

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

加勁板之彈性支承的剛度在均勻橫向負載
下的最佳化分析

Optimization of the stiffness of elastic restraints of
stiffened plate under uniform lateral load

研究生：劉宗帆

指導教授：蕭國模 博士

中華民國九十五年七月

加勁板之彈性支承的剛度在均勻橫向負載下的最佳化分析
Optimization of the stiffness of elastic restraints of stiffened
plate under uniform lateral load

研究生：劉宗帆

Student：Zong-Fan Liu

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

July 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 九十五年 七月

加勁板之彈性支承的剛度在均勻橫向負載下的最佳化分析

研究生：劉宗帆

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究的主要目的是將加勁板之彈性支承的剛度最佳化，使加勁板在均勻橫向力(uniform lateral load)作用時，其彈性支承有均勻的位移。

本研究將加勁板視為板與梁的組合，將彈性支承視為直線彈簧。本研究採用線性有限元素法分析邊界上具彈性支承的加勁板。

本研究採用平面三角殼元素與開口薄壁梁元素來模擬加勁板，在梁元素與板元素的結合處有共同節點及相同自由度，即梁元素的節點位於殼的中心而且有三個平移及三個旋轉自由度。

本研究中提出一個以彈性支承剛度為變數的目標函數及其拘束條件。本研究利用牛頓法提出一個數值程序以求得使目標函數有最小值且滿足拘束條件的彈性支承剛度，即求得最佳化的彈性支承剛度。本研究以數值例題探討不同加勁板之最佳化的彈性支承剛度，彈性支承變形的分佈及加勁板的最大撓度。

Optimization of the stiffness of elastic restraints of stiffened plate
under uniform lateral load

Student : Zong-Fan Liu

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University Hsinchu, Taiwan



ABSTRACT

In order to unify deformation of the elastic restraints for stiffened plates with elastically restrained edges under uniform lateral load, the stiffness of the elastic restraints is chosen to be the design variables and an optimization method is proposed to find the optimal stiffness of elastic restraints.

The stiffened plate is composed of a plate and stiffeners. The stiffeners and the elastic restraints are taken to be beams and linear spring, respectively. The finite element method is used here for the linear analysis of stiffened plate. The triangular flat shell element and the thin-walled beam element are used here. Because the nodes of the beam element must coincide with those of the shell element, the nodes of the beam element are shifted to the mid-plane of the plate.

A numerical procedure based on the Newton method is proposed to find the optimal stiffness of the elastic restraints. Numerical examples are studied to demonstrate the accuracy of the proposed method and to investigate the

distribution of the optimal stiffness of the elastic restraints, the deformation of the elastic restraints and deflection of the stiffened plate for stiffened plate with different number of stiffeners, different cross section of stiffeners and different thickness of plate.

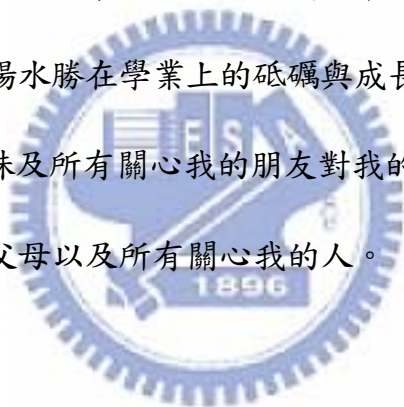


誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士的指導與教誨，使的本論文得以順利的完成。在這兩年碩士班期間，讓我印象最深的是老師在研究上嚴謹的態度及對我們這群學生的日常生活上的關懷，都使我受益良多，在此至上最高的謝意與敬意。感謝口試委員蕭德瑛老師、蔣長榮老師及尹慶中老師對本論文所提出的指正與建議，使的本論文能夠更臻完善。

感謝陳弘虎、蔡明旭、李政道、劉峰成、陳致中學長的引領照顧，以及學弟楊禮龍、可愛衡、楊水勝在學業上的砥礪與成長。

感謝父母親、妹妹及所有關心我的朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母以及所有關心我的人。



目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
致謝	IV
目 錄	V
表目錄	VII
圖目錄	X
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	4
2.1 座標系統	4
2.2 三角平面殼元素	4
2.2.1 殼的基本假設	4
2.2.2 殼元素變形的描述	5
2.2.2.1 常應變三角元素(CST)	5
2.2.2.2 DKT 元素的變形描述	7
2.2.3 元素內力與元素剛度矩陣	11
2.2.3.1 CST 元素之節點內力與剛度矩陣	12
2.2.3.2 DKT 元素之節點內力與剛度矩陣	12
2.3 梁元素	13
2.3.1 梁元素的基本假設	14
2.3.2 梁元素之變形描述	14
2.3.3 梁元素節點位移向量與剛度矩陣	15
2.4 彈性支承的平移彈簧常數及彈簧元素	19
2.5 系統平衡方程式	20
2.6 彈簧元素剛度的最佳化及目標函數	21

第三章 數值計算方法與程序	25
第四章 數值例題與結果	27
4.1 收斂性與準確性分析	28
4.2 彈性支承之剛度的最小值及初始值對其最佳化結果的影響	29
4.3 不同加勁板的撓度及其最佳化的彈性支承剛度	31
第五章 結論與展望	33
參考文獻	34
附表	36
附圖	63
附錄 A DKT 的形狀函數	88
附錄 B CST 的剛度矩陣	94
附錄 C WT 型鋼之斷面常數	95
附錄 D ANSYS 之 COMBIN 14 及 SHELL 63 元素的簡介	96



表目錄

表一	不同加勁板的自重 ($a=1.2m$, $\rho(\text{iron})=7.7\times 10^4 N/m^3$)....	36
表二	彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6\times 7$, $t_p = 8mm$)	37
表三	彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6\times 7$, $t_p = 8mm$)	38
表四	彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6\times 7$, $t_p = 10mm$, $K_{\min} = 10N/mm$)	39
表五	彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6\times 7$, $t_p = 10mm$, $k_{\min} = 10N/mm$)	40
表六	彈性支承之剛度 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6\times 7$, $t_p = 10mm$, $K_{\min} = 10N/mm$)	41
表七	彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 4$, $WT4.5\times 7$, $t_p = 6mm$, $k_{\min} = 10N/mm$)	42
表八	彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 4$, $WT4.5\times 7$, $t_p = 6mm$, $k_{\min} = 10N/mm$)	43
表九	彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6\times 7$, $t_p = 10mm$, $K_{\min} = 10N/mm$)	44
表十	不同加勁板在不同斷面的垂直位移 ($WT4\times 7.5$, $t_p = 10mm$, $k_{ini} - N_1$)	45
表十一	不同加勁板在不同斷面的垂直位移 ($WT4\times 7.5$, $t_p = 8mm$, $k_{ini} - N_1$)	46
表十二	不同加勁板在不同斷面的垂直位移 ($WT4\times 7.5$,	

	$t_p = 6\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	47
表十三	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$,	
	$t_p = 10\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	48
表十四	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$,	
	$t_p = 8\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	49
表十五	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$,	
	$t_p = 6\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	50
表十六	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$,	
	$t_p = 10\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	51
表十七	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$,	
	$t_p = 8\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	52
表十八	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$,	
	$t_p = 6\text{mm}, k_{ini} - N_1)$	53
表十九	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$,	
	$t_p = 10\text{mm}, k_{ini} - U_2)$	54
表二十	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$,	
	$t_p = 8\text{mm}, k_{ini} - U_2)$	55
表二十一	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$,	
	$t_p = 6\text{mm}, k_{ini} - U_2)$	56
表二十二	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$,	
	$t_p = 10\text{mm}, k_{ini} - U_2)$	57
表二十三	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$,	
	$t_p = 8\text{mm}, k_{ini} - U_2)$	58
表二十四	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$,	

	$t_p = 6\text{mm}, k_{ini} - U_2$)	59
表二十五	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$,	
	$t_p = 10\text{mm}, k_{ini} - U_2$)	60
表二十六	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$,	
	$t_p = 8\text{mm}, k_{ini} - U_2$)	61
表二十七	不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$,	
	$t_p = 6\text{mm}, k_{ini} - U_2$)	62



圖目錄

圖 1.1	真空腔體示意圖	63
圖 1.2	簡支單層板反力分佈	63
圖 2.1	三角殼元素的示意圖及節點自由度	64
圖 2.2	DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖	65
圖 2.3	變形前板元素中心面之單位法向量 \mathbf{n} 受旋轉 向量 θ 作用的示意圖	66
圖 2.4	加勁板節點位置示意圖	67
圖 2.5	元素座標與元素截面座標	68
圖 2.6	單位長度的 O 形環	69
圖 2.7	彈簧元素之節點內力	69
圖 4.1	加勁板結構示意圖	70
圖 4.2	端點受單位力的懸臂梁	71
圖 4.3	受一大氣壓均佈橫向力的加勁板	72
圖 4.4	加勁板之對稱軸的撓度分佈	72
圖 4.5	加勁板通過彈簧的變形分佈	73
圖 4.6	彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響(一)($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)	74
圖 4.7	彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響(二)($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)	74
圖 4.8	彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響(三)($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)	75
圖 4.9	彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響(四)($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)	75
圖 4.10	不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT4 \times 7.5$, $K_{ini} - N_1$)	76
圖 4.11	不同加勁板之最佳化的彈簧剛度($WT4 \times 7.5$,	

	$K_{ini} - N_1$).....	77
圖 4.12	不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 (WT5×6 , $K_{ini} - N_1$).....	78
圖 4.13	不同加勁板之最佳化的彈簧剛度(WT5×6 , $K_{ini} - N_1$).....	79
圖 4.14	不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 (WT6×7 , $K_{ini} - N_1$).....	80
圖 4.15	不同加勁板之最佳化的彈簧剛度(WT6×7 , $K_{ini} - N_1$).....	81
圖 4.16	不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 (WT4×7.5 , $K_{ini} - U_2$).....	82
圖 4.17	不同加勁板之最佳化的彈簧剛度(WT4×7.5 , $K_{ini} - U_2$).....	83
圖 4.18	不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 (WT5×6 , $K_{ini} - U_2$).....	84
圖 4.19	不同加勁板之最佳化的彈簧剛度(WT5×6 , $K_{ini} - U_2$).....	85
圖 4.20	不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 (WT6×7 , $K_{ini} - U_2$).....	86
圖 4.21	不同加勁板之最佳化的彈簧剛度(WT6×7 , $K_{ini} - U_2$).....	87

第一章 緒論

板與殼在結構工程系統中，長久以來一直扮演著非常重要的腳色，由於其擁有極佳的重量強度比率，所以不論是機械、航太、建築、車輛船舶及土木工程上皆有很廣泛的利用。

在 TFT-LCD 產業中製造面板裝置的真空腔體(Vacuum Chamber)其容器蓋即可視為板結構(如圖 1.1)，此真空腔體在密合時是採用 O 型環(O-ring)密合，即將容器蓋壓於 O 型環上，而 O 型環可視為板結構的彈性支承。當真空腔體抽成真空時，容器蓋會受到一大氣壓 $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 的均佈橫向力(uniform lateral load)，故在設計及分析該容器蓋時可將其視為具彈性支承的板結構受均佈橫向力的作用。在抽真空時為了避免空氣進入，所以 O 型環必須受到足夠的壓力，且 O 型環的尺寸很小，所以其壓縮量及容器蓋的變形都必須在一定的範圍內的小變形，故在分析時應可以用線性分析。

當板受均佈橫向力時，其橫向變形與跨度的四次方成正比，與厚度三次方成反比，所以對小型真空腔體，容器蓋即使採用單層薄板亦不會有變形太大或太重的問題。但隨 TFT-LCD 的進步，我們對面板尺寸要求越來越高，其真空腔體的容器蓋的尺寸可達 $2.5\text{m} \times 2.5\text{m}$ ，如板厚不變，其最大撓度約為 $1\text{m} \times 1\text{m}$ 之板的最大撓度的 40 倍，為了避免發生大撓度與節省材料，通常需在板上面加勁條(stiffener)，提高其勁度。

由板殼理論[1]中得知，四邊為簡支承的薄板受均佈橫向力時，在支承邊的中點有最大的向上分佈反力，四邊端點會產生向下的集中支撐反力(如圖 1.2)，因簡支承可視為具無限大剛度的均勻彈性支承，所以當均勻彈性支承的剛度很大時，其支撐反力分佈應與簡支板的反力相似，但 O 型環並不能提供向下的反力，所以 O 型環剛度太大時，平

板在四邊端點附近將向上翹起，造成真空腔室漏氣，為了要保持真空，我們須讓 O 型環都是在受壓狀態之下，這可由減小 O 型環的剛度來達成，但均勻剛度的 O 型環在四邊中點有最大的壓縮位移，若均勻減少 O 型環剛度使四邊端點有足夠的壓縮量時，四邊中點的壓縮量可能太大，所以大型容器蓋之 O 型環也許不能使用均勻的 O 型環，如何調整 O 型環的剛度分佈，使 O 型環在均佈壓力下有適當的壓縮量，應是一個值得探討的問題，文獻上有很多具彈性支承之板結構的振動與挫屈的研究 [2-10]，但據本文所知並無探討板之彈性支承的變形分佈之研究。所以本研究將以板之彈性支承的剛度當作設計變數，提出一個目標函數，藉由目標函數的最小化，使彈性支承有一均勻的預設變形。

本研究分析時採用有限元素法，本研究將加勁板的加勁條視為梁，將彈性支承設為線性彈簧，本研究假設加勁板與彈性支承都是小位移，故僅使用線性分析。

文獻上有關殼元素的研究有很多[11-15]，在文獻[11]中提出一個簡單且每一個節點有 3 個旋轉及 3 個平移自由度的三節點平面三角元素處理線性與非線性分析，其元素剛度矩陣是將薄膜與彎矩剛度矩陣疊加而成，並利用更新拉格蘭日法(updated Lagrangian formulation)使該元素可用於分析具大位移及大旋轉的薄殼結構。由文獻[11]的結果可以發現其所使用的三角平面殼元素，對薄殼結構的線性或非線性的分析都有很好的結果且該元素簡單、計算量小且收斂快速，故本研究採用文獻[11]提出的三節點平面三角形殼元素來模擬加勁板之板的部份，因本研究將加勁條視為梁，所以梁元素的節點與殼元素的節點位置及自由度需一致，即位於殼的中心而且有三個平移及三個旋轉自由度。本研究擬採用開口斷面的薄壁梁當加勁條，故將文獻[16]所提的

開口薄壁梁元素加以修改來模擬加勁條，因文獻[16]之梁元素的節點在梁斷面的剪心，所以本研究中將其節點移到殼斷面中心，並修改其剛度矩陣，使其適合本研究的需要。

本研究將在第二章中大略介紹本文所使用的平面三角殼元素並推導梁元素節點位置改變時，對應於新舊節點之元素剛度矩陣間的轉換關係，最後，以彈性支承的剛度當作變數，提出一個使彈性支承有一預設均勻位移的的目標函數。在第三章中提出一個解最佳化問題的數值程序，本研究的數值計算是基於牛頓-拉福森(Newton-Raohson)法的迭代法。在第四章中以數值例題探討不同加勁板之最佳化的彈性支承剛度，彈性支承變形分佈與加勁板的最大撓度。



第二章 理論推導

因本研究將加勁板視為梁與板的組合，所以採用文獻[11]中提出的平面三角殼元素及文獻[16]中提出之開口薄壁梁元素的線性部份並加以必要的修改。為了本文的完整性，在本章將簡單描述文獻[11]之殼元素變形的假設、內力及剛度矩陣的推導並簡單描述文獻[16]的梁元素及推導本文所修改的部份。

2.1 座標系統

為了描述系統的運動以及元素的變形，本文定義了兩組座標系統：

(a) 固定總體座標系統： X_i^G ($i=1,2,3$)

結構體所有節點的座標、系統的邊界條件與其他座標系統的基底，均在此座標系統中定義。

(b) 元素座標系統： x_i^E ($i=1,2,3$)

此座標系統是建立在每一殼元素及梁元素上，殼元素及梁元素之元素座標系統的定義方式將分別於 2.2 及 2.3 節中介紹。元素變形、元素內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由標準的座標轉換，轉換至對應總體座標系統。

2.2 平面三角殼元素

2.2.1 殼的基本假設

文獻[11]中對其平面三角殼元素的變形，做了以下的假設：

- (1) 薄膜變形(membrane deformation)以及彎曲變形(bending deformation)之間無耦合作用。
- (2) 殼元素的變形為小變形。

(3) 在元素變形前，垂直於元素中心面的法向線段，在元素變形後，依然保持直線，且沒有伸長及縮短，除了在元素三個頂點以及三個邊的中央點外，該線段不必垂直於變形後的中心面。

2.2.2 殼元素變形的描述

如圖 2.1 所示之殼元素中心面上有三個節點，其元素座標的原點是在元素節點 1， x_1^E 軸即是元素節點 1 與元素節點 2 的連線， x_2^E 軸是在元素平面上垂直於 x_1^E 軸且朝著元素節點 3 的方向， x_3^E 軸則是由 x_1^E 軸及 x_2^E 軸外積而得。本殼元素每個節點有 6 個自由度，分別是 x_1^E 、 x_2^E 、 x_3^E 軸方向的位移 u_j 、 v_j 、 w_j ($j=1, 2, 3$) 以及繞 x_1^E 、 x_2^E 、 x_3^E 軸方向的位移轉角 θ_{xj} 、 θ_{yj} 、 θ_{zj} ($j=1, 2, 3$)。本殼元素的變形可分為薄膜變形(membrane deformation)與彎曲變形(bending deformation)兩部份，由基本假設(1)可知本元素的變形可由薄膜變形及彎曲變形疊加而成。本元素的薄膜變形是採用常應變三角形元素(CST, constant strain triangle) [13]的薄膜變形，彎曲變形是採用文獻[12]中的 DKT (discrete Kirchhoff theory) 三角形殼元素的彎曲變形。

在圖 2.1 中的元素節點位移 u_j 與 v_j 是 CST 元素節點位移，而 θ_{xj} 、 θ_{yj} 以及 w_j 為在[12]中的 DKT 元素節點位移， θ_{zj} 是為了不使元素剛度內的面內旋轉剛度(in-plane rotational stiffness)為 0，而人為加上去的自由度。在本文以下的推導中元素變形、元素內力以及元素剛度矩陣都是在元素座標上定義。

2.2.2.1 常應變三角形元素(CST)

因為 CST 元素內的應變為常數，所以其位移場為線性位移場，並可表示成：

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.2.1)$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y \quad (2.2.2)$$

其中 u 跟 v 為在 x_1^E 軸與 x_2^E 軸方向的位移， x 與 y 是元素內任意點的座標值， $a_i (i=1,2,\dots,6)$ 是未定常數。

由元素座標的定義可知，在元素座標中圖 2.1 的節點 1、節點 2、節點 3 之座標值可表示成 $(0,0)$ 、 $(x_2,0)$ 、 (x_3, y_3) ，令節點 j 在 x_1^E 軸、 x_2^E 軸的位移分別是 $u_j, v_j (j=1, 2, 3)$ 。

本文中 $\{\}$ 代表行矩陣。將三個節點的座標值及節點位移 $u_j, v_j (j=1, 2, 3)$ 代入(2.2.1)式、(2.2.2)式可以得到

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.4)$$

由(2.2.3)、(2.2.4)式可將 $a_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 表示成 u_i 及 v_i 的函數，

所以(2.2.1)、(2.3.2)式可改寫成：

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_m \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{u} = \{u, v\} \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{u}_m = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{x_2 y_3} (x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) \\
N_2 &= \frac{1}{x_2 y_3} (x y_3 - x_3 y) \\
N_3 &= \frac{y}{y_3}
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

CST 元素的應變包含在 x_1^E 軸與 x_2^E 軸方向的應變 ϵ_x 與 ϵ_y 以及剪應變 γ_{xy} ，因本文中假設元素的變形為小變形，所以 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 可表示成：

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.2.10}$$

將(2.2.5)式代入(2.2.10)式得到：

$$\boldsymbol{\epsilon}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m \tag{2.2.11}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_m = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_m &= \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 + x_3 & 0 & -x_3 & 0 & x_2 \\ -x_2 + x_3 & -y_3 & -x_3 & y_3 & x_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

其中 \mathbf{B}_m 稱為 CST 元素的位移-應變轉換矩陣。

2.2.2.2 DKT 元素的變形描述

圖 2.2 所示為文獻[12]中所提出的 DKT 板元素，節點 1、2、3 是三角形的三個頂點，節點 4、5、6 為三角形三個邊的中點，這三個中點的自由度僅在元素推導的過程中暫時使用，在最後不會出現在元素的節點自由度。在圖 2.3 中， \mathbf{n} 為殼元素中心面變形前的單位法線向量， \mathbf{n}' 為 \mathbf{n} 在元素變形後的新位置，圖 2.3 中 $\boldsymbol{\theta}$ 為一在 $x_1^E - x_2^E$ 平面上的旋轉向量[17]，將 $\boldsymbol{\theta}$ 作用在 \mathbf{n} 可將 \mathbf{n} 轉到 \mathbf{n}' 。由 2.2.1 的假設(3)可知垂直於變形前的元素中心面法線向量變形後仍為直線且長度不變，所以當 $\|\boldsymbol{\theta}\| \ll 1$ 時，DKT 元素的位移場可表示成：

$$u = z\theta_y(x, y) \quad v = -z\theta_x(x, y) \quad w = w(x, y) \quad (2.2.14)$$

其中 x 、 y 、 z 為元素上任一點分別在 x_1^E 、 x_2^E 、 x_3^E 軸的座標值， θ_y 是 $\boldsymbol{\theta}$ 在 x_1^E 軸方向的分量， θ_x 是 $\boldsymbol{\theta}$ 在 x_2^E 軸方向的分量， u 是在 x_1^E 軸方向的位移， v 是在 x_2^E 軸方向的位移， w 是在 x_3^E 軸方向位移。當 $\|\boldsymbol{\theta}\| \ll 1$ 時， θ_y 與 θ_x 可視為法向量 \mathbf{n} 繞 x_1^E 軸及 x_2^E 軸的轉角。

DKT 元素的應變變形包含面內(in plane)正應變 ε_x 、 ε_y 與剪應變 γ_{xy} 以及橫向剪應變(transverse shear strain) γ_{yz} 、 γ_{xz} 。

因本文假設元素的變形為小變形， ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} 可表示成(2.2.10)式， γ_{yz} 、 γ_{xz} 可表示成：

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.2.15)$$

將(2.2.14)式代入(2.2.10)式可得：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z\boldsymbol{\kappa} \quad (2.2.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.2.17)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\} \quad (2.2.18)$$

將(2.2.14)式代入(2.2.15)式可得：

$$\gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} = \{w_{,x} + \theta_y, w_{,y} - \theta_x\} \quad (2.2.19)$$

由(2.2.14)式可知 w 、 θ_y 、 θ_x 與 x_3^E 無關，所以可由(2.2.19)式知橫向剪應變在厚度方向為常數。

本文中稱圖 2.2 中沿著元素邊緣方向 s 為切線方向，而垂直於元素邊緣方向 n 為法線方向。

在[12]中對於其所提出的 DKT 元素做了下列的假設：

(1) θ_y 、 θ_x 在元素內為二次變化，也就是：

$$\theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{yi} ; \theta_x = -\sum_{i=1}^6 N_i \theta_{xi} \quad (2.2.20)$$

其中 θ_{yi} 、 θ_{xi} 是 θ_y 、 θ_x 在圖 2.2 中節點 i 的節點值， $N_i (i=1-6)$ 為形狀函數[12]，其表示式詳見附錄 A。

(2) 元素的三個頂點以及三個邊的中點滿足克希霍夫板理論 (Kirchhoff plate theory) 的假設，即

(a) 在三個頂點

$$\gamma_{xzi} = w_{,xi} + \theta_{yi} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.2.21a)$$

$$\gamma_{yzi} = w_{,yi} - \theta_{xi} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.2.21b)$$

其中 w_{xi} 、 w_{yi} 、 θ_{yi} 、 θ_{xi} 分別是 $w_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 、 $w_y = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ 、 θ_y 、 θ_x 在節點 i 的值。

(b) 在三個邊的中點

$$-\theta_{nk} + w_{,sk} = 0 \quad k=4, 5, 6 \quad (2.2.22a)$$

$$\theta_{sk} + w_{,nk} = 0 \quad k=4, 5, 6 \quad (2.2.22b)$$

其中 θ_{nk} 、 θ_{sk} 分別是 θ_n 、 θ_s 在節點 k 的值， θ_n 與 θ_s 分別是 θ 在 n 與 s 方向的分量， $w_{,sk}$ 、 $w_{,nk}$ 分別是 $w_{,s} (= \frac{\partial w}{\partial s})$ 、 $w_{,n} (= \frac{\partial w}{\partial n})$ 在節點 k 的值。

(3) w 在元素邊緣的方向上是呈現三次變化，也就是：

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2l_{ij}}w_i - \frac{1}{4}w_{,si} + \frac{3}{2l_{ij}}w_j - \frac{1}{4}w_{,sj} \quad (2.2.23)$$

其中 w_i 、 w_j 是 w 在節點 i 及 j 的值， $w_{,sk}$ 是 $w_{,s}$ 在節點 k 的值， $k=4,5,6$ 分別為邊 23、邊 31、邊 12 的中點， ij 邊為節點 i 與節點 j 之間的邊(見圖 2.2)，其中 $i=1-3$ ， $j=1-3$ 且 $i \neq j$ 。

(4) θ_s 在元素邊緣是呈現線性變化，即：

$$\theta_{sk} = \frac{1}{2}(\theta_{si} + \theta_{sj}) \quad (2.2.24)$$

其中 θ_{sk} 、 θ_{si} 、 θ_{sj} 分別是 θ_s 在節點 k 、 i 、 j 之值， θ_s 是 θ 在 s 方向的分量，在圖 2.2 中節點 $k=4,5,6$ 分別為邊 23、邊 31、邊 12 的中點。

在圖 2.2 中元素三個邊上的 θ_y 、 θ_x 與 θ_s 、 θ_n 之幾何轉換關係可表示成：

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_n \\ \theta_s \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

$w_{,x}$ 、 $w_{,y}$ 與 $w_{,s}$ 、 $w_{,n}$ 的幾何轉換關係為：

$$\begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

其中 $c = \cos \alpha_{ij}$ 、 $s = \sin \alpha_{ij}$ ， α_{ij} 為元素的邊 ij 上的法線 n_{ij} 與 x_1^E 軸的夾角，見圖 2.2。

由(2.2.21)-(2.2.26)式可以把(2.2.19)式表示成[12]：

$$\begin{aligned} \theta_y &= \mathbf{H}_x^T(\xi, \eta) \mathbf{u}_b \\ \theta_x &= -\mathbf{H}_y^T(\xi, \eta) \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$\mathbf{u}_b = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}] \quad (2.2.28)$$

其中 \mathbf{u}_b 為 DKT 元素的節點位移， \mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 是對應於元素節點位移的

新形狀函數，其表示式詳見附錄 A， ξ 與 η 是元素內任一點在元素自然座標[12]的座標值，其中 $1 \leq \xi \leq 0$ 、 $1 \leq \eta \leq 0$ 。

將(2.2.27)式代入(2.2.18)式可以得到：

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (2.2.29)$$

其中 \mathbf{B}_b 為 DKT 元素的位移-應變轉換矩陣，表示式為：

$$\mathbf{B}_b(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \mathbf{H}_{x, \xi}^T \\ -x_3 \mathbf{H}_{y, \xi}^T + x_2 \mathbf{H}_{y, \eta}^T \\ -x_3 \mathbf{H}_{x, \xi}^T + x_2 \mathbf{H}_{x, \eta}^T + y_3 \mathbf{H}_{y, \xi}^T \end{bmatrix} \quad (2.2.30)$$

其中 $A = \frac{x_2 y_3}{2}$ 為三角形面積。

2.2.3 元素內力與元素剛度矩陣

本文中殼元素的節點內力是由 CST 及 DKT 元素的節點內力組成而成，元素剛度矩陣是由 CST 元素剛度矩陣 \mathbf{k}_m 、DKT 元素剛度矩陣 \mathbf{k}_b 以及面內旋轉剛度 \mathbf{k}_{0z} 所疊加而成， \mathbf{k}_{0z} 為一 3×3 的對角矩陣，其對角線元素的值是取 \mathbf{k}_b 之對角線元素的絕對值中的最小值。本節中將用虛功原理推導 CST 元素及 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣。

在平面應力狀態，等向性線彈性材料的應變與應力關係為

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.31)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \quad (2.2.32)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.2.33)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2.34)$$

其中 E 是楊氏模數(Young's module)， ν 是蒲松比(Poisson ratio)，(2.2.33)

式之 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可以是(2.2.12)式中的 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 及(2.2.17)式中的 $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ 。

