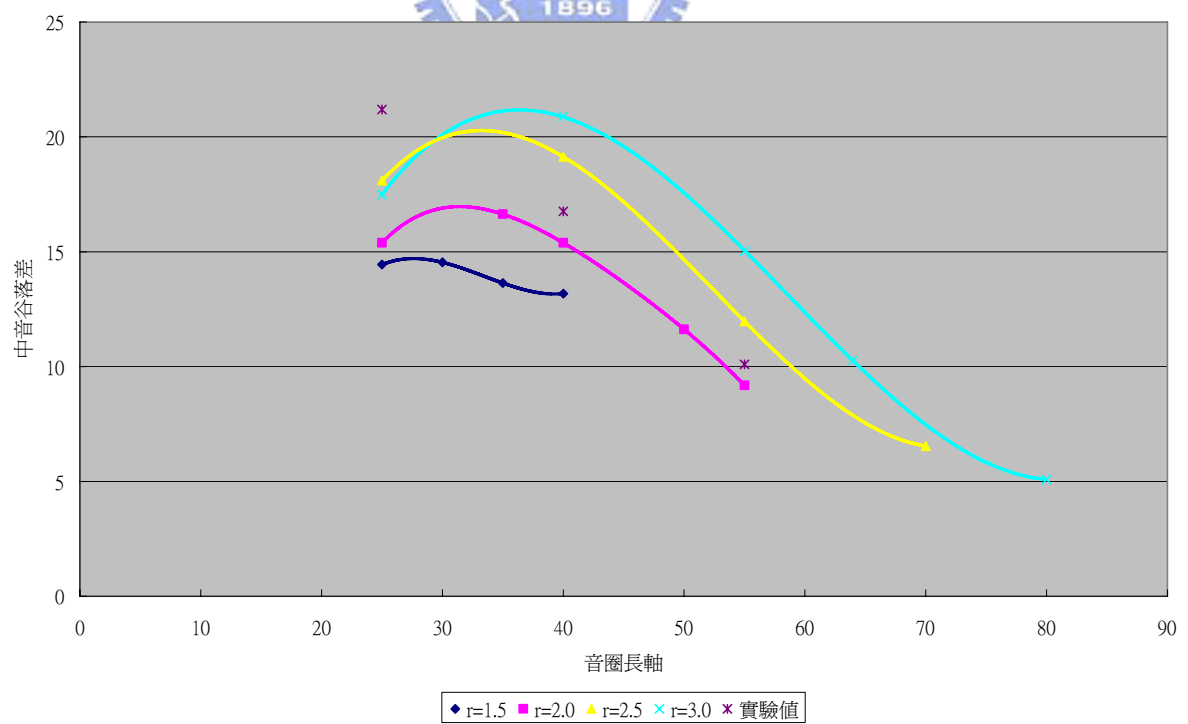


圖 7.7 音圈長軸和中音谷落差的關係

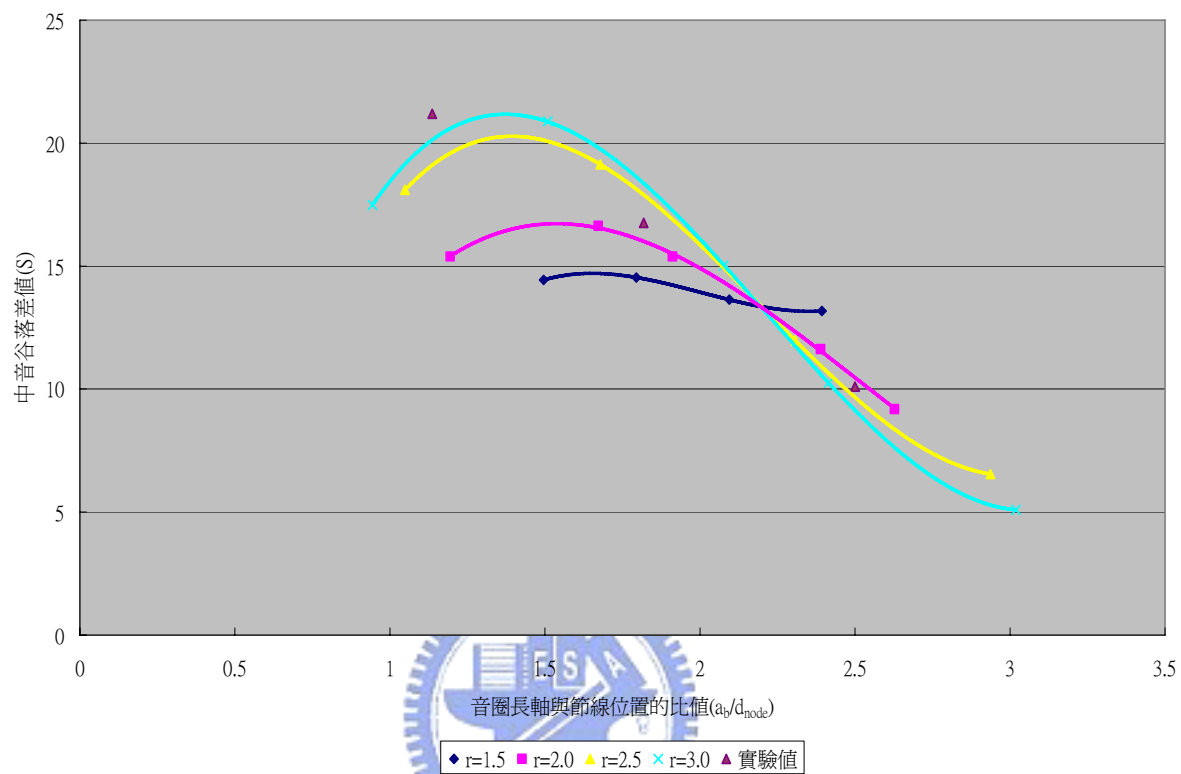


圖 7.8 音圈長軸、中音谷落差值和節線的關係