

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩 士 論 文

以直角三角形為模組對兩圓公切線
尺規作圖學習成效之影響

The Effect of the Right Triangle Module on the Learning Performance in Ruler
and Compass Construction of the Common Tangent of Two Circles

1896

研 究 生：王天行

指 導 教 授：陳明璋 博士

中 華 民 國 一 百 零 二 年 六 月

以直角三角形為模組對兩圓公切線尺規作圖學習成效之影響

The Effect of the Right Triangle Module on the Learning Performance in Ruler
and Compass Construction of the Common Tangent of Two Circles

研究生：王天行

Student：Tian-Xing Wang

指導教授：陳明璋

Advisor：Ming-Jang Chen



June 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年六月

以直角三角形為模組對兩圓公切線尺規作圖學習成效之影響¹

學生：王天行

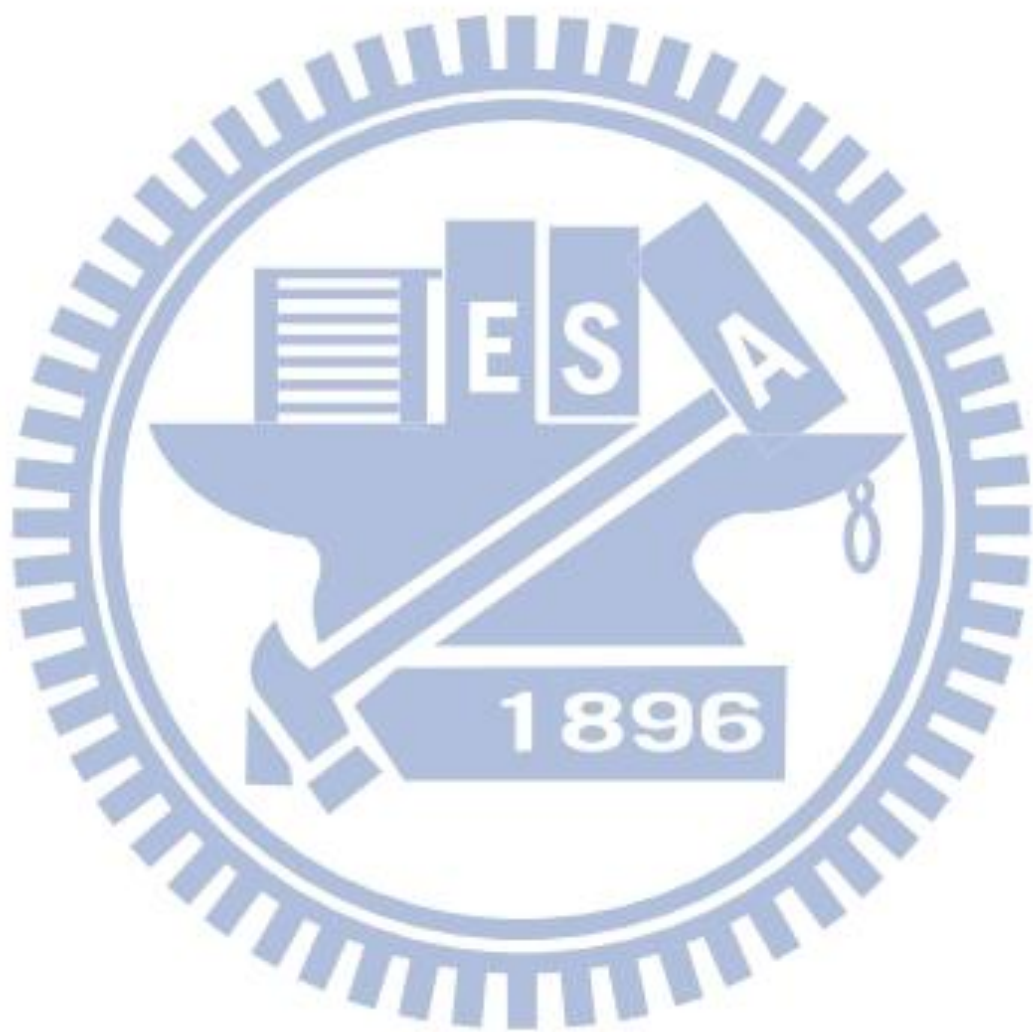
指導教授：陳明璋 博士

中文摘要

一般尺規作圖教學是採「步驟化」教學方式，學生需記憶大量且互動性高的作圖步驟，因而產生相當大的認知負荷。因此本研究試圖用「模組化」教學方式，也就是將教材內具有高互動關係的步驟切割出來，並組合成具有某一特定的功能，因而使得作圖步驟減少，期望藉此方式降低內在認知負荷，得到良好的學習效果。本研究採準實驗研究方法，探討以直角三角形為模組對兩圓公切線尺規作圖學習成效之影響。以模組化教材及成就水準為自變項，後測、延後測及認知負荷為依變項。其中後測、延後測均細分為總分、計算、作圖三部分進行分析；認知負荷則是以上課感受量表中之花費心力進行檢測，以了解學生的學習效率及學習投入分數，目的是綜合此兩種分數來判斷模組化教材是否產生專業知識反轉效應。研究結果顯示：1.在後測部分，實驗組與對照組無顯著差異。2.在延後測部分，實驗組在總分、作圖表現皆顯著優於對照組。3.在認知負荷部分，實驗組與對照組無顯著差異。4.綜合學習效率及學習投入分數，在後測部分，實驗組高成就水準為高效率、低投入，實驗組低成就水準為低效率、低投入；在延後測部分，實驗組高成就水準為高效率、高投入，實驗組低成就水準為低效率、低投入。故模組化教材並未產生專業知識反轉效應。應用模組化於高內在認知負荷之尺規作圖教學，雖然在近遷移(後測)無顯著差異，但遠遷移(延後測)則有顯著差異。表示模組化教材設計能降低內在認知負荷，產生較佳的學習效果。

關鍵字：模組化、內在認知負荷、尺規作圖、專業知識反轉效應

¹本論文部分研究成果與國科會專題研究計畫 100-2511-S-009-006- 及 101-2511-S-009-006-MY2 相關



The Effect of the Right Triangle Module on the Learning Performance in Ruler and Compass Construction of the Common Tangent of Two Circles

Student : Tian-Xing Wang

Advisor : Ming-Jang Chen

Degree Program of E-Learning

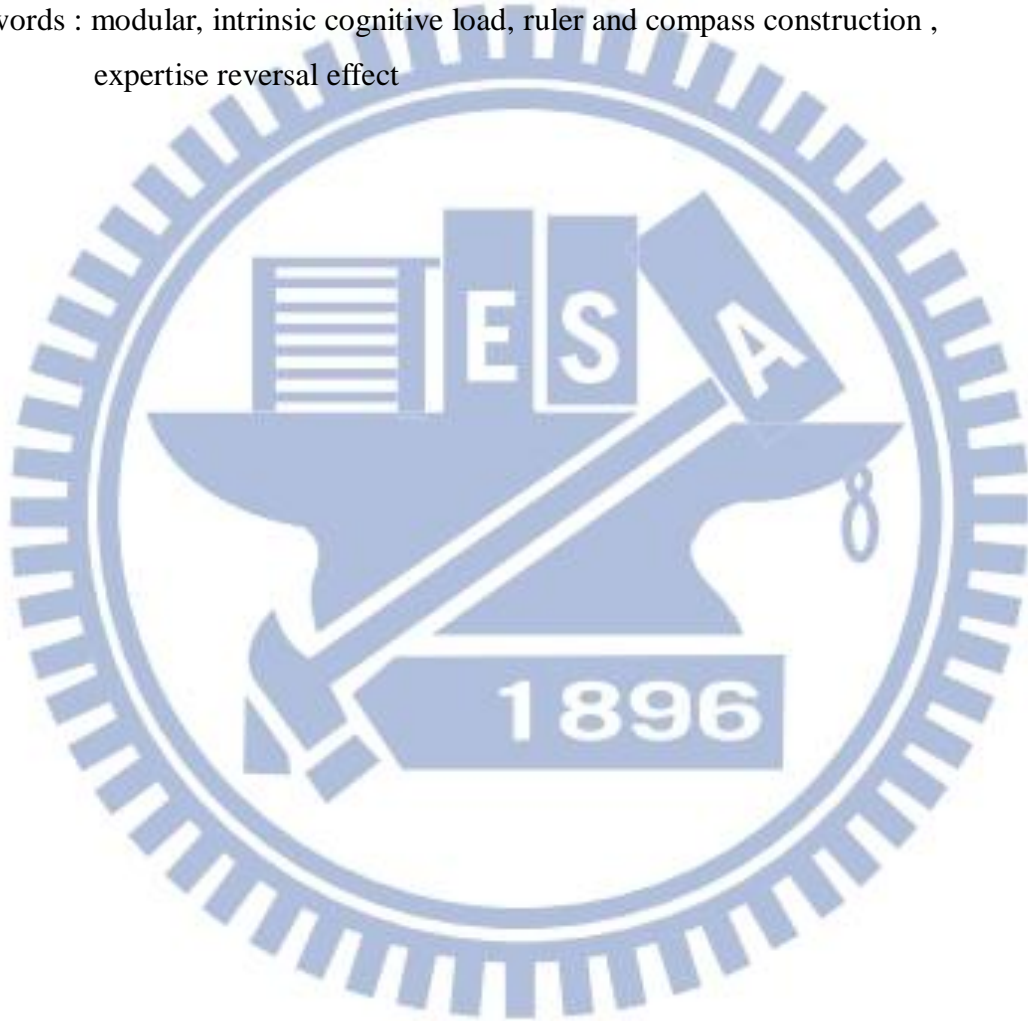
National Chiao Tung University

Abstract

The general teaching method for ruler and compass is step-by-step; students need to memorize a large quantity and highly interactive constructing step, resulting in a considerable cognitive load. Therefore, this study attempts to use "modular" method, that is, to separate the interaction between the steps from the teaching materials then combine the specific function, which reduces the construction steps. The purpose is to decrease the intrinsic cognitive load to improve students' learning results. This study uses a quasi-experimental research method, to explore the effect of the right triangle module on the learning performance in ruler and compass construction of the common tangent of two circles. The independent variables are the modular materials and learning outcomes. The dependent variables are post-test, delayed post-test and cognitive load. The post-test and delayed post-test are subdivided into three segments of total scores, calculations, and drawing for analysis. The cognitive load is based on the scale of how students prepare and how much effort have been taken into account for the class in order to acquire the scores to analyze the efficiency and engagement of students' learning consequences. This design is an integration of the two results to determine whether to generate modular teaching will produce the expertise reversal effect. Here are the results: 1. In the post-test sector, there is no significant difference between the experimental group and the control group. 2. In the delayed post-test sector, the experimental group has a superior execution in total score and constructing performance than the control group. 3. In the cognitive load sector, the experimental group and the control group had no significant difference. 4. In the integration of learning efficiency and learning engagement of the students, the scores show that the high achievement experimental group in the post-test has produced high efficiency with high engagement effort. The low achievement experimental group reveals low efficiency due to low engagement effort. The measurement in the delayed post-test sector, the high achievement experimental group has high efficiency with high input effort. The low achievement experimental group, on the

contrary, has low efficiency with low input effort. The study results do not generate evidence to comply that modular teaching produces the expertise reversal effect. The application of modular teaching in the high intrinsic cognitive load shows that although there are no significant differences in the post-test sector, there are significant differences in the delayed post-test sector. The test result shows that the modular design teaching method is able to reduce intrinsic cognitive load hence a better learning results.

Keywords : modular, intrinsic cognitive load, ruler and compass construction ,
expertise reversal effect



誌謝

偶然間於四年前參加新竹縣政府辦理的數學教師研習，首次接觸了由交通大學陳明璋老師所發展的 AMA，發現用之於教材設計、引導學習進而降低認知負荷的功能令人驚艷，因此雖已過了不惑之年，仍決定報考交通大學理學院在職專班科技與數位學習組，跟隨明璋老師學習。要同時兼顧工作、家庭與課業，對於已有一定年紀的我，在體力上確實是一大考驗，但在明璋老師不厭其煩的耐心指導下，終於順利完成本論文，感謝老師您這兩年來的費心指導。在專班的學習過程中，從老師的身上不僅學到了研究學問的方法與態度，更學習到身為一位老師對學生應有的熱忱與耐心。

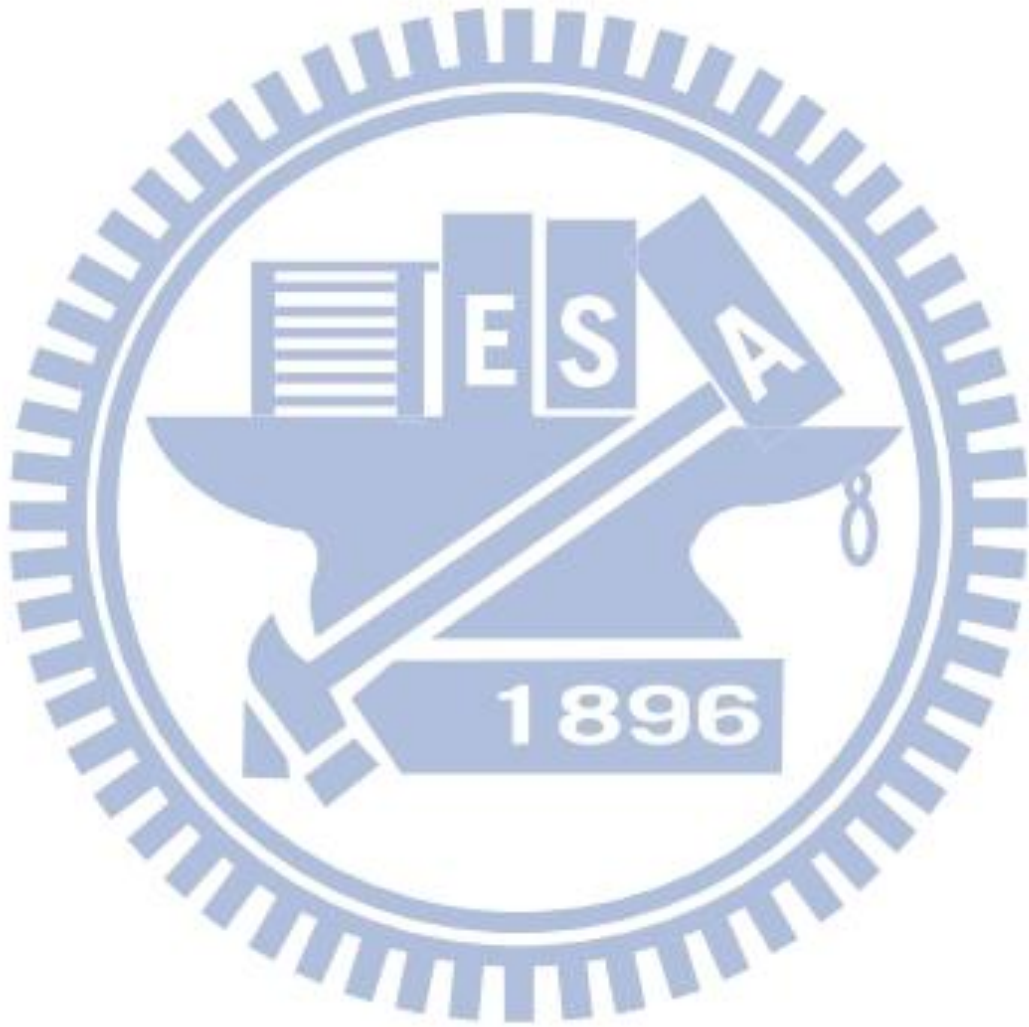
感謝口試委員李源順教授、袁媛教授、李俊儀教授、莊榮宏教授在論文口試時所惠予的專業建議，使這本論文能更加完備。