2.2.3.1 CST 元素之節點內力與剛度矩陣

將(2.2.31)式代入(2.2.11)式可得

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{E}\mathbf{B}_m \mathbf{u}_m \quad (2.2.35)$$

由虛功原理可得

$$\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{f}_m = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^t \boldsymbol{\sigma}_m dV \quad (2.2.36)$$

$$\mathbf{f}_m = \{\mathbf{f}_{m1} \ \mathbf{f}_{m2} \ \mathbf{f}_{m3}\}$$

$$\mathbf{f}_{mi} = \{f_{xj} \ f_{yj}\} \quad j=1, 2, 3 \quad (2.2.37)$$

其中 \mathbf{f}_m 是 CST 元素對應於 $\delta \mathbf{u}_m$ 的節點內力， V 是元素的體積。

將(2.2.11)式、(2.2.35)式代入(2.2.36)式可得

$$\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{f}_m = \delta \mathbf{u}_m^t \int_V \mathbf{B}_m^t \mathbf{E} \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m dV \quad (2.2.38)$$

由(2.2.38)式可得

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{k}_m \mathbf{u}_m \quad (2.2.39)$$

$$\mathbf{k}_m = \int_V \mathbf{B}_m^t \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \quad (2.2.40)$$

其中 \mathbf{k}_m 是 CST 元素的剛度矩陣，而 \mathbf{K}_m 的表示式詳見附錄 B。

2.2.3.2 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣

將(2.2.16)式、(2.2.29)式代入(2.2.31)式可得

$$\boldsymbol{\sigma}_b = z \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_b \quad (2.2.41)$$

假設在薄殼中剪應力 τ_{xz} 與 τ_{zx} 所做的虛功可以忽略，所以本文中用虛功原理推導 DKT 元素的節點內力時僅考慮 σ_x 、 σ_y 及 τ_{xy} 所做的虛功。

由虛功原理可得

$$\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^t \boldsymbol{\sigma}_b dV \quad (2.2.42)$$

$$\mathbf{f}_b = \{\mathbf{f}_{b1} \ \mathbf{f}_{b2} \ \mathbf{f}_{b3}\}$$

$$\mathbf{f}_{bi} = \{f_{zj} \ m_{xj} \ m_{yj}\} \quad j=1, 2, 3 \quad (2.2.43)$$

其中 \mathbf{f}_b 是 DKT 元素對應於 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點內力， \mathbf{u}_b 定義於(2.2.28)式， V 為 DKT 元素的體積。

將(2.2.16)式、(2.2.41)式代入(2.2.42)式可得

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b &= \delta \mathbf{u}_b^t \iint_A z \mathbf{B}_b^t z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dz dA \\ &= \delta \mathbf{u}_b^t \int_A \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dA \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

其中

$$\mathbf{D}_b = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2.45)$$

其中 h 為元素厚度。

由(2.4.45)式可得[12]

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{k}_b \mathbf{u}_b \quad (2.2.46)$$

$$\mathbf{k}_b = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\xi d\eta \quad (2.2.47)$$

其中 \mathbf{k}_b 是 DKT 元素剛度矩陣。

2.3 梁元素

本文採用文獻[16]中提出之開口薄壁梁元素的線性部份並加以必要的修改。因本研究將板的加勁條視為梁，所以梁元素的節點與殼元素的節點位置與自由度需一致(如圖 2.4)，即位於殼的中心面且有三個平移及旋轉自由度。因文獻[16]的元素節點取在梁斷面的剪心且有七個自由度，即三個平移、三個旋轉及扭轉率，所以文獻[16]之梁元素的線性剛度矩陣不能直接用在本研究上。本章中將推導元素節點位置


改變時，對應於新舊節點之元素剛度矩陣間的轉換關係，並將文獻[16]之元素節點的扭轉率自由度去掉。本章中亦將簡單描述經本文修改後文獻[16]的梁元素。

2.3.1 梁元素的基本假設

本文中對梁的基本假設如下：

- (1) 梁為等斷面且細長桿件。
- (2) Euler-Bernoulli 假說成立。
- (3) 梁斷面變形前後，斷面形狀不變且斷面內的應變可略。
- (4) 梁應變均為小應變

2.3.2 梁元素之變形描述



本文是在元素座標上，描述梁元素的變形，如圖 2.5 所示本文之元素座標的示意圖，其中 x_1^E 軸通過元素的兩端點斷面的剪心。圖中 P 、 C 、 R 分別為梁斷面的剪心、形心及一任意的固定點。 x_2^S 及 x_3^S 為斷面座標，其原點為斷面形心，方向通過形心的主軸方向。元素座標的 x_2^E 及 x_3^E 軸分別與 x_2^S 及 x_3^S 軸平行。由 2.3.1 節的基本假設可知，梁元素的變形可由其剪心軸的單位長度伸長量、側向位移及其截面繞剪心軸的旋轉決定。本文中假設梁元素剪心軸的側向位移與文獻[16]相同，為三次 Hermitian 多項式，形心軸的軸向變形與文獻[16]相同，即不計扭轉時，形心軸的應變為均勻的應變，繞剪心軸的旋轉為一次多項式與文獻[16]的三次 Hermitian 多項式不同。

2.3.3 梁元素節點位移向量與剛度矩陣

梁元素的節點 $j(j=1,2)$ 若取在其兩端斷面的剪心 P 、形心 C 或任意點 R 時，則節點 j 的節點參數可以表示為 $u_{Sj}, v_{Sj}, w_{Sj}, (S = P, C, R)$ ， $\phi_{ij} (i=1,2,3)$ ，其中 u_{Sj}, v_{Sj}, w_{Sj} 為 S 點在 x_1^E, x_2^E, x_3^E 軸方向的位移分量， $\phi_{ij} (i=1,2,3)$ 為在節點 j 之斷面繞 x_i^E 軸的旋轉。梁元素的節點參數可表示成

$$\mathbf{q}_S = \{\mathbf{u}_{Sa} \quad \mathbf{u}_{Sb} \quad \mathbf{u}_{Sc} \quad \mathbf{u}_{Sd}\} \quad (2.3.1)$$

其中

$$\mathbf{u}_{Sa} = \{u_{S1} \quad u_{S2}\},$$

$$\mathbf{u}_{Sb} = \{v_{S1} \quad \phi_{31} \quad v_{S2} \quad \phi_{32}\},$$

$$\mathbf{u}_{Sc} = \{w_{S1} \quad \phi_{21} \quad w_{S2} \quad \phi_{22}\},$$

$$\mathbf{u}_{Sd} = \{\phi_{11} \quad \phi_{12}\}$$

若取剪心 P 為節點，則利用文獻[16]的推導方式，可求得對應於 \mathbf{q}_P 的線性剛度矩陣如下：

$$\mathbf{k}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^P & \mathbf{k}_{ab}^P & \mathbf{k}_{ac}^P & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^P & \mathbf{k}_{bb}^P & \mathbf{k}_{bc}^P & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ca}^P & \mathbf{k}_{cb}^P & \mathbf{k}_{cc}^P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{dd}^P \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

其中

$$\mathbf{k}_{aa}^P = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{ab}^P = (\mathbf{k}_{ba}^P)^t = AEy_P \mathbf{G}_a \mathbf{B}^t$$

$$\mathbf{k}_{ac}^P = (\mathbf{k}_{ca}^P)^t = AEz_P \mathbf{G}_a \mathbf{C}^t$$

$$\mathbf{k}_{bc}^P = (\mathbf{k}_{cb}^P)^t = \frac{AE}{L} y_P z_P \mathbf{BC}^t$$

$$\mathbf{k}_{bb}^P = \mathbf{k}_{bb} + \frac{AE y_P^2}{L} \mathbf{BB}^t$$

$$\mathbf{k}_{cc}^P = \mathbf{k}_{cc} + \frac{AE z_P^2}{L} \mathbf{CC}^t$$

$$\mathbf{k}_{dd}^P = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_a = \frac{1}{L} \{-1 \ 1\}$$

$$\mathbf{B} = \{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$$

$$\mathbf{C} = \{0 \ 1 \ 0 \ -1\}$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{cc} = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

其中 y_P 、 z_P 為 P 點在元素斷面座標(見圖 2.5)的座標值。因為剪心與形心不重合，所以側向位移與軸向位移有耦合作用，故 \mathbf{k}_{ab}^P ， \mathbf{k}_{ac}^P ， \mathbf{k}_{bc}^P 不為零。

因本文假設梁斷面不會變形，所以節點 $j(j=1,2)$ 之斷面剪心 P 受到一擾動位移 $\delta \mathbf{U}_{Pj} = \{\delta u_{Pj} \ \delta v_{Pj} \ \delta w_{Pj}\}$ 及擾動旋轉 $\delta \phi_j = \{\delta \phi_{1j} \ \delta \phi_{2j} \ \delta \phi_{3j}\}$ 時，同一斷面上任意點 R 對應的擾動位移可表示為：

$$\delta U_{Rj} = \delta U_{Pj} + \delta \phi_j \times \mathbf{r}_{PR} \quad (j = 1, 2) \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{r}_{PR} = \{0 \quad y_R - y_P \quad z_R - z_P\} = \{0 \quad y_{PR} \quad z_{PR}\} \quad (2.3.4)$$

其中 \times 表向量外積， y_R 、 z_R 為 R 點在元素斷面座標(見圖 2.5)的座標值。

由(2.3.3)式可知(2.3.1)式中 \mathbf{q}_P 與 \mathbf{q}_R 之擾動量 $\delta \mathbf{q}_P$ 與 $\delta \mathbf{q}_R$ 有以下關係：

$$\delta \mathbf{q}_P = \mathbf{T}_{PR} \delta \mathbf{q}_R \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{T}_{PR} = [\mathbf{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{T}_{ab} & \mathbf{T}_{ac} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{bd} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 & \mathbf{T}_{cd} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & y_{PR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{PR} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{PR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_{PR} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{bd} = \begin{bmatrix} z_{PR} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & z_{PR} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{cd} = \begin{bmatrix} -y_{PR} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -y_{PR} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由(2.3.5)式與反梯度法則(Controgradient law)[18]，可得

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{T}_{PR}^t \mathbf{f}_P \quad (2.3.7)$$

其中

$$\mathbf{f}_R = \{\mathbf{f}_{Ra} \quad \mathbf{f}_{Rb} \quad \mathbf{f}_{Rc} \quad \mathbf{f}_{Rd}\}$$

$$\mathbf{f}_P = \{\mathbf{f}_{Pa} \quad \mathbf{f}_{Pb} \quad \mathbf{f}_{Pc} \quad \mathbf{f}_{Pd}\}$$

$$\mathbf{f}_{Sa} = \{f_{11}^S \quad f_{12}^S\}$$

$$\mathbf{f}_{Sb} = \{f_{21}^S \quad m_{31}^S \quad f_{22}^S \quad m_{32}^S\}$$

$$\mathbf{f}_{Sc} = \{f_{31}^S \quad m_{21}^S \quad f_{32}^S \quad m_{22}^S\}$$

$$\mathbf{f}_{Sd} = \{m_{11}^S \quad m_{12}^S\}$$

其中 $S = P, R$ ， \mathbf{f}_R 、 \mathbf{f}_P 分別為對應於 $\delta \mathbf{q}_R$ 、 $\delta \mathbf{q}_P$ 的節點內力， f_{ij}^S ($i=1,2,3$)、($j=1,2$) 表示斷面 j 上 S 點在 x_i^E 方向的力， m_{ij}^S 表示斷面 j 上 S 點在 x_i^E 方向的力矩。

對應於 \mathbf{q}_R 的線性剛度矩陣可表示為

$$\mathbf{k}_R = \frac{\partial \mathbf{f}_R}{\partial \mathbf{q}_R} \quad (2.3.8)$$

將(2.3.7)式代入(2.3.8)式並使用 chain rule 可得

$$\mathbf{k}_R = \frac{\partial \mathbf{f}_R}{\partial \mathbf{q}_R} = \mathbf{T}_{PR}^t \frac{\partial \mathbf{f}_P}{\partial \mathbf{q}_P} \frac{\partial \mathbf{q}_P}{\partial \mathbf{q}_R} = \mathbf{T}_{PR}^t \mathbf{k}_P \mathbf{T}_{PR} \quad (2.3.9)$$

其中 \mathbf{k}_P 定義於(2.3.2)式

將(2.3.2)式，(2.3.6)式代入(2.3.9)式可得

$$\mathbf{k}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^R & \mathbf{k}_{ab}^R & \mathbf{k}_{ac}^R & \mathbf{k}_{ad}^R \\ \mathbf{k}_{ba}^R & \mathbf{k}_{bb}^R & \mathbf{k}_{bc}^R & \mathbf{k}_{bd}^R \\ \mathbf{k}_{ca}^R & \mathbf{k}_{cb}^R & \mathbf{k}_{cc}^R & \mathbf{k}_{cd}^R \\ \mathbf{k}_{da}^R & \mathbf{k}_{db}^R & \mathbf{k}_{dc}^R & \mathbf{k}_{dd}^R \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

$$\mathbf{k}_{aa}^R = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{ab}^R = (\mathbf{k}_{ba}^R)^t = \frac{AEy_R}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{ac}^R = (\mathbf{k}_{ca}^R)^t = \frac{AEz_R}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{ab}^R = (\mathbf{k}_{ba}^R)^t = 0$$

$$\mathbf{k}_{bb}^R = \mathbf{k}_{bb} + \frac{AEy_R^2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{bc}^R = (\mathbf{k}_{cb}^R)^t = \frac{AEy_R z_R}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{cc}^R = \mathbf{k}_{cc} + \frac{AEz_R^2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{bd}^R = (\mathbf{k}_{db}^R)^t = \frac{EI_z z_{PR}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 6L & -6L \\ -12 & 12 \\ 6L & -6L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{cd}^R = (\mathbf{k}_{dc}^R)^t = \frac{EI_y y_{PR}}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 6L & -6L \\ 12 & -12 \\ 6L & -6L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{dd}^R = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{EI_y y_{PR}^2}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} + \frac{EI_z z_{PR}^2}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

其中 $y_{PR} = y_R - y_P$, $z_{PR} = z_R - z_P$

2.4 彈性支承的平移彈簧常數及彈簧元素

本文所考慮的結構為加勁板壓於 O 型環上，本文中視 O 型環為板結構的彈性支承，為簡化推導，本文將單位長度的 O 型環結構簡化如圖 2.6 所示，本文假設 O 型環僅承受如圖 2.6 所示的均佈軸向力，

且其應力僅有與軸力方向一致的正應力，若 O 型環的材料為橡膠，其楊式係數為 E_R ，則彈性支承每單位長度的彈簧常數可表示為：

$$K_R = \frac{E_R \cdot t_{OR}}{h_{OR}} \quad (2.4.1)$$

其中 h_{OR} 為彈性支承的高， t_{OR} 為彈性支承的寬度。

圖 2.7 所示為本文中採用的彈簧元素，其節點內力剛度矩陣可表示成

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}_S \mathbf{u}_S \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{f}_S = \{f_{S1} \quad f_{S2}\} \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{k}_S = K_R L_R \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

其中 K_R 定義於(2.4.1)式， L_R 為分配給彈簧元素之 O 型環的長度， $K_R L_R$ 稱為彈簧元素的剛度。

2.5 系統平衡方程式

在系統固定總體座標中定義的線性平衡方程式，可表示為

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (2.5.1)$$

其中 \mathbf{K} 為系統剛度矩陣， \mathbf{U} 為系統節點位移向量， \mathbf{P} 表示系統節點外力向量。 \mathbf{K} 可由各元素之元素剛度矩陣，從元素座標轉換到固定總體座標上組合而成。 \mathbf{P} 由各元素的節點外力組合而成，本文中僅考慮均佈載重，所以元素中各節點所受的外力是由三分之一的板元素面積乘上均佈負荷而得。

本文中僅考慮板受均佈壓力的情況，因 O 型環僅能承受壓力，不能承受拉力，且為了保持板與 O 型環間氣密性，O 型環須有適當

的壓縮量。本文中將調整 O 型環在不同位置的剛度使其在預設負荷下的壓縮量是均勻的且為一預設值，這是一個最佳化的問題，本文將在下節中說明。

2.6 彈簧元素剛度的最佳化及目標函數

令 M 表示將 O 型環離散化後彈簧元素之數目， $k_i (i=1-M)$ 表示彈簧元素 i 的剛度。令 \mathbf{k} 為彈簧元素之剛度組成之 $M \times 1$ 的行矩陣，並可表示為

$$\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_M\} \quad (2.6.1)$$

若將彈簧元素的剛度視為變數，則(2.5.1)式中系統的剛度 \mathbf{K} 與節點位移 \mathbf{U} 都是 \mathbf{k} 的函數。

令 \mathbf{Q} 為一 $M \times 1$ 的行矩陣，並可表示為

$$\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\} \quad (2.6.2)$$

其中， $Q_i (i=1, \dots, M)$ 表示第 i 個彈簧元素與板元素之共同節點在 Z 方向的位移，為方便稱呼，本文中稱 Q_i 為第 i 個彈簧元素的位移。因 \mathbf{Q} 可以從(2.5.1)的解 \mathbf{U} 中選取而得，所以 \mathbf{Q} 亦為 \mathbf{k} 的函數。

本文中希望調整(2.6.1)式的 \mathbf{k} ，而使(2.6.2)式中所有的 Q_i 趨近一預設值。該目標可將下列目標函數極小化而達成

$$H(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} - \bar{Q}\mathbf{e})^t \cdot (\mathbf{Q} - \bar{Q}\mathbf{e}) \quad (2.6.3)$$

且

$$k_i \geq k_{\min} > 0 \quad (2.6.4)$$

其中 \bar{Q} 為一預設彈簧位移， k_{\min} 為一預設之最小彈簧剛度， \mathbf{e} 為一

$M \times 1$ 的行矩陣並可表示為

$$\mathbf{e} = \{1, 1, 1, \dots, 1\} \quad (2.6.5)$$

因(2.6.3)式中 H 為 \mathbf{k} 的函數，所以當 H 有最小值時，必須滿足

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{0} \quad (2.6.6)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 為一 $M \times 1$ 的行向量可視為誤差向量，其第 i 個元素 $\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial k_i}$ 。

將(2.6.3)式代入(2.6.6)式可得

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_i\} = \mathbf{G}(\mathbf{Q} - \bar{Q}\mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{Q}_{,1}, \mathbf{Q}_{,2}, \dots, \mathbf{Q}_{,M}]^t \quad (2.6.8)$$

$$\varphi_i = \mathbf{Q}_{,i}^t (\mathbf{Q} - \bar{Q}\mathbf{e}) \quad (2.6.9)$$

其中 \mathbf{G} 為一 $M \times M$ 的矩陣， $\mathbf{Q}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial k_i}$ ($i=1, \dots, M$)，本文中

$$(\quad)_{,i} = \frac{\partial(\quad)}{\partial k_i} \quad (i=1, \dots, M)。$$

因 \mathbf{Q} 可以從 \mathbf{U} 中選取而得，所以 $\mathbf{Q}_{,i}$ 亦可從 $\mathbf{U}_{,i}$ 中選取而得。 $\mathbf{U}_{,i}$ 可由以下的推導求得。

令對應於第 i 個彈簧位移的系統自由度為系統之第 I 個自由度。

將(2.6.1)式對 k_i 微分可得

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_{,i} = -\mathbf{U}_I \quad (2.6.10)$$

$$\mathbf{U}_I = \mathbf{K}_{,i} \mathbf{U} \quad (2.6.11)$$

因 $\mathbf{K}_{,i}$ 中除了第 I 個對角線元素的值為 1 外，其餘的元素皆為 0，所以(2.6.9)式中，行向量 \mathbf{U}_I 中除了第 I 個元素的值為 U_I 外，其餘皆為

0，其中 U_I 為 \mathbf{U} 中的第 I 個元素，即系統中第 I 個自由度的位移。解線性聯立方程式(2.6.9)即可求得 $\mathbf{U}_{,i}$ 。

(2.6.7)式為 \mathbf{k} 的非線性函數，本文中將在第三章以牛頓法求滿足(2.6.7)式的 \mathbf{k} ，並以

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| \leq e_{tol} \quad (2.6.12)$$

作為收斂準則，其中 $\|(\)\|$ 表示 $(\)$ 的 Euclidean norm， e_{tol} 為一預設的容許誤差。

用牛頓法解(2.6.7)式時，在迭代過程中需用到 $\mathbf{S} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{k}}$ ，故在此先

推導 \mathbf{S} 如下：

將(2.6.7)式之 $\boldsymbol{\varphi}$ 對 \mathbf{k} 微分可得

$$\mathbf{S} = [S_{ij}] = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial k_j} \right]$$

$$S_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial k_j} = \mathbf{Q}_{,i}^t \mathbf{Q}_{,j} + \mathbf{Q}_{,ij}^t (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}) \quad (2.6.13)$$

其中 \mathbf{S} 為一 $M \times M$ 的矩陣。

(2.6.13)式中 $\mathbf{Q}_{,ij}$ 可由 $\mathbf{U}_{,ij}$ 選取而得。 $\mathbf{U}_{,ij}$ 可以由以下推導求得

將(2.6.10)式對 k_j 微分可得

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_{,ij} = -(\mathbf{K}_{,i} \mathbf{U}_{,j} + \mathbf{K}_{,j} \mathbf{U}_{,i}) \quad (2.6.14)$$

其中 $\mathbf{U}_{,i}$ 及 $\mathbf{U}_{,j}$ 可由(2.6.10)式求得， $\mathbf{K}_{,i} \mathbf{U}_{,j}$ 及 $\mathbf{K}_{,j} \mathbf{U}_{,i}$ 的計算方法與(2.6.11)式算 \mathbf{U}_I 的方法一樣。

由(2.6.14)式可知 $\mathbf{U}_{,ij} = \mathbf{U}_{,ji}$ ，所以(2.6.13)式中 $\mathbf{Q}_{,ij} = \mathbf{Q}_{,ji}$ ，即

(2.6.14)式之 S 為一對稱矩陣。



第三章 數值計算方法與程序

本文解(2.6.7)式的數值計算方法是基於牛頓-拉福森(Newton-Raohson)法的迭代法。本文採用的數值程序可說明如下：

1. 設定預期的彈簧元素位移 \bar{Q} ((2.6.3)式)及彈簧元素最小的剛度 k_{\min} ((2.6.4)式)。
2. 設彈簧元素的剛度之初值 \mathbf{k}^0
3. 令 $\mathbf{k} = \mathbf{k}^0$
4. 解(2.6.1)式求得 \mathbf{U} ，解(2.6.10)式，求得 $\mathbf{U}_{,i}$ ($i=1-M$)，解(2.6.14)式，求得 $\mathbf{U}_{,ij}$ ($i=1-M, j=1-M$)。
5. 由 \mathbf{U} ， $\mathbf{U}_{,i}$ ， $\mathbf{U}_{,ij}$ 中選取 \mathbf{Q} ， $\mathbf{Q}_{,i}$ ， $\mathbf{Q}_{,ij}$ 。
6. 由(2.6.7)式計算 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{k})$ ，檢查 $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ 是否滿足(2.6.12)式的收斂準則，若滿足，則 $\mathbf{k} = \mathbf{k}^0$ 為最佳的彈簧元素剛度，並停止迭代。若 $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ 不滿足(2.6.12)式的收斂準則，則進行下一步。
7. 用牛頓法求一改正量 $\delta\mathbf{k} = -\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\varphi}$ ，其中 \mathbf{S} 在(2.6.13)式中定義。
8. 令 $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k} + \alpha\delta\mathbf{k}$ ，其中 α 為一常數，本文中取 $0 < \alpha \leq 1$ 且使 $k_i^0 \geq k_{\min}$ ($i=1-M$)中最大的 α ，將 $k_i^0 = k_{\min}$ 的彈簧元素的剛度固定，在以後的迭代中不再改變。
9. 回到3

由本研究的數值經驗發現，如果彈簧元素的初值選擇不當，上述迭代過程將無法收斂。本文除特別聲明外，都用以下的方法決定彈簧元素的初始剛度

$$k_i^0 = C \frac{pA}{M \bar{Q}}, i=1-M$$
$$0 < C < 1 \quad (3.1)$$

其中 p 為均佈壓力的大小， A 為板結構的面積， C 為一常數， M 為彈簧元素的數目， \bar{Q} 為彈簧元素的預設位移。本文將在第四章中討論 k_i^0 對迭代收斂的影響。



第四章 數值例題與結果

本研究用加勁板及彈性支承來模擬真空腔體的容器蓋及 O 型環(密合器)，所以加勁板承受的外力為一大氣壓的均佈壓力，即 $q = 0.1013 \text{ N/mm}^2$ 。為了避免空氣進入真空腔體，O 型環必須有一定的壓縮量，本研究將藉改變 O 型環剛度的大小及分佈，使其有一均勻的壓縮量，因 O 型環尺寸甚小，故本章例題將該均勻壓縮量定為 1.25 mm ，即 $\bar{Q} = -1.25 \text{ mm}$ (見(2.6.3)式)。為了方便分析，本研究不設定加勁板的最大允許變形位移，僅分析在不同板厚及加勁條時加勁板的變形。

本章例題中僅考慮如圖 4.1 所示邊長為 $2a = 2.4 \text{ m}$ 之正方形加勁板，加勁板在水平及垂直方向有相同斷面及相同數目的肋，板的四周都有肋且肋的間距都相同。令 n_r 表示水平(垂直)方向的肋數，如圖 4.1 所示，本章例題考慮了(A) $n_r = 4$, (B) $n_r = 5$, (C) $n_r = 7$ 三種情況。本章例題的肋採用 WT 型鋼，且考慮了三種不同的尺寸： $WT4 \times 7.5$, $WT5 \times 6$, $WT6 \times 7$ ，以上三種型鋼的斷面尺寸及斷面常數皆列於附錄 C 中。本章的例題考慮了三種不同的板厚： $t_p(\text{mm}) = 6, 8, 10$ ，本章假設板與肋的材料均為鋼，其楊式係數 $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ，Poisson's ratio $\nu = 0.3$ ，比重 $\gamma = 7.7 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ 。

表一為不同加勁板的自重，由表一中可以發現加勁板重 W_{p+r} 與氣壓的合力 $W_a = q \times (2a)^2 = 5.83488 \times 10^5 \text{ N}$ 的比值，最大僅為 0.0136，所以在本章的例題中，我們皆將 W_{p+r} 忽略不計。

加勁板之邊界條件為四邊受彈性支承拘束；由於在本章中所考慮的板結構皆為正方形，所以本文所有例題除特別聲明外皆取四分之一板來分析。

4.1 收斂性與準確性分析

為了解本文所採用之三角殼元素的收斂性及準確性，本節中首先用不同的元素網格分析了邊長 $l = 2400\text{mm}$ 、厚度 $t = 30\text{mm}$ ，四邊為簡支承的正方形薄板，其所受外力為一大氣壓的均佈側向力。本例題分析時，將四分之一板分割成 8×8 、 12×12 、 24×24 的網格。四邊為簡支承的正方形薄板受均佈壓力 q 時，其中心點的側向位移的解析解[1]

$$\text{為 } w_{\max} = \frac{\alpha q l^4}{D}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = 0.00406, \quad \text{將本例題的材料常數}$$

及尺寸代入可得 $w_{\max} = 27.5937\text{mm}$ 。本文中用 8×8 、 12×12 及 24×24 之網格得到的結果分別為 27.6186mm 、 27.6145mm 及 27.6118mm ，由以上可知 8×8 個網格的结果已足夠準確。但為了方便安排不同數目的肋，在本文中以後板的例題除另有聲明外皆使用 12×12 的網格來分析。由本例題亦可發現若欲減少板的撓度及重量，須使用加勁板並減少板的厚度。

為了解本研究中用梁元素與殼元素分析加勁板的可行性及準確性，本節中分析了以下的兩個例題。

第一個例題考慮如圖 4.2 所示之懸臂梁受一端點負荷 $p = 1\text{N}$ ，本例題分析時將懸臂梁的 T 型部份離散為 10 個梁元素，底部的梁翼離散為 40 個三角殼元素 (2×10 之網格)。由材料力學可得自由端之節點 A 的垂直及水平位移為

$$V_A = \frac{pL^3}{3EI} = 0.17147 \times 10^{-5} \text{mm}$$

$$U_A = \int \epsilon_x dx = \int_0^L \frac{p(L-x)y_A}{EI} dx = \frac{pL^2}{EI} y_A = 0.15432 \times 10^{-6} \text{mm}$$

上式中 $y_A = 6\text{mm}$ 為斷面形心到 A 點的距離， $I = 1620\text{mm}^4$ 。本文分析結果為 $V_A = 0.17159 \times 10^{-5} \text{mm}$ ， $U_A = 0.15363 \times 10^{-6} \text{mm}$ ，本文的結果

與材料力學的理论解十分接近。

第二個例題考慮如圖 4.3 所示之四邊受彈性支承拘束的加勁板，受一大氣壓均佈側向載重，彈性支承的彈簧常數 $k = 0.2 \times 10^4 \text{ N/mm}$ 。本例題亦利用 ANSYS[20] 分析以驗證本文結果的正確性；用 ANSYS 分析時，以其元素 shell 63(見附錄 D) 模擬加勁板的板與肋，用元素 combin 14 模擬彈性支承。為方便於與本文的的結果比較，ANSYS 與本研究分析時用相同的網格。由圖 4.4 與 4.5 可發現兩者的結果幾乎重合，由上述兩例題可說明本文的方法及數值程序之正確性。由圖 4.4 可發現加勁板最大的變形約有十公分，這應是肋的數目及剛度不足所造成的。

4.2 彈性支承之剛度的最小值及初始值對其最佳化結果的影響

為了方便以後的探討及說明，本章中令 $k_i, (k_{ini})_i, (k_{opt})_i$ ($i=1-M$) 分別代表第 i 個彈性支承的剛度、初始剛度、最佳化的剛度。 $d_i, (d_{ini})_i, (d_{opt})_i$ ($i=1-M$) 分別代表第 i 個彈性支承的位移、初始位移及最佳化的位移。

由(2.6.3)式及(2.6.6)式可知，當 $d_i = \bar{Q}$ ($i=1-M$) 時， \bar{Q} 為(2.6.3)式中彈性支承的預期位移，對應的 k_i 即為 $(k_{opt})_i$ 且應有唯一解，但 k_i 的值有些可能是負的。因彈性支承的剛度需大於 0，所以本研究在(2.6.4)式中，令 $k_i \geq k_{\min} > 0$ 。本研究在第三章中提到在最佳化的迭代過程中，當 $k_i = k_{\min}$ 時，即將 k_i 的值固定為 k_{\min} ，且不參加以後的迭代，所以 $(k_{ini})_i$ 及 k_{\min} 都會影響最佳化的結果，即 $(k_{opt})_i$ 不會有唯一解，且 $(d_{opt})_i$ 不會剛好等於 \bar{Q} 。本節中將探討不同的 k_{\min} 及 $(k_{ini})_i$ 對 $(k_{opt})_i$ 及 $(d_{opt})_i$ 的影響。

表二及表三為 k_{\min} 對 $(k_{opt})_i$ 及 $(d_{opt})_i$ 的影響，圖 4.6 及圖 4.7 是由表二與表三的結果繪製之 k_{opt} 的分佈圖，由表二及表三中可發現，當 $k_{\min} = -\infty$ ，即 k_i 的值沒有限制時，不同的 $(k_{ini})_i$ 都收斂到相同的 $(k_{opt})_i$ 且 $(d_{opt})_i = \bar{Q}$ ，如本節中先前所預期，有些 k_i 的值小於 0。但當 $k_{\min} > 0$ 時，亦如本節中先前所預期，不同的 k_{\min} ，有不同的 $(k_{opt})_i$ 和 $(d_{opt})_i$ ，且 $(d_{opt})_i$ 不等於 \bar{Q} ，但當 $k_{\min} \leq 10N/mm$ 時， $(k_{opt})_i$ 及 $(d_{opt})_i$ 的值變化很少，所以在本章以後的例題，除非另有說明，都令 $k_{\min} = 10N/mm$ 。

由表二與表三或圖 4.6 與圖 4.7 中可發現，當 $(k_{ini})_i$ 不同時，對應於相同 k_{\min} 的 $(k_{opt})_i$ 有相當的差異，但 $(d_{opt})_i$ 則差異甚小且都很接近 \bar{Q} 。本文採用牛頓法求 $(k_{opt})_i$ ，因迭代收斂與否和 $(k_{ini})_i$ 有很大的關係，所以本節中將進一步探討 $(k_{ini})_i$ 對 $(k_{opt})_i$ 的影響。

表二到表九為不同的 k_{ini} 對 k_{opt} 及 d_{opt} 的影響，為了方便說明，本文中以 $k_{ini} - U_i (i=1-4)$ 表示四種不同均勻分佈的 k_{ini} ， $k_{ini} - N_i (i=1,2)$ 表示兩種不均勻分佈的 k_{ini} 。 $k_{ini} - U_i$ 及 $k_{ini} - N_i$ 的值詳列在表四到表九中。

由表四、五、七、八及本研究的數值經驗發現，對應於均勻的 k_{ini} 之 d_{ini} 在 $x/a = 0$ 有最大值，在 $x/a = 1$ 有最小值，若 $k_{ini} - U_i$ 的值太大，如表四、表七之 $k_{ini} - U_1$ ，則在 $x/a = 0$ 的 d_{ini} 的值是正的，此時 $k_{ini} - U_1$ 無法收斂，當 $k_{ini} - U_i$ 的值減小到某一程度，如表四、五、七、八中的 $k_{ini} - U_2$ ， $k_{ini} - U_4$ ，則不同的 $k_{ini} - U_i$ 會收斂到不同的 k_{opt} ，但 d_{opt} 都很接近 \bar{Q} 。本研究的數值經驗亦發現將 $x/a = 1$ 附近的 k_{ini} 加大，可使在 $x/a = 0$ 附近的 d_{ini} 減小，且使 d_{ini} 的分佈變的較均勻，如表六與表九

中之 $k_{ini} - N_i (i=1, 2)$ 及對應的 d_{ini} 。本研究的數值經驗發現當 d_{ini} 較均勻時，對應的 k_{ini} 都會收斂到一個對應的 k_{opt} 。由表六和表九可發現不同的 $k_{ini} - N_i (i=1, 2)$ 會收斂到不同的 k_{opt} ，但 $(d_{opt})_i$ 則與 \bar{Q} 都很接近。

由表二到表九的結果及本節的討論可知不同的 k_{ini} 對應不同的 k_{opt} ，所以本研究的彈性支承的剛度應有無窮個最佳化的結果。表四到表九為本章在 4.3 節考慮的例題中，加勁板剛度最大與最小的兩種情形。由表四到表九可以發現 $k_{ini} - U_2, k_{ini} - U_4, k_{ini} - N_1, k_{ini} - N_2$ ，都可收斂到 k_{opt} ，所以以上四種 k_{ini} 亦應可作為 4.3 節之所有例題的 k_{ini} 。

4.3 不同加勁板的撓度及其最佳化的彈性支承剛度

本節中將分析本章中先前提到的各種加勁板，即分析板厚 $t_p = 6, 8, 10 \text{ mm}$ ，肋數 $n_r = 4, 5, 7$ ，肋斷面為 $WT4 \times 7.5, WT5 \times 6, WT6 \times 7$ 的加勁板。本節中將比較不同加勁板的撓度及其最佳化的彈性支承剛度。本節中初始彈性剛度支承剛度僅考慮 $k_{ini} - N_1$ 及 $k_{ini} - U_2$ 兩種。最小彈性支承剛度僅考慮 $k_{min} = 10 \text{ N/mm}$ 。本研究所分析的加勁板之最大側向位移都發生在其對稱軸或對稱軸附近的斷面上，所以本節中僅探討加勁板之對稱軸(見圖 4-1 之斷面 C)的側向位移 d_C 及圖 4-1 之斷面 B 的側向位移 d_B 。斷面 B 與斷面 C 距離為相鄰兩肋之距離的一半。本節中將 d_B 及 d_C 的最大值視為加勁板的最大側位移。

表十到表十八及圖 4.10 到圖 4.15 為初始彈性支承剛度為 $k_{ini} - N_1$ 的分析結果，表十九到表二十七及圖 4.16 到圖 4.21 為初始彈性支承剛度為 $k_{ini} - U_2$ 的分析結果。

由表十到表二十七及圖 4.10 到圖 4.21 中可發現對應於 $k_{ini} - N_1$ 及 $k_{ini} - U_2$ 的 k_{opt} (如表十與表十九, 圖 4.11 與圖 4.17) 是不同的, 但都有相同的趨勢, 即彈性支承的剛度在兩肋交點或其隔壁的節點常有局部的最大值(在表十六到表二十七中加底線的數字)。這可能是因為加勁板在兩肋的交點有較大的剛度, 為了使加勁板在彈性支承處有均勻的側向位移, 所以兩肋交點或其附近的彈性支承需比其鄰近節點的彈性支承有較大的剛度。我們從對應於 $k_{ini} - N_1$ 及 $k_{ini} - U_2$ 的圖及表中亦可發現其 d_{opt}, d_C, d_B 都很接近, 且 d_{opt} 很接近 \bar{Q} 。因 k_{ini} 對板撓度的影響很小, 所以本節中將僅討論對應於 $k_{ini} - N_1$ 之不同加勁板的撓度。

由表十到表十八可以發現不同的加勁板的最大撓度(表中之**粗體字**)的位置與肋數 n_r , 板厚 t_p , 及肋斷面都有關。因 $n_r = 4$ 時, 在對稱軸上沒有肋, 所以其最大位移都發生在加勁板的中心。當 $n_r = 5$ 和 7 時, 對稱軸上都有肋, 剛度較大, 所以加勁板的中心不一定有最大的側向位移, 尤其是 $t_p = 6mm, n_r = 5$ 時(如表十八), 加勁板的側向位移比其中心側向位移大很多, 但 $t_p = 6mm, n_r = 7$ 時, 兩者的差異不大。

由表十到表十二及圖 4.10, 或表十三到表十五及圖 4.12, 或表十六到表十八及圖 4.14 可以發現當 $n_r = 4$ 時, 增加板厚, 則加勁板的撓度大幅減小, 但 $n_r = 5$ 和 7 時, 增加板厚對板撓度的減小相當有限。當板厚相同時, 增加 n_r 可以使加勁板的撓度減少很多。當 n_r 及 t_p 相同時, 肋 WT6×7 有最大的剛度, 故有最小的撓度。

第五章 結論

為了使四邊具彈性支承的加勁板有均勻的彈性支承位移，本研究中提出一個以彈性支承剛度為設計變數之目標函數，並提出一個基於牛頓法的數值程序解最佳化的問題以求得最佳化的彈性支承剛度。本研究將加勁板視為板與梁的組合，將彈性支承視為直線彈簧並採用線性有限元素法分析邊界上具彈性支承的加勁板。本研究在第四章中以數值例題探討不同加勁板之最佳化的彈性支承剛度，彈性支承變形分佈與加勁板的最大撓度。由本研究可以得到以下的結論

1. 因彈性支承的剛度必須大於零，所以其位移無法到達預設值。
2. 不同的預設最小彈性支承剛度 k_{\min} ，會造成不同之最佳化的彈性支承剛度及位移，但當 k_{\min} 小到某一程度後，則其值對最佳化的結果影響很小。
3. 不同的初始彈性支承剛度收斂到不同的最佳化彈性支承剛度，但其位移都收斂到預設值附近。
4. 當加勁板的彈性支承有均勻的側向位移時，兩肋交點附近的彈性支承比其鄰近的彈性支承有較大的剛度。
5. 當加勁板的肋數少時，增加板厚會使加勁板的撓度大幅減小，但肋數增加到某一程度時，增加板厚對板撓度的減小相當有限。當板厚相同時，增加肋數可以使加勁板的撓度減少很多。當肋數及板厚相同時，肋斷面有較大的剛度，加勁板有較小的撓度。

参 考 文 献

1. S. P. Timonshenko and S. Woinowsky-Krieger, 'Theory of plates and shells', 2nd edn, McGraw-Hill.
2. D. J. Gorman, 'The superposition method for free-vibration analysis of rectangular-plates with elastic edge support', Finite elements in analysis and design, 18, 155-168, 1994.
3. Z. Ding, 'Natural frequencies of elastically restrained rectangular-plates using a set of static beam functions in the Rayleigh-Ritz method', Computer structures, 57, 731-735, 1995.
4. K. I. Nagai and T. Yamaguchi, 'Chaotic vibration of a cylindrical shell-panel with an in-plane elastic-support at boundary', Nonlinear dynamics, 13, 259-277, 1997.
5. L. Zietsman, van der M. AJ, van R.NFJ and G. JJ, 'Application of the finite-element method to the vibration of a rectangular plate with elastic support at the boundary', Mathematical and computer modeling, 38, 309-322, 2003.
6. A. S. Ashour, 'Vibration of variable thickness plates with edges elastically restrained against translation and rotation', Thin-walled structures, 42, 1-24, 2004.
7. A. S. Ashour, 'Buckling and vibration of symmetric laminated composite plates with edges elastically restrained', Steel & Composite structures, 3, 439-450, 2003.
8. T. Y. Wu and G. R. Liu, 'Free vibration analysis of circular plates with variable thickness by the generalized differential quadrature rule', International Journal of solids and structures, 38, 44-45, 2001.
9. S. T. Smith, M. A. Bradford and D. J. Oehlers, 'Unilateral buckling of elastically restrained rectangular mild steel plates', computational mechanics, 26, 317-324, 2000.
10. C. Y. Wang and C. M. Wang, 'Buckling of circular plates with an

- internal ring support and elastically restrained edges', Thin-walled structures, 39, 821-825, 2001.
11. K. J. Bathe and L. W. Ho, 'A simple and effective element for analysis of general shell structures', Computer Structures, 13, 678-681, 1981.
 12. J. L. Batoz, K.J. Bathe, L.W. Ho, 'A study of three-node triangular plate bending elements', international journal for numerical methods in engineering, 15,1771-1812,1980
 13. R. H. Gallagher, 'Finite Element Analysis Fundamentals', Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
 14. K. M. Hsiao, 'Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element', Computers & Structures, 25, 665-675, 1987.
 15. R. D. Cook, 'Further development of a three-node triangular shell element', international journal for numerical methods in engineering, 36, 1413-1425, 1993.
 16. 陳弘虎, 不對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分析的應用, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 2002.
 17. H. Goldstein, 'Classical Mechanics', Addison-Wesley Publishing sut Company, 1980.
 18. D. J. Dawe, 'Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structure', Oxford University, N.Y., 1984.
 19. 'Manual of Steel Construction', eight edition, AISC, 1980.
 20. Ansys User's Manual, Revision 5.6, Swanaon Analysis System, 2000.

表一 不同加勁板的自重($a=1.2m$, $\rho(\text{iron})=7.7\times 10^4 N/m^3$)

t_p (mm)	W_p (kN)	n_r	W_{P+R} (kN)		
			WT4×7.5	WT5×6	WT6×7
6	2.661	4	4.731	4.287	4.657
		5	5.248	4.694	5.156
		7	6.283	5.507	6.154
8	3.548	4	5.618	5.174	5.544
		5	6.135	5.581	6.043
		7	7.170	6.39	7.041
10	4.435	4	6.505	6.061	6.431
		5	7.022	6.468	6.930
		7	8.058	7.281	7.928

t_p : 板厚

W_p : 板重 , $W_p = \rho(2a)^2 t_p = 7.7 \times 10^4 \times 2.4^2 \times t_p$

n_r : 加勁板的肋數

W_{P+R} : 板重加肋重

表二 彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)

x/a	K_{ini}	d_{ini}	$K_{\min} = -\infty$		$K_{\min} = 0.01$		$K_{\min} = 0.001$		$K_{\min} = 0.0001$	
			K_{opt}	d_{opt}	K_{opt}	d_{opt}	K_{opt}	d_{opt}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	0.2	-2.174	-1.047	-1.250	0.01	-1.234	0.001	-1.236	0.0001	-1.236
1/12	0.2	-2.348	0.396	-1.250	0.01	-1.245	0.001	-1.247	0.0001	-1.247
2/12	0.2	-2.521	0.024	-1.250	0.01	-1.254	0.001	-1.253	0.0001	-1.254
3/12	0.2	-2.691	-0.095	-1.250	0.01	-1.259	0.001	-1.258	0.0001	-1.258
4/12	0.2	-2.854	1.660	-1.250	0.01	-1.259	0.076	-1.257	0.086	-1.257
5/12	0.2	-3.001	0.295	-1.250	1.646	-1.253	1.630	-1.252	1.624	-1.251
6/12	0.2	-3.134	-0.096	-1.250	0.268	-1.251	0.257	-1.249	0.257	-1.249
7/12	0.2	-3.254	0.019	-1.250	0.391	-1.252	0.386	-1.250	0.386	-1.250
8/12	0.2	-3.357	2.531	-1.250	1.274	-1.255	1.280	-1.252	1.280	-1.252
9/12	0.2	-3.434	0.239	-1.250	0.539	-1.253	0.538	-1.251	0.538	-1.251
10/12	0.2	-3.490	-0.160	-1.250	0.364	-1.253	0.361	-1.250	0.360	-1.250
11/12	0.2	-3.527	0.132	-1.250	0.470	-1.254	0.470	-1.251	0.470	-1.251
1.0	0.2	-3.541	1.414	-1.250	0.820	-1.256	0.825	-1.253	0.826	-1.253

K_{ini} ($10^4 N/mm$) , K_{opt} ($10^4 N/mm$) , K_{\min} ($10^4 N/mm$) , d_{opt} (mm) , d_{ini} (mm)

表三 彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)

x/a	K_{ini}	d_{ini}	$K_{\min} = -\infty$		$K_{\min} = 0.01$		$K_{\min} = 0.001$		$K_{\min} = 0.0001$	
			K_{opt}	d_{opt}	K_{opt}	d_{opt}	K_{opt}	d_{opt}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	0.2	-1.432	-1.047	-1.250	0.01	-1.236	0.001	-1.237	0.0001	-1.237
1/12	0.2	-1.464	0.395	-1.250	0.01	-1.247	0.001	-1.248	0.0001	-1.248
2/12	0.2	-1.494	0.024	-1.250	0.01	-1.256	0.001	-1.255	0.0001	-1.255
3/12	0.2	-1.521	-0.095	-1.250	0.01	-1.260	0.001	-1.259	0.0001	-1.259
4/12	0.2	-1.540	1.660	-1.250	0.058	-1.260	0.138	-1.259	0.147	-1.259
5/12	0.2	-1.545	0.295	-1.250	1.542	-1.255	1.507	-1.253	1.501	-1.253
6/12	0.2	-1.538	-0.097	-1.250	0.301	-1.252	0.289	-1.251	0.289	-1.251
7/12	0.2	-1.522	0.019	-1.250	0.570	-1.253	0.567	-1.252	0.567	-1.252
8/12	0.2	-1.495	2.531	-1.250	1.053	-1.255	1.073	-1.254	1.074	-1.254
9/12	0.2	-1.456	0.239	-1.250	0.562	-1.253	0.564	-1.252	0.563	-1.252
10/12	0.2	-1.416	-0.160	-1.250	0.022	-1.250	0.002	-1.250	0.0001	-1.250
11/12	2.0	-1.387	0.132	-1.250	1.253	-1.250	1.241	-1.249	1.241	-1.249
1.0	2.0	-1.378	1.414	-1.250	0.426	-1.251	0.440	-1.251	0.442	-1.251

K_{ini} ($10^4 N/mm$) , K_{opt} ($10^4 N/mm$) , K_{\min} ($10^4 N/mm$) , d_{opt} (mm) , d_{ini} (mm)

表四 彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 10mm$, $K_{min} = 10N/mm$)

x/a	$K_{ini} - U_1$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}	$K_{ini} - U_2$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	4.0	0.022	--	--	0.2	-2.218	0.001	-1.239
1/12	4.0	-0.019	--	--	0.2	-2.383	0.001	-1.247
2/12	4.0	-0.058	--	--	0.2	-2.547	0.001	-1.254
3/12	4.0	-0.095	--	--	0.2	-2.708	0.001	-1.257
4/12	4.0	-0.129	--	--	0.2	-2.863	0.194	-1.256
5/12	4.0	-0.154	--	--	0.2	-3.003	1.528	-1.251
6/12	4.0	-0.175	--	--	0.2	-3.129	0.278	-1.248
7/12	4.0	-0.195	--	--	0.2	-3.244	0.377	-1.250
8/12	4.0	-0.212	--	--	0.2	-3.341	1.264	-1.252
9/12	4.0	-0.220	--	--	0.2	-3.414	0.532	-1.250
10/12	4.0	-0.226	--	--	0.2	-3.467	0.366	-1.250
11/12	4.0	-0.233	--	--	0.2	-3.502	0.467	-1.251
1.0	4.0	-0.237	--	--	0.2	-3.516	0.820	-1.252

K_{ini} ($10^4 N/mm$) , K_{opt} ($10^4 N/mm$) , d_{opt} (mm) , d_{ini} (mm) , -- 迭代無法收斂

表五 彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 10mm$, $k_{min} = 10N/mm$)

x/a	$K_{ini} - U_3$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}	$K_{ini} - U_4$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	0.4	-0.848	0.001	-1.240	0.3	-1.287	0.001	-1.239
1/12	0.4	-0.984	0.001	-1.248	0.3	-1.436	0.001	-1.247
2/12	0.4	-1.120	0.001	-1.254	0.3	-1.585	0.001	-1.254
3/12	0.4	-1.253	0.001	-1.256	0.3	-1.731	0.001	-1.257
4/12	0.4	-1.379	0.001	-1.255	0.3	-1.870	0.111	-1.256
5/12	0.4	-1.492	1.789	-1.248	0.3	-1.995	1.606	-1.250
6/12	0.4	-1.595	0.001	-1.246	0.3	-2.108	0.346	-1.248
7/12	0.4	-1.687	1.043	-1.248	0.3	-2.210	0.418	-1.250
8/12	0.4	-1.765	0.755	-1.253	0.3	-2.297	1.100	-1.254
9/12	0.4	-1.823	0.596	-1.253	0.3	-2.362	0.5760	-1.253
10/12	0.4	-1.865	0.480	-1.254	0.3	-2.409	0.439	-1.253
11/12	0.4	-1.894	0.542	-1.257	0.3	-2.440	0.512	-1.254
1.0	0.4	-1.905	0.617	-1.260	0.3	-2.453	0.713	-1.256

$K_{ini} (10^4 N/mm)$, $K_{opt} (10^4 N/mm)$, $d_{opt} (mm)$, $d_{ini} (mm)$

表六 彈性支承之剛度 K_{ini} 對其最佳化的影響($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 10mm$, $K_{min} = 10N/mm$)

x/a	$K_{ini} - N_1$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}	$K_{ini} - N_2$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	0.2	-1.453	0.001	-1.238	0.2	-1.235	0.001	-1.233
1/12	0.2	-1.480	0.001	-1.248	0.2	-1.259	0.001	-1.245
2/12	0.2	-1.505	0.001	-1.254	0.2	-1.280	0.001	-1.254
3/12	0.2	-1.526	0.001	-1.258	0.2	-1.298	0.513	-1.260
4/12	0.2	-1.540	0.322	-1.257	0.2	-1.308	0.001	-1.262
5/12	0.2	-1.542	1.300	-1.253	0.2	-1.305	0.001	-1.255
6/12	0.2	-1.533	0.334	-1.250	0.2	-1.292	0.001	-1.245
7/12	0.2	-1.515	0.560	-1.251	0.2	-1.271	3.616	-1.240
8/12	0.2	-1.489	1.066	-1.254	0.2	-1.245	0.001	-1.248
9/12	0.2	-1.452	0.564	-1.252	2.0	-1.211	0.001	-1.252
10/12	0.2	-1.413	0.001	-1.249	0.2	-1.185	0.001	-1.252
11/12	2.0	-1.386	1.231	-1.249	2.0	-1.171	0.001	-1.251
1.0	2.0	-1.378	0.445	-1.251	0.2	-1.170	1.721	-1.250

$K_{ini} (10^4 N/mm)$, $K_{opt} (10^4 N/mm)$, $d_{opt} (mm)$, $d_{ini} (mm)$

表七 彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 4$, $WT4.5 \times 7$, $t_p = 6mm$, $k_{min} = 10N/mm$)

x/a	$K_{ini} - U_1$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}	$K_{ini} - U_2$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	4.0	0.067	--	--	0.2	-1.286	0.001	-1.239
1/12	4.0	0.017	--	--	0.2	-1.627	0.001	-1.247
2/12	4.0	-0.028	--	--	0.2	-1.966	0.001	-1.254
3/12	4.0	-0.070	--	--	0.2	-2.303	0.001	-1.257
4/12	4.0	-0.112	--	--	0.2	-2.635	0.194	-1.256
5/12	4.0	-0.158	--	--	0.2	-2.959	1.528	-1.251
6/12	4.0	-0.207	--	--	0.2	-3.265	0.278	-1.248
7/12	4.0	-0.254	--	--	0.2	-3.538	0.377	-1.250
8/12	4.0	-0.281	--	--	0.2	-3.753	1.264	-1.252
9/12	4.0	-0.260	--	--	0.2	-3.877	0.532	-1.250
10/12	4.0	-0.222	--	--	0.2	-3.941	0.366	-1.250
11/12	4.0	-0.192	--	--	0.2	-3.971	0.467	-1.251
1.0	4.0	-0.181	--	--	0.2	-3.979	0.820	-1.252

K_{ini} ($10^4 N/mm$) , K_{opt} ($10^4 N/mm$) , d_{opt} (mm) , d_{ini} (mm) , -- 迭代無法收斂

表八 彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 4$, $WT4.5 \times 7$, $t_p = 6mm$, $k_{min} = 10N/mm$)

x/a	$K_{ini} - U_3$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}	$K_{ini} - U_4$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	0.4	-0.277	--	--	0.3	-0.573	0.001	-1.230
1/12	0.4	-0.523	--	--	0.3	-0.859	0.001	-1.247
2/12	0.4	-0.767	--	--	0.3	-1.142	0.001	-1.257
3/12	0.4	-1.007	--	--	0.3	-1.422	0.001	-1.260
4/12	0.4	-1.245	--	--	0.3	-1.699	0.001	-1.256
5/12	0.4	-1.477	--	--	0.3	-1.968	0.001	-1.248
6/12	0.4	-1.696	--	--	0.3	-2.223	1.084	-1.243
7/12	0.4	-1.891	--	--	0.3	-2.450	0.574	-1.250
8/12	0.4	-2.039	--	--	0.3	-2.625	2.848	-1.258
9/12	0.4	-2.109	--	--	0.3	-2.718	1.305	-1.253
10/12	0.4	-2.133	--	--	0.3	-2.758	0.001	-1.250
11/12	0.4	-2.139	--	--	0.3	-2.773	0.001	-1.249
1.0	0.4	-2.139	--	--	0.3	-2.777	0.001	-1.249

$K_{ini}(10^4 N/mm)$, $K_{opt}(10^4 N/mm)$, $d_{opt}(mm)$, $d_{ini}(mm)$, -- 迭代無法收斂

表九 彈性支承之 K_{ini} 對其最佳化的影響 ($n_r = 7$, $WT6 \times 7$, $t_p = 10mm$, $K_{min} = 10N/mm$)

x/a	$K_{ini} - N_1$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}	$K_{ini} - N_2$	d_{ini}	K_{opt}	d_{opt}
0.0	0.2	-1.184	0.001	-1.229	0.2	-1.106	0.001	-1.230
1/12	0.2	-1.294	0.001	-1.247	0.2	-1.193	0.001	-1.247
2/12	0.2	-1.401	0.001	-1.257	0.2	-1.275	0.001	-1.258
3/12	0.2	-1.501	0.001	-1.260	0.2	-1.350	0.001	-1.260
4/12	0.2	-1.591	0.001	-1.256	0.2	-1.415	0.001	-1.256
5/12	0.2	-1.665	0.001	-1.249	0.2	-1.465	0.106	-1.248
6/12	0.2	-1.718	1.091	-1.245	0.2	-1.493	0.836	-1.243
7/12	0.2	-1.738	0.723	-1.252	0.2	-1.491	0.614	-1.248
8/12	0.2	-1.705	2.482	-1.261	0.2	-1.440	3.109	-1.256
9/12	0.2	-1.600	1.507	-1.254	2.0	-1.324	1.151	-1.252
10/12	0.2	-1.469	0.001	-1.250	0.2	-1.193	0.001	-1.250
11/12	2.0	-1.360	0.001	-1.248	2.0	-1.100	0.001	-1.249
1.0	2.0	-1.319	0.001	-1.248	0.2	-1.070	0.001	-1.249

K_{ini} ($10^4 N/mm$) , K_{opt} ($10^4 N/mm$) , d_{opt} (mm) , d_{ini} (mm)