感謝振順學長、士立、昭吉、威鈞、蕙璐、雅婷、淑貞，在學習過程中的扶持與鼓勵，在怠惰時給予鞭策，在遇到困難時給予協助，希望未來能有機會再一起研究學問。

感謝學校同事們的協助，才能順利完成前測、教學實驗、後測及延後測，讓論文可以順利完成。

最後感謝我的家人，太太春綢、女兒亭云的陪伴與支持，才能於兩年的時間內專心於課業而順利畢業。

凡走過必留下痕跡，感謝這兩年來曾經幫助過我的每一個人。感謝您 明璋老師

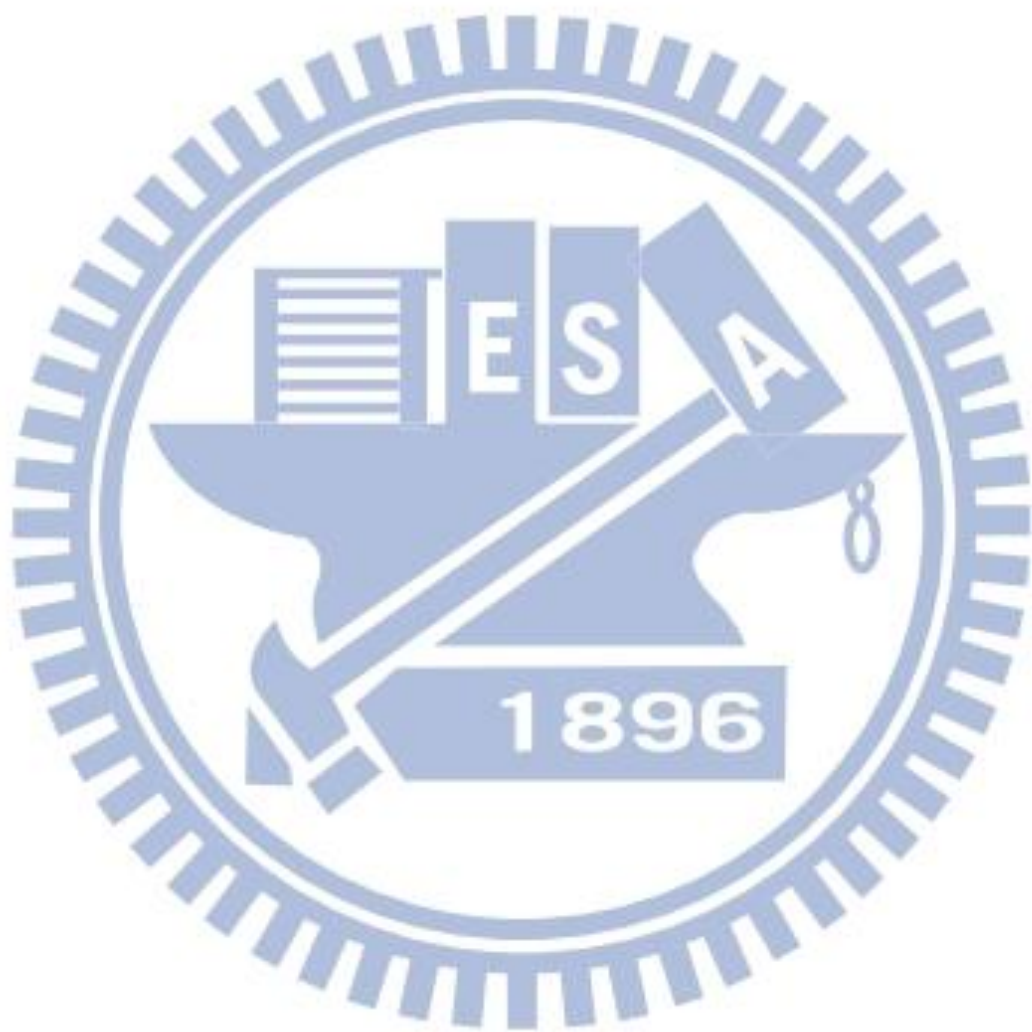


目次

中文摘要	i
Abstract	iii
誌謝	v
目次	vii
表次	xi
圖次	xiii
第一章 緒論	1
1-1 研究背景與動機	1
1-2 研究目的	3
1-3 研究問題	4
1-4 研究範圍與限制	5
1-5 名詞解釋	6
第二章 文獻探討	7
2-1 認知負荷理論	7
2-1-1 認知負荷理論的四個假設	8
2-1-2 自然訊息處理系統與人類認知架構	9
2-1-3 認知負荷類型	10
2-1-4 認知負荷理論在教學上的效應	12
2-1-5 認知負荷理論對本研究之影響	20
2-2 多媒體學習理論	20
2-2-1 多媒體學習理論的基本假設	21
2-2-2 多媒體學習理論的認知負荷	22
2-2-3 多媒體學習理論的教學設計原則	23
2-2-4 多媒體學習理論對本研究之影響	25
2-3 注意力與視覺搜尋	25
2-3-1 注意力	25
2-3-2 視覺搜尋	27
2-3-3 特徵整合理論	30

2-3-4 注意力與視覺搜尋對本研究之影響	31
2-4 尺規作圖	32
2-4-1 九年一貫課程綱要中的尺規作圖	32
2-4-2 尺規作圖相關研究	33
第三章 研究方法	37
3-1 研究流程	37
3-1-1 準備階段	38
3-1-2 實驗階段	38
3-1-3 分析階段	39
3-2 研究設計	39
3-2-1 研究方法	39
3-2-2 研究變項與假設	40
3-2-3 實驗流程	41
3-3 研究對象	42
3-4 研究工具	44
3-4-1 實驗教材	44
3-4-2 前測試卷	46
3-4-3 後測試卷	48
3-4-4 延後測試卷	49
3-4-5 上課感受量表	49
3-5 資料分析	50
第四章 研究結果與討論	51
4-1 後測分析	52
4-1-1 後測總分之分析	52
4-1-2 後測計算題之分析	54
4-1-3 後測作圖題之分析	56
4-2 延後測分析	58
4-2-1 延後測總分之分析	58
4-2-2 延後測計算題之分析	60

4-2-3 延後測作圖題之分析.....	62
4-3 認知負荷之分析	65
4-4 學習效率與投入分數暨專業知識反轉效應分析	68
4-4-1 整體學生認知負荷	68
4-4-2 各成就水準認知負荷.....	70
第五章 研究結論與建議.....	75
5-1 研究結論	75
5-2 建議	76
5-2-1 對於教學之建議.....	76
5-2-2 對於未來研究之建議.....	77
參考文獻.....	79
1. 中文文獻	79
2. 英文文獻	81
附錄一 前測試卷.....	83
附錄二 後測及延後測試卷	85
附錄三 後測、延後測試卷作圖題計分標準	87
附錄四 實驗組教材.....	91



表次

表 1 實驗組與對照組比較表.....	40
表 2 教學實驗流程表.....	41
表 3 受試學生高、低成就水準人數分配表.....	42
表 4 上學期數學科定期評量平均成績獨立樣本 T 檢定摘要表.....	42
表 5 前測平均成績 獨立樣本 T 檢定摘要表.....	43
表 6 前測試卷之雙向細目表.....	47
表 7 前測試題難度與鑑別度一覽表.....	48
表 8 後測試卷之雙向細目表.....	48
表 9 後測試題難度與鑑別度一覽表.....	49
表 10 全體受試學生 後測及延後測成績 描述性統計摘要表.....	51
表 11 教材設計與成就水準在後測總分之二因子變異數分析摘要表.....	52
表 12 後測總分 平均數摘要表.....	53
表 13 教材設計與成就水準在後測計算題之二因子變異數分析摘要表.....	54
表 14 後測計算題之平均數摘要表.....	55
表 15 教材設計與成就水準在後測作圖題之二因子變異數分析摘要表.....	56
表 16 後測作圖題之平均數摘要表.....	57
表 17 教材設計與成就水準在延後測總分之二因子變異數分析摘要表.....	58
表 18 延後測總分之平均數摘要表.....	59
表 19 教材設計與成就水準在延後測計算題之二因子變異數分析摘要表.....	60
表 20 延後測計算題之平均數摘要表.....	61
表 21 教材設計與成就水準在延後測作圖題之二因子變異數分析摘要表.....	62
表 22 延後測作圖題之平均數摘要表.....	62
表 23 上課感受量表 描述性統計摘要表.....	65
表 24 教材設計與成就水準在花費心力之二因子變異數分析摘要表.....	66
表 25 花費心力 之平均數摘要表.....	66
表 26 整體學生後測之學習效率與投入分數.....	69
表 27 整體學生延後測學習效率與投入分數.....	70

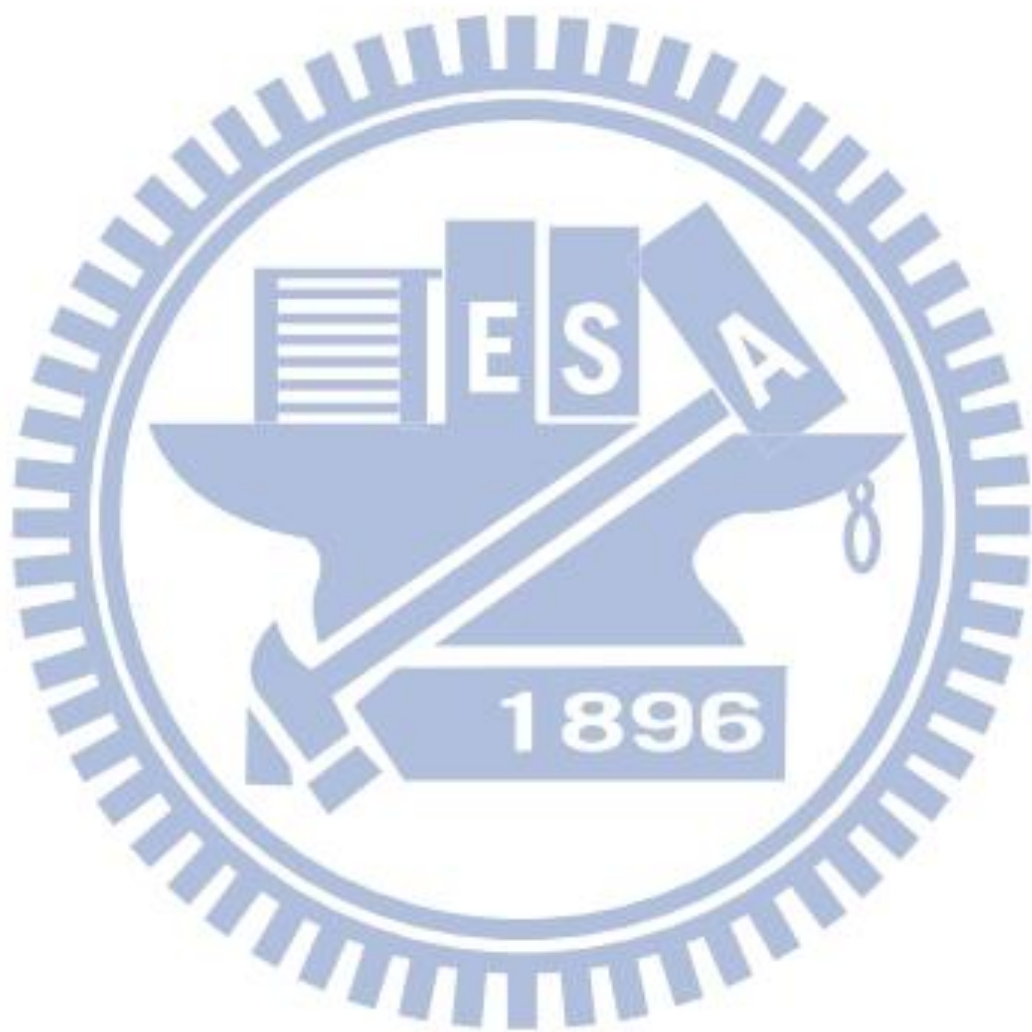
表 28 後測不同成就水準之學習效率與投入分數 71

表 29 延後測不同成就水準之學習效率與投入分數 72



圖次

圖 1 學習效率圖 (EFFICIENCY GRAPH).....	15
圖 2 學習投入分數圖.....	16
圖 3 學習效率與學習投入分數圖	17
圖 4 多媒體學習理論的認知模型	21
圖 5 早期選擇理論處理流程.....	26
圖 6 晚期選擇理論處理流程.....	27
圖 7 干擾物對搜尋作業的影響.....	28
圖 8 平行搜尋.....	29
圖 9 序列搜尋.....	29
圖 10 平行搜尋和序列搜尋.....	30
圖 11 特徵整合理論.....	31
圖 12 研究流程.....	37
圖 13 直角三角形尺規作圖 (左圖：實驗組 右圖：對照組).....	45
圖 14 計算外公切線段長度 (左圖：實驗組 右圖：對照組).....	45
圖 15 計算內公切線段長度 (左圖：實驗組 右圖：對照組).....	45
圖 16 實驗組教材：公切線與直角三角形關係之分析.....	46
圖 17 整體受試學生後測及延後測 計算題、作圖題分數折線圖	64
圖 18 整體學生後測的學習效率與投入分數圖	69
圖 19 整體學生延後測學習效率與投入分數圖.....	70
圖 20 後測不同成就水準之學習效率與投入分數圖	71
圖 21 延後測不同成就水準之學習效率與投入分數圖	72



第一章 緒論

本章共五節，1-1 研究背景與動機、1-2 研究目的、1-3 研究問題、1-4 研究範圍與限制、1-5 名詞解釋。

1-1 研究背景與動機

國民中學的數學課程包含數與量、代數、幾何、機率、統計等單元，其中以幾何單元最令學生感到困擾，尤其是幾何證明、尺規作圖，肇因於數學的特性「嚴謹」。近年來，有不少從事數學教育的人員投入了相當的心力於幾何證明的教學研究，包括了學生對作出幾何證明或閱讀理解幾何證明的困難等方面，都有不少相關研究，如左台益等人(2011)的「以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響」。但是對於尺規作圖方面的研究，則是相對減少許多。因為在這方面的論述、研究並不多，所以對於如何幫助學生學習尺規作圖的方法並不多見。