表十 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$, $t_p = 10\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.226	-1.250	-1.250	0.001	-1.231	-1.253	-1.247	0.001	-1.235	-1.250	-1.250
1/12	0.001	-1.244	-1.952	-2.037	0.001	-1.246	-2.286	-2.508	0.001	-1.249	-3.241	-2.947
2/12	0.001	-1.257	-2.640	-2.790	0.001	-1.256	-3.297	-3.889	0.001	-1.256	-5.653	-4.874
3/12	0.001	-1.263	-3.298	-3.363	0.001	-1.260	-4.265	-4.985	0.001	-1.257	-7.769	-6.599
4/12	0.001	-1.262	-3.914	-3.833	0.001	-1.260	-5.171	-5.679	0.001	-1.253	-9.281	-7.940
5/12	<u>1.389</u>	-1.248	-4.478	-4.483	0.465	-1.258	-6.001	-6.028	0.496	-1.247	-10.089	-8.832
6/12	0.938	-1.242	-4.982	-5.054	<u>2.421</u>	-1.256	-6.744	-6.362	0.482	-1.245	-10.242	-9.292
7/12	0.001	-1.246	-5.419	-5.408	0.752	-1.251	-7.387	-7.247	0.901	-1.250	-10.002	-9.457
8/12	<u>1.302</u>	-1.251	-5.783	-5.639	0.001	-1.248	-7.925	-8.173	<u>2.442</u>	-1.257	-10.021	-9.727
9/12	0.777	-1.250	-6.070	-6.026	0.001	-1.247	-8.349	-8.746	1.391	-1.252	-11.172	-10.637
10/12	0.001	-1.250	-6.278	-6.305	0.001	-1.248	-8.653	-8.867	0.103	-1.250	-12.665	-11.675
11/12	0.082	-1.250	-6.403	-6.353	0.712	-1.250	-8.835	-8.613	0.001	-1.250	-13.765	-12.413
1.0	<u>1.346</u>	-1.250	-6.445	-6.278	<u>1.465</u>	-1.253	-8.895	-8.349	0.001	-1.250	-14.160	-12.665

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十一 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$, $t_p = 8\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.222	-1.250	-1.249	0.001	-1.228	-1.251	-1.249	0.001	-1.233	-1.249	-1.250
1/12	0.001	-1.243	-1.995	-2.189	0.001	-1.244	-2.340	-2.799	0.001	-1.248	-3.936	-3.413
2/12	0.001	-1.258	-2.724	-3.059	0.001	-1.255	-3.406	-4.543	0.001	-1.257	-7.482	-6.043
3/12	0.001	-1.266	-3.422	-3.598	0.001	-1.260	-4.426	-5.829	0.001	-1.258	-10.483	-8.311
4/12	0.001	-1.264	-4.076	-3.989	0.001	-1.261	-5.381	-6.500	0.001	-1.254	-12.353	-9.880
5/12	1.049	-1.249	-4.673	-4.785	0.001	-1.257	-6.255	-6.666	0.300	-1.247	-12.919	-10.647
6/12	<u>1.415</u>	-1.240	-5.208	-5.459	<u>3.188</u>	-1.252	-7.037	-6.862	0.703	-1.245	-12.302	-10.667
7/12	0.001	-1.245	-5.670	-5.765	0.504	-1.247	-7.715	-8.004	0.918	-1.251	-11.050	-10.235
8/12	<u>1.007</u>	-1.252	-6.056	-5.904	0.001	-1.246	-8.281	-9.252	<u>2.368</u>	-1.259	-10.479	-10.169
9/12	0.959	-1.250	-6.360	-6.420	0.001	-1.247	-8.727	-9.969	1.442	-1.254	-12.292	-11.509
10/12	0.001	-1.249	-6.581	-6.784	0.001	-1.249	-9.047	-10.015	0.079	-1.250	-14.897	-13.221
11/12	0.001	-1.250	-6.713	-6.766	0.001	-1.251	-9.238	-9.519	0.001	-1.249	-16.857	-14.468
1.0	<u>1.410</u>	-1.250	-6.757	-6.581	<u>2.136</u>	-1.251	-9.302	-9.047	0.001	-1.249	-17.566	-14.897

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移 d_C (mm)：斷面 CC 的撓度 d_B (mm)：斷面 BB 的撓度
 K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十二 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$, $t_p = 6\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.214	-1.250	-1.249	0.001	-1.218	-1.253	-1.242	0.001	-1.229	-1.248	-1.250
1/12	0.001	-1.240	-2.055	-2.563	0.001	-1.239	-2.418	-3.818	0.001	-1.247	-5.786	-4.623
2/12	0.001	-1.260	-2.843	-3.699	0.001	-1.254	-3.558	-6.930	0.001	-1.257	-12.418	-9.132
3/12	0.001	-1.271	-3.597	-4.087	0.001	-1.263	-4.649	-8.792	0.001	-1.260	-17.808	-12.833
4/12	0.001	-1.269	-4.303	-4.210	0.001	-1.266	-5.670	-8.960	0.001	-1.256	-20.588	-14.950
5/12	0.521	-1.251	-4.948	-5.367	0.001	-1.262	-6.604	-7.803	0.001	-1.249	-20.378	-15.276
6/12	<u>2.155</u>	-1.236	-5.524	-6.290	<u>2.731</u>	-1.254	-7.439	-7.012	1.091	-1.245	-17.513	-13.979
7/12	0.001	-1.242	-6.023	-6.425	1.013	-1.244	-8.163	-9.164	0.723	-1.252	-13.344	-11.797
8/12	0.596	-1.253	-6.439	-6.275	0.001	-1.240	-8.767	-11.757	<u>2.482</u>	-1.261	-11.072	-10.742
9/12	<u>1.166</u>	-1.250	-6.767	-7.131	0.001	-1.242	-9.243	-13.024	1.507	-1.254	-14.721	-13.263
10/12	0.001	-1.249	-7.004	-7.719	0.001	-1.247	-9.584	-12.540	0.001	-1.250	-20.432	-16.845
11/12	0.001	-1.250	-7.147	-7.504	0.001	-1.252	-9.788	-10.703	0.001	-1.248	-24.796	-19.513
1.0	<u>1.412</u>	-1.250	-7.194	-7.004	<u>2.080</u>	-1.253	-9.855	-9.243	0.001	-1.248	-26.383	-20.432

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移 d_C (mm)：斷面 CC 的撓度 d_B (mm)：斷面 BB 的撓度
 K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十三 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$, $t_p = 10\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.231	-1.252	-1.249	0.001	-1.235	-1.254	-1.246	0.001	-1.237	-1.248	-1.250
1/12	0.001	-1.246	-1.958	-2.042	0.001	-1.247	-2.299	-2.525	0.001	-1.249	-3.283	-2.981
2/12	0.001	-1.256	-2.649	-2.798	0.001	-1.255	-3.322	-3.917	0.001	-1.256	-5.719	-4.929
3/12	0.001	-1.261	-3.310	-3.373	0.001	-1.259	-4.300	-5.021	0.001	-1.256	-7.850	-6.670
4/12	0.388	-1.261	-3.930	-3.848	0.008	-1.259	-5.218	-5.723	0.001	-1.252	-9.373	-8.024
5/12	<u>1.248</u>	-1.253	-4.497	-4.503	<u>1.277</u>	-1.259	-6.058	-6.078	0.783	-1.247	-10.19	-8.929
6/12	0.317	-1.249	-5.005	-5.076	1.246	-1.262	-6.810	-6.422	0.283	-1.248	-10.35	-9.401
7/12	0.531	-1.250	-5.444	-5.432	0.719	-1.255	-7.462	-7.317	0.958	-1.254	-10.12	-9.576
8/12	<u>1.120</u>	-1.254	-5.811	-5.666	0.445	-1.249	-8.007	-8.251	<u>2.151</u>	-1.261	-10.16	-9.858
9/12	0.604	-1.251	-6.101	-6.056	0.001	-1.246	-8.437	-8.829	1.295	-1.255	-11.32	-10.779
10/12	0.035	-1.248	-6.310	-6.336	0.001	-1.247	-8.746	-8.953	0.333	-1.250	-12.82	-11.825
11/12	<u>1.139</u>	-1.248	-6.437	-6.385	<u>1.120</u>	-1.250	-8.930	-8.701	0.001	-1.249	-13.93	-12.567
1.0	0.439	-1.252	-6.479	-6.310	0.996	-1.254	-8.992	-8.437	0.001	-1.248	-14.32	-12.821

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十四 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$, $t_p = 8\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.230	-1.252	-1.248	0.001	-1.235	-1.254	-1.248	0.001	-1.237	-1.247	-1.249
1/12	0.001	-1.246	-1.993	-2.188	0.001	-1.247	-2.345	-2.883	0.001	-1.250	-3.972	-3.439
2/12	0.001	-1.257	-2.719	-3.053	0.001	-1.255	-3.414	-4.739	0.001	-1.256	-7.533	-6.081
3/12	0.001	-1.263	-3.414	-3.588	0.001	-1.258	-4.438	-6.054	0.001	-1.256	-10.539	-8.356
4/12	0.008	-1.261	-4.065	-3.978	0.001	-1.258	-5.396	-6.628	0.001	-1.252	-12.410	-9.929
5/12	<u>1.947</u>	-1.250	-4.661	-4.773	0.656	-1.256	-6.274	-6.598	0.627	-1.246	-12.977	-10.700
6/12	0.001	-1.247	-5.193	-5.445	<u>2.214</u>	-1.255	-7.060	-6.655	0.418	-1.246	-12.362	-10.725
7/12	0.400	-1.249	-5.655	-5.749	0.778	-1.251	-7.741	-7.889	0.987	-1.253	-11.113	-10.297
8/12	<u>1.287</u>	-1.253	-6.040	-5.887	0.001	-1.248	-8.310	-9.266	<u>2.164</u>	-1.260	-10.550	-10.239
9/12	0.608	-1.251	-6.344	-6.404	0.001	-1.248	-8.759	-10.03	1.355	-1.254	-12.372	-11.587
10/12	0.001	-1.248	-6.564	-6.768	0.001	-1.249	-9.081	-10.001	0.255	-1.249	-14.984	-13.304
11/12	<u>0.998</u>	-1.249	-6.696	-6.749	0.668	-1.251	-9.274	-9.334	0.001	-1.248	-16.947	-14.554
1.0	0.579	-1.252	-6.740	-6.564	<u>1.502</u>	-1.253	-9.338	-8.759	0.001	-1.247	-17.658	-14.984

$d_{opt}(mm)$: 最佳化的彈性支承位移

$d_C(mm)$: 斷面 CC 的撓度

$d_B(mm)$: 斷面 BB 的撓度

$K_{opt}(10^4 N/mm)$: 最佳化的彈性支承剛度

表十五 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$, $t_p = 6\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.224	-1.252	-1.248	0.001	-1.231	-1.252	-1.248	0.001	-1.235	-1.248	-1.250
1/12	0.001	-1.244	-2.042	-2.551	0.001	-1.246	-2.4047	-3.824	0.001	-1.249	-5.815	-4.639
2/12	0.001	-1.258	-2.816	-3.672	0.001	-1.256	-3.537	-6.923	0.001	-1.256	-12.447	-9.146
3/12	0.001	-1.265	-3.557	-4.046	0.001	-1.260	-4.619	-8.770	0.001	-1.257	-17.827	-12.839
4/12	0.001	-1.263	-4.251	-4.159	0.001	-1.259	-5.632	-8.925	0.001	-1.253	-20.593	-14.946
5/12	<u>1.453</u>	-1.250	-4.885	-5.307	0.001	-1.256	-6.560	-7.757	0.418	-1.247	-20.371	-15.265
6/12	0.810	-1.243	-5.453	-6.221	<u>3.417</u>	-1.252	-7.389	-6.962	0.598	-1.246	-17.495	-13.961
7/12	0.001	-1.247	-5.944	-6.348	0.221	-1.249	-8.109	-9.115	0.952	-1.253	-13.319	-11.775
8/12	<u>1.455</u>	-1.252	-6.354	-6.192	0.001	-1.248	-8.710	-11.706	<u>2.245</u>	-1.261	-11.048	-10.720
9/12	0.541	-1.250	-6.677	-7.044	0.001	-1.248	-9.183	-12.969	1.461	-1.255	-14.703	-13.245
10/12	0.001	-1.248	-6.911	-7.629	0.001	-1.249	-9.523	-12.483	0.128	-1.250	-20.417	-16.828
11/12	<u>0.794</u>	-1.249	-7.052	-7.412	0.298	-1.251	-9.726	-10.644	0.001	-1.249	-24.782	-19.497
1.0	0.778	-1.252	-7.099	-6.911	<u>1.889</u>	-1.252	-9.793	-9.183	0.001	-1.248	-26.370	-20.417

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十六 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$, $t_p = 10\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.238	-1.251	-1.249	0.001	-1.239	-1.251	-1.248	0.001	-1.244	-1.250	-1.250
1/12	0.001	-1.248	-1.646	-1.746	0.001	-1.247	-1.827	-2.101	0.001	-1.250	-2.665	-2.390
2/12	0.001	-1.254	-2.034	-2.205	0.001	-1.253	-2.391	-3.067	0.001	-1.253	-4.507	-3.761
3/12	0.001	-1.258	-2.406	-2.494	0.001	-1.256	-2.930	-3.756	0.001	-1.253	-6.064	-4.943
4/12	0.322	-1.257	-2.753	-2.707	0.062	-1.257	-3.436	-4.064	0.001	-1.251	-7.040	-5.766
5/12	<u>1.299</u>	-1.253	-3.071	-3.126	<u>1.241</u>	-1.258	-3.899	-4.061	0.796	-1.248	-7.346	-6.177
6/12	0.334	-1.250	-3.356	-3.482	1.162	-1.260	-4.313	-4.100	0.047	-1.248	-7.046	-6.205
7/12	0.560	-1.251	-3.602	-3.648	0.715	-1.256	-4.673	-4.741	0.955	-1.250	-6.420	-5.998
8/12	<u>1.066</u>	-1.254	-3.808	-3.727	0.436	-1.251	-4.973	-5.454	<u>2.558</u>	-1.253	-6.1420	-5.978
9/12	0.564	-1.252	-3.970	-3.997	0.001	-1.248	-5.209	-5.852	1.439	-1.251	-7.083	-6.676
10/12	0.001	-1.249	-4.088	-4.188	0.001	-1.247	-5.379	-5.841	0.027	-1.250	-8.425	-7.561
11/12	<u>1.232</u>	-1.249	-4.158	-4.182	<u>1.277</u>	-1.248	-5.481	-5.504	0.001	-1.250	-9.434	-8.204
1.0	0.445	-1.251	-4.182	-4.088	0.922	-1.251	-5.515	-5.209	0.001	-1.250	-9.798	-8.425

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十七 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$, $t_p = 8\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.237	-1.251	-1.250	0.001	-1.237	-1.251	-1.247	0.001	-1.243	-1.250	-1.250
1/12	0.001	-1.248	-1.667	-1.878	0.001	-1.246	-1.853	-2.438	0.001	-1.250	-3.325	-2.821
2/12	0.001	-1.255	-2.075	-2.431	0.001	-1.253	-2.442	-3.851	0.001	-1.253	-6.264	-4.859
3/12	0.001	-1.259	-2.465	-2.665	0.001	-1.257	-3.005	-4.732	0.001	-1.254	-8.670	-6.550
4/12	0.138	-1.259	-2.830	-2.781	0.001	-1.259	-3.533	-4.894	0.001	-1.251	-9.967	-7.566
5/12	<u>1.507</u>	-1.253	-3.164	-3.328	<u>1.271</u>	-1.261	-4.016	-4.489	0.554	-1.248	-9.996	-7.819
6/12	0.289	-1.251	-3.462	-3.772	1.143	-1.262	-4.449	-4.227	0.353	-1.248	-8.895	-7.376
7/12	0.567	-1.252	-3.721	-3.876	0.721	-1.257	-4.824	-5.196	0.960	-1.250	-7.229	-6.546
8/12	<u>1.073</u>	-1.254	-3.936	-3.851	0.444	-1.251	-5.137	-6.343	<u>2.436</u>	-1.254	-6.344	-6.173
9/12	0.564	-1.252	-4.107	-4.242	0.036	-1.247	-5.383	-6.920	1.506	-1.251	-7.938	-7.291
10/12	0.002	-1.250	-4.230	-4.513	0.001	-1.247	-5.560	-6.747	0.011	-1.250	-10.386	-8.841
11/12	<u>1.241</u>	-1.249	-4.304	-4.436	<u>1.334</u>	-1.248	-5.666	-5.992	0.001	-1.250	-12.250	-9.990
1.0	0.440	-1.251	-4.328	-4.230	0.862	-1.251	-5.702	-5.383	0.001	-1.250	-12.928	-10.386

$d_{opt}(mm)$ ：最佳化的彈性支承位移

$d_C(mm)$ ：斷面 CC 的撓度

$d_B(mm)$ ：斷面 BB 的撓度

$K_{opt}(10^4 N/mm)$ ：最佳化的彈性支承剛度

表十八 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$, $t_p = 6\text{mm}$, $k_{ini} - N_1$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.233	-1.251	-1.249	0.001	-1.236	-1.252	-1.248	0.001	-1.241	-1.249	-1.250
1/12	0.001	-1.246	-1.695	-2.222	0.001	-1.246	-1.888	-3.356	0.001	-1.249	-5.133	-3.988
2/12	0.001	-1.258	-2.131	-3.011	0.001	-1.253	-2.510	-5.986	0.001	-1.254	-11.111	-7.861
3/12	0.001	-1.261	-2.547	-3.064	0.001	-1.258	-3.106	-7.373	0.001	-1.255	-15.860	-10.940
4/12	0.001	-1.261	-2.937	-2.886	0.001	-1.259	-3.663	-7.091	0.001	-1.252	-18.021	-12.460
5/12	<u>1.481</u>	-1.254	-3.294	-3.772	0.248	-1.258	-4.174	-5.526	0.213	-1.248	-17.230	-12.231
6/12	0.491	-1.250	-3.612	-4.443	<u>2.702</u>	-1.256	-4.630	-4.396	0.783	-1.247	-13.839	-10.431
7/12	0.496	-1.251	-3.888	-4.357	0.640	-1.252	-5.026	-6.271	0.834	-1.250	-9.222	-7.820
8/12	<u>1.097</u>	-1.254	-4.118	-4.028	0.001	-1.249	-5.356	-8.620	<u>2.528</u>	-1.254	-6.615	-6.435
9/12	0.569	-1.252	-4.300	-4.747	0.001	-1.248	-5.616	-9.683	1.461	-1.252	-10.033	-8.721
10/12	0.001	-1.249	-4.431	-5.233	0.001	-1.248	-5.803	-9.047	0.001	-1.250	-15.578	-12.131
11/12	<u>1.239</u>	-1.249	-4.510	-4.953	0.893	-1.250	-5.914	-7.112	0.001	-1.249	-19.840	-14.694
1.0	0.448	-1.251	-4.536	-4.431	<u>1.334</u>	-1.252	-5.951	-5.616	0.001	-1.249	-21.394	-15.578

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表十九 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$, $t_p = 10\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.226	-1.250	-1.249	0.001	-1.228	-1.264	-1.242	0.001	-1.235	-1.249	-1.250
1/12	0.001	-1.244	-1.952	-2.036	0.001	-1.244	-2.296	-2.505	0.001	-1.249	-3.240	-2.948
2/12	0.001	-1.257	-2.640	-2.790	0.001	-1.254	-3.308	-3.891	0.001	-1.256	-5.653	-4.875
3/12	0.001	-1.263	-3.298	-3.362	0.001	-1.259	-4.275	-4.990	0.001	-1.258	-7.769	-6.600
4/12	0.001	-1.262	-3.914	-3.832	0.001	-1.260	-5.181	-5.686	0.001	-1.253	-9.281	-7.941
5/12	<u>1.388</u>	-1.248	-4.478	-4.483	0.774	-1.259	-6.011	-6.035	0.427	-1.247	-10.089	-8.834
6/12	0.947	-1.242	-4.982	-5.054	<u>1.891</u>	-1.258	-6.752	-6.370	0.737	-1.246	-10.243	-9.294
7/12	0.001	-1.246	-5.418	-5.407	0.577	-1.250	-7.396	-7.255	0.553	-1.252	-10.003	-9.459
8/12	<u>1.251</u>	-1.251	-5.782	-5.639	0.306	-1.243	-7.933	-8.181	<u>2.795</u>	-1.258	-10.022	-9.729
9/12	0.849	-1.250	-6.070	-6.026	0.277	-1.242	-8.356	-8.754	0.993	-1.254	-11.174	-10.638
10/12	0.001	-1.249	-6.278	-6.305	0.314	-1.247	-8.660	-8.874	0.304	-1.250	-12.667	-11.677
11/12	0.001	-1.250	-6.403	-6.353	0.540	-1.257	-8.842	-8.621	0.001	-1.249	-13.766	-12.414
1.0	<u>1.400</u>	-1.250	-6.445	-6.278	<u>1.125</u>	-1.264	-8.902	-8.356	0.001	-1.249	-14.161	-12.667

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$, $t_p = 8\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.222	-1.250	-1.249	0.001	-1.228	-1.253	-1.247	0.001	-1.233	-1.247	-1.250
1/12	0.001	-1.243	-1.995	-2.189	0.001	-1.244	-2.341	-2.871	0.001	-1.248	-3.934	-3.413
2/12	0.001	-1.258	-2.724	-3.059	0.001	-1.255	-3.407	-4.725	0.001	-1.257	-7.481	-6.044
3/12	0.001	-1.266	-3.422	-3.598	0.001	-1.260	-4.427	-6.040	0.001	-1.258	-10.483	-8.313
4/12	0.001	-1.264	-4.076	-3.989	0.001	-1.260	-5.381	-6.615	0.001	-1.254	-12.354	-9.882
5/12	1.055	-1.249	-4.673	-4.785	0.001	-1.256	-6.256	-6.584	0.246	-1.248	-12.920	-10.649
6/12	<u>1.405</u>	-1.240	-5.208	-5.459	<u>3.152</u>	-1.251	-7.037	-6.636	0.961	-1.246	-12.304	-10.670
7/12	0.001	-1.245	-5.670	-5.765	0.559	-1.246	-7.715	-7.864	0.529	-1.254	-11.052	-10.237
8/12	<u>1.005</u>	-1.252	-6.056	-5.904	0.001	-1.245	-8.281	-9.237	<u>2.741</u>	-1.261	-10.481	-10.172
9/12	0.969	-1.250	-6.360	-6.420	0.001	-1.247	-8.727	-10.000	1.005	-1.256	-12.294	-11.512
10/12	0.001	-1.249	-6.581	-6.784	0.001	-1.249	-9.047	-9.969	0.320	-1.250	-14.900	-13.223
11/12	0.001	-1.250	-6.713	-6.766	0.001	-1.252	-9.238	-9.304	0.001	-1.247	-16.859	-14.471
1.0	<u>1.405</u>	-1.250	-6.757	-6.581	<u>2.118</u>	-1.253	-9.301	-8.727	0.001	-1.247	-17.569	-14.900

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十一 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT4 \times 7.5$, $t_p = 6\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d	d_C	d_B	K_{opt}	d	d_C	d_B	K_{opt}	d	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.213	-1.251	-1.249	0.001	-1.218	-1.253	-1.242	0.001	-1.229	-1.249	-1.250
1/12	0.001	-1.240	-2.055	-2.563	0.001	-1.239	-2.418	-3.818	0.001	-1.247	-5.7868	-4.622
2/12	0.001	-1.260	-2.843	-3.699	0.001	-1.255	-3.558	-6.930	0.001	-1.257	-12.417	-9.130
3/12	0.001	-1.271	-3.597	-4.087	0.001	-1.265	-4.649	-8.792	0.001	-1.260	-17.805	-12.830
4/12	0.001	-1.269	-4.302	-4.210	0.001	-1.267	-5.670	-8.960	0.001	-1.256	-20.585	-14.946
5/12	0.567	-1.251	-4.948	-5.366	0.001	-1.264	-6.604	-7.803	0.001	-1.248	-20.375	-15.272
6/12	<u>2.063</u>	-1.237	-5.524	-6.290	<u>2.779</u>	-1.257	-7.439	-7.012	1.150	-1.244	-17.509	-13.974
7/12	0.001	-1.242	-6.023	-6.425	0.936	-1.247	-8.163	-9.164	0.398	-1.250	-13.339	-11.793
8/12	0.666	-1.252	-6.438	-6.275	0.001	-1.243	-8.767	-11.757	<u>2.997</u>	-1.258	-11.068	-10.738
9/12	<u>1.150</u>	-1.250	-6.767	-7.131	0.001	-1.244	-9.243	-13.023	1.265	-1.253	-14.716	-13.259
10/12	0.001	-1.249	-7.004	-7.719	0.001	-1.248	-9.584	-12.540	0.001	-1.250	-20.428	-16.840
11/12	0.001	-1.250	-7.147	-7.504	0.001	-1.252	-9.788	-10.703	0.001	-1.249	-24.791	-19.508
1.0	<u>1.400</u>	-1.251	-7.194	-7.004	<u>2.100</u>	-1.254	-9.855	-9.243	0.001	-1.249	-26.378	-20.428

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十二 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$, $t_p = 10\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.234	-1.253	-1.249	0.001	-1.238	-1.256	-1.247	0.001	-1.236	-1.246	-1.2513
1/12	0.001	-1.247	-1.957	-2.041	0.001	-1.248	-2.283	-2.509	0.001	-1.249	-3.282	-2.9827
2/12	0.001	-1.256	-2.648	-2.800	0.001	-1.254	-3.287	-3.885	0.001	-1.255	-5.720	-4.9317
3/12	0.001	-1.260	-3.309	-3.372	0.001	-1.256	-4.249	-4.972	0.001	-1.256	-7.852	-6.6734
4/12	0.001	-1.258	-3.929	-3.846	0.001	-1.255	-5.150	-5.659	0.001	-1.252	-9.376	-8.0279
5/12	<u>2.045</u>	-1.247	-4.495	-4.501	0.763	-1.253	-5.976	-6.001	0.610	-1.248	-10.195	-8.9334
6/12	0.018	-1.245	-5.003	-5.074	<u>2.250</u>	-1.253	-6.715	-6.333	0.759	-1.249	-10.358	-9.4053
7/12	0.260	-1.248	-5.442	-5.430	0.481	-1.250	-7.356	-7.219	0.595	-1.257	-10.128	-9.5809
8/12	<u>1.358</u>	-1.252	-5.809	-5.664	0.109	-1.247	-7.892	-8.144	<u>2.385</u>	-1.264	-10.160	-9.8626
9/12	0.528	-1.250	-6.098	-6.054	0.074	-1.247	-8.314	-8.715	0.881	-1.259	-11.323	-10.783
10/12	0.295	-1.249	-6.308	-6.334	0.206	-1.248	-8.617	-8.834	0.384	-1.251	-12.825	-11.829
11/12	0.438	-1.250	-6.434	-6.382	0.592	-1.252	-8.799	-8.579	0.182	-1.247	-13.929	-12.571
1.0	<u>0.888</u>	-1.253	-6.476	-6.308	<u>1.345</u>	-1.256	-8.859	-8.314	0.001	-1.246	-14.326	-12.825

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十三 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$, $t_p = 8\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.230	-1.252	-1.248	0.001	-1.234	-1.260	-1.242	0.001	-1.237	-1.248	-1.2501
1/12	0.001	-1.246	-1.992	-2.187	0.001	-1.246	-2.315	-2.847	0.001	-1.250	-3.973	-3.4396
2/12	0.001	-1.257	-2.718	-3.052	0.001	-1.254	-3.349	-4.673	0.001	-1.256	-7.533	-6.0807
3/12	0.001	-1.261	-3.413	-3.586	0.001	-1.257	-4.338	-5.959	0.001	-1.256	-10.538	-8.3548
4/12	0.001	-1.259	-4.064	-3.976	0.001	-1.257	-5.264	-6.504	0.001	-1.252	-12.409	-9.9274
5/12	<u>1.810</u>	-1.247	-4.659	-4.771	0.848	-1.255	-6.113	-6.447	0.641	-1.246	-12.975	-10.699
6/12	0.362	-1.244	-5.192	-5.443	<u>1.948</u>	-1.255	-6.872	-6.480	0.479	-1.247	-12.360	-10.723
7/12	0.697	-1.247	-5.653	-5.747	0.531	-1.249	-7.530	-7.694	0.606	-1.253	-11.111	-10.295
8/12	<u>1.482</u>	-1.251	-6.038	-5.885	0.236	-1.243	-8.080	-9.054	<u>2.772</u>	-1.259	-10.548	-10.237
9/12	0.522	-1.250	-6.342	-6.402	0.213	-1.242	-8.513	-9.805	0.988	-1.255	-12.370	-11.585
10/12	0.199	-1.248	-6.562	-6.766	0.279	-1.247	-8.824	-9.764	0.320	-1.250	-14.982	-13.302
11/12	0.415	-1.249	-6.694	-6.747	0.559	-1.254	-9.010	-9.092	0.001	-1.249	-16.945	-14.552
1.0	<u>0.974</u>	-1.252	-6.738	-6.561	<u>1.201</u>	-1.260	-9.072	-8.513	0.001	-1.248	-17.656	-14.982

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十四 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT5 \times 6$, $t_p = 6\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.223	-1.2534	-1.248	0.001	-1.233	-1.258	-1.247	0.001	-1.235	-1.246	-1.250
1/12	0.001	-1.243	-2.0431	-2.551	0.001	-1.247	-2.355	-3.772	0.001	-1.249	-5.814	-4.6389
2/12	0.001	-1.258	-2.8170	-3.673	0.001	-1.256	-3.429	-6.821	0.001	-1.256	-12.446	-9.1459
3/12	0.001	-1.265	-3.5577	-4.046	0.001	-1.260	-4.457	-8.618	0.001	-1.257	-17.826	-12.839
4/12	0.001	-1.263	-4.2511	-4.159	0.001	-1.260	-5.419	-8.725	0.001	-1.253	-20.593	-14.946
5/12	<u>1.561</u>	-1.250	-4.8856	-5.308	0.086	-1.256	-6.300	-7.514	0.370	-1.247	-20.370	-15.265
6/12	0.518	-1.243	-5.4529	-6.222	<u>3.244</u>	-1.252	-7.088	-6.682	0.831	-1.247	-17.495	-13.961
7/12	0.261	-1.246	-5.9444	-6.348	0.264	-1.249	-7.771	-8.804	0.517	-1.255	-13.319	-11.775
8/12	<u>1.330</u>	-1.251	-6.3539	-6.192	0.001	-1.247	-8.342	-11.368	<u>2.751</u>	-1.261	-11.049	-10.720
9/12	0.528	-1.249	-6.6776	-7.045	0.001	-1.247	-8.791	-12.609	1.010	-1.256	-14.703	-13.245
10/12	0.307	-1.248	-6.9116	-7.630	0.168	-1.249	-9.114	-12.106	0.319	-1.250	-20.417	-16.829
11/12	0.455	-1.250	-7.0524	-7.412	0.626	-1.254	-9.307	-10.256	0.001	-1.247	-24.782	-19.497
1.0	<u>0.872</u>	-1.253	-7.0991	-6.912	<u>1.431</u>	-1.258	-9.371	-8.791	0.001	-1.246	-26.370	-20.417

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十五 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$, $t_p = 10\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.239	-1.252	-1.250	0.001	-1.239	-1.262	-1.251	0.001	-1.243	-1.249	-1.250
1/12	0.001	-1.247	-1.653	-1.751	0.001	-1.246	-1.845	-2.111	0.001	-1.250	-2.664	-2.390
2/12	0.001	-1.254	-2.046	-2.215	0.001	-1.252	-2.416	-3.086	0.001	-1.253	-4.507	-3.762
3/12	0.001	-1.257	-2.422	-2.509	0.001	-1.255	-2.962	-3.782	0.001	-1.253	-6.065	-4.945
4/12	0.194	-1.256	-2.774	-2.727	0.001	-1.256	-3.474	-4.097	0.001	-1.251	-7.041	-5.768
5/12	<u>1.528</u>	-1.251	-3.096	-3.150	1.165	-1.257	-3.943	-4.101	0.677	-1.248	-7.348	-6.179
6/12	0.278	-1.248	-3.385	-3.510	<u>1.417</u>	-1.258	-4.362	-4.145	0.431	-1.249	-7.049	-6.207
7/12	0.377	-1.250	-3.634	-3.679	0.579	-1.255	-4.726	-4.790	0.617	-1.252	-6.422	-6.000
8/12	<u>1.264</u>	-1.252	-3.843	-3.760	0.345	-1.251	-5.029	-5.507	<u>2.754</u>	-1.255	-6.144	-5.981
9/12	0.532	-1.250	-4.007	-4.033	0.326	-1.251	-5.269	-5.908	1.005	-1.252	-7.085	-6.679
10/12	0.366	-1.250	-4.126	-4.226	0.341	-1.253	-5.441	-5.899	0.331	-1.250	-8.428	-7.563
11/12	0.467	-1.251	-4.198	-4.220	0.535	-1.258	-5.544	-5.563	0.001	-1.249	-9.436	-8.206
1.0	<u>0.820</u>	-1.252	-4.222	-4.126	<u>1.092</u>	-1.262	-5.578	-5.269	0.001	-1.249	-9.801	-8.428

d_{opt} (mm)：最佳化的彈性支承位移

d_C (mm)：斷面 CC 的撓度

d_B (mm)：斷面 BB 的撓度

K_{opt} (10^4 N/mm)：最佳化的彈性支承剛度

表二十六 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$, $t_p = 8\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.236	-1.253	-1.250	0.001	-1.239	-1.255	-1.245	0.001	-1.243	-1.250	-1.250
1/12	0.001	-1.247	-1.668	-1.878	0.001	-1.247	-1.856	-2.436	0.001	-1.250	-3.325	-2.820
2/12	0.001	-1.254	-2.075	-2.430	0.001	-1.252	-2.444	-3.848	0.001	-1.253	-6.263	-4.858
3/12	0.001	-1.258	-2.465	-2.664	0.001	-1.255	-3.006	-4.729	0.001	-1.254	-8.669	-6.549
4/12	0.076	-1.257	-2.829	-2.780	0.001	-1.255	-3.532	-4.891	0.001	-1.251	-9.966	-7.565
5/12	<u>1.630</u>	-1.252	-3.163	-3.327	0.706	-1.254	-4.015	-4.486	0.656	-1.248	-9.995	-7.818
6/12	0.257	-1.249	-3.461	-3.771	<u>2.088</u>	-1.254	-4.446	-4.224	0.256	-1.248	-8.893	-7.374
7/12	0.386	-1.250	-3.720	-3.874	0.520	-1.250	-4.820	-5.193	0.532	-1.250	-7.227	-6.544
8/12	<u>1.280</u>	-1.252	-3.935	-3.850	0.241	-1.246	-5.133	-6.339	<u>3.199</u>	-1.253	-6.342	-6.172
9/12	0.538	-1.251	-4.106	-4.241	0.216	-1.245	-5.379	-6.916	1.178	-1.251	-7.936	-7.289
10/12	0.361	-1.250	-4.229	-4.511	0.276	-1.247	-5.555	-6.743	0.001	-1.250	-10.384	-8.839
11/12	0.470	-1.251	-4.303	-4.434	0.569	-1.252	-5.661	-5.988	0.001	-1.250	-12.248	-9.988
1.0	<u>0.825</u>	-1.253	-4.327	-4.228	<u>1.207</u>	-1.255	-5.696	-5.379	0.001	-1.250	-12.925	-10.384

$d_{opt}(mm)$: 最佳化的彈性支承位移

$d_C(mm)$: 斷面 CC 的撓度

$d_B(mm)$: 斷面 BB 的撓度

$K_{opt}(10^4 N/mm)$: 最佳化的彈性支承剛度

表二十七 不同加勁板在不同斷面的垂直位移($WT6 \times 7$, $t_p = 6\text{mm}$, $k_{ini} - U_2$)

x/a	$n_r = 7$				$n_r = 5$				$n_r = 4$			
	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B	K_{opt}	d_{opt}	d_C	d_B
0.0	0.001	-1.2328	-1.252	-1.248	0.001	-1.234	-1.258	-1.244	0.001	-1.241	-1.250	-1.250
1/12	0.001	-1.2452	-1.689	-2.215	0.001	-1.244	-1.885	-3.345	0.001	-1.249	-5.133	-3.988
2/12	0.001	-1.2544	-2.118	-2.997	0.001	-1.252	-2.499	-5.970	0.001	-1.254	-11.111	-7.860
3/12	0.001	-1.2593	-2.528	-3.045	0.001	-1.257	-3.086	-7.351	0.001	-1.255	-15.859	-10.939
4/12	0.001	-1.2587	-2.912	-2.861	0.001	-1.258	-3.636	-7.063	0.001	-1.252	-18.020	-12.459
5/12	<u>1.370</u>	-1.2511	-3.264	-3.743	0.610	-1.258	-4.139	-5.493	0.237	-1.249	-17.229	-12.229
6/12	0.700	-1.2465	-3.578	-4.409	<u>2.034</u>	-1.257	-4.588	-4.357	0.852	-1.247	-13.837	-10.430
7/12	0.264	-1.2476	-3.850	-4.319	0.553	-1.251	-4.978	-6.227	0.418	-1.250	-9.221	-7.819
8/12	<u>1.328</u>	-1.2503	-4.077	-3.987	0.318	-1.245	-5.304	-8.572	<u>3.073</u>	-1.254	-6.614	-6.434
9/12	0.523	-1.2493	-4.256	-4.704	0.298	-1.244	-5.560	-9.632	1.238	-1.251	-10.032	-8.720
10/12	0.307	-1.2484	-4.385	-5.188	0.312	-1.248	-5.744	-8.993	0.001	-1.250	-15.576	-12.129
11/12	0.466	-1.2498	-4.463	-4.908	0.548	-1.254	-5.854	-7.056	0.001	-1.250	-19.839	-14.692
1.0	<u>0.871</u>	-1.2516	-4.488	-4.385	<u>1.139</u>	-1.258	-5.890	-5.560	0.001	-1.250	-21.392	-15.576