尺規作圖，在很早的文獻上，就已紀錄了古代中國的製圖技術，是如何使用規、矩。如《淮南子》中有：『非規矩，不能定方圓；非準繩，不能定平直。』《孟子》離婁篇(上)第一章，孟子云：『離婁之明，公輸子之巧，不以規矩，不能成方圓。』，這些皆顯示古代的中國早就有以規、矩製圖的事實。左台益(2005)指出歐氏幾何作圖所限制的工具是無刻度的直尺與圓規，由此發展成五個基本作圖法則：做一線、做一圓、做二線交點、做二圓交點及做一線和一圓的交點。所謂尺規做圖，即是由此五個基本作圖法則的有限步驟完成。即用直尺與圓規的一切作圖中，其目的皆不外乎尋求兩個圓的交點、兩條直線的交點、一條直線與一個圓的交點。看似簡單，卻讓學生覺得尺規作圖困難重重，是因與其它學科相較之下，它的知識結構是屬於一層一層累積的「程序性知識」(Procedure Knowledge)，是既需要依賴直覺又需要推理。

國民中小學數學學習領域的九年一貫課程綱要(教育部, 2008)，即97課綱中提及：數學的學習注重循序累進的邏輯結構，因此教學的重點在於引導並利用學生的先備知識(前置經驗或感覺)，來學習新的數學題材，讓學生對數學有整體性的感覺，也就是培養

學生能帶著走的「數學能力」。所以將數學學習領域的教學目標分為四個階段，以達到培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；進而學習應用問題的解題方法，並能於日常生活中，若遇到困難或不熟悉的問題時，可以應用這些能力來解決困難，或在不熟悉解決方式時，懂得自行尋找解決問題的方法。

十二年國教將於一〇三年上路，教育部要求國中畢業生都得參加國中教育會考，將考國文、英語、數學、社會、自然及寫作測驗六科，其中數學科加考二到三題非選擇題，引起學生及家長的緊張。以兩圓公切線尺規作圖為例，除須知道尺、規工具的用法限制、基本尺規作圖方法及相關幾何知識外，並且能將這些知識能力與作圖產生連結才能做出所要之圖形，所以常使學生不知從何著手，因而有出現憑直(感)覺作圖的錯誤情形(葉福進，2005)。

研究者曾經嘗試於課堂中教授利用尺規作圖畫出兩圓的內公切線、外公切線，此單元的教學重點，在學生具備基本尺規作圖能力的前提下，引導學生利用圓畫直角三角形的先備知識來作圖，但由於下列因素，常無法獲得良好的教學成效：

1. 九年一貫的能力指標中，對於尺規作圖的要求只有下列兩點，所以使得學生先備知識不足：
 - (1) S-4-10 能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖
 - (2) 8-s-11 能認識尺規作圖，並能做基本的尺規作圖
2. 升高中、職的基測試題，只考選擇題，因而學生不重視操作圓規、直尺作圖所需具備的基本能力、技巧，甚至連工具使用的限制都不清楚(陳宥良，2009)。。
3. 尺規作圖所需的幾何知識本身即具有複雜性及累積性，此即內在認知負荷。若教師此時對於教材教法的設計，未多留意學生的困難所在，就會造成外在認知負荷的增加，兩者相加，一旦超出學生工作記憶區的負荷，就會造成學生放棄學習。

Mayer (2009): 學生在學習知識時需要經過選取 (Selection)、組織 (Organization) 與整合 (Integration) 三個階段的認知處理。一般教室裡的教學，教師皆以黑板並搭配各種顏色粉筆作為主要教學媒介，雖可用各式顏色粉筆對各種主要訊息加以操弄，但作圖題的教學常因線條複雜、擦拭困難，導致在黑板累積過多訊息，因而造成學生在視覺搜

尋上的困難，當下無法立即選取主要訊息加以思考與分析，進而組織、整合，所以對教師接下來的教學常常不知所云，因而產生挫折甚至放棄學習。而利用數位設備進行教學的多媒體教材，能利用淡入、淡出等方式很輕易的就能避免訊息混亂的問題，如本研究即使用交通大學陳明璋博士的研究室所開發的 AMA (Activate Mind Attention) 系統作為本實驗的主要研究工具，該系統是以 PowerPoint 為平台的外掛增益集，以激發式動態 (Trigger-based Animation, TA) 呈現教材訊息為主要核心功能，教師可隨著授課進行中，視需要任意操弄訊息的出現、消失、凸顯、淡化，並配合步驟化、區塊化、結構化呈現教材，以引導學生的視覺注意力於必要訊息，若再加上適當的口語引導，更可使學生不受次要訊息的干擾，進而減少不必要的視覺搜尋，便可降低外在認知負荷，使得學生能於有限的上課時間內，迅速組織與整合教材內容而達到有效學習。

工作記憶區的容量有限，長期記憶的容量無限 (Sweller, 1998)，因此於教材本身的內在認知負荷一定的情形下，只有降低外在認知負荷，並善用長期記憶中的基模，就變成學習是否能有效達成教學目標的關鍵。人類接受外界的訊息有 83% 是藉由視覺 (實驗心理學家 Treicher, 1967)，所以本研究是希望藉由學生的先備知識，即用圓的觀念繪製直角三角形的能力，將此作圖能力模組化，利用視覺引導來傳遞、凸顯直角三角形的圖形表徵與內外公切線關係的訊息，應是最容易且有效的教學方式，因為一般切線作圖的教學模式，皆是直接進程序性的教學，作圖完畢後，再解釋說明原因，學生常知其然不知其所以然，一段時日後，幾乎忘記。因此本研究選取九年級四個常態班學生為實驗對象，應用資訊融入教學的方式，使用 AMA 搭配 PowerPoint 為教學軟體，以視覺搜尋理論為基礎，並根據多媒體學習理論、認知負荷理論，設計出能在教學過程中，使老師、教材、學生之間可以即時互動、溝通的自製多媒體教材，幫助學生將視覺的注意力於直角三角形上，即利用圖形表徵配合口語以降低外在認知負荷；利用直角三角形為模組，能降低內在認知負荷。在此教學模式下，學生能很輕鬆、快速的了解教材的知識內容。

1-2 研究目的

基於上述的研究動機，本研究主要目的是希望在兩圓內、外公切線的尺規作圖教學

中，以直角三角形為模組的教學，能較一般步驟化教學有效降低學生認知負荷，在後測、延後測都能有良好的學習成效，亦即本研究欲探討不同教材設計(模組化教材 vs 步驟化教材)與不同成就水準的學生(高 vs 低)在學習表現與認知負荷方面的影響，同時藉由學習效率與學習投入分數探討模組化教學會不會對高成就水準學生產生專業知識反轉效應。

1-3 研究問題

本研究探討的問題是兩圓內、外公切線的尺規作圖教學，有無使用模組化教學及不同成就水準：

1. 對學生的後測表現之交互作用是否顯著？
2. 對學生的延後測表現之交互作用是否顯著？
3. 對學生的認知負荷表現之交互作用是否顯著？
4. 對於高成就水準學生是否產生專業知識反轉效應？

1-4 研究範圍與限制

1. 研究範圍

本研究的尺規作圖教材內容，是以康軒版九年級課本第二章求兩圓內外公切線段長度延伸而來，以基本尺規作圖的「中垂線作圖」、「過線上一點作垂線」、「過線外一點作平行線」為基礎能力，以圓內接直角三角形為模組，作出兩圓的內外公切線為研究範圍。

2. 主題限制

本研究僅針對兩圓的內外公切線尺規作圖法討論，無法類推至其它教學主題。因此對於其他不同主題的幾何尺規作圖教學，在不同的理想之下，仍應設計不同的教材教法加以實驗、證明。

3. 母群體限制

本研究受限於人力、物力、時間及地理區域等因素，僅能以研究者所在學校之九年級的 11 個班級學生做為母群體，並採便利樣本，抽樣其中 4 個班級為實驗對象，因樣本數有限，故結果無法推論至全國其他地區學校的學生。

4. 受試人員限制

由於取樣班級原數學授課教師皆非研究者，在彼此不熟悉的情形下，學生對於教師的上課方式、動作用詞及師生互動、班級氣氛皆可能影響教學效果。

5. 施測時間限制

因為每個班級的基本尺規作圖能力略有不同，所以必須抽出長短不同的部分時間複習，但在教學時間只有 45 分鐘的限制下，所以使得主題教材的教學時間也略有不同，可能影響教學效果。

1-5 名詞解釋

1. 模組 (module)

是一個功能的單位體，可獨立執行其功能，亦可串聯起來形成更複雜的功能。因此教材中具有高交互作用的元素，若可切割出來並且能組成具有特定功能或意義的知識就稱為模組，因而能降低教材中的內在認知負荷。例如教授「腳踏車變速原理」，以直角三角形為模組對兩圓公切線尺規作圖學習成效之影響

2. 認知負荷

將一特定工作加諸於學習者認知系統時所產生的負荷，也就是工作記憶的負荷。學者認為所謂的認知負荷乃指學習者在心智上所耗費的「努力」強度。如果學習者對學習內容感知到困難，便構成了認知負荷，分成內在、外在認知負荷。

3. 尺規作圖

只能使用直尺和圓規，直尺用來畫直線(不可使用刻度)，圓規用來畫圓或弧

第二章 文獻探討

本章共分成四節，分別為 2-1 認知負荷理論、2-2 多媒體學習理論、2-3 視覺搜尋與注意力引導、2-4 尺規作圖。

2-1 認知負荷理論

隨著科技的日新月異，數位學習的發展是一日千里，因此如何設計數位多媒體教材或使用資訊科技設計有效、創新的教學，引起學生的學習動機進而願意投入努力學習，已成為當前有關數位學習的重要議題。在此同時，隨著認知心理學的受重視，從認知心理學的觀點探討應用數位科技於學習的教材教法設計議題，對學習者之認知負荷與學習成效之影響，已是當前數位學習與教學設計所探討的重要議題之一。佛光大學於 2007 年舉辦第一屆認知負荷學術研討會，即邀請認知負荷理論的原創者澳洲新南威爾斯大學教育學院的 Dr John Sweller 與會，並邀請國內從事認知負荷相關研究之學者進行二天學術交流；此外，以學術搜尋國內外有關認知負荷與學習成效、教學設計有關之論文已超過五百篇，即可見認知負荷理論之重要性。

認知負荷理論(Cognitive Load Theory,CLT)起源於 1980 年代，所謂的「認知負荷」，指的是在有限的工作記憶空間，處理訊息所產生的負荷量，由 J. Sweller 所提出，因該理論指出教材教法設計對學習者認知負荷的影響，以及認知負荷與學習成效的關係，所以在教育界引起熱烈討論。Sweller 等人將認知負荷定義為：「將特定工作加諸於個體認知系統時，所產生的負荷量」(Sweller et al., 1998：266)。Pass(1992:429)則認為認知負荷是一種多向度的概念，它包含兩種成份：一是心智負荷(mentalload)，二是心智努力(mentaleffort)。若學生對於所學內容感覺困難度越大，或是在心智上越需要努力，則認知負荷就會越大。所以，若教材困難度太高，或者學習時需要投入極大心力，都容易造成過重的認知負荷。

Sweller 等人於所著的 Cognitive Load Theory (Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011) 一書中提及，之所以將人類認知系統的發展，類比為生物演化系統的運作，是因為兩種都是自然訊息處理系統，都有著相似的訊息處理模式，如認知系統中的長期記憶所扮演的角色相當近似於進化生物學中的基因組。所以瞭解生物的演化特性，有助於瞭解人類認知

模式的特性，因而能提升教學設計的概念，此即認知負荷理論的主要目的。接下來將分別說明認知負荷理論的假設、認知負荷的類型、認知負荷所造成教材設計效應及認知負荷理論對本研究的影響。

2-1-1 認知負荷理論的四個假設

有關於人類的認知架構 (Cognitive Architecture) ，認知負荷理論有四項基本假設 (Sweller, Van Merriënboer, & Pass, 1998) ，分述如下：

1. 工作記憶 (working memory) 的容量有限

工作記憶又稱作「短期記憶」其容量是有限的，只能儲存平均約 7 ± 2 個單位，但是能真正能進行操作的單位只有 2-4 個，且工作記憶能運作或保留的時間極短，若未能於短時間內立即複誦 (rehearsal) ，大約 20 秒隨即消失，因而形成學習與記憶上的一項瓶頸 (張新仁，1990) 。若是待處理訊息本身內部的元素 (element) 關聯性很強，要彼此參照才能了解，則更加耗費工作記憶容量，因而產生更大的認知負荷。

2. 長期記憶 (long-term memory) 的容量無限

專家和新手的差別主要在於長期記憶的多寡。長期記憶容量是無限的，儲存著大量、互動複雜的知識和程序性技能，長期記憶對於個體就像是與生俱來，並沒有直接的意識，本身也沒有容量上的限制。專家和新手的差別 (例如老師與學生) 在於前者的長期記憶儲存了大量的各式問題 (Problemstates) 知識，以及對應的解決方法，所以面對問題時，專家 (老師) 可以在長期記憶中迅速的篩選出解決對策。新手 (學生) 卻不然，新手長期記憶中的相關資料量遠少於專家，所以只能於短期記憶中進行推理模擬和搜尋解決對策，因而耗費工作記憶的容量，造成認知負荷，以致學習困難。

3. 知識以基模 (schema) 形式儲存於長期記憶

基模也稱「認知基模」，是一種認知結構，它是我們藉以感受外界刺激、吸收知識的基本架構，是過去的反應或經驗的組織，它可以將大量的訊息組織化，發揮儲存訊息的功能，也就是個體能將許多佔用工作記憶容量的資訊整合成一個複雜的基模，而使之變成 7 ± 2 個單位中的一個處理單位，因而能減低工作記憶的負荷。其發展是由簡單

到複雜、粗略到精緻的基模建構(schema construction)，也就是專技 (expertise)發展的過程，由認知發展論 Piaget (皮亞傑) 提出。

4. 基模運作自動化 (schema automation) 是建構基模的重要過程

訊息處理分為：意識化(conscious)和自動化(automatic)

意識處理發生在短期記憶中，耗費意識資源，佔用許多工作記憶的空間。

自動化處理不需要意識決定，不耗費意識資源，可降低工作記憶負荷量。許多知識技能初始都是經由意識處理，需經過不斷的練習，才能夠不經思索而自動化處理，因而可以節省許多工作記憶運作的負荷。

2-1-2 自然訊息處理系統與人類認知架構

認知負荷理論認為人類的認知系統與生物演化系統，都遵循著自然演化的訊息處理原則 (Sweller et al., 2011)：

1. 資訊儲存原則 (the information store principle)