$d_{opt}(mm)$: 最佳化的彈性支承位移

$d_C(mm)$: 斷面 CC 的撓度

$d_B(mm)$: 斷面 BB 的撓度

$K_{opt}(10^4 N/mm)$: 最佳化的彈性支承剛度

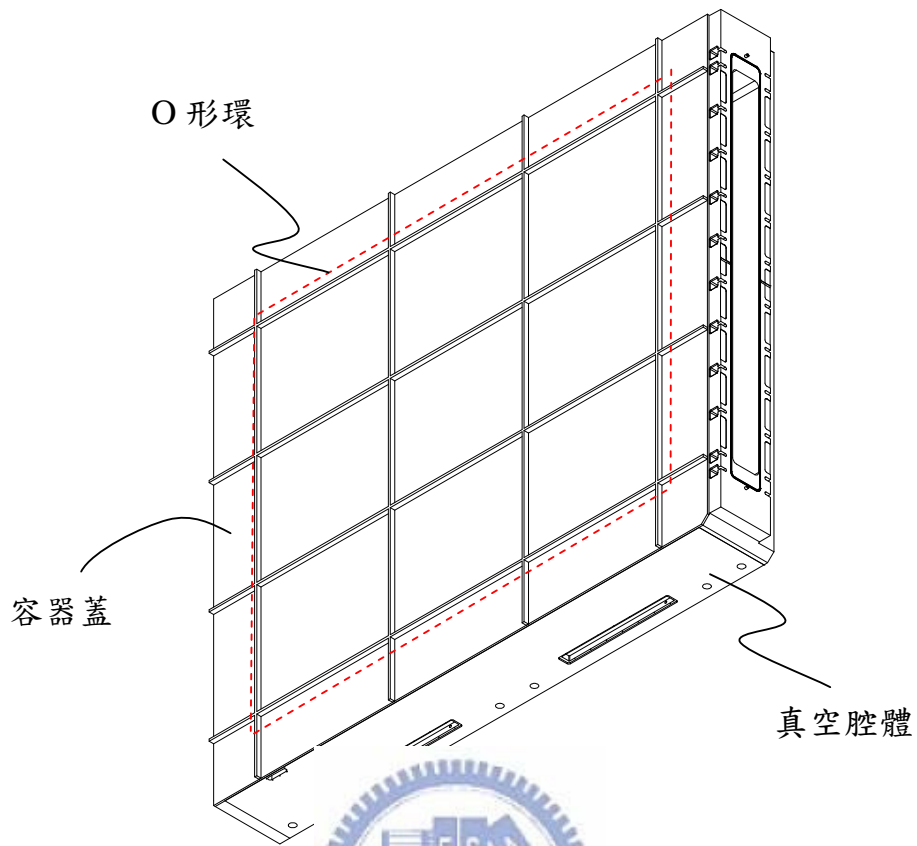


圖 1.1 真空腔體示意圖

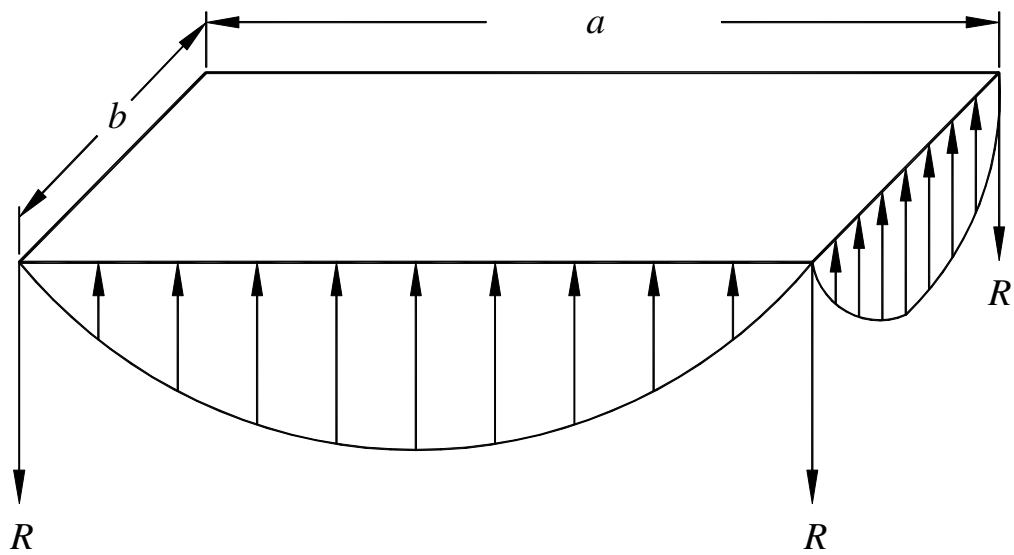


圖 1.2 簡支單層板反力分佈

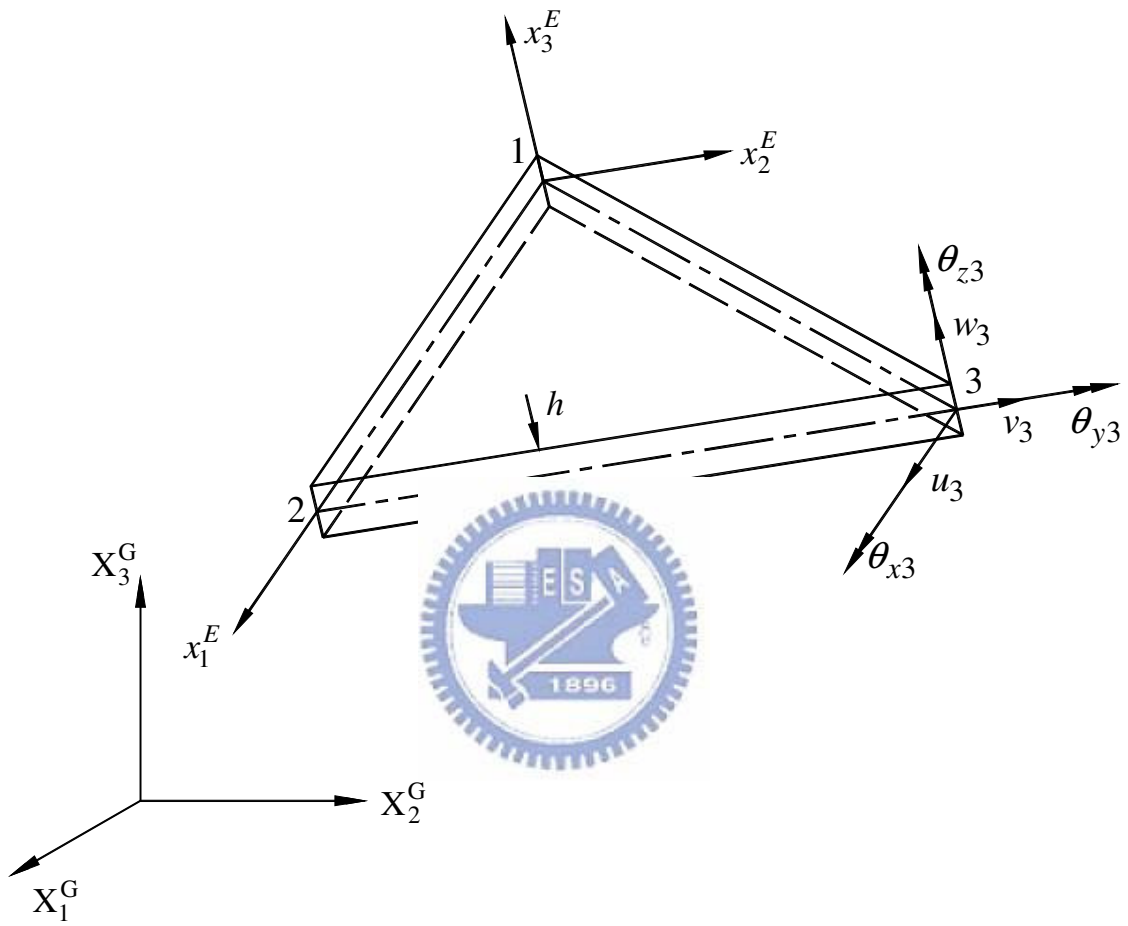


圖 2.1 三角殼元素的示意圖及節點自由度

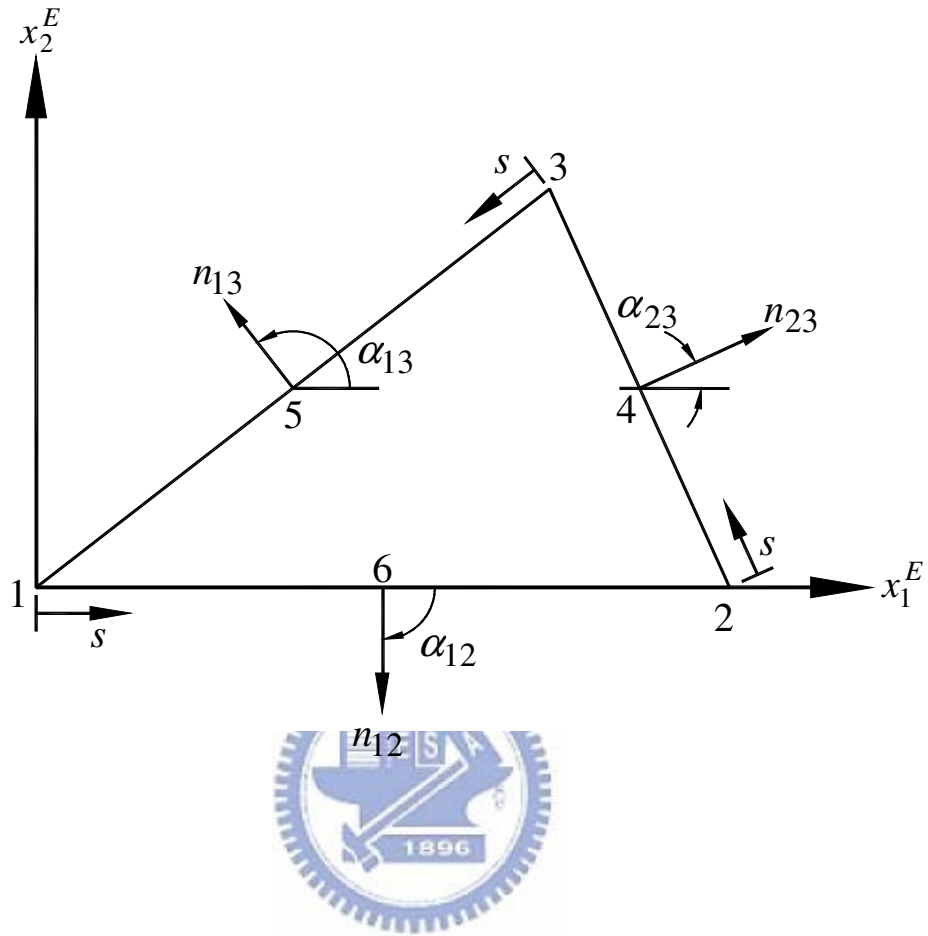


圖 2.2 DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖

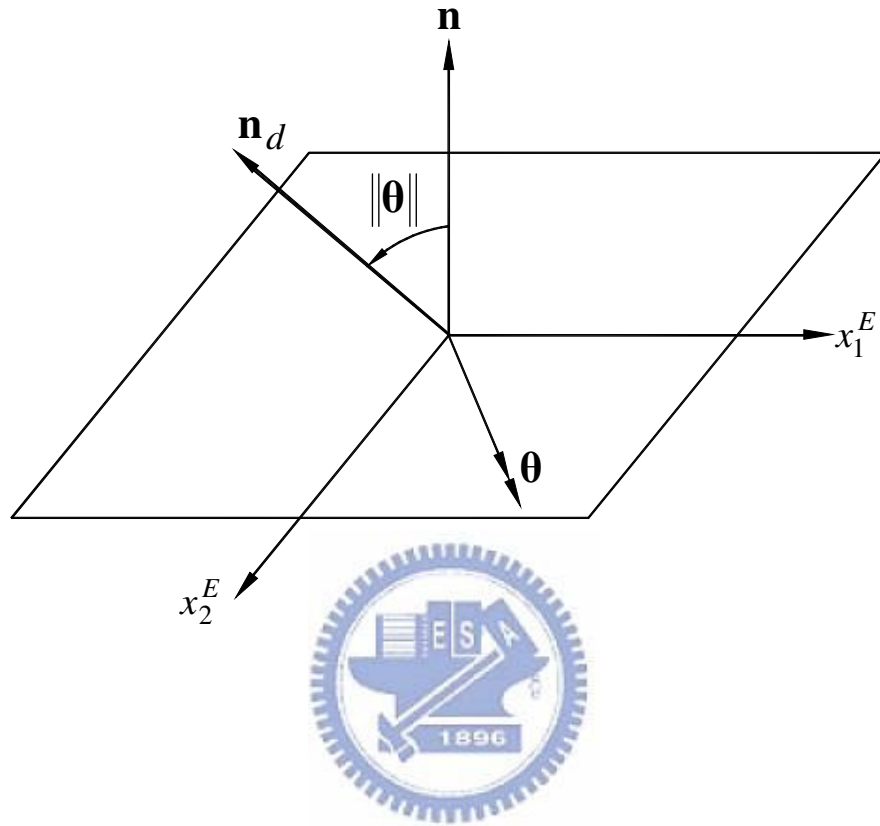


圖 2.3 變形前板元素中心面之單位法向量 \mathbf{n} 受旋轉向量 θ 作用的示意圖

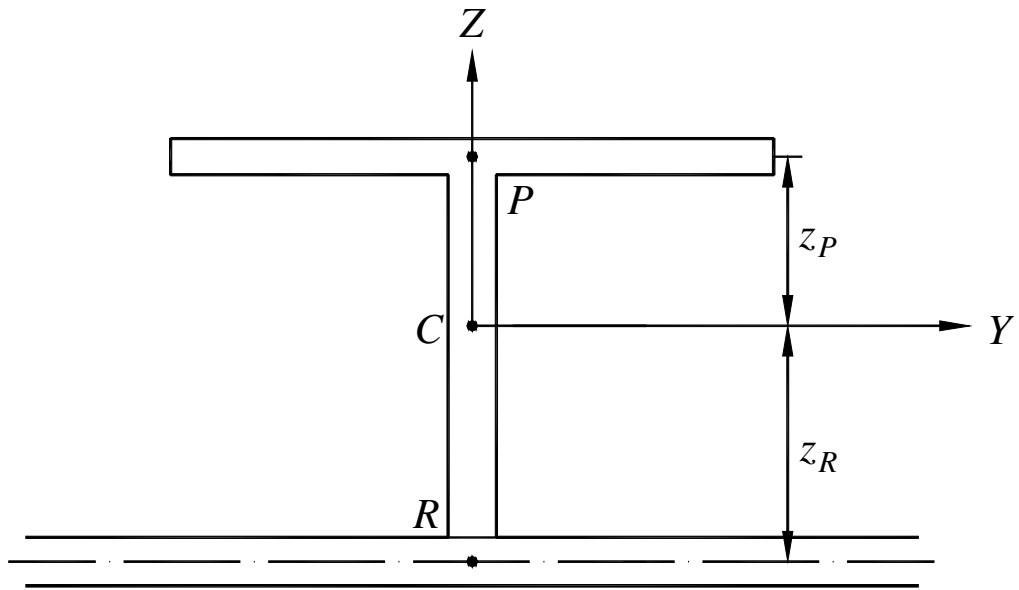


圖 2.4 加勁板節點位置示意圖

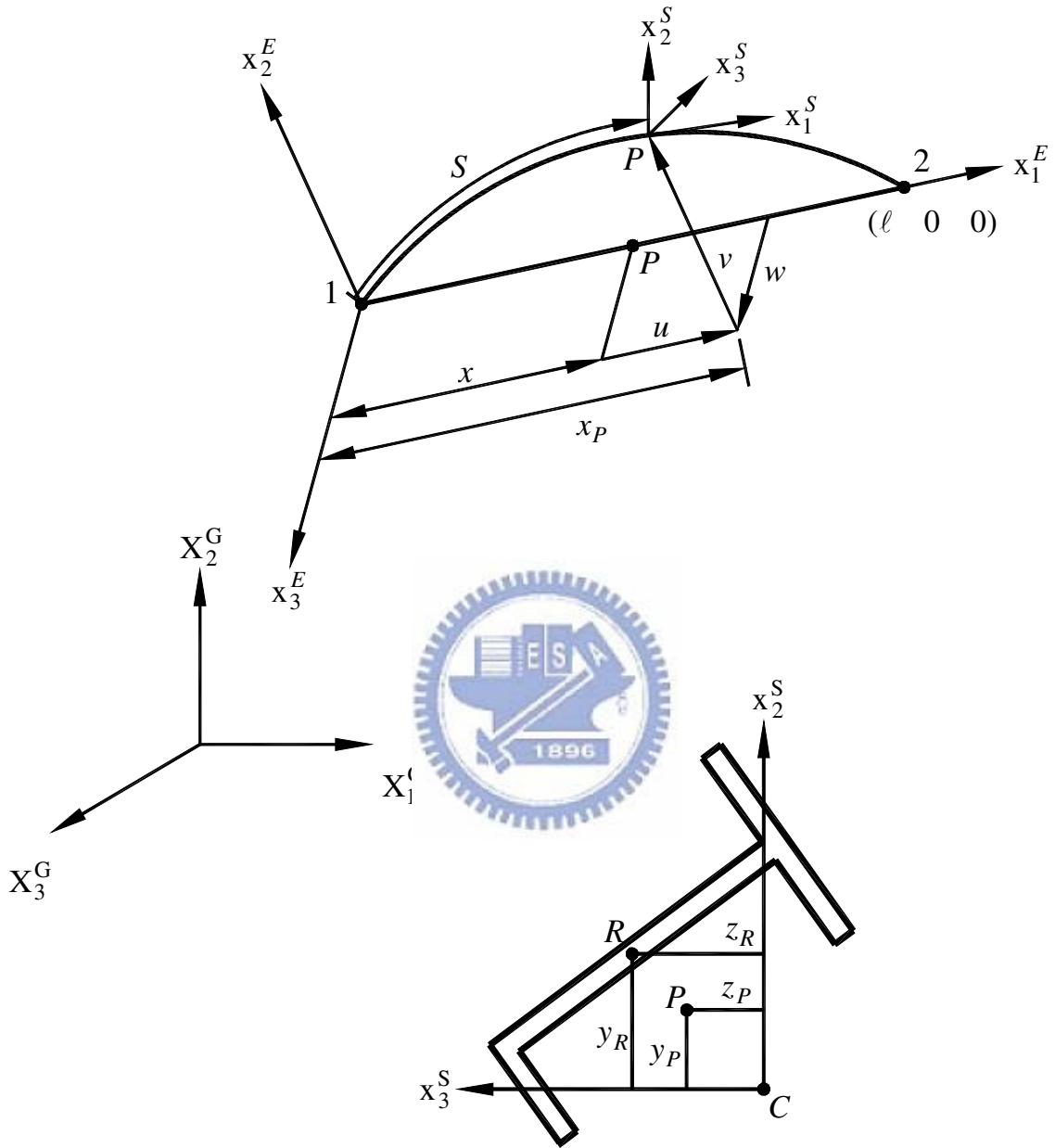


圖 2.5 元素座標與元素截面座標

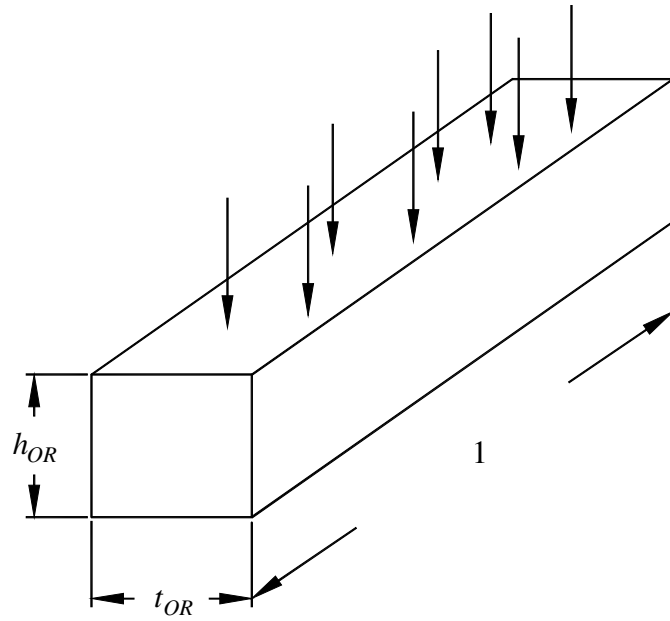


圖 2.6 單位長度的 O 形環

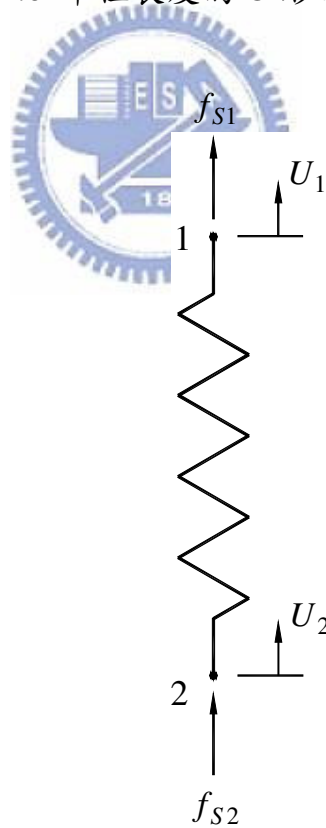


圖 2.7 彈簧元素之節點內力

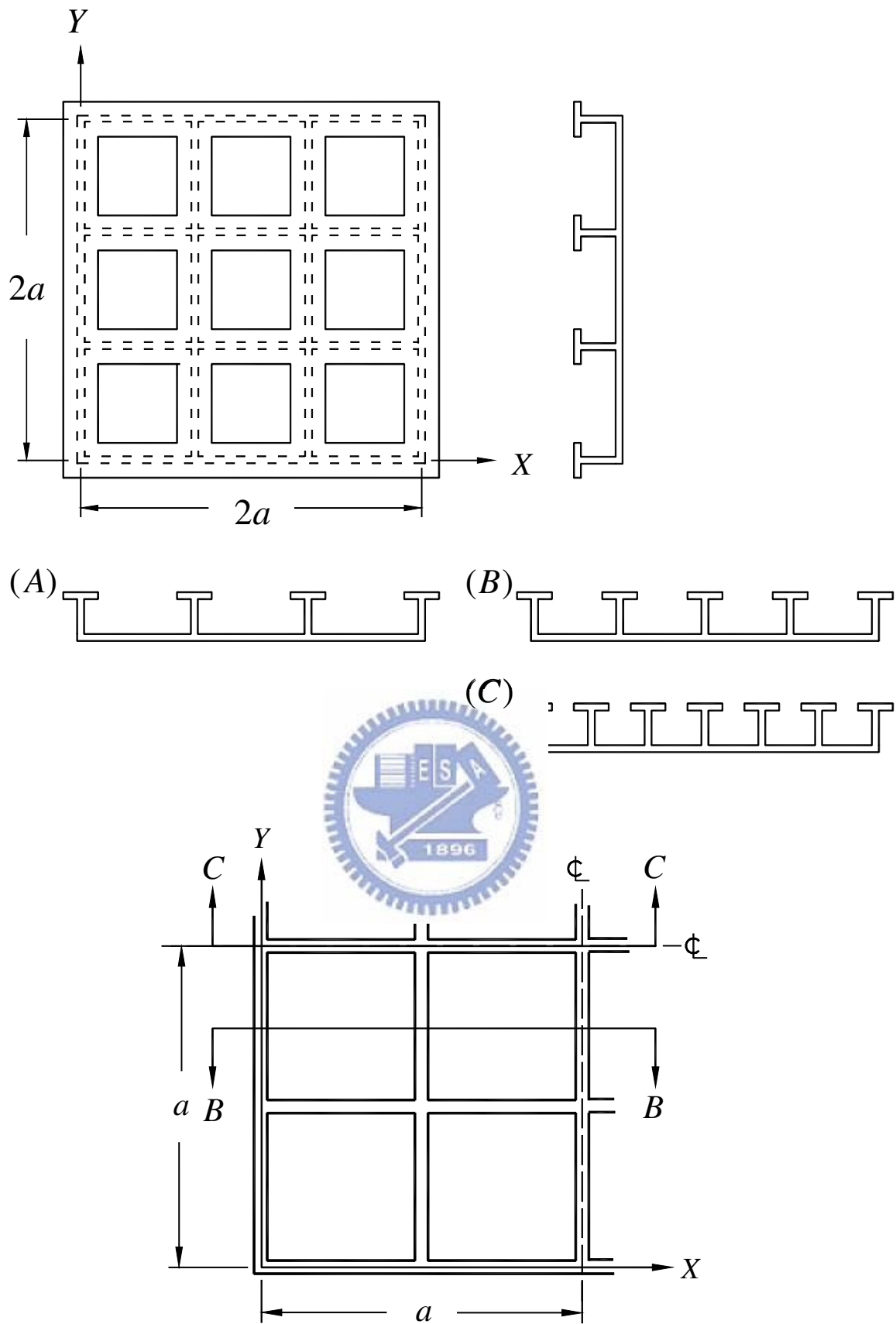
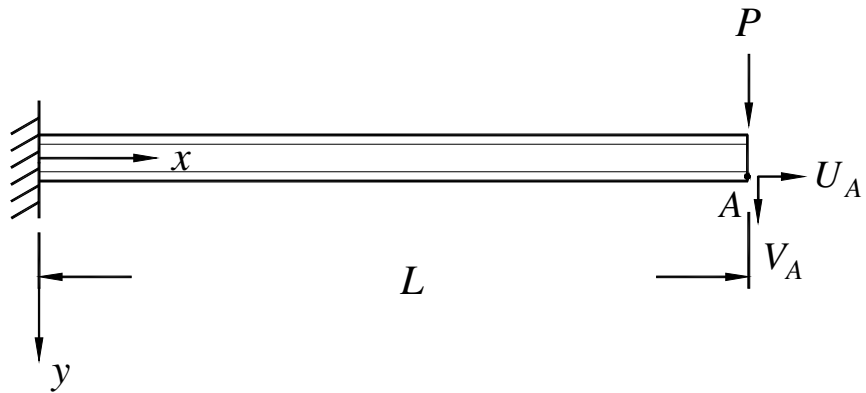


圖 4.1 加勁板結構示意圖



$$E = 0.12 \times 10^9 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$L = 100 \text{ mm}$$

$$t_f = t_w = 2 \text{ mm}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$d = 10 \text{ mm}$$

$$P = 1 \text{ N}$$

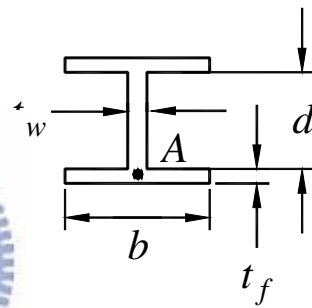


圖 4.2 端點受單位力的懸臂梁

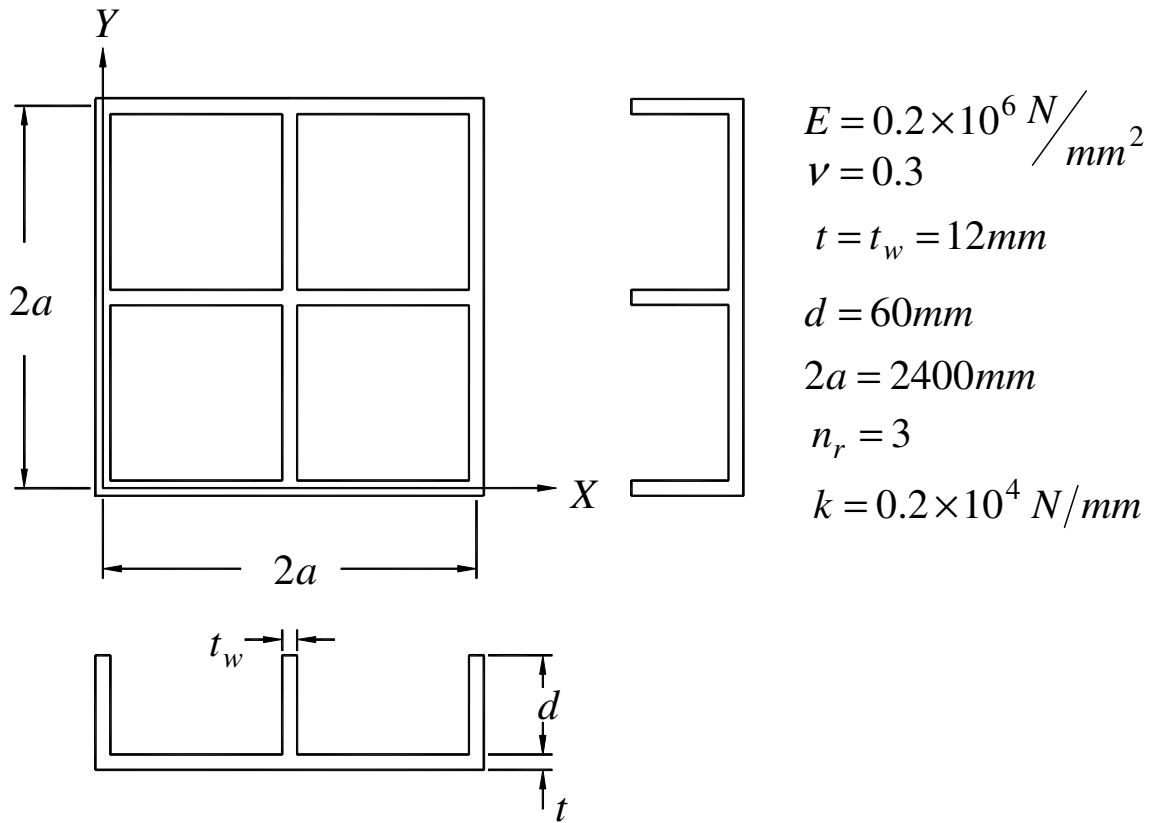


圖 4.3 受一大氣壓均佈橫向力的加勁板

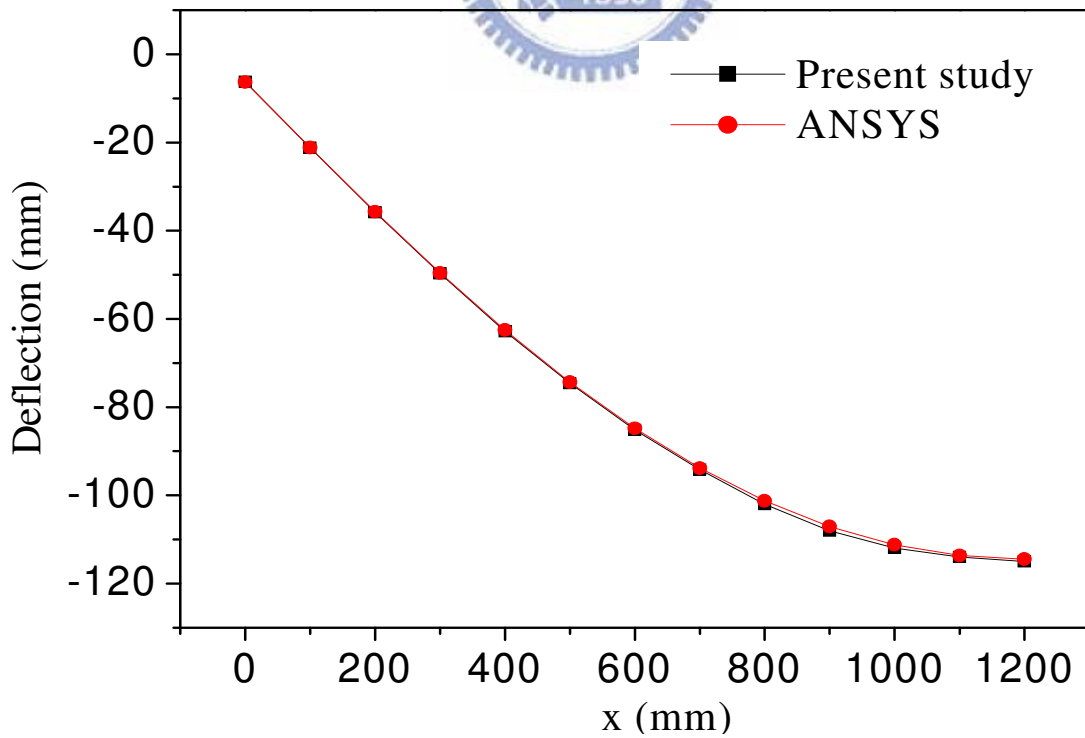


圖 4.4 加勁板之對稱軸的撓度分佈

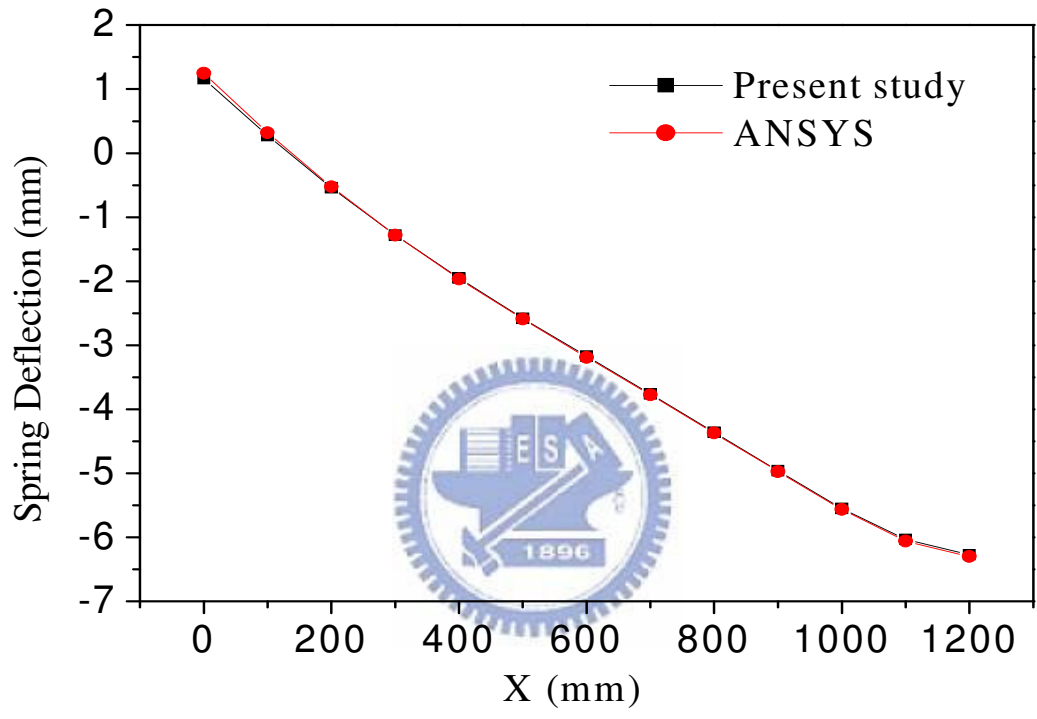


圖 4.5 加勁板通過彈簧的變形分佈

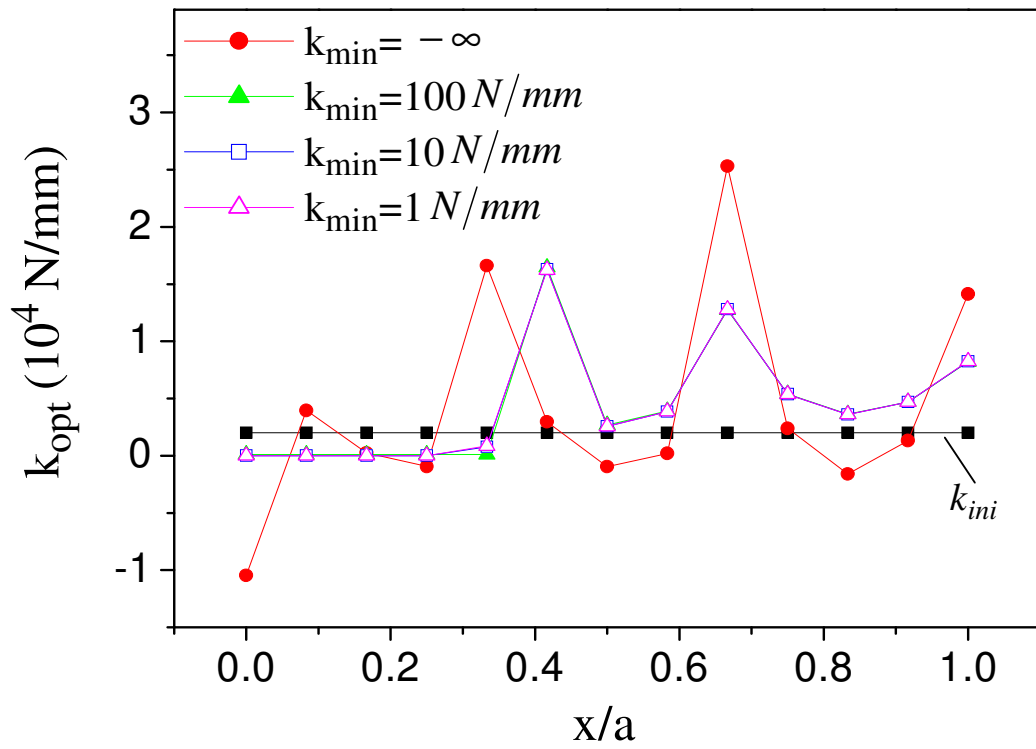


圖 4.6 彈性支承之 k_{min} 對最佳化的影響(一)($n_r = 7$,
WT6×7 , $t_p = 8$ mm)

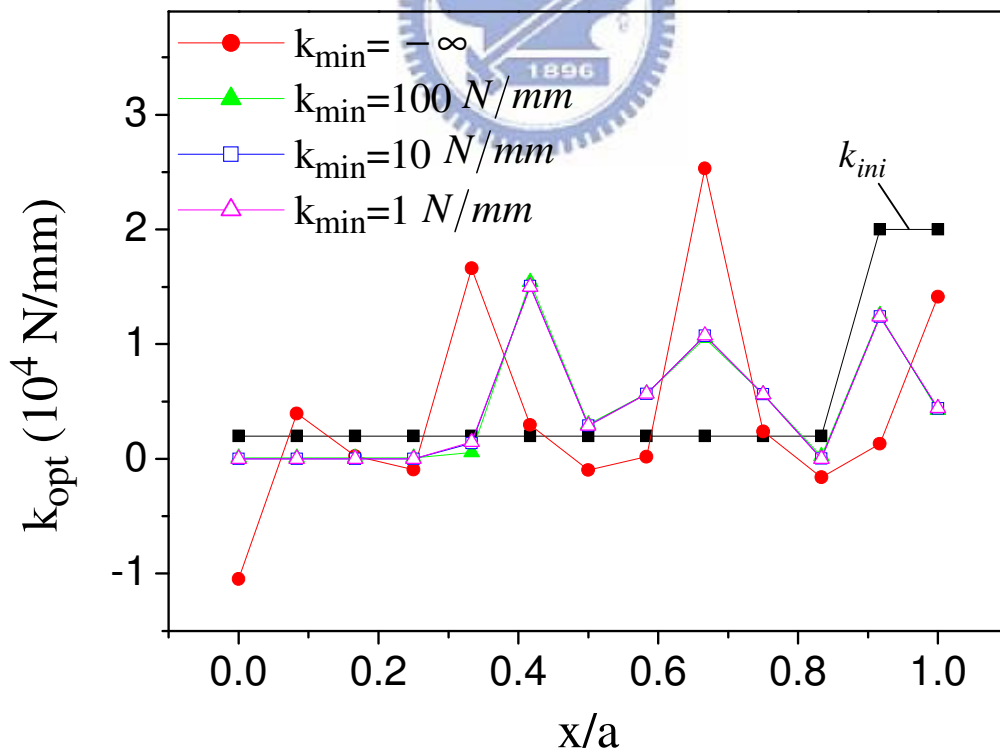


圖 4.7 彈性支承之 k_{min} 對最佳化的影響(二)($n_r = 7$,
WT6×7 , $t_p = 8$ mm)

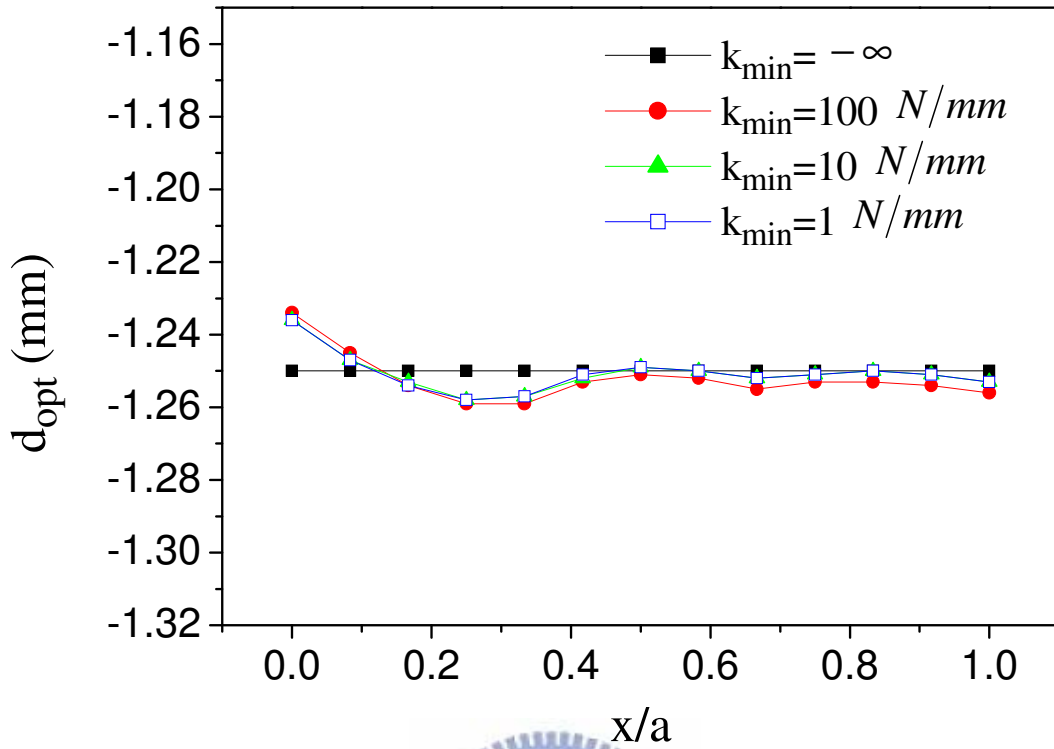


圖 4.8 彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響(三)($n_r = 7$,
 $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)

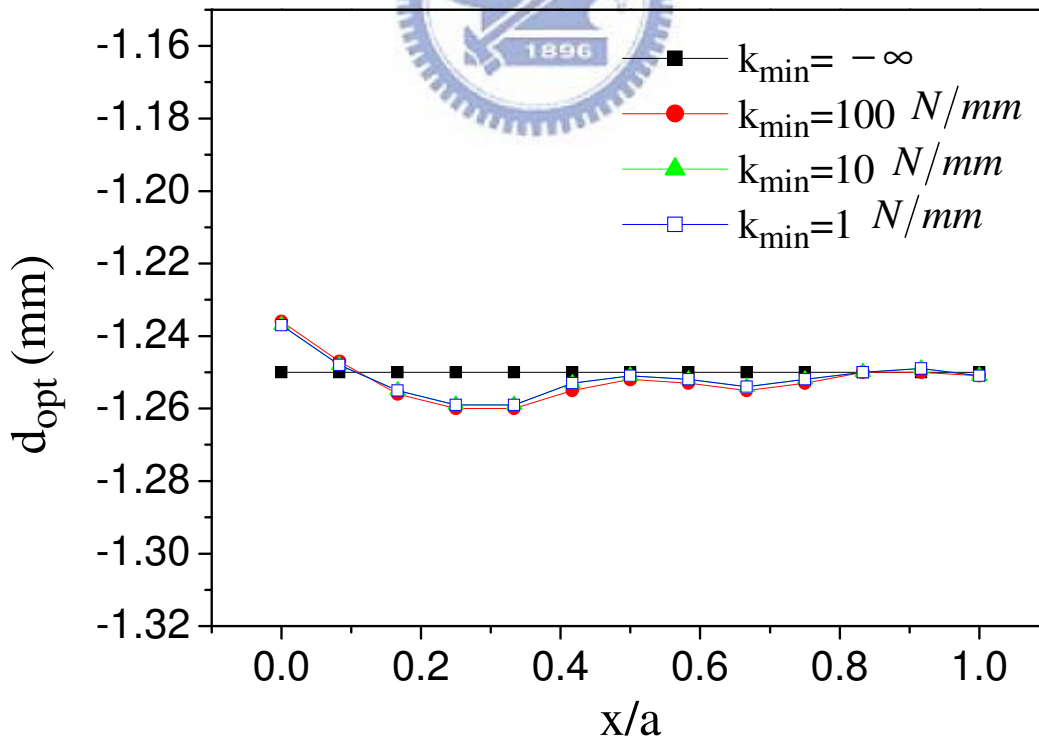


圖 4.9 彈性支承之 k_{\min} 對最佳化的影響(四)($n_r = 7$,
 $WT6 \times 7$, $t_p = 8mm$)

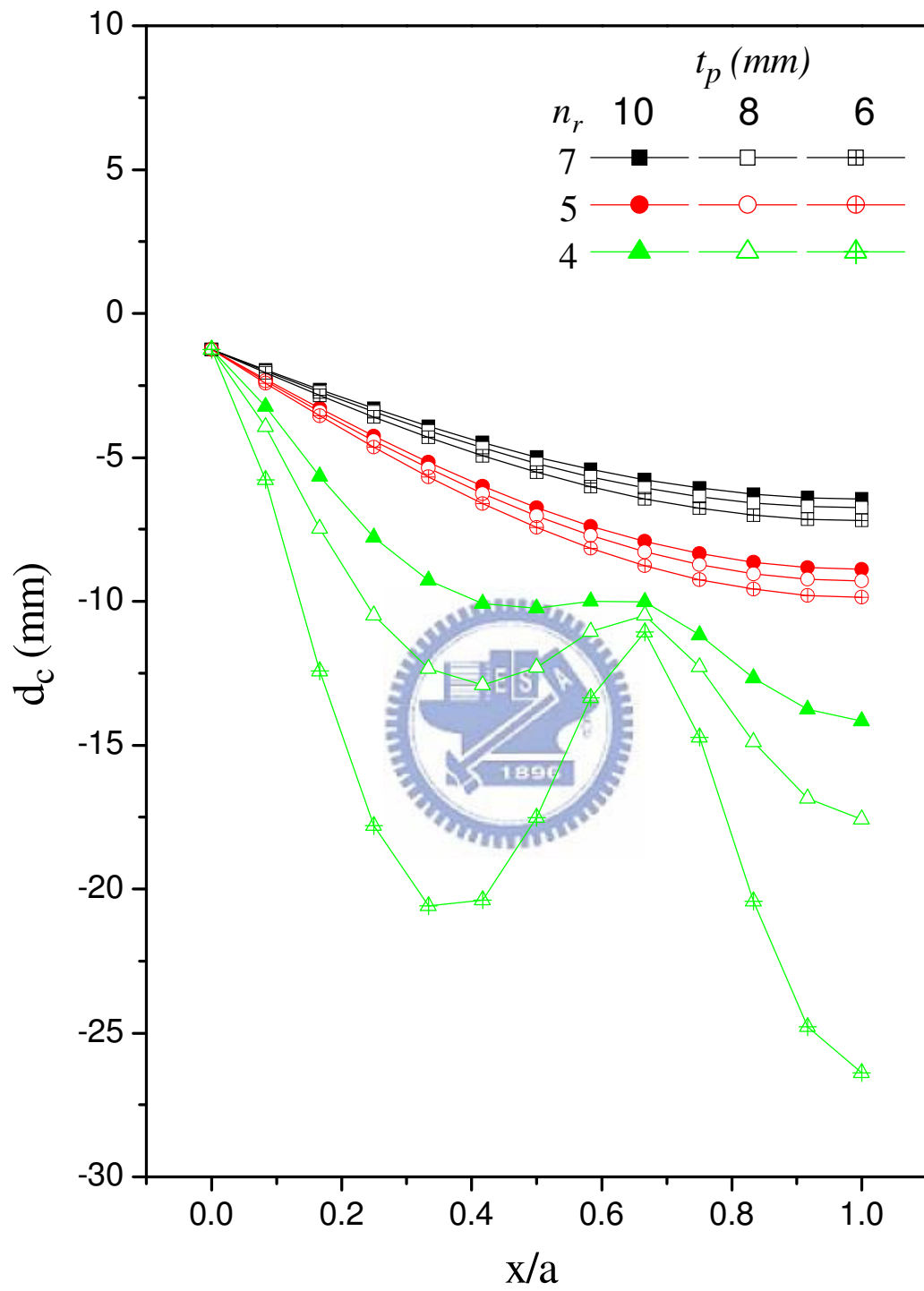


圖 4.10 不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT4 \times 7.5, K_{ini} - N_1$)