在人類認知系統中，長期記憶扮演資訊儲存庫的角色，知識即以基模的形式儲存於長期記憶中。個體的認知、思考以及解決問題的方法，都受到儲存在長期記憶的知識所影響。因此，教學的主要目標是累積並改變儲存在長期記憶中的知識。

2. 借用與重組原則 (the borrowing and reorganizing principle)

(學生)學習時，大多數知識是由他人(教師)的知識資料庫借用而來，而且大多會與本身長期記憶中的相關知識(基模)做某種程度的重組，形成新的知識(基模)儲存於長期記憶中。在整合的過程中具有隨機性，所以有時會產生迷思概念。

3. 隨機生成原則 (the randomness as genesis principle)

當遇到問題時，在人類認知系統中，如果沒有適當有用的知識，則將於工作記憶中隨機產生解決的方法並測試，無效則丟棄，重複此步驟直到發現有效解決問題的方法。長期記憶中的知識基模有助於減少隨機生成與測試的次數。隨機生成原則所產生的新資訊單純來自於本身長期記憶中的相關知識，是一種創新的知識，如同突變。而「借用與重組原則」產生的資訊是來自於外部與本身舊知識的重組，所產生的只是「新」知

識而非「創新」的知識，如同遺傳。

4. 改變狹隘限制性原則 (the narrow limits of change principle)

「借用與重組」或「隨機生成」原則所產生的知識，皆是發生於工作記憶中，而工作記憶所能處理的元素總量與時間皆有一定的限制，因此不可能產生大量而有效的改變，所以長期記憶中的知識在短時間內，改變的範圍有限。

5. 環境組織與連結原則 (the environmental organizing and linking principle)

受限於工作記憶的容量，所以於工作記憶中所能處理的新資訊是有限的，但處理來自於長期記憶中的知識基模，則不受容量與時間的限制。因此，長期記憶中的知識可以大量的進入工作記憶，透過「環境組織與連結原則」與新知識整合並與環境組織及連結互動，以解決在生活環境中所面臨的各項挑戰與問題。

綜合以上所述，認知系統處理資訊的五個原則，互相分工合作且說明了新、舊知識的創新及儲存的方法，即認知系統利用訊息儲存原則將得到的資訊存於長期記憶；利用「借用與重組」、「隨機生成」兩個原則分別獲取新知識和創新的知識；利用「改變狹隘限制性」、「環境組織與連結」兩個原則，提取長期記憶中的知識基模用以解決環境中所面臨的問題。一般而言，認知系統會以最少的認知資源來完成任務，稱為認知經濟原則 (Kalyuga, 2007)，即個體面對環境中的各種狀況時，若長期記憶中有可用的知識基模，則會優先採用，因為長期記憶的知識不會佔用工作記憶資源，其次則採用「借用與重組原則」，最後才會使用最耗費工作記憶資源及時間的「隨機生成原則」。但不論「借用與重組原則」或是「隨機生成原則」的運作皆須透過容量有限的工作記憶，因此進展皆是費時而緩慢。

2-1-3 認知負荷類型

依據認知負荷理論(Cognitive Load Theory)，在學習過程中，學習者必須在容量有限的工作記憶中，處理來自於教學者所提供的資訊，因而對工作記憶造成負荷，稱為認知負荷，分類如下(Sweller et al., 2011)：

1. 內在認知負荷 (Intrinsic Cognitive Load)：分成兩類

(1) 由學習教材內容本身的複雜度、學習者的先備知識以及上述兩者之間的交互作用所決定(Kalyuga, 2007)，教材的難度不會因教學設計而改變。當教材內部元素互動性高，複雜度也就高，因而佔用學習者大量的工作記憶，但工作記憶的容量有限，所以產生較高的內在認知負荷。所以若學習者具有較高的先備知識，即相關的知識模組，就可將數個原本看似獨立的元素模組化，而成為單一元素，如此即可大量減少所佔用的工作記憶，因而降低內在認知負荷。

(2) 增生認知負荷 (Germane Cognitive Load) 是指由教學者另外提供有助於瞭解學習內容之教材，雖有幫助，但仍會佔用工作記憶資源，因而產生另一種內在認知負荷。

2. 外在認知負荷 (Extraneous Cognitive Load)

相同的教材內容以不同的方式來呈現，對接收資訊的學習者來說，也會產生不同程度的負荷，稱作「外在認知負荷」。不是來自於教材本身內容的負荷，而是由教學者外加的不良教學設計、活動所引起，使學習者認知資源被轉移至與基模的建構、自動化沒有直接關係的學習活動。外在認知負荷非但對學習沒有幫助，甚且因佔用工作記憶資源而阻礙學習的認知處理，因此在設計教學活動時，應避免多餘而不必要的活動，以降低外在認知負荷。處理外在認知負荷的認知資源稱為外在資源 (extraneous resources)。

綜合以上所述，認知負荷包含內在認知負荷與外在認知負荷。因工作記憶資源是有限的，所以認知負荷的總量是一定的，若內在、外在認知負荷的總和超過總負荷量，將妨礙學習，甚至導致無效學習。當內在認知負荷不高時，只要認知負荷的總和不超過總負荷量，此時外在認知負荷的高低對學習較不會有所影響；但若內在認知負荷較高時，教學者就應致力於降低外在認知負荷，並且在不超出認知負荷的總量下，輔以適當的增生認知負荷，因為增生認知負荷能幫助學習者建構有組織的基模，提升學習者的學習成效。因此好的教材設計應該是在進行教學活動前，先深入瞭解教材的結構與學習者的先備知識後，再設計出減少不必要的外在認知負荷、適度使用增生認知負荷及管理內在認

知負荷的教材(Clark, et al., 2006)。管理內在認知負荷是指當內在認知負荷超出工作記憶的容量時，可以將教材內容適當切割成較小部分的內容，以隔絕內在元素的互動性，如此就可降低內在認知負荷並且提高學習成效(Kalyuga, 2009)

2-1-4 認知負荷理論在教學上的效應

認知負荷理論起源於 1980 年代，主要目的在於引導教學設計的決定，教學者有責任要能夠有效的展示教學資料、降低認知負荷，才能夠真正減輕學習者的學習負擔，增加學習的成效。由於外在認知負荷的主要來源為教材的編排呈現方式所造成，因此 Sweller 等人 (1998) 提出降低教材負荷量的教學設計原則，後又於 2011 年增修，說明如下：

1. 開放目標效應 (Goal Free Effect)

傳統的教學大多是單一目標及標準答案導向的解題模式，因此容易將學習者侷限在某個固定框架下進行思考與認知處理，會產生較大的認知負荷。因為此種「方法一目的分析」(mean-ends analysis) 解題方法於尋找特定目標 (標準答案) 的過程中，學生只專注於搜尋、建立已知條件與特定目標問題之間的關係，而忽略其它已知或未知條件之間的局部關係，便容易造成極大的認知負荷。但若給予學生沒有特定目標的問題用以取代有特定目標的問題時，學生因不受問題的限制，可以多重表達自己思考歷程的步驟與成果，發揮創造力，以降低外在認知負荷 (宋曜廷, 2000; Sweller et al., 1998)，稱為開放目標效應，此效應重點就是允許學生以其自然想法解題。以數學幾何問題為例，通常是具有特定目標之問題如「求出角 A」，可以改為沒有特定目標的問題如「求出圖形中的所有角」，如此仍可達到「求出角 A」的目標。但此效應只適用在解決方式有限的問題(Sweller, 2004)。

2. 工作示例效應 (Worked Example Effect)

對於程序性知識 (procedure knowledge)，教師可逐步示範解題的步驟，協助學生理解問題及建構完整的解題基模，因此可降低外在認知負荷，使工作記憶可釋放更多的認知資源去形成自動化基模以存在長期記憶中。

3. 完成問題效應 (Problem Completion Effect)

工作示例是將問題的解決步驟，完全示範予學習者，但若步驟太多，仍會產生過多的外在認知負荷。而完成問題是工作示例的一部份，即對於問題只呈現一部分的解法，剩下一部分則由學習者完成，如此將可促使學習者對示例作較深入的思考，且仍具有減低外在認知負荷的效果 (宋曜廷, 2000; Sweller et al., 1998)。

4. 分散注意力效應 (Split-Attention Effect)

「分散注意力效應」為認知負荷中的一種現象，當學習者面對問題的解釋、說明時，若這些說明的時間或說明的位置，未與問題同時、同地呈現，學習者為了瞭解問題，必須分散其注意力於不同來源的資訊，並花費心力將這些資訊整合起來，因而增加了外在認知負荷。因此面對不同方式、來源呈現的訊息，若需耗費工作記憶整合資訊才能明瞭，最好同時、同位置呈現。許多研究驗證，若資訊是以實際的整合方式呈現，而不是靠心力去整合時，可以去除分散注意力的效應 (Mousavi, et al., 1995)。

5. 形式效應 (Modality Effect)

Mousavi, et al. (1995) 的研究提及，形式效應是由分散注意力效應所導出，處理訊息時，經由多重管道 (視覺與聽覺) 處理不同性質的資訊，可以增加工作記憶空間，所以採用整合雙重媒體的技術，會改善分散注意力的效果。

工作記憶區有二套資訊處理系統，即視覺 (如：圖形、文字) 與聽覺 (如：旁白)，二者同時呈現可降低工作記憶負荷。當學習材料以圖、文等視覺方式同時呈現於眼前時，學習者必須分散其視覺注意力去比較兩者之間的關聯，便產生了「分散注意力效應」。但若將視覺文字改以聽覺的口述文字呈現時，因為同時使用工作記憶的聽覺、視覺雙通道處理資訊，可增加工作記憶資源，所以降低外在認知負荷，此效應與 Mayer 的多媒體學習理論中的形式原則相似。但必須注意，如果聽覺只是圖表內容的重覆說明，將形成冗餘效應；對專家學生，則可能不但沒有形式效應，甚且造成專業知識反轉效應。

6. 冗餘效應 (Redundancy Effect)

當圖片與文字不需要在心智上整合就能獨立解釋學習內容時，若將二者同時呈現，

學習者將被迫建立二者間的關聯，這多此一舉的行為非但無助於加強學習效果，反而會造成認知負荷（范懿文、陳彙芳，2000）。因此只呈現一種訊息即可，多餘的訊息則除去，如此可減少注意力於多餘的訊息上，就可降低外在認知負荷。

在 Bobis, Sweller, 和 Cooper (1993) 的研究中，將小學生分成兩組作摺紙教學的實驗，一組以圖示的方法將摺紙流程畫在說明書上，冗餘效應的組別則是在每一個圖示旁再多加文字敘述，結果發現，只看圖形的學習成效優於圖文並列的冗餘效應組別。

7. 專業知識反轉效應 (Expertise Reversal Effect)

專業知識反轉效應是指對低先備知識或低成就水準的學習者是有效的教學設計，但對於高先備知識者卻無功效，甚至產生負面效果 (Kalyuga, 2007)。為了避免此效應的產生，應設計具有彈性的教材教法，以適用於原本就屬於常態分佈的學習者，及隨著教學活動進行後，不斷提升專業知識水準的學習者。如原先的教材設計為圖文並呈，隨著教學活動的進行，原先必要的文字資訊漸漸變成冗餘後，就應該拿掉，只呈現圖形即可。

用 t 檢定雖然可瞭解學生的成就水準(後測、延後測)結果及上課感受量表中的認知負荷，可是卻無法瞭解學生的「學習情況」，因為成就水準相同的學生，所花費的心力不見得相同。例如後測成績相同時，花費心力較小者，表示具有較佳的學習效率；又若花費心力相同時，後測成績較高者，亦表示具有較佳的學習效率。對此，學者 Paas 和 van Merriënboer (1993) 提出了視覺化的學習效率公式 E 及效率圖 (Efficiency Graph) 來瞭解學生的「學習情況」。首先將認知負荷量及成就水準分數轉化成 Z 分數 (Z score) ，轉化後之分數分別以 Z_c 、 Z_p 表示，學習效率 E 、 Z 分數公式如下：

$$E = \frac{Z_p - Z_c}{\sqrt{2}} \quad (Z_p: \text{後測成績 } Z \text{ 分數} \quad Z_c: \text{認知負荷 } Z \text{ 分數})$$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} \quad (X: \text{原始分數} \quad \bar{X}: \text{平均分數} \quad S: \text{標準差})$$

接著再以 Z_c 為橫坐標、 Z_p 為縱坐標，將各組的 (Z_c, Z_p) 描繪於直角坐標平面上，就能明確判讀學習效率的表現，如圖 1 (Paas, 2003) ，所代表的意義說明如下：

1. A 區：表示高成就水準、低認知負荷，即 $Z_p > Z_c$ ，故 $E > 0$ ，為高學習效率 (high-instructional efficiency)。
2. B 區：表示成就水準與認知負荷達到平衡，即 $Z_p = Z_c$ ，故 $E = 0$ ，為中學習效率。
3. C 區：表示低成就水準、高認知負荷，即 $Z_p < Z_c$ ，故 $E < 0$ ，為低學習效率 (low-instructional efficiency)。

本研究於教學實驗結束後，進行上課感受量表的問卷作答，其中將第三題「你覺得要理解這單元的內容，在精神上有多費力？」作為「花費心力」的指標，可當作是一種心智努力，故可視之為總認知負荷而被測量，即上述之 Z_c 。因此對於高成就水準學生，要如何判別是否會因外在認知負荷的增加而導致學習效率變低，發生所謂的「專業知識反轉效應」(Clark et al., 2006)，即可藉由學習效率的分析來觀察。

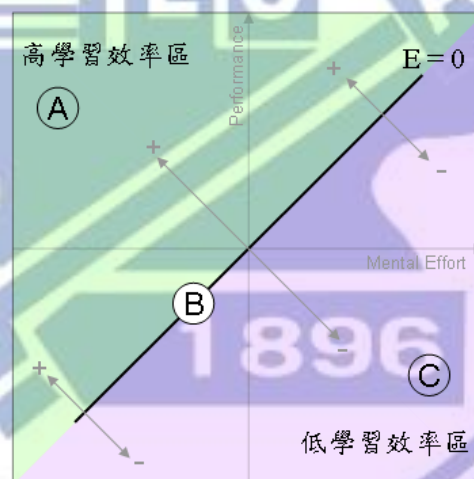


圖 1 學習效率圖 (Efficiency Graph)

資料來源：” Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory.” by F. Paas, J. E. Tuovinen, H. Tabbers & P. W. M. Gerven, 2003, *Educational psychologist*, 38(1), p.68

「動機」一詞在心理學上是指能夠引起個體活動，並促使該活動朝向某個目標前進的內在動力。雖然動機不會是一成不變，過程中可能會增加或降低。然而不管如何，在教學時，若能使學生於學習時維持一定程度的動機，則願意投入的心智努力就越多，也就越容易有好的學習表現。在動機、心智努力和學習表現是正相關的假設下，Paas (2005) 提出了學習投入分數 I ，計算公式如下：

$$I = \frac{Z_p + Z_c}{\sqrt{2}} \quad (Z_p: \text{後測成績 } Z \text{ 分數} \quad Z_c: \text{認知負荷 } Z \text{ 分數})$$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} \quad (X: \text{原始分數} \quad \bar{X}: \text{平均分數} \quad S: \text{標準差})$$