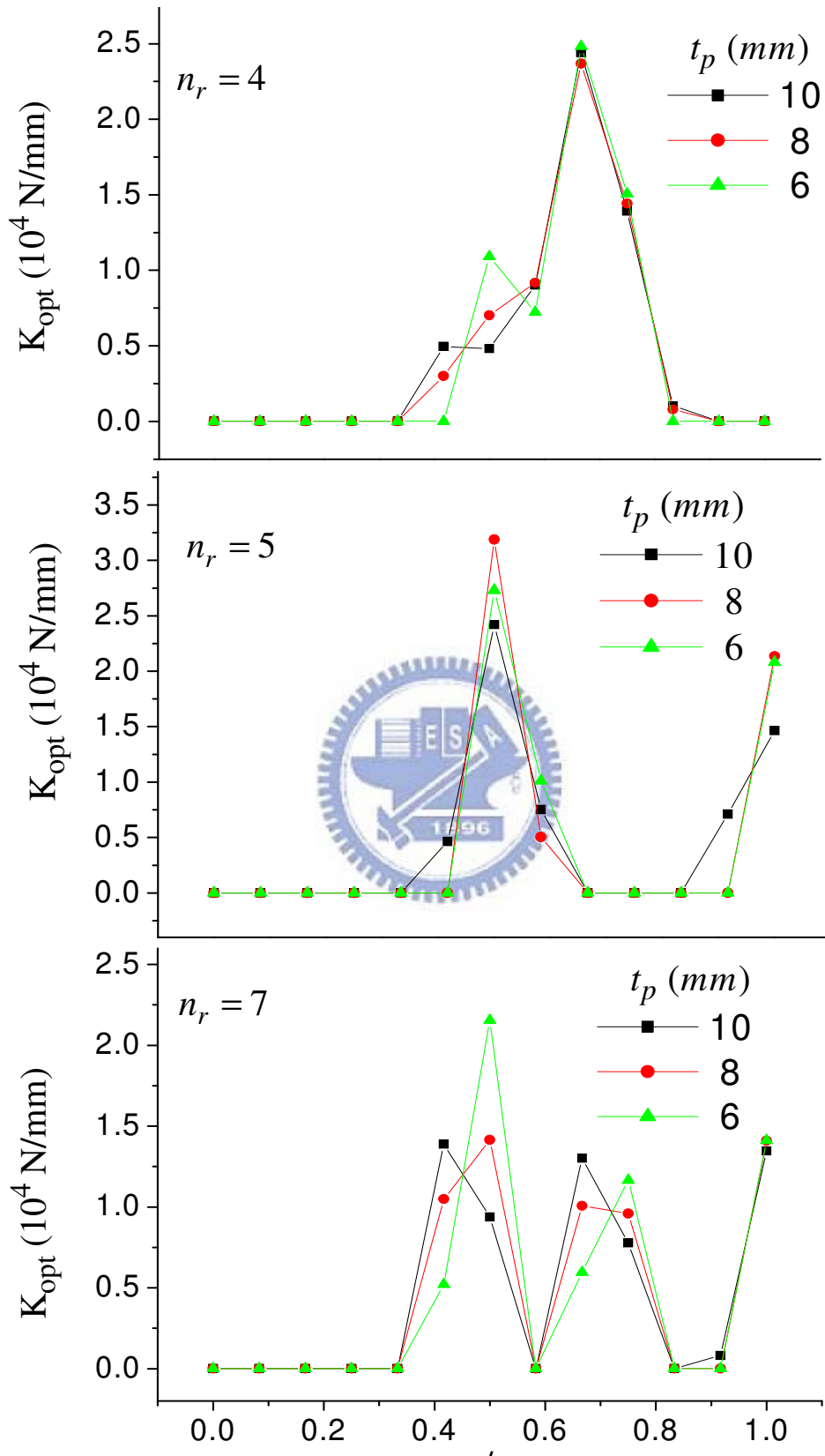


圖 4.11 不同加勁板之最佳化的彈簧剛度($WT4 \times 7.5$, $K_{ini} - N_1$)

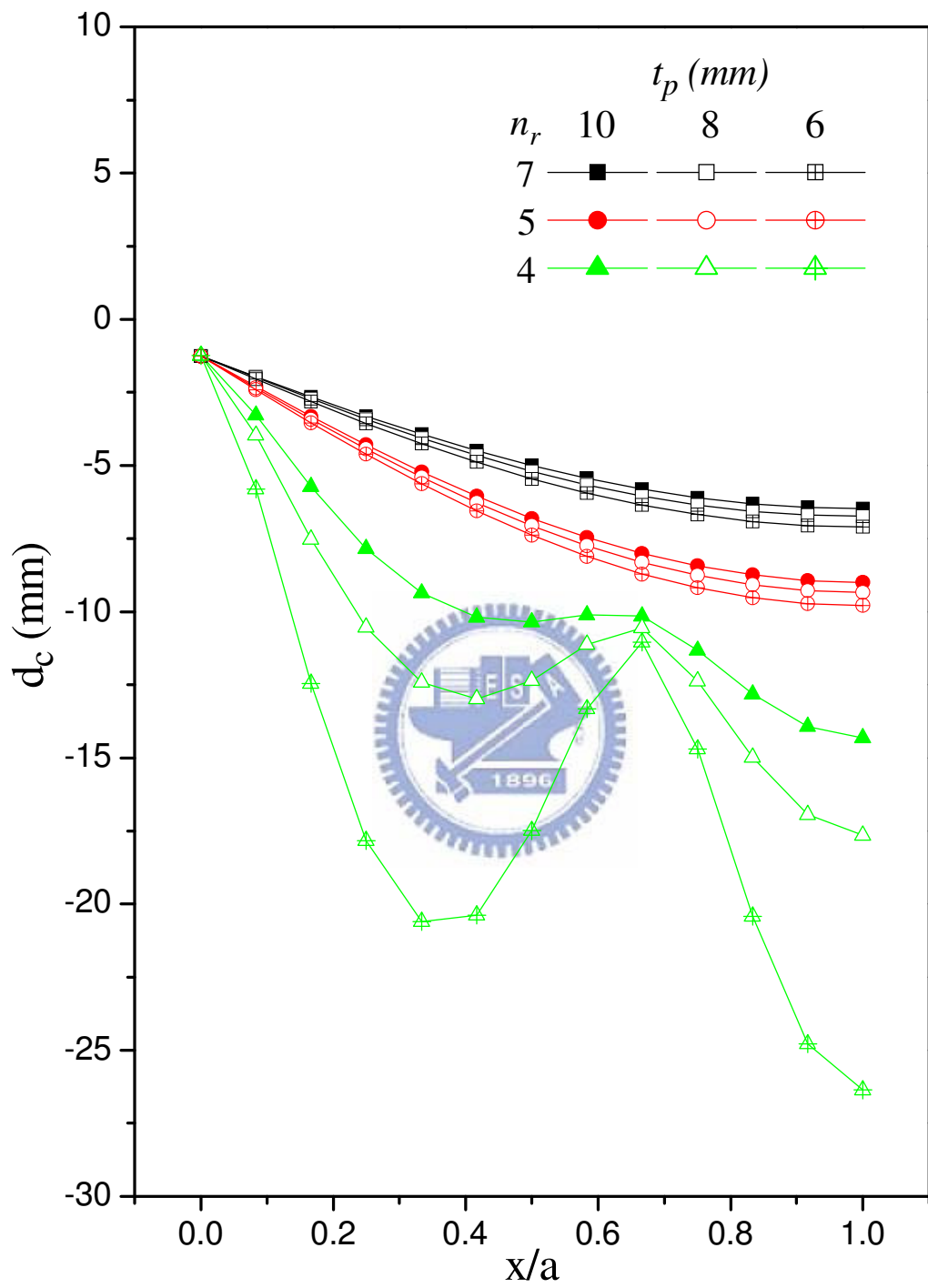


圖 4.12 不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT5 \times 6$, $K_{ini} - N_1$)

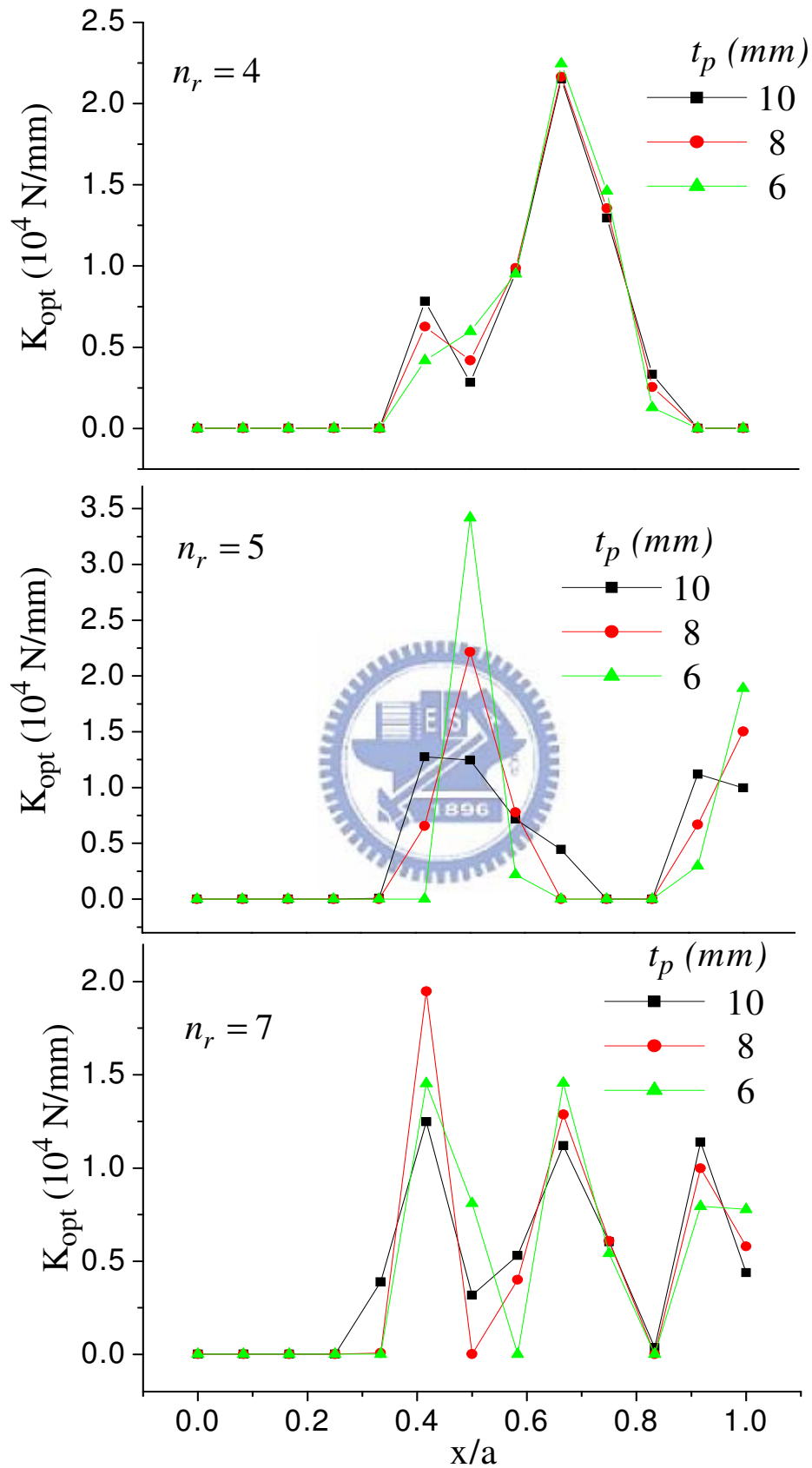


圖 4.13 不同加勁板之最佳化的彈簧剛度($WT5 \times 6$, $K_{ini} - N_1$)

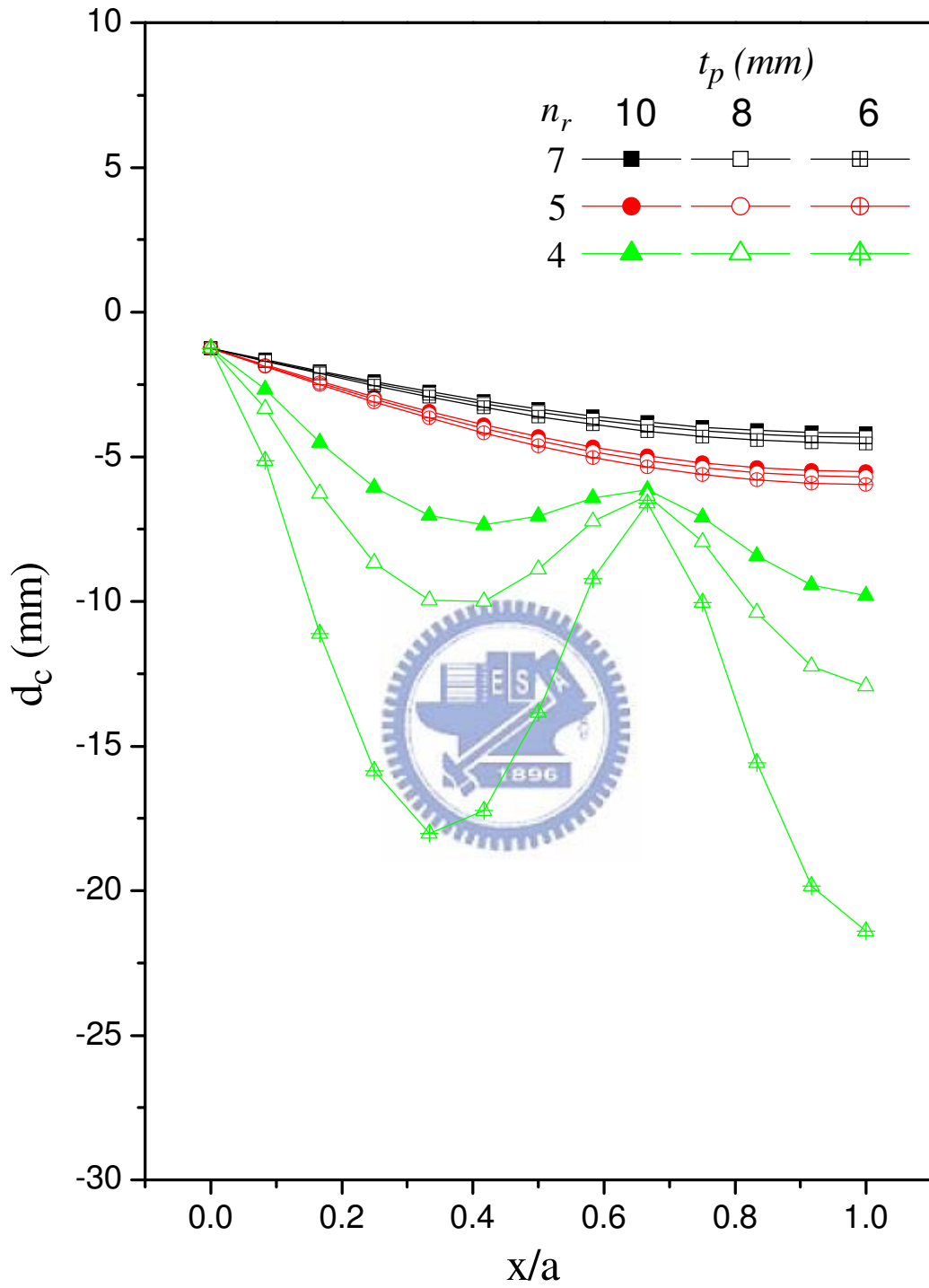


圖 4.14 不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT6 \times 7$, $K_{ini} - N_1$)

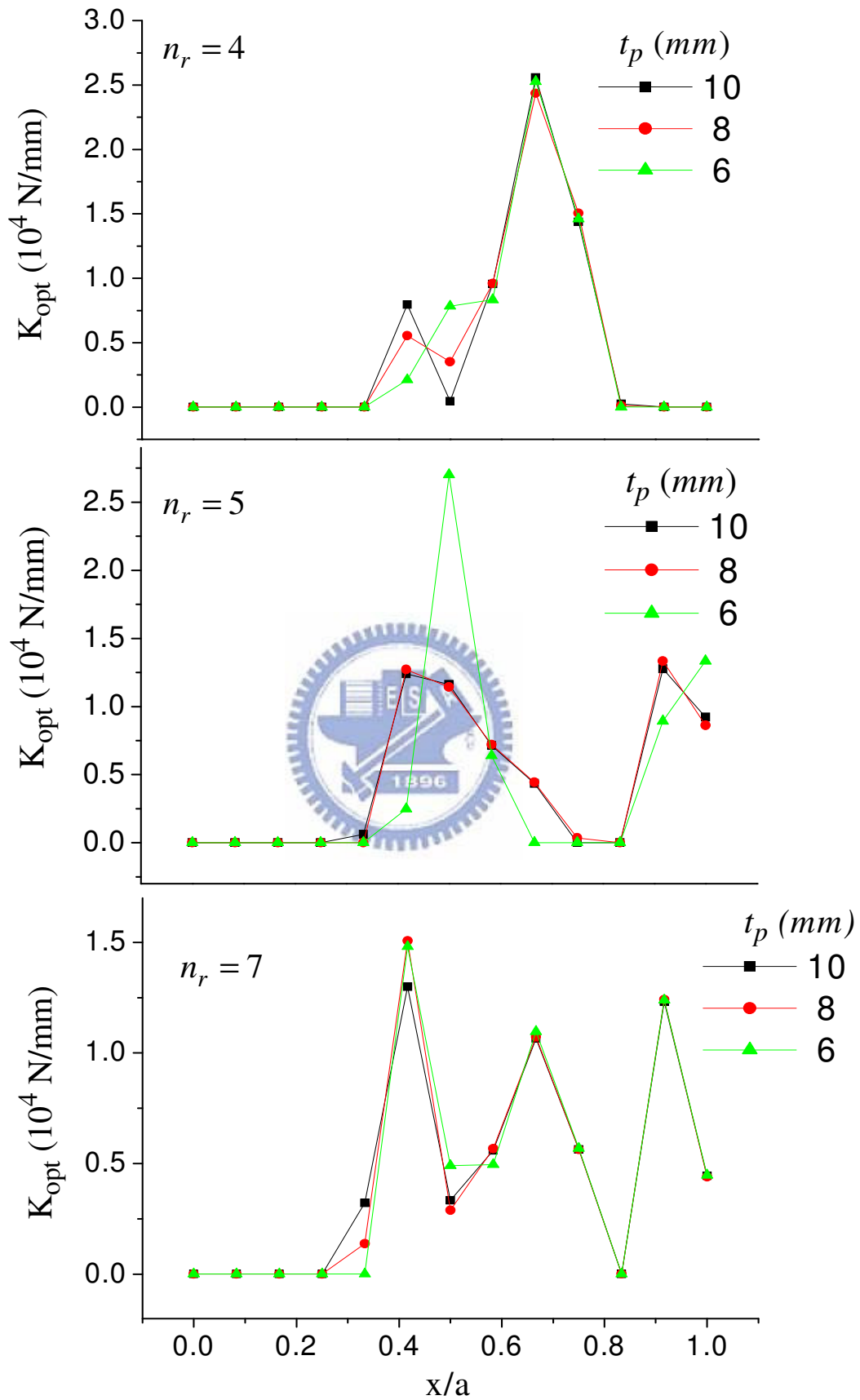


圖 4.15 不同加勁板之最佳化的彈簧剛度(WT6×7, $K_{ini} - N_1$)

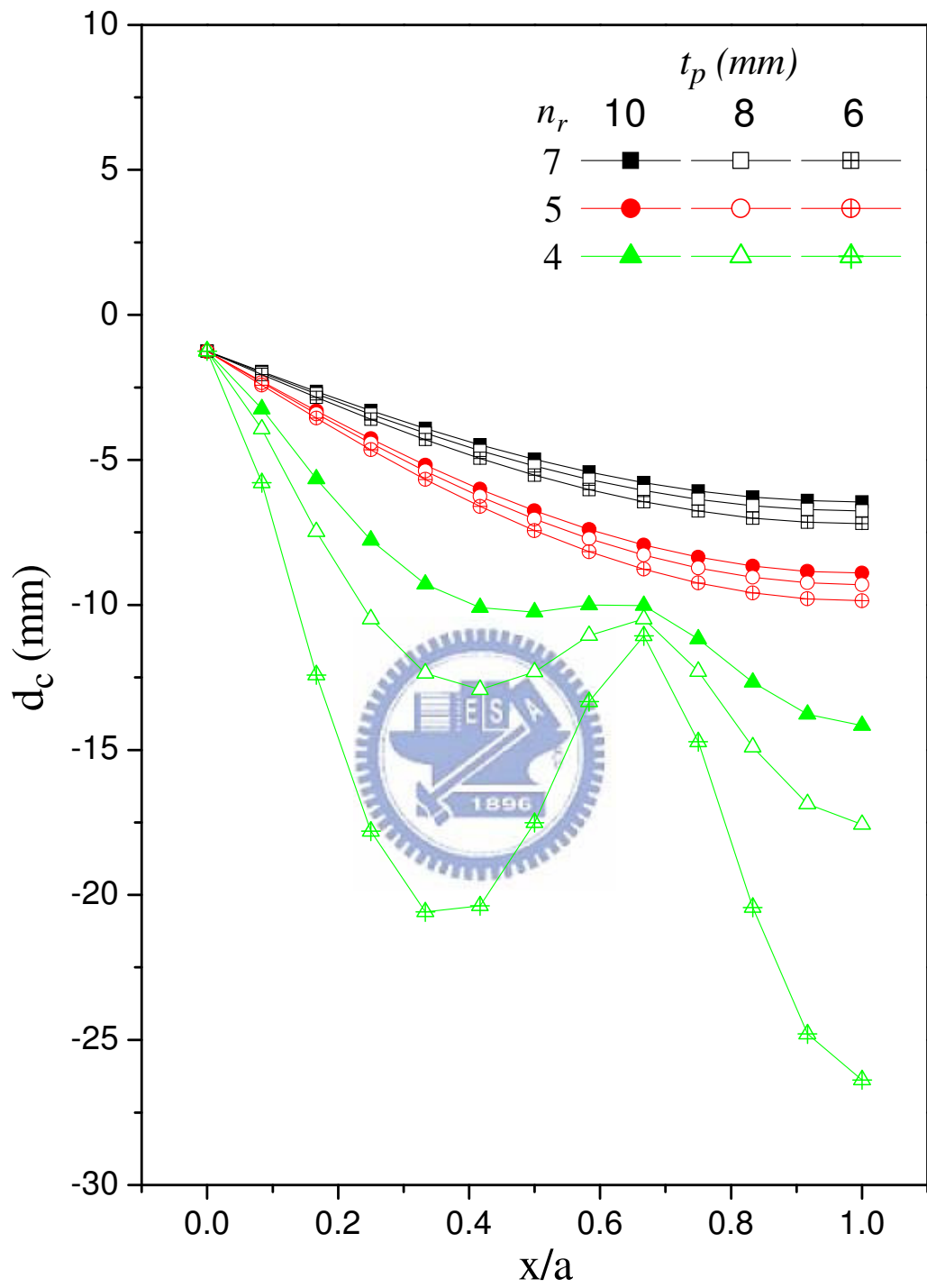


圖 4.16 不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT4 \times 7.5$, $K_{ini} - U_2$)

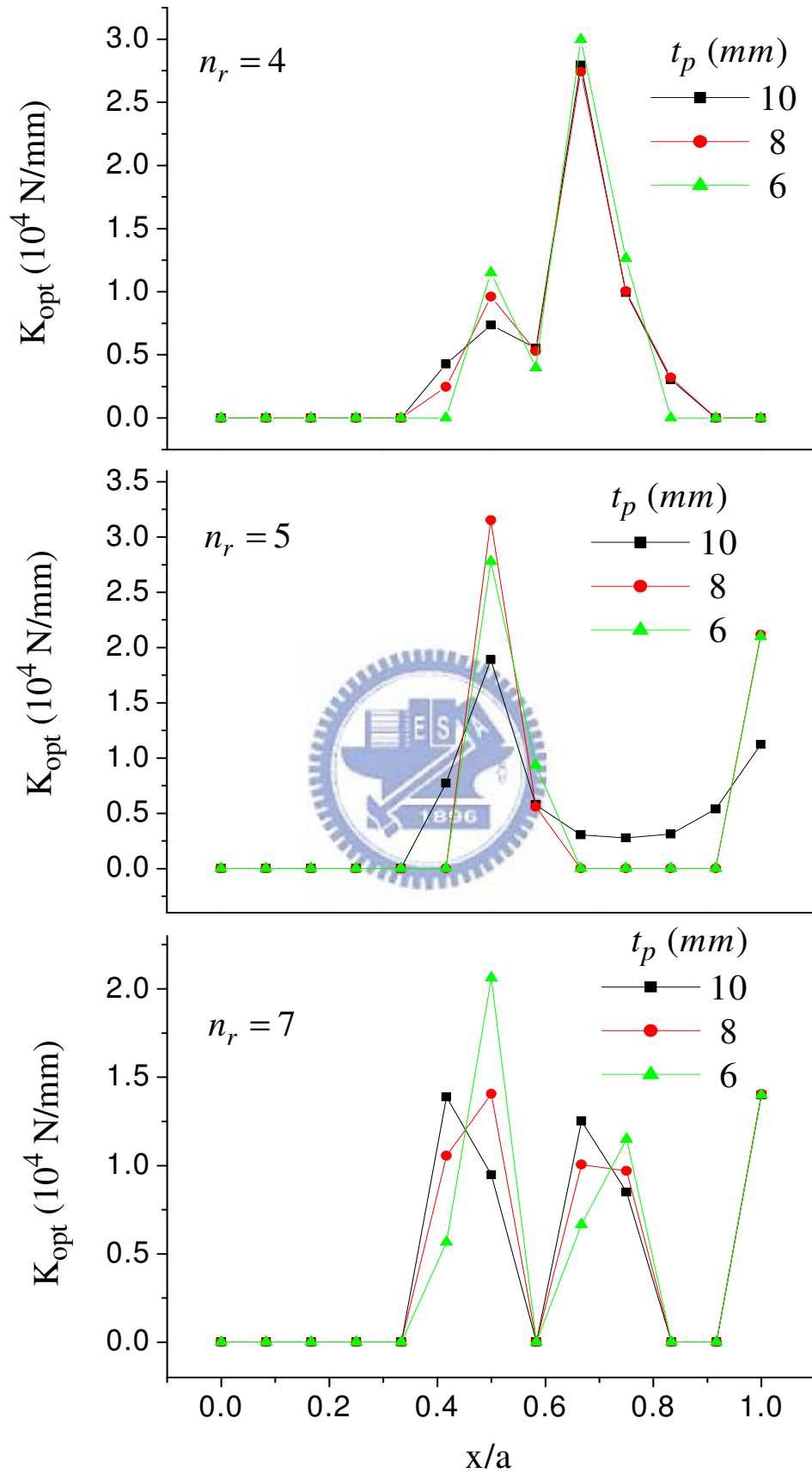


圖 4.17 不同加勁板之最佳化的彈簧剛度($WT4 \times 7.5$, $K_{ini} - U_2$)