學習投入分數圖如圖 2，圖形之繪製方法如同前述之學習效率圖，所代表的意義說明如下：

1. D 區：表示成就水準與認知負荷量的和偏高，即 $Z_p + Z_c > 0$ ，故 $I > 0$ ，為高學習投入 (high-instructional Involvement)。
2. E 區：表示成就水準與認知負荷達到平衡，即 $Z_p + Z_c = 0$ ，故 $I = 0$ ，為中學習投入。
3. F 區：表示成就水準與認知負荷量的和偏低，即 $Z_p + Z_c < 0$ ，故 $I < 0$ ，為低學習投入 (low-instructional Involvement)。

因此對於高成就水準學生，要判別是否發生「專業知識反轉效應」，可藉由投入分數的分析，觀察是否因學習動機所投入的努力變得較差而得知。

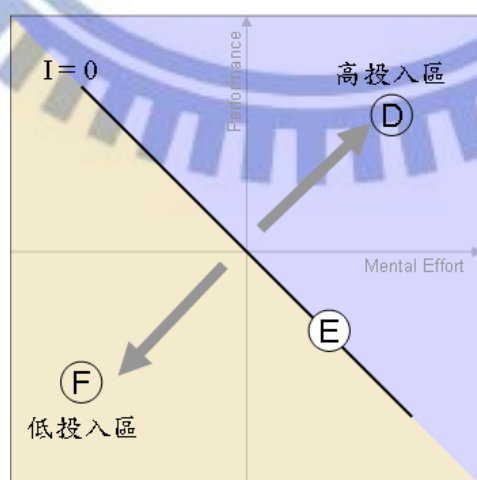


圖 2 學習投入分數圖

資料來源：” A motivational perspective on the relation between mental effort and

performance : Optimizing learner involvement in instruction.” by F. Paas, J. E. Tuovinen, J. J. G. van Merriënboer, & A. Aubteen Darabi, 2005, Educational Technology Research and Development, 53(3), p.29

綜合上述，因為學習效率圖與學習投入分數圖的繪製方法相同，所需數據資料亦相同，故可將兩圖形合併於同一直角坐標平面，同時觀察學習效率與學習投入分數，如圖 3。如此既可方便我們瞭解受試學生的學習狀況，又可以判斷是否發生專業知識反轉效應。

將兩個圖形重疊時， $I=0$ 、 $E=0$ 兩條直線將坐標平面分成四個象限，象限 I 代表高效率高投入、象限 II 代表高效率低投入、象限 III 代表低效率低投入、象限 IV 代表低效率高投入。由此可知，上方區塊(象限 I)為最佳情形，下方區塊(象限 III)則為最不理想情形(Kalyuga, 2009)。

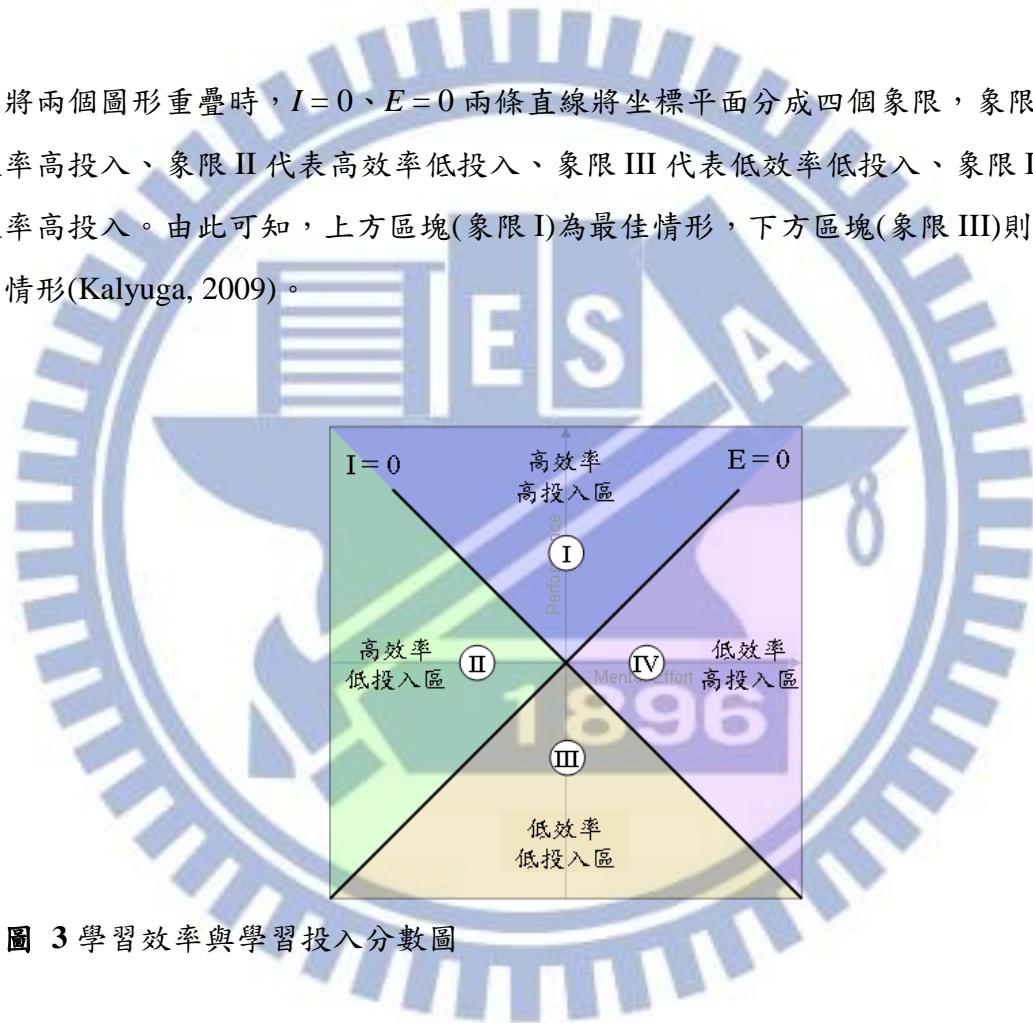


圖 3 學習效率與學習投入分數圖

8. 指引漸退效應 (Guidance Fading Effect)

在教學初期，可以提供完整的示範給予學習者，使其快速明瞭教材間的元素互動關係，降低內在認知負荷，即採工作示例效應的原則。但隨著學習者專業知識的提升，過於詳細的說明反而會造成外在認知負荷，產生專業知識反轉效應，所以教學設計應改為完成問題效應，最後能夠自行完整的解決問題，。

9. 想像效應 (Imagination Effect)

教學過程中，若要求學習者「想像」一個過程或概念，學習成效優於「研讀」同樣過程和概念的學習者，即為想像效應 (Leahy & Sweller, 2004; 2005)。產生想像效應的前提是學習者的長期記憶必須有相關的知識基模可供想像，否則想像無從發生。因此先備知識不足的學習者仍較適用「研讀」模式來建立基模 (Leahy & Sweller, 2004; Sweller, 2010)。

10. 自我解釋效應 (Self-Explanation Effect)

「自我解釋效應」是指當學習一個新的工作示例時，要求學習者嘗試解釋此示例的過或概念的心智對話 (Ruth Colvin Clark, Nguyen, & Sweller, 2006)。此過程能夠引導學習者與長期記憶中的相關知識基模建立連結。如同想像效應，自我解釋效應發生的前提是須有相當的先備知識，即學習者的長期記憶必須有相關的知識基模，否則「自我解釋」無從發生。

11. 元素交互性效應 (Element Interactivity Effect)

認知負荷總量等於內在認知負荷加上外在認知負荷，當認知負荷總量超過工作記憶限制，就易產生學習不良甚至無效學習的情形。內在認知負荷是由教材本身元素的交互性所決定。「元素交互性效應」是指當元素為低交互作用時，其內在認知負荷是低的，因此即便外在認知負荷是高的，在認知負荷總量未超過工作記憶限制，則學習仍能發生 (Leahy & Sweller, 2005; Sweller, 2010)。但當元素為高交互作用時，便具有高的內在認知負荷，此時教材設計便需注意能否有效降低外在認知負荷，否則認知負荷總量極易超過工作記憶限制，將會對學習造成阻礙 (Sweller, 2010)

元素交互程度的高低與個人先備知識有關。相同的教材，對於低先備知識的學習者而言，元素可能為高交互作用；但對於高先備知識者而言，元素可能為低交互作用，這是因為長期記憶中具有較多的相關知識基模，可將元素間的多重交互作用視為單一基模，因而降低內在認知負荷。

12. 獨立元素效應 (Isolated Elements Effect)

外在認知負荷可以經由適當的教學設計而降低，內在認知負荷卻是固定不變的。當教材內容含有大量高互動性的元素時，對學習者而言，若要同時處理，很容易超出

工作記憶的負荷，造成學習障礙。此時就必須對內在認知負荷作適當的管理，如預先訓練、模組化等策略。所謂模組化是指將教材內相關的互動元素獨立切割出來進行教學，變成可獨立執行某功能的模組 (module)，再將數個模組串聯建構成長期記憶中的知識基模，便可降低內在認知負荷，這種策略稱為獨立元素效應。此效應就是用人為方式去管理、組織元素的互動性，雖無法改變教材目標最初的內在認知負荷總量，但可藉由切割方式，將教材目標分成數個次目標而形成長期記憶中的基模，而基模的自動化可降低認知負荷使學習更加深入，增進學習成效 (Sweller, 2010)。

13. 整體-模組效應 (Molar-Modular Effect)

整體 (Molar) 是以整體的觀點，將解決問題的方法、步驟，一次全部提供給學習者，用以解決後續同樣問題，然而此種教學模式將迫使學習者於短時間內處理許多高交互作用元素，造成高內在認知負荷，導致學習無效，一般幾何作圖常採此法，如本研究之對照組。模組 (Modular) 是將複雜的解決方案分解成更小且有意義又能分開傳達與被理解的解決方案元素 (Gerjets, Scheiter, & Catrambone, 2004, 2006)，最後再將數個模組整合以達成完整學習，如本研究之實驗組。整體—模組效應多用於工作示例 (Worked Example)，其概念與獨立元素效應相似。

14. 變化效應 (Variability Effect)

變化效應是指提供不同情境、狀態的問題給學習者，以增強基模發展、強化學習遷移的能力。當內、外在認知負荷未超出工作記憶容量時，適當增加工作示例的變化，雖然增加學習過程中的內在認知負荷，但卻有促進學習遷移的效果，因此所增加的認知負荷是有效認知負荷，而非外在認知負荷 (Sweller, 1998)。

15. 瞬間效應 (Transient Information Effect)

瞬間效應定義為一種學習的遺失，是指進入工作記憶中的資訊，在尚未與長期記憶中的知識基模建立連結之前，就消失不見 (Sweller et al., 2011)。當教材同時經由視覺、聽覺雙通道進入工作記憶時，就產生形式效應 (Modality Effect)，但是 Leahy and Sweller (2011) 在對小學生的教學實驗研究中發現，僅透過視覺接收資訊的學習效果竟優於同時使用視覺加聽覺的組別，推測原因可能是聽覺接收的資訊元素具有高交互

作用，在短暫的時間中產生大量外在認知負荷，超出工作記憶容量，但經由視覺接收的文字資訊因能維持較長的時間，故能降低瞬間效應的發生。所以為防止瞬間效應的發生，應避免於短時間內，給於學習者過多複雜的訊息。

2-1-5 認知負荷理論對本研究之影響

本研究之實驗教材採多媒體設計，兩組教材設計根據分散注意力效應，視覺上將相關圖文的呈現在空間上盡量接近，聽覺上將口語的呈現與相關畫面在時間上接近；根據形式效應，盡量將資訊同時以聽覺、視覺的形式呈現；根據冗餘效應，去除與口述文字相同語意的印刷文字；根據整體-模組效應，設計實驗組、對照組教材。

利用記憶大量而複雜的程序性知識方式來作圖，將會佔用大量的工作記憶資源，產生較高的內在認知負荷。所以實驗組的教材，根據獨立元素效應，設計以直角三角形作圖為模組的教學策略，期望能減低元素交互作用，達到降低認知負荷的目的。

2-2 多媒體學習理論

Paivio 於 1971 年提出雙碼理論 (Dual-Coding Theory)，指出人類有兩個獨立卻又相互作用的系統，能將接收到的資訊基模化後儲存於長期記憶中，分別為語文系統 (verbal system) 與非語文系統 (nonverbal system)。若同時使用此兩個系統接收資訊，會比單獨使用語文系統或非語文系統，得到更佳的學習效果。Mayer (2001) 與多位學者以此理論為基礎，提出多媒體學習理論 (Theory of Multimedia Learning)，將多媒體學習定義為從文字和圖片學習，因此多媒體學習可稱之為雙碼學習 (dual-code learning) 或雙通道學習 (dual-channel learning)，故多媒體教學將教材以文字 (words) 及圖片 (pictures) 的形式呈現給學習者以幫助學習。此處的文字包括口說文字與印刷文字，圖像則包括靜態圖片 (如照片、地圖等) 與動態圖片 (如影片、動畫等)。

為讓大家更明瞭多媒體學習如何以感官中的視覺與聽覺雙通道進行學習，Mayer 提出了多媒體學習的認知模型，如圖 4。

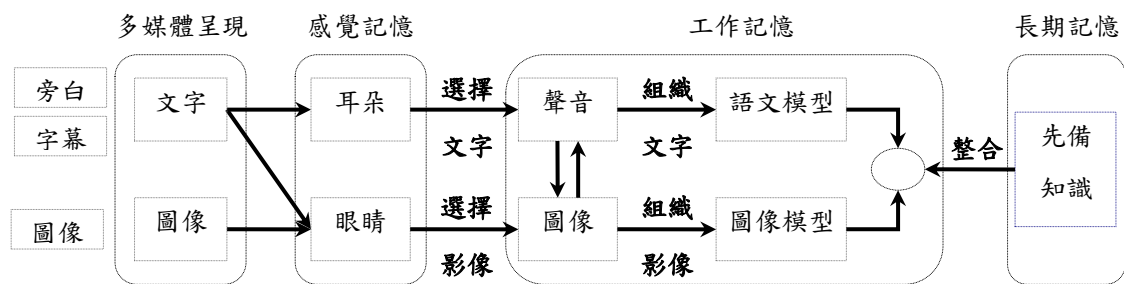


圖 4 多媒體學習理論的認知模型

資料來源：修改自 Multimedia Learning (2nd ed.), Mayer, 2009

在圖 4 的認知模型中，多媒體教材所呈現的文字、圖像分別經由耳朵的聽覺通道、眼睛的視覺通道接收後，進行選取、組織、整合等處理歷程，將可有效地提升學習效果，說明如下：