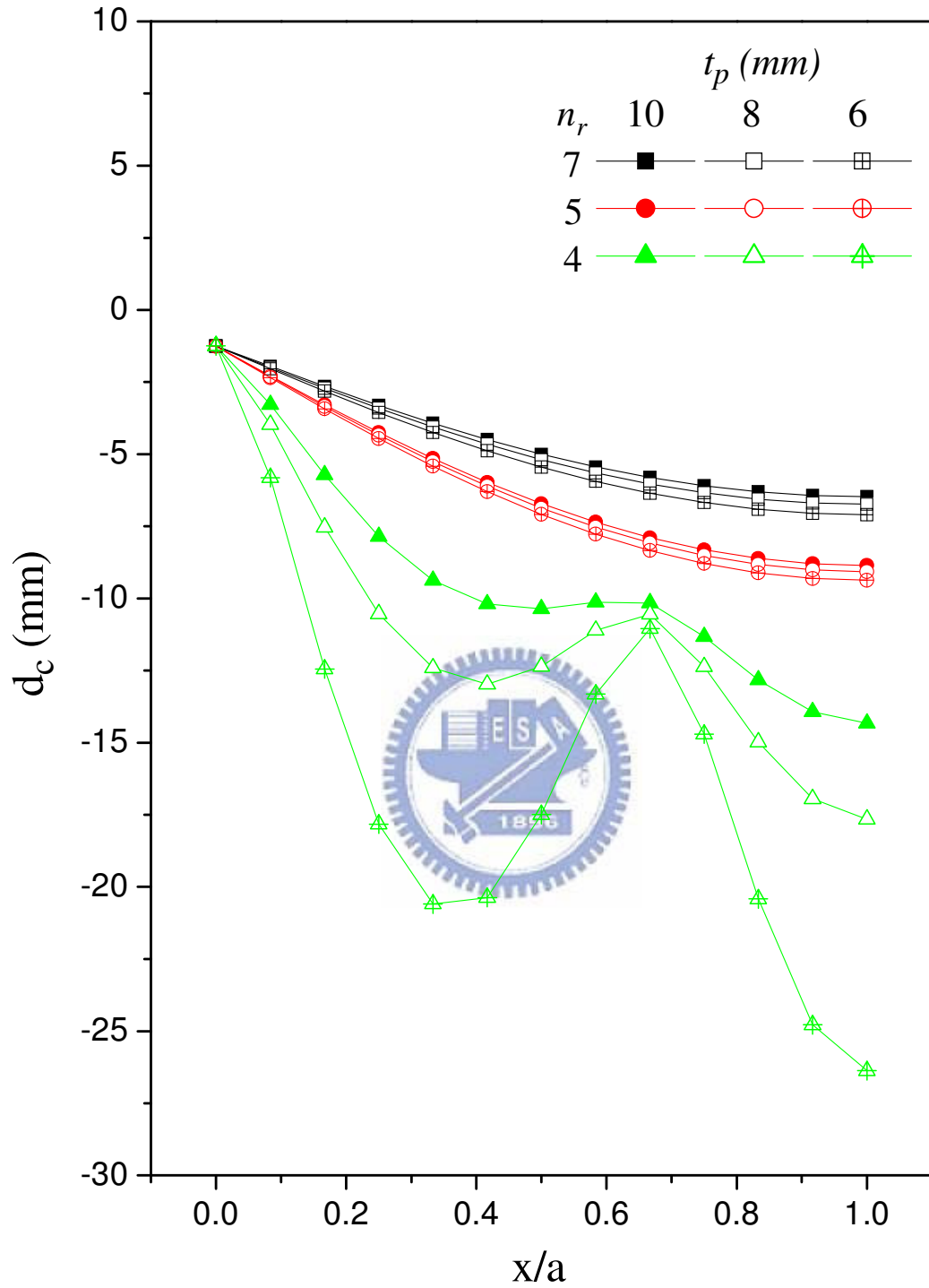


圖 4.18 不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT5 \times 6$, $K_{ini} - U_2$)

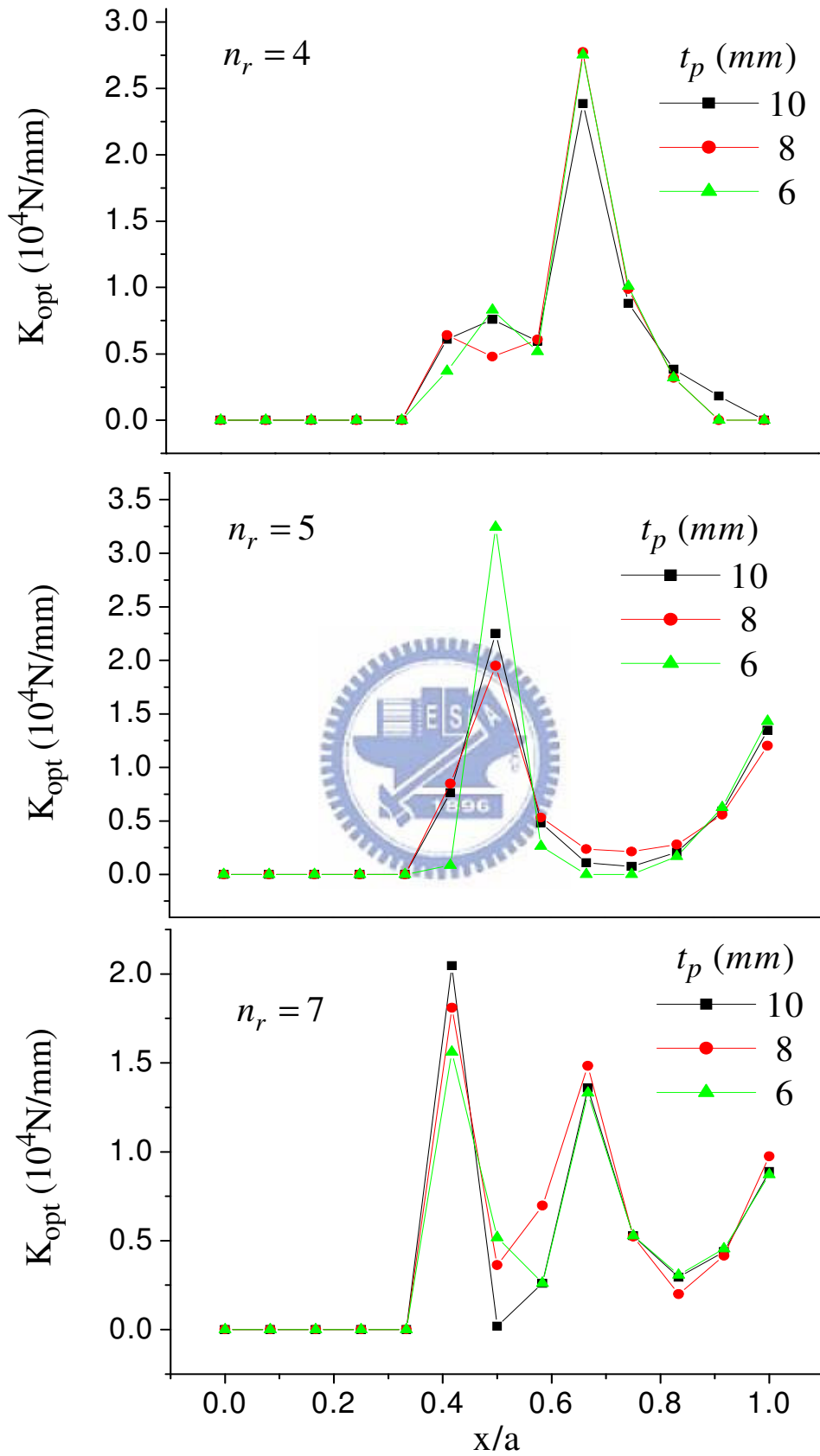


圖 4.19 不同加勁板之最佳化的彈簧剛度($WT5 \times 6$, $K_{ini} - U_2$)

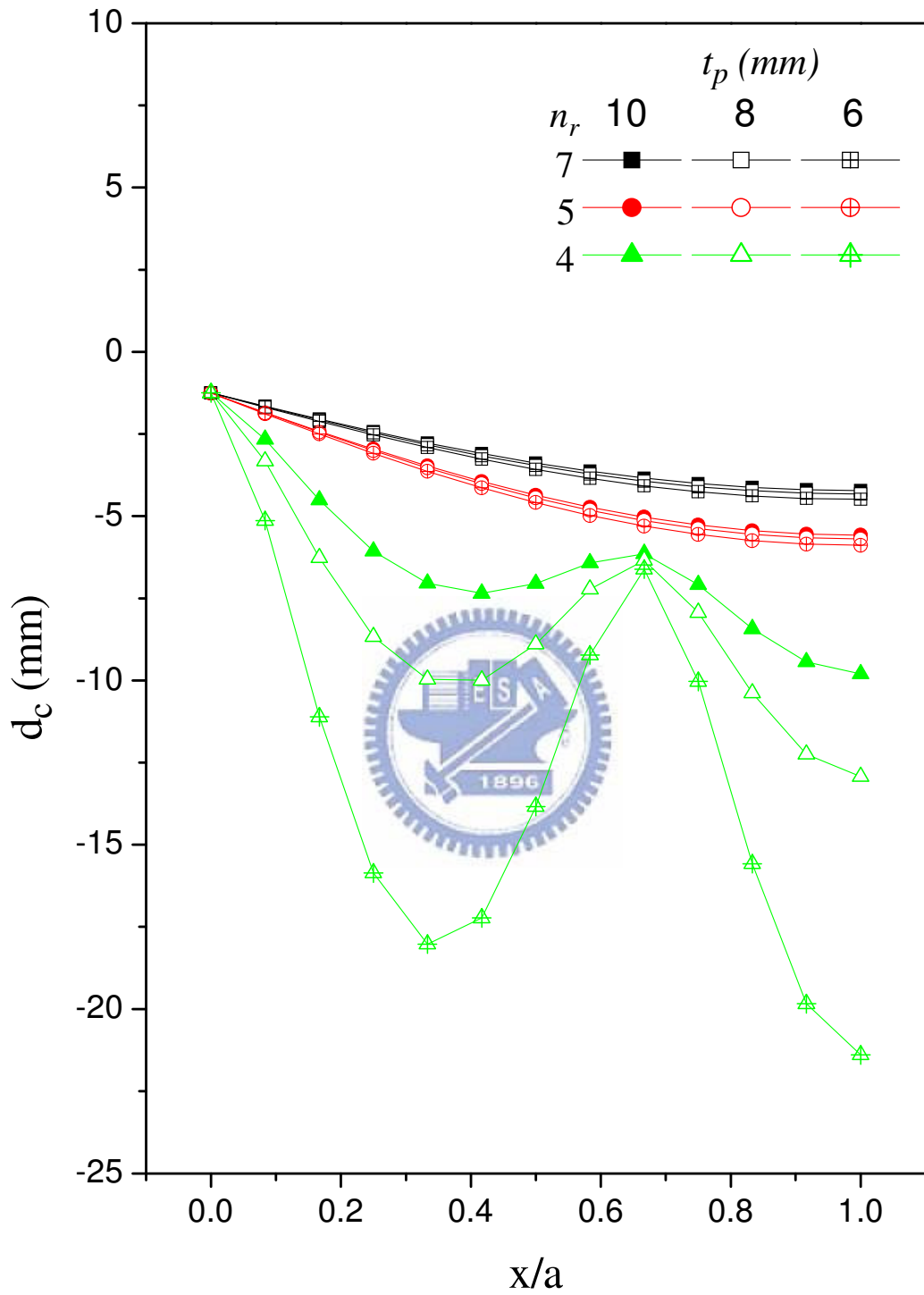


圖 4.20 不同加勁板在斷面 \overline{CC} 的撓度 ($WT6 \times 7$, $K_{ini} - U_2$)

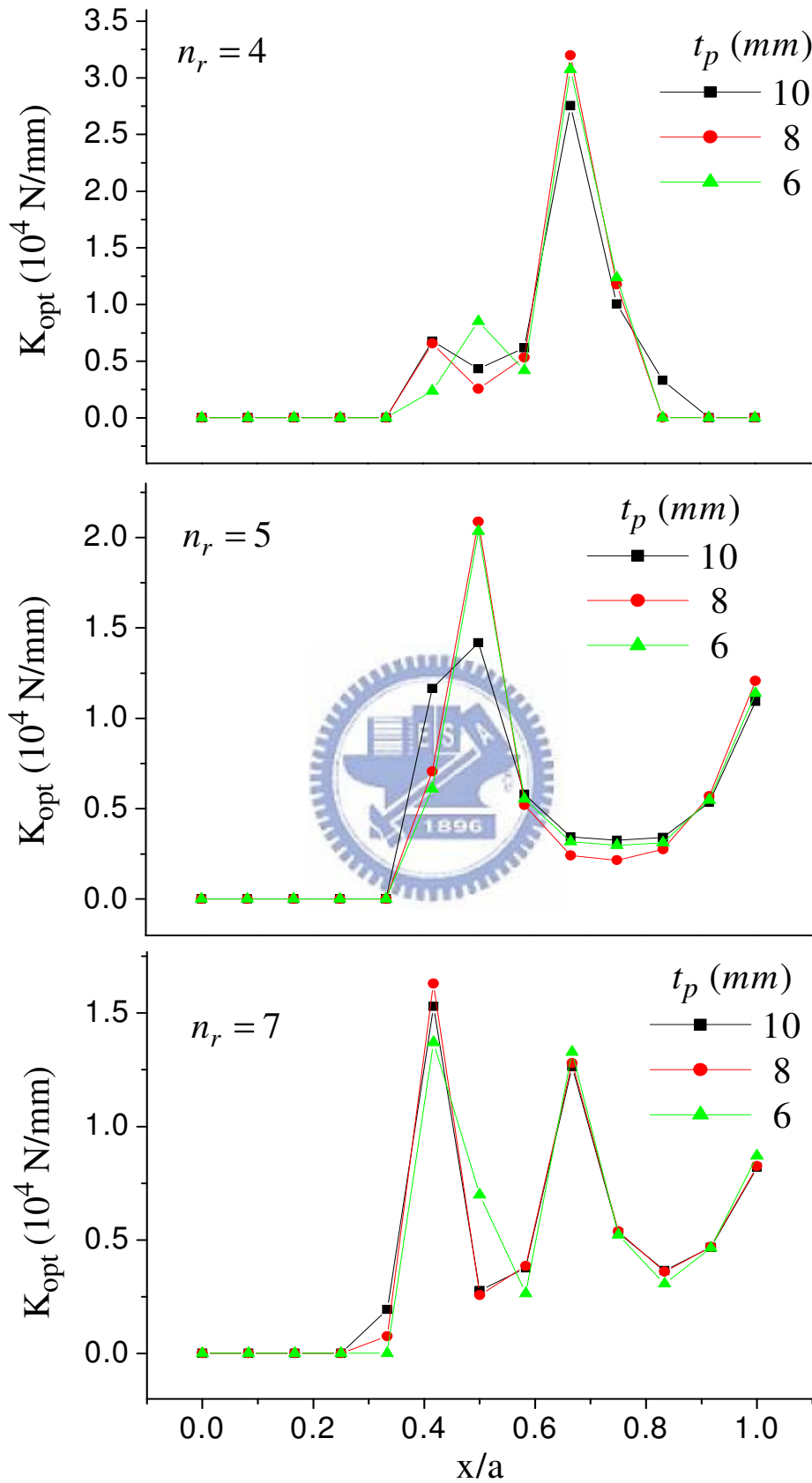


圖 4.21 不同加勁板之最佳化的彈簧剛度($WT6 \times 7$, $K_{ini} - U_2$)

附錄 A DKT 元素的形狀函數

在(2.2.27)式裡面的 \mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 分別有 9 個分量，其表示式為[12]

$$H_{x1} = 1.5(a_6N_6 - a_5N_5)$$

$$H_{x2} = b_5N_5 + b_6N_6$$

$$H_{x3} = N_1 - c_5N_5 - c_6N_6$$

$$H_{x4} = 1.5(a_4N_4 - a_6N_6)$$

$$H_{x5} = b_6N_6 + b_4N_4$$

$$H_{x6} = N_2 - c_6N_6 - c_4N_4$$

$$H_{x7} = 1.5(a_5N_5 - a_4N_4)$$

$$H_{x8} = b_4N_4 + b_5N_5$$

$$H_{x9} = N_3 - c_4N_4 - c_5N_5$$

$$H_{y1} = 1.5(d_6N_6 - d_5N_5)$$

$$H_{y2} = -N_1 + e_5N_5 + e_6N_6$$

$$H_{y3} = -H_{x2}$$

$$H_{y4} = 1.5(d_4N_4 - d_6N_6)$$

$$H_{y5} = -N_2 + e_6N_6 + e_4N_4$$

$$H_{y6} = -H_{x5}$$

$$H_{y7} = 1.5(d_5N_5 - d_4N_4)$$

$$H_{y8} = -N_3 + e_4N_4 + e_5N_5$$

$$H_{y9} = -H_{x8}$$

其中

$$a_k = \frac{-x_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$b_k = \frac{3}{4} \frac{x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{(\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$d_k = \frac{-y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{(\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$l_{ij}^2 = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)$$

其中 $k = 4, 5, 6$ 分別對應到 $ij = 23, 31, 12$ 如圖 2.2 所示， $x_{ij} = x_i - x_j$ ，

$y_{ij} = y_i - y_j$ 。

在 \mathbf{H}_x 、 \mathbf{H}_y 的表示式中以及在(2.2.20)式中的 $N_i (i = 1-6)$ 為[12]

$$N_1 = 2(1 - \xi - \eta) \left(\frac{1}{2} - \xi - \eta \right)$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

其中 ξ 、 η 是元素面積座標裡的 L_2 與 L_3 [12]，如圖 A.1 所示。

在文獻[12]中元素面積座標的 L_1 、 L_2 、 L_3 分別為

$$L_1 = \frac{1}{2A} (x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y)$$

$$L_2 = \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y)$$

$$2A = (x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

其中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 y_1 、 y_2 、 y_3 分別是元素三個端點在元素座標的座標值。

L_1 、 L_2 、 L_3 對 x 、 y 的偏微分別為

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = y_2 - y_3$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = y_3 - y_1$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = y_1 - y_2$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = x_3 - x_2$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial y} = x_2 - x_1$$



因為 $\xi = L_2$ 、 $\eta = L_3$ 故

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y_3 - y_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y_1 - y_2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = x_2 - x_1$$

依照本文元素座標的定義， $x_1 = y_1 = y_2 = 0$

則 ξ 、 η 對 x 、 y 的偏微分別為

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y_3 - y_1 = y_3$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x_1 - x_3 = -x_3$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y_1 - y_2 = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = x_2 - x_1 = x_2$$

\mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 對 ξ 與 η 偏微的表示式如下

$$\mathbf{H}_{x,\xi} = \begin{bmatrix} P_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{y,\xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{x,\eta} = \begin{bmatrix} -P_5(1-2\eta) - \xi(P_6 - P_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{y,\eta} = \begin{bmatrix} -t_5(1-2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

其中

$$P_k = \frac{-6x_{ij}}{l_{ij}^2} = 6a_k ; \quad t_k = \frac{-6y_{ij}}{l_{ij}^2} = 6d_k$$

$$q_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} = 4b_k ; \quad r_k = \frac{3y_{ij}^2}{l_{ij}^2}$$

$k = 4, 5, 6$ 分別對應到 $ij = 23, 31, 12$

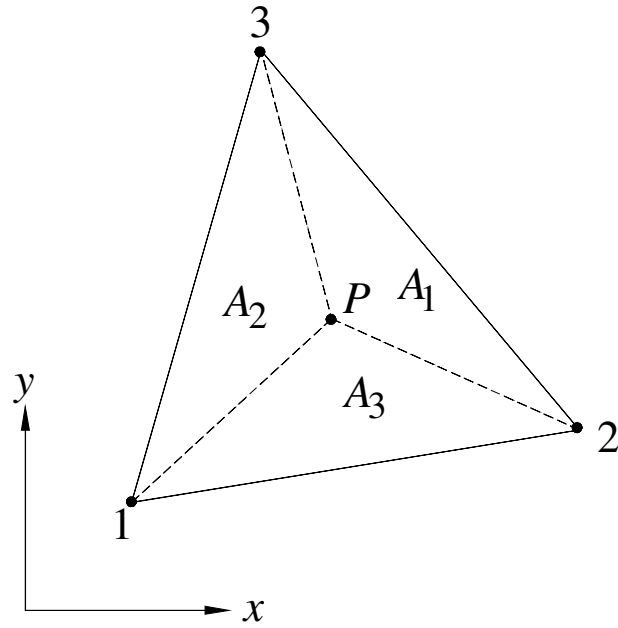


圖 A.1 元素面積座標的示意圖

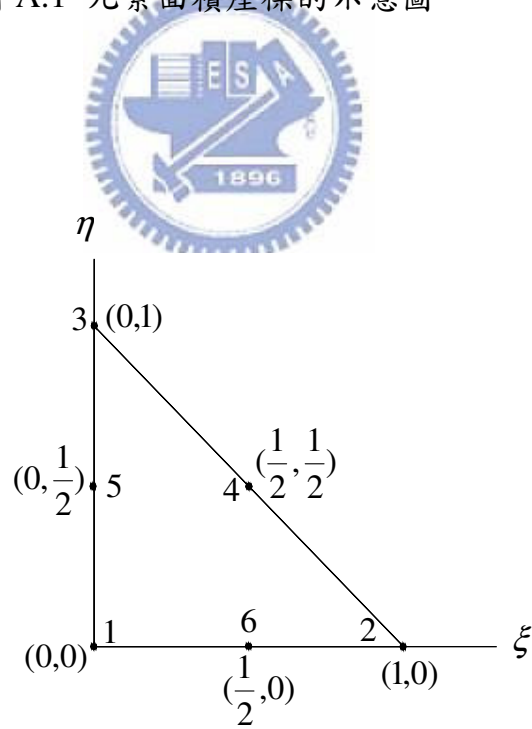


圖 A.2 殼元素節點的自然座標示意圖

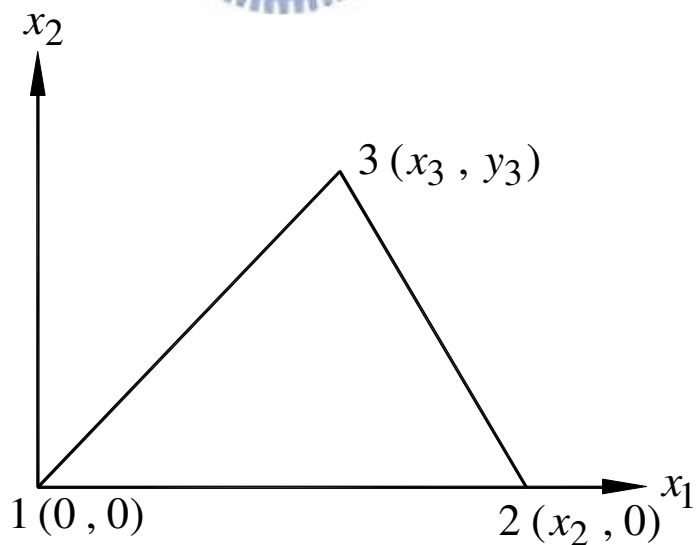
附錄 B CST 元素的剛度矩陣

CST 元素的剛度矩陣表示如下[13]

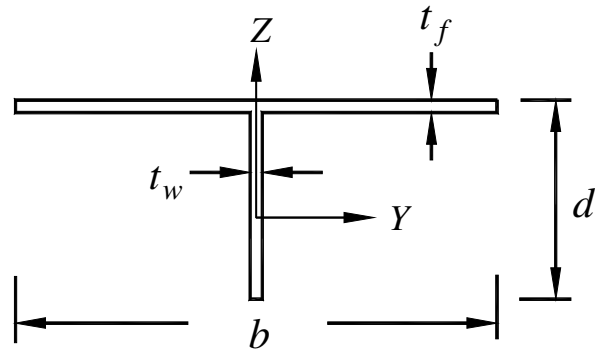
$$\mathbf{k}_m = D \begin{bmatrix}
 & u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\
 y_3^2 + \gamma_1 x_3^2 & & & & & & \\
 -y_3^2 - \gamma_1 x_3 x_{32} & y_3^2 + \gamma_1 x_3^2 & & & & & \\
 \gamma_1 x_2 x_{32} & -\gamma_1 x_2 x_3 & \gamma_1 x_2^2 & & & & \\
 -\gamma_2 y_3 x_{32} & \nu y_3 x_{32} + \gamma_1 x_3 y_2 & -\gamma_1 x_2 y_3 & \gamma_1 y_3^2 + x_{32}^2 & & & \\
 \nu x_2 y_3 + \gamma_1 y_3 x_{32} & -\gamma_2 x_3 y_3 & \gamma_1 x_2 y_3 & -\gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{32} & \gamma_1 y_3^2 + x_3^2 & & \\
 -\nu x_2 y_3 & \nu x_2 y_3 & 0 & x_2 x_{32} & -x_2 x_3 & x_2^2 &
 \end{bmatrix}$$

其中 $D = \frac{Et}{2(1-\nu^2)x_2 y_3}$ ， ν 是蒲松比(Poisson ratio)， $\gamma_1 = \frac{1-\nu}{2}$ ，

$\gamma_2 = \frac{1+\nu}{2}$ ， $x_{32} = x_3 - x_2$ 。



附錄 C WT 型鋼之斷面常數



型鋼斷面	WT6X7	WT5X6	WT4X7.5
d (in)	5.955	4.935	4.055
(mm)	(151.257)	(125.35)	(103)
b (in)	3.97	3.96	4.015
(mm)	(100.838)	(100.58)	(101.98)
t_f (in)	0.225	0.21	0.315
(mm)	(5.715)	(5.33)	(8)
t_w (in)	0.2	0.19	0.245
(mm)	(5.08)	(4.826)	(6.233)
A (in ²)	2.08	1.77	2.22
(mm)	(1341.93)	(1141.93)	(1432.255)
I_y (in ⁴)	7.67	4.35	3.28
(10 ⁷ mm)	(0.319)	(0.181)	(0.137)
I_z (in ⁴)	1.18	1.09	1.70
(10 ⁶ mm)	(0.491)	(0.454)	(0.708)
J (in ⁴)	0.035	0.0272	0.0679
(10 ⁴ mm)	1.456	1.132	2.826

$E = 200 \text{ GPa} = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$

$\nu = 0.3$

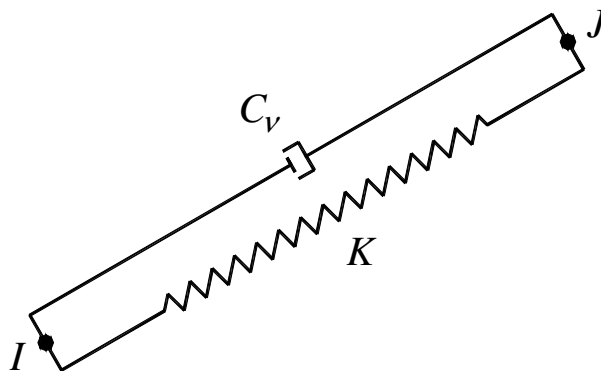
附錄 D ANSYS 之 COMBIN 14 及 SHELL 63 元素的簡介

COMBIN 14 彈簧-阻尼

Combin 14 [20]可應用於一度、兩度或三度空間在縱向或扭轉的彈性-阻尼效果。當考慮為縱向彈簧-阻尼時，該元素是單軸向受張力或壓縮，每個節點可具有 X, Y, Z 位移方向之自由度，不考慮彎曲及扭轉。當考慮為扭轉彈簧-阻尼時，該元素承受純扭轉，每個節點可具有 X, Y, Z 旋轉方向之自由度，不考慮彎曲及軸向負載。彈簧-阻尼元素不具有質量，質量可用 MASS21 模擬

假設與限制

若 KEYOPT(2)等於零，彈簧-阻尼元素的長度不可為零，即節點 I 和 J 不可重疊在一起，因為節點之位置決定彈簧的方向。彈簧中的應力為均勻分佈。若元素用於應力強化成大變形，則 KEYOPT(2)必須為零。若 KEYOPT(3)=1 用於大變形，則座標系統不會更新。彈簧與阻尼的效應可藉由 K 與 CV1 值設定為零刪除。若 CV2 不等於零，元素為非線性須進行非線性解(KEYOPT(1)=1)。



SHELL 63 彈性殼

Shell 63 [20]具有彎曲及薄膜特性。與平面同方向及法線方向之負載皆可承受。元素具有 X, Y, Z 位移方向及 X, Y, Z 旋轉方向之六個自由度。應力強化及大變形之效應亦適用於該元素。可選擇連續性相切矩陣，用於大變形(有限之旋轉)分析。

假設與限制

元素之面積不可為零，通常元素連接號碼不正確會造成該現象。元素之厚度為零或線性厚度變化至元素之四點為零皆不允許。剪應變不包含於此薄殼元素。

三角形元素可定義為 K, L 兩點重和。如圖所示。三角形元素中額外形狀將自動刪除故薄膜剛性降為固定應變。大變形分析中若 $KEYOPT(1)=1$ (薄膜剛性)，元素必為三角形。