(1) 選取 (Select)

當學習者接觸到文字與圖像時，經由感官選取的相關文字或圖形，將儲存在工作記憶中，等待進一步處理。

(2) 組織 (Organize)

組織的過程就是將進入工作記憶中文字或圖形整理成一個連貫的整體，經過組織後的文字或圖像資料就稱為情境模型 (situational model)，分成語文和圖像二種情境模型

(3) 整合 (Integrate)

將工作記憶中建立好的語文模型、圖像模型與取自長期記憶的相關知識基模建立彼此間的連結，即為整合階段。

2-2-1 多媒體學習理論的基本假設

Mayer(2001)提出三個有關多媒體學習認知理論的假設：

(1) 雙通道假設 (Dual Channels Assumption)

是指人類對於以視覺呈現的素材及以聽覺呈現的素材，有不同的訊息處理管道。在圖 4 中，上面的管道代表聽覺／語文管道，下面的管道代表視覺／圖像管道。

(2) 有限容量假設 (Limited Capacity Assumption)

如同認知負荷理論，因為工作記憶的容量有限，所以 Mayer 認為視覺或聽覺管道中能處理的資訊量是有限制的，故只有小部分資訊能保留在工作記憶中。

(3) 主動處理假設 (Active Processing Assumption)

當面對外界訊息時，人類會主動進行認知處理以建構和經驗一致的心智表徵。主動處理包含注意資訊、對進入資訊予以組織、整合組織後的資訊與既有的知識基模。

2-2-2 多媒體學習理論的認知負荷

Mayer (2009) 指出學習過程中有三種認知的處理方式，會佔用有限的工作記憶資源，因而產生認知負荷，分述如下：

(1) 外在的認知處理 (Extraneous Cognitive Processing)

學習過程中，因教學設計的不良，造成工作記憶額外的負荷，所以可用於學習的工作記憶資源減少，導致學習成效不彰，例如在顯而易懂的動畫旁再加上字幕，容易造成視覺通道的負荷過重，使得學習後的記憶表現、學習遷移皆不佳。此情形相當於認知負荷理論中的外在認知負荷。

(2) 本體的認知處理 (Essential Cognitive Processing)

是源於教材本身的特性所引起，當教材內部元素進入容量有限的工作記憶之認知處理時，會受到元素交互作用程度的影響，因此學習者若只專注於教材本體的認知處理，可能學習後的記憶表現較佳，但學習遷移情形則不良。此情形相當於認知負荷理論中的內在認知負荷。

(3) 衍生的認知處理 (Generative Cognitive Processing)

將進入工作記憶中的資訊進行組織、整合時，為讓學習者能更了解教材意義，便增加其他方法來幫助，因此而產生的認知處理稱為衍生的認知處理。若學習者能專注於教材本身與衍生的認知處理，可能學習後的記憶表現、學習遷移皆有不錯的成效。此情形相當於認知負荷理論中的增生認知負荷。

2-2-3 多媒體學習理論的教學設計原則

因上述三種認知處理皆會佔用有限的認知資源，所以 Mayer (2009) 提出了十二項可降低外在的認知處理、管理本體的認知處理以及衍生的認知處理的多媒體教材設計原則，說明如下：

一. 降低外在認知處理的五個設計原則

1. 一致性原則 (Coherence Principle)

多媒體的教材設計應排除與教學目標無關的文字、圖像、聲音等元素，因為這些無關的資訊會佔用工作記憶的資源、分散學習者注意力而影響學習。當前一般教科書商所附的多媒體教材大多未遵從此項原則，內容多充滿與教學無關的動畫、圖像等裝飾。

2. 信號原則(Signaling Principle)

多媒體的教材設計中，可於適當處加入信號以引導注意力，避免學習者因搜尋而形成認知資源的浪費。最長用的信號包含箭頭、底線、標題、粗體、字體大小、顏色、符號、淡入、淡出等等。

3. 重複原則(Redundancy Principle)

多媒體的教材設計中，「圖像加上旁白」的學習效果會比「圖像加上旁白、字幕」的學習效果好 (Mayer, 2001)。因為圖像與字幕都是經由視覺通道進入工作記憶，容易造成視覺的負荷過重而影響學習。

4. 空間接近原則(Spatial Contiguity Principle)

多媒體的教材設計中，互相參照、對應的文字與圖像位置應盡量接近，以減少不必要的搜尋與比對，可節省工作記憶資源進而增加學習效果。

5. 時間接近原則(Temporal Contiguity Principle)

多媒體的教材設計中，互相參照、對應的文字與圖像同時呈現的學習效果會比循序呈現的學習效果好。因為若將圖、文循序呈現，工作記憶須耗費有限的資源去保留先前

的資訊內容以和後續的內容整合，造成不必要的認知負荷。

二. 管理本體認知處理的三個設計原則

1. 分割原則 (Segmenting Principle)

當教材內容對學習者是複雜困難時，可將教材分割成數個小片段，讓學習者有充足的時間及工作記憶去學習每一小段教材，最後再整合所有片段教材，學習效果將優於連續呈現完整教材的方式 (Mayer, 2009)。

2. 預先訓練原則 (Pre-training Principle)

若教材內容是複雜困難時，在教學之前，先複習相關主題的概念知識和專有名詞後，再進行學習，則學習效果較好(Mayer, 2009)。

3. 形式原則 (Modality Principle)

當多媒體教材內容同時含有圖像、文字時，文字部分以聽覺形式的口語文字呈現比以視覺形式的印刷文字呈現較佳，即「動畫加旁白」比「動畫加字幕」的教材能得到較佳的學習成效 (Mayer, 2009)。因為前者使用視覺、聽覺雙通道形式的認知資源，優於後者只使用資源有限的視覺通道

三. 增加衍生認知處理的四個設計原則

1. 多媒體原則 (Multimedia Principle)

同時呈現文字與圖像的多媒體教材，學習成效優於只使用文字的教材(Mayer, 2009)，因為文字與圖像同時呈現，除了容易建立語文與圖像模型，也容易建立彼此間的聯結。

2. 個人化原則 (Personalization Principle)

設計多媒體教材時，對內容的解說，無論是使用口述文字(旁白)或印刷文字(字幕)，宜盡量使用第一、二人稱的方式，並配合使用直接感受的語句，將使學習者產生與教材進行「對話」的感覺，因而提升學習動機。

3. 聲音原則 (Voice Principle)

多媒體教學中的口述文字(旁白)，應以真實、友善的「人聲」取代機器發聲。

4. 圖像原則 (Image Principle)

在降低外在認知處理的五個設計原則中的「一致性原則」，指出多媒體的教材設計應排除與教學目標無關的文字、圖像、聲音等元素，所以不宜將教學者的影像置入教材中，導致增加額外的外在認知處理，形成注意力的分散。

2-2-4 多媒體學習理論對本研究之影響

本研究在教材設計上，使用多媒體學習理論的教學設計「原則」如下：

1. 一致性原則、圖像原則：與教學內容無關的元素、圖像皆去除。
2. 信號原則：使用語言、視覺等信號，導引學生的注意力於關鍵訊息。
3. 空間接近與時間接近原則：減少視覺搜尋的負擔；降低外在認知負荷。
4. 重複原則、形式原則：使用「動畫加旁白」的視覺、聽覺雙通道形式。
5. 預先訓練原則、分割原則：在教學之前，進行先備知識的複習；教學中，將教材中的重要概念切割出來。

2-3 注意力與視覺搜尋

人類的認知資源有限，無法處理日常生活環境中的所有資訊，此時注意力就像是一個窗口，在過多的資訊中具有篩選的作用，僅讓部分資訊接受處理。視覺注意力、聽覺注意力是影響人類學習成效的兩個關鍵，其中又以視覺注意力最為重要。從演化的觀點來看，人類為了在大自然中生存，須時時注意觀察環境中的任何風吹草動，因此視覺注意力的重要性不言可喻。視覺是我們最具優勢的感官，花掉大腦一半的資源 (Medina、洪蘭 (譯), 2009)，以下將分別討論視覺搜尋與注意力。

2-3-1 注意力

有關注意力的理論有「過濾」(Broadbent, 1958) 和「選擇」兩種。過濾的理論是認為人的注意力容量是有限的，就像過濾器一樣，限制了一次可辨認的訊息量，是發生在

能辨認訊息階段之前。選擇的理論是認為人的注意力容量是無限的，所有的訊息都能被辨認，但只有重要的訊息才被注意作進一步處理，進入下一階段的記憶。「過濾模式」中，「注意」被當成過濾器，只讓有限的訊息通過，是發生於知覺分析之前，不受注意的訊息則完全被「過濾器」排除在外，沒有處理。「選擇模式」認為「注意」是發生於對兩組以上的訊息分析之後，然後選擇重要的訊息做進一步處理。「注意」相當於訊息的選擇階段，是發生於知覺分析之後。也就是訊息都被聽到，只是不重要的訊息很快就被忘掉。

當我們從感官獲取外界大量的訊息並決定如何反應時，注意力就是一個重要的選擇機制。因為心理資源有限，不可能同時對各種刺激做出反應，所以只能對少數刺激做較精細的處理，其他未被選擇的刺激可能僅作粗略的處理，或甚至不處理（葉素玲, 1999），稱為選擇性注意力。主要理論有早期理論、晚期理論與濾器減弱理論。說明如下：

1. 早期理論(Early-selection) (過濾理論)

Broadbent (1958) 認為人的注意力容量是有限的，因此就像過濾器一樣，限制了一次可辨認的訊息量，是發生在能辨認訊息階段之前。「過濾模式」中，「注意」被當成過濾器，只讓有限的訊息通過，是發生於知覺分析之前，不受注意的訊息則完全被「過濾器」排除在外，沒有處理，如圖 5。

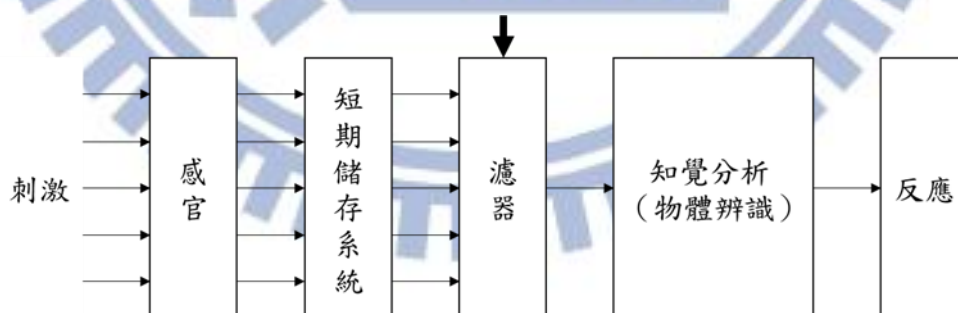


圖 5 早期選擇理論處理流程

資料來源：修改自葉素玲(1999)。視覺空間注意力，載於李江山（主編），**視覺與認知-視覺知覺與視覺運動系統**（頁 296）。台北市：遠流。(粗箭頭表注意力作用的階段)

2. 晚期理論(Late-selection) (選擇理論)

Deutsch, J. A.與 Deutsch, D. (1963) 認為人的注意力容量是無限的，所有的訊息都能被辨認，但只有重要的訊息才被注意作進一步處理，進入下一階段的記憶。「選擇模式」認為「注意」是發生在對兩組以上的訊息分析之後，然後選擇重要的訊息做進一步處理。「注意」相當於訊息的選擇階段，是發生於知覺分析之後。也就是訊息都被聽到，只是不重要的訊息很快就被忘掉，如圖 6。

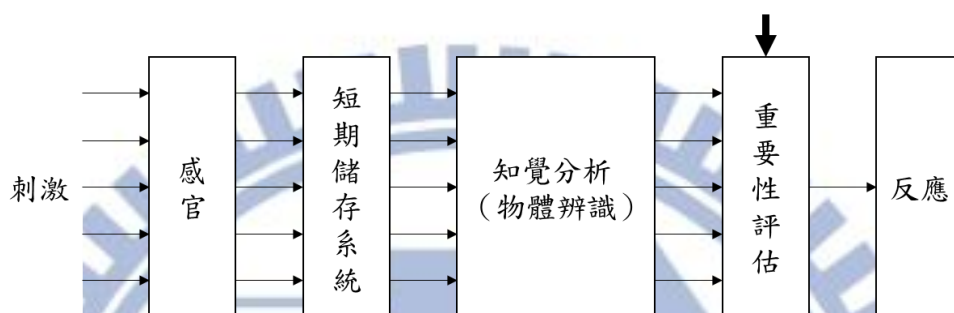


圖 6 晚期選擇理論處理流程

資料來源：修改自葉素玲(1999)。視覺空間注意力，載於李江山（主編），視覺與認知-視覺知覺與視覺運動系統（頁 296）。台北市：遠流。

（粗箭頭表注意力作用的階段）

3. 濾器減弱理論

Treisman (1964) 提出濾器減弱理論 (Filter-attention Theory) 指出：不受注意的訊息不會完全被「過濾器」排除在外而不處理，只是將其刺激強度減弱。「減弱模式」認為過濾器並不完全將不受注意的訊息排除在外，而是將其減弱。同時出現的刺激都有其強度，內在處理的管道亦具有不同的敏感度，當刺激強度超過最低門檻值才能被偵測出來。通常注意力所在的管道都有較高的敏感度 (葉素玲, 1999)。此外標準值 (Criterion) 也會影響偵測，如與個人有關的訊息之標準值同常較低，較易被偵測。

濾器減弱理論分成兩階段，相當於早期理論與晚期理論的綜合。第一階段為刺激通過後的強度，第二階段選出達到反應標準，當通過兩階段的刺激才能引起反應。

2-3-2 視覺搜尋

在設計多媒體教材時，我們常常會思考一個問題：到底如何同時把大量的資訊呈現，

又可以使學習者一眼就能清楚看出我們想要強調的教材重點呢？人類的視覺搜尋其實是一個很有趣的系統，當同時把大量的資訊呈現在眼前的時候，有時候可以很容易的一下子就找出不同的資訊，有時又會覺得很困難，需要多花一些時間才能找出不同的資訊，是什麼原因造成這兩種現象？如圖 7 中，請找出左右兩圖中的藍色橫線。

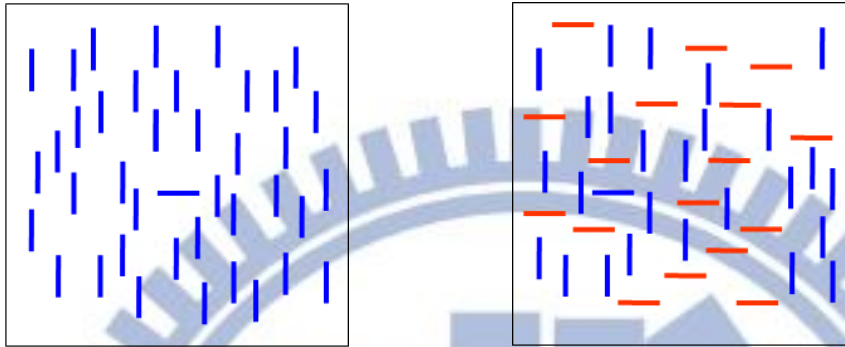


圖 7 干擾物對搜尋作業的影響

引自 <http://tw.myblog.yahoo.com/jw!gIKI5zacFRuQc0j1HwUoT2B0/article?mid=686> 查詢日期 2013.05.05

當一個影像刺激在被我們的視覺系統辨識時，有一些影像的屬性很容易就可以被大腦處理，這些基本特徵（Basic Feature）在視覺神經的前端就會被辨識。因此在設計多媒體教材時，如果能夠善用這些基本特徵，就可提高學習成效。常見的基本特徵有四項：顏色、線段方向、大小、運動。

在關於視覺搜尋的實驗中，所有的視覺元素稱作刺激總量，大部分的元素，稱為干擾物，主要標的元素（如上圖中的藍色橫線）稱為目標物。實驗的目的，就是在干擾物增加的情況下，檢測受試者會不會花費更多時間才能找到目標物。Treisman & Gelade（1980）將視覺搜尋作業分成下列兩種：

1. 特徵搜尋作業（Feature Search Task）

當干擾物與目標物的差異只有一種基本特徵時，受試者很快就可搜尋到目標物。即在此情形下，干擾物數量的多寡對搜尋時間的影響不大，此種搜尋又稱為平行搜尋（parallel search）。如圖 8，找出左右兩圖中的紅色「O」，雖然右圖干擾物多於左圖，但兩圖搜尋時間應該相去不遠，因為圖中的目標物（紅色 O）與其他的干擾物有非常

顯著的不同特徵(紅色)，所以可以很快從一堆干擾物 (Distractor) 中分辨出目標，這樣稱為 Pop-Out (Treisman, 1980)。

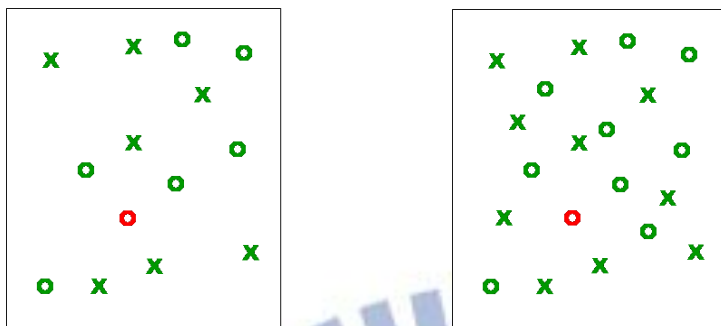


圖 8 平行搜尋

資料來源：陳依萍(2012)。運用狀態轉換圖於高中數學轉移矩陣教學之研究。頁 11。

2. 結合特徵搜尋作業 (Conjunction Search Task)

當干擾物與目標物的差異是由兩個以上基本特徵組成，受試者因為需要結合多種特徵才能搜尋到目標物，在此情形下，干擾物數量的多寡對搜尋時間的影響就很大，尤其是當干擾物與目標物的特徵越接近、越難分辨時，就必須花費更多的心力一個一個依序尋找，此種搜尋又稱為序列搜尋 (serial search)。如圖 9，找出左右兩圖中的紅色「O」，因為目標物所具備的兩種特徵「紅色」及形狀「O」，在干擾物中都有出現，所以必須同時結合這兩種特徵，才能找出目標物，因而需要較多時間。其中右圖干擾物又比左圖多，所以耗費時間也比左圖多。

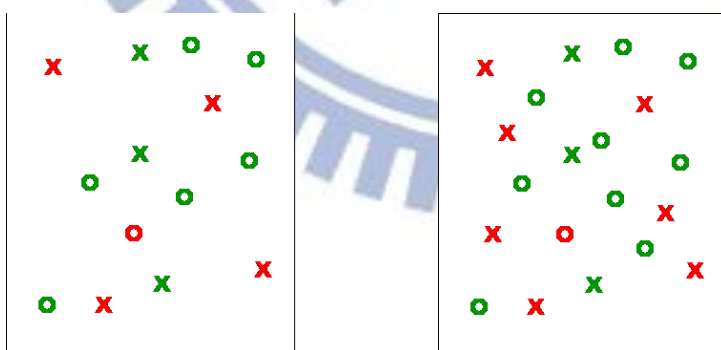


圖 9 序列搜尋

資料來源：陳依萍(2012)。運用狀態轉換圖於高中數學轉移矩陣教學之研究。頁 12。

兩種搜尋模式下，刺激量與搜尋時間的關係如圖 10 所示，其中 B 為干擾物，O 與 P 分別為兩種搜尋模式的目標物，關係線斜率越小代表越不需要注意力的作用，反之，斜率越大代表越需要注意力作用以進行搜尋作業。Treisman (1980) 認為直線斜率小於 10，屬於較有效率的平行搜尋；斜率 10 以上，則屬於較無效率的序列搜尋。

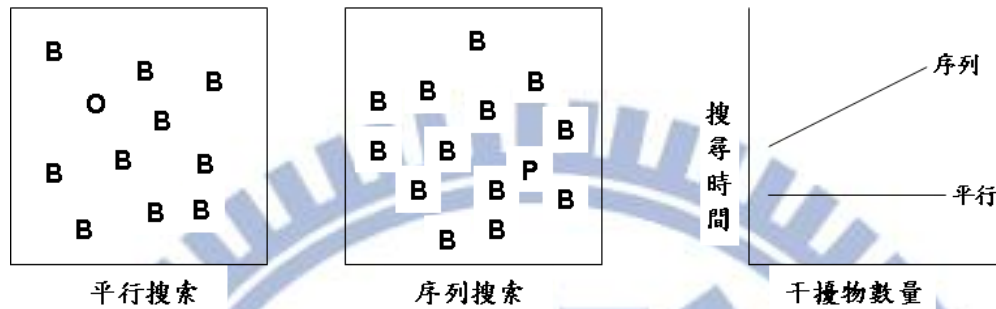


圖 10 平行搜尋和序列搜尋

資料來源：修改自「視覺心理學」，陳一平著，2011，199 頁

2-3-3 特徵整合理論

Anne Treisman 於 1980 年代提出特徵整合理論 (Feature Integration Theory, FIT)，認為知覺系統在處理外界物體時，在前注意力階段 (preattentive stage)，物體的所有特徵 (例如 顏色、方向、位置等) 會被快速且同時地處理。這些被分散處理的物體特徵會藉由在空間中移動的集中注意力 (focused attention) 而組合 (binding) 起來，形成一個完整的物體，傳送到更高階的物體處理階段，形成我們所意識到的物體，如圖 11。在此過程中，注意力扮演膠水的角色，把此事物在早期階段被分開的所有基本特徵黏合起來。若缺乏相關知識或注意力不集中，則可能會將一些基本特徵作隨機的不正確組合，稱為「錯覺式組合」 (illusory conjunction) (葉素玲，1999)。

Treisman 利用視覺搜尋典範來支持以上的特徵整合理論。當我們在一群物體中找尋特定目標時，如果目標物和其他干擾物，只有一個特徵的差異，例如只有顏色的差異，即目標物為綠色，其他干擾物為紅色。特徵整合理論預測目標物會從一群物體中躍然而出 (pop out)，不管其他干擾物的數量有多少。這種視覺搜尋稱作平行搜尋 (parallel search)。然而當目標物和其他干擾物有兩個特徵以上的差異，例如顏色和形狀，假設目標物為「綠色的長形」，而其他干擾物為「綠色方形」和「紅色長形」。特徵整合理論預

測當目標物和其他干擾物有兩個特徵以上的差異時，我們需要集中注意力以整合兩種或以上的特徵，於是搜尋目標的時間會隨著干擾物的數量增多而增加，這種視覺搜尋稱作序列搜尋(serial search)。

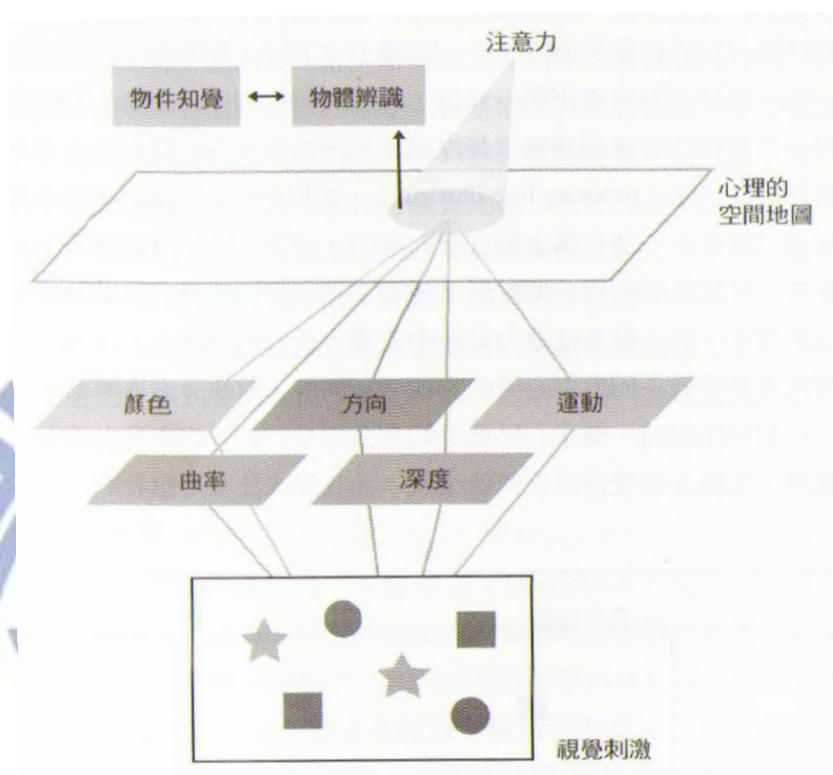


圖 11 特徵整合理論

資料來源：”視覺心理學”，陳一平著，2011，211 頁

2-3-4 注意力與視覺搜尋對本研究之影響

兩圓公切線的幾何尺規作圖中，包含大量的程序性知識、幾何知識，因此要讓學生在含有大量複雜的線段、弧線的作圖痕跡中，能跟隨教師的教學節奏、能找到線索，能立即發現教材重點，是一個很重要的課題。因此教材設計應運用指示標記、色彩、音量大小等方式吸引學生注意力；呈現教材時，應運用平行搜尋的原則，每次只凸顯一個基本特徵(重點)，使學生很快就可搜尋到教學重點，而非以序列搜尋的方式增加認知負荷

2-4 尺規作圖

2-4-1 九年一貫課程綱要中的尺規作圖

在教育部的課程綱要中，尺規作圖為八年級下學期的課程，97 課綱中關於尺規作圖的能力指標為：S-4-10 能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。

由於九年一貫課程以及 90 學年度開始的升學考試變革(聯考->基測),使得中學生在數學的學習上,投入相當的精力在運算與解題上,而少操作及訓練組織能力,造成學生對於幾何尺規作圖、幾何證明多有畏懼,一遇到此類題目,常茫然不知所措,尤其是尺規作圖。現將與本實驗研究有關的課程綱要(教育部,2009a)指標的部分說明如下:

1. 「8-s-11能認識尺規作圖並能做基本的尺規作圖」,列於八年級幾何部分,目的為九年級幾何:「9-s-08 能理解多邊形外心的意義和相關性質、9-s-09能理解多邊形內心的意義和相關性質、9-s-10能理解三角形重心的意義和相關性質」預作準備。
 - (1)能以尺規作圖複製已知的線段、圓、角、三角形。
 - (2)能以尺規作圖平分一已知線段。
 - (3)能以尺規作圖作一已知線段之中垂線。
 - (4)能以尺規作圖作一已知角的角平分線。
 - (5)過一直線外的已知點,能以尺規作圖作此直線之平行線與垂直線。
 - (6)過一直線上的已知點,能以尺規作圖作此直線之垂直線。
2. 「9-s-07 能理解直線與圓及兩圓的關係」,其中部分說明如下:
 - (1)理解切線性質:圓心與切點的連線必垂直此切線。反之,若一直線過圓上一點且垂直於過此點之半徑,則此直線為該圓之切線。
 - (2)理解兩圓的位置關係(外離、相切、交於兩點、內離或重合)及內、外公切線。
 - (3)知道兩圓的位置與半徑,能求公切線段長。
3. 「9-s-06 能理解圓的幾何性質」的說明有:
 - (1)能理解圓心角的度數等於所對弧的度數。
 - (2)能理解同一弧所對的圓周角是所對圓心角的一半,能理解圓內接三角形的一邊為直徑時,此三角形必為直角三角形;反之亦然。

本教學實驗即希望學生在學會這三項指標所要求的能力後，包括圓心與切點的連線必垂直此切線、能求公切線段長與圓內接三角形的一邊為直徑時，此三角形必為直角三角形，能運用這些先備知識學習「以直角三角形作圖為模組，用於兩圓公切線尺規作圖」，取代以往「只知其然而不知其所以然」的作圖方式，也就是以記憶的方式學習程序性的尺規作圖。

2-4-2 尺規作圖相關研究

劉繕榜(2000)國中數學資優生尺規作圖表現之探討，以 21 位國中數學資優生為研究對象，探討（一）解作圖題時會產生什麼錯誤類型；（二）先前解過相關問題對解作圖題有何影響；（三）解題時的模式以及輔助問題對學生解作圖題的助益；（四）作圖能力與其在解幾何證明題表現之間的相關性；（五）在作圖後的證明中，所發生的錯誤類型為何觀察其作圖表現，並探討作圖能力與幾何證明之間的關連性。研究結果發現，部分資優生會犯兩種類型錯誤：基本概念的錯誤與圖形的錯誤引導。其中圖形的錯誤引導又可分為「草圖的錯誤引導」、「給定圖形的錯誤引導」等。作圖問題上的表現、作圖後的證明以及解純證明題之表現統計上的顯著相關。此研究在教學方面提出的建議：教師在教導尺規作圖單元時，可引導學生多利用畫草圖或動手操作的方式進行解題，並加強學生的基本幾何知識以便能應用在解作圖題上，譬如圓與切線性質等。

葉福進(2005)的研究以探討國三學生進行構圖活動時的表現情形為目的，利用一般構圖、尺規構圖、GSP 軟體構圖等三種不同構圖工具進行構圖，其中在尺規作圖部分，有些學生忘記作法，則以視覺估測（用「準」的、「喬」的）方式或利用工具上的特性來構圖，如以視覺估測來畫直角、用尺的上、下邊緣作平行線，教學方式屬一般步驟化教學，即先教作圖步驟再說明或證明緣由。因為尺規作圖需要幾何性質的使用，所以學生在尺規作圖的學習上常遇到不少困難，本研究希望設計創新的教學法，利用直觀的摺紙經驗幫助學生學習尺規作圖。因此本研究有二個研究目的，第一為了解國三學生尺規作圖學習表現，第二為探討國三低成就水準學生透過摺紙活動進行尺規作圖補救教學之成效。本研究的主要研究結果如下：

一、關於國三學生的尺規作圖學習表現：

1. 學生不清楚尺規作圖的工具使用規定。

2. 學生不熟練基本尺規作圖步驟，不清楚該等作圖步驟與幾何性質之間的關係。
3. 學生在應用尺規作圖解決作圖問題方面有困難。

二、關於透過摺紙學習尺規作圖的成效：

1. 摺紙能幫助學生熟練基本尺規作圖步驟，理解作圖步驟所應用的對稱性質。
2. 摺紙能幫助學生分析作圖問題，檢驗想法的正確性，找出正確的作圖步驟。
3. 摺紙能提升學生尺規作圖學習興趣。

根據研究結果，本研究建議教師教學時應強調尺規作圖的工具使用方式，可讓學生先利用摺紙解決作圖問題，再將摺紙動作一一轉換成尺規作圖作法

許湄(2008)本研究的目的是在於將探究式教學融入到國中幾何尺規作圖的單元，並探討這樣的教學方式對學生的幾何學習及推理能力的影響。研究結果發現，探究式教學融入幾何尺規作圖的單元的可行方式為：(一) 歸納法是引起學生進行數學探究活動的好方法；(二)探究的課室是由師生與同儕間的對話不斷累積而成的；(三)當探究議題過於困難時，教師必須為學生搭起學習的鷹架，探究活動才能順利進行；(四)探究時所使用的工具會影響學生的發現；(五)當學生在探究教學的課室中學習興趣被引燃，則能於課後進行自主的延伸研。探究活動對學生幾何學習與推理能力的影響如下：(一) 探究教學法融入幾何教學能提供學生許多幾何操弄的機會，對學生幾何學習有所助益；(二) 加強學生對幾何圖形的操弄(如輔助線的使用)能對學生論證的能力有所助益；(三) 探究教學法的進行方式能提供學生許多推理的練習，對學生推理能力的培養有所助益。

張祐誠(2008)以激發式動態方式設計教材教法，以尺規作圖為主體，檢視「以文導圖模式」和「觸發模式」下的成就水準是否會有差異，教學方式屬一般步驟化教學，即先教作圖步驟再說明或證明緣由。採準實驗設計，以兩個七年級的班級學生進行教學實驗，實驗結果顯示兩種教學模式在成就水準沒有顯著差異。低學業成就組中，「觸發模式」的成績高於「以文導圖模式」；在高學業成就組中，「以文導圖模式」的成績高於「觸發模式」

曾妙玲(2008)採準實驗研究法，以國中二年級下學期數學教材中「尺規作圖—作等線段、等角度、垂直平分線、角平分線」為例，比較「激發式動態呈現教學設計—觸發

模式」有無字幕的教材設計之學生學習成效，教學方式屬一般步驟化教學，即先教作圖步驟再說明或證明緣由。R.E.Mayer(2005)在多媒體教材設計的「重複原則(Redundancy Principle)」中提出，「具有動畫與口述文字」的教材比「具有動畫、口述文字與字幕」的教材有更好的學習效果。然而，本研究發現有字幕的教材，在「尺規作圖」這個單元的「作圖」學習成效上，對於高學業成就者的影響較低學業成就者大。而且，在使用文字敘述「作圖步驟」的學習成效上，對高學業成就者的影響也較低學業成就者顯著。另外，在有字幕的教學設計下，學生的「作圖」與「作圖步驟」學習成效呈現高度正相關。推測原因為作圖步驟是一個複雜的程序性知識，對學習者造成很大的認知負荷，而有字幕的教學對高成就水準學生就像是「使用說明書」，可降低認知負荷。

陳宥良(2009)指出因為一般學生懼怕學習幾何，更害怕尺規作圖，所以提出六個基本摺紙動作，以教導學生學習尺規作圖，並介紹摺紙動作如何轉換成為尺規作圖動作，藉此解釋透過摺紙學習尺規作圖的可行性。六個摺紙動作分別為：「摺出通過兩點的直線」、「線上一點作垂線」、「線外一點作垂線」、「一點到一線，摺線過一點」、「兩點重合」、「兩線重合」(譚克平與陳宥良，2009)。研究結果發現摺紙有助於學生瞭解基本尺規作圖步驟、分析作圖問題、使用正確作圖步驟，並且能提升學習興趣。

陳聖別(2011)亦利用摺紙活動進行尺規作圖教學研究，研究設計採質性研究。研究的目的有三，第一，藉由分析國中教材中的尺規作圖，探討陳宥良(2008)提出的六個摺紙動作是否足夠應付國中教材；第二，編製一套透過摺紙學習尺規作圖的教材，並探討此套教材在認知面向對學生的幫助。第三，探討此課程在情意面向對學生的幫助。研究分為兩個部分：第一部分是藉由分析現行國中教科書中所有的尺規作圖題，以發展出能應用於所有教科書內尺規作圖的摺紙動作。第二部分是根據第一部分的結果，編製一套透過摺紙學習尺規作圖的教材，並採前實驗研究法進行教學實驗。研究結果發現摺紙能幫助學生理解並記憶基本尺規作圖的繪圖步驟、強化學生對稱的概念等。此外研究也發現「過線外一點作平行線」、「等線段作圖」、「等角作圖」對學生而言有相當程度的困難。

從上述各種研究中可以發現，為了降低尺規作圖對學習者所造成的認知負荷，使用

了各種不同的教學方法、不同的工具，以吸引學生的學習興趣、降低學生認知負荷。但大體而言，教學的主要方法大抵皆是先教作圖步驟，學生跟著老師一步一步作，之後老師再說明理由或證明原因，也就是老師希望用較簡單的方式幫助學生能輕易的記憶作圖的程序，就學習效果而言，當下雖大部分都有顯著差異，但對於學習延續性的效果，則未有特別差異，因為記憶複雜的程序性步驟，很容易隨著時間而遺忘。所以本研究之實驗組教材係以利用「圓作直角三角形的模組化」教學，分析兩圓公切線與直角三角形的關係，學生在具備基本尺規作圖能力下，只要能熟悉利用此模組的關鍵步驟，即可作出兩圓內、外公切線。期望學生在將部分關鍵作圖步驟模組化後，能減少記憶複雜的步驟，而降低內在認知負荷，產生較佳的學習延續性。



第三章 研究方法

本章共分成五節，分別為 3-1 研究流程、3-2 研究設計、3-3 研究對象、3-4 研究工具及 3-5 資料分析。

3-1 研究流程

本實驗研究流程，包含三個階段，分別為準備階段、實驗階段及分析階段，各階段內容如圖 12

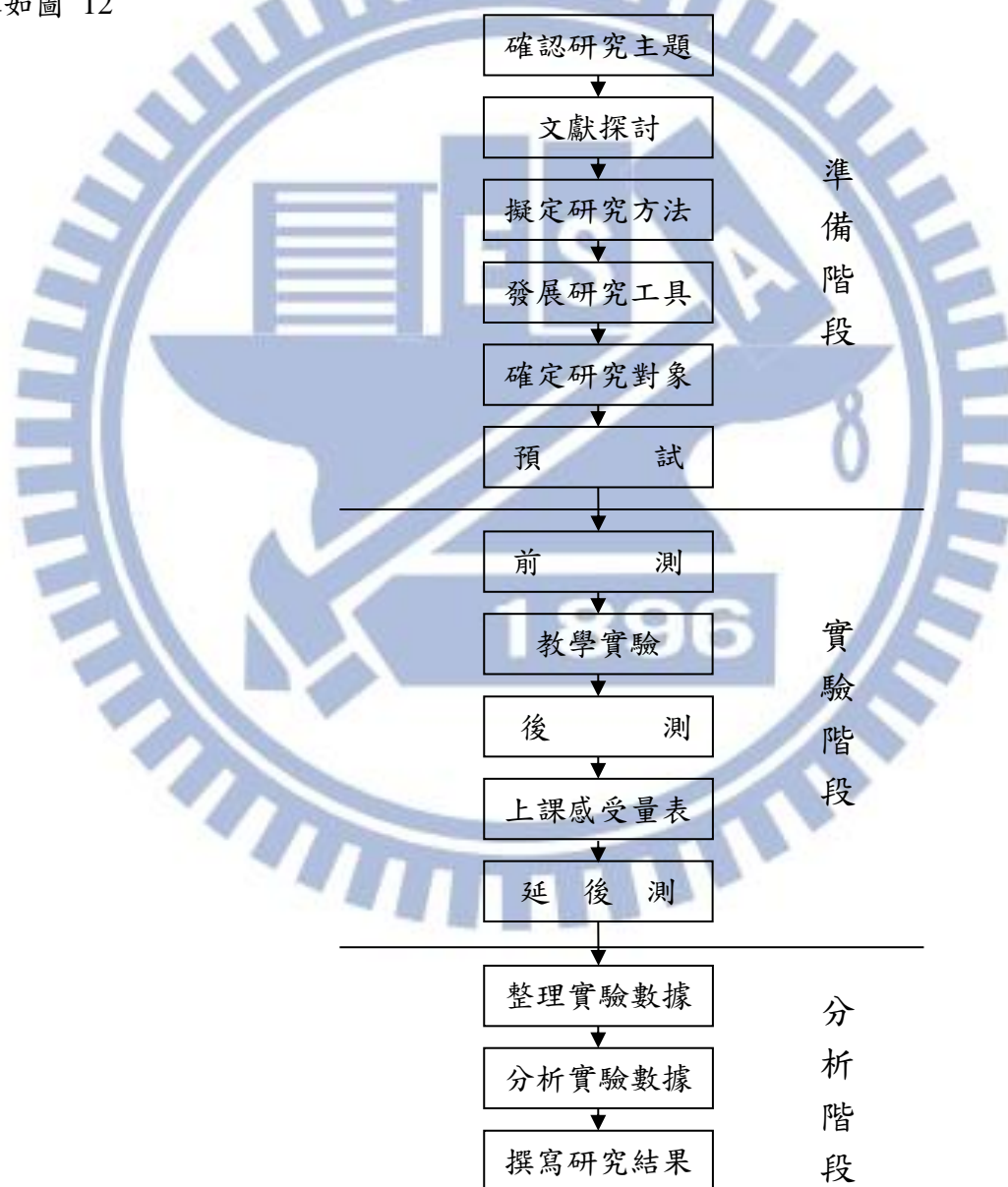


圖 12 研究流程

3-1-1 準備階段

1. 確認研究主題

在皆以視覺引導並利用多媒體教學的情形下，探討有無運用認知負荷理論中之模組化概念-直角三角形於國中兩圓公切線尺規作圖的教學，對學生的後測、延後測、認知負荷是否有顯著影響，並了解是否產生專業知識反轉效應。

2. 文獻探討

3. 擬定研究方法：本研究採準實驗研究法。

4. 發展研究工具

- (1) 編製預試測驗卷，並根據預試結果，編製修正前測試卷、後測試卷、延後測試卷及上課感受量表。
- (2) 製作及修正實驗教材：利用軟體Power Point 2003 外掛AMA增益集，並根據多媒體學習理論、視覺引導理論、認知負荷理論，設計實驗教材。

5. 確定研究對象

以新竹縣某國中九年級的四個常態編班學生為研究對象，每兩班為一組，分成實驗組及對照組。並依據前測分數及前一個學期的三次數學科段考平均成績，利用 SPSS 18.0 獨立樣本 t 檢定，確認兩組學生成績無顯著差異，立足點一致。

6. 預試

以與研究對象同校、同年級的兩個九年級班級共 57 名學生進行預試，依據預試結果做信度、效度、難度、鑑別度分析，以作為修正試卷題目及教材內容之根據。

3-1-2 實驗階段

1. 前測：對實驗組、對照組進行前測，以瞭解學生的先備知識及起點行為。
2. 教學實驗：以研究者所自製設計之實驗教材於課堂上進行授課。
3. 上課感受量表：於教學實驗後，請受試學生依據自身上課所感受到的情形填寫

量表，以瞭解受試學生的認知負荷程度。

4. 後測：用以瞭解教學實驗對研究對象的學習成效之影響。
5. 延後測：於實驗教學結束後一個月，實施延後測，測驗試卷內容與後測試卷相同，用以瞭解研究對象之學習延續情形。

3-1-3 分析階段

整理收集到的實驗資料及數據後，進行分析，以驗證實驗假設及撰寫研究結果。

3-2 研究設計

3-2-1 研究方法

本實驗研究對象為學生，因為無法或不能隨機分派受試者，故採準實驗研究法，教材設計符合多媒體教材設計原則（Mayer,2009）、視覺引導理論。本實驗是以課堂教學的方式進行，主要是探討在皆以視覺引導設計教材的多媒體教學下，有無運用「以直角三角形為模組對兩圓公切線尺規作圖教學」，對學生的後測、延後測、認知負荷是否有所影響，並進一步探討此教學方式對高成就水準學生是否產生專業知識反轉效應。

實驗主題公切線尺規作圖，係屬延伸教材，為求兩圓公切線段長度的延伸知識，一般補習班並無教授，故可排除學生有無補習的因素干擾，此外其他可能會干擾實驗的因素，例如：教學內容、教學時間、測驗時間、測驗問題及施測班級完整性等，亦皆加以考慮，盡量控制為相同，不使其產生差異而影響實驗結果。此外獨立挑選一間專科教室作為授課教室，故教室情境、設備皆相同。四個施測班級皆非研究者原任教班級，立足點亦一致。

為避免原施測班級教學進度受影響，本研究是利用九年級上學期課程結束後的寒假課業輔導進行實驗。本研究因採便利樣本，故研究結果無法類推到別校。

3-2-2 研究變項與假設

1. 研究變項

(1) 控制變項

- ①授課教師：實驗組、對照組四個班級授課教師，皆為研究者本人，且四個班級原數學教師皆另有他人。
- ②授課環境：四個班級學生皆統一至專科教室上課，故教室內之燈光、佈置、情境、單槍投影機、布幕皆相同。
- ③授課內容：實驗組與對照組所使用的教材主題、內容、例題、授課時間皆相同。
- ④測驗題目與問卷：實驗組與對照組在教學實驗前所使用前測試卷，教學實驗後所使用的階段成就測驗、延後測試卷以及上課感受量表問卷的題目皆相同，施測時間及評分標準亦相同。

(2) 自變項：包括教材設計方式及學生成就水準兩項，如表 1。

① 教材設計

實驗組：以直角三角形為模組，運於兩圓內外公切線尺規作圖的教學。

對照組：運用一般步驟化教學於兩圓內外公切線尺規作圖教學。

② 成就水準

依八年級下學期三次數學段考成績及前測成績，將學生分成兩種成就水準，即高成就水準(前 50%)、低成就水準(後 50%)。

表 1
實驗組與對照組比較表

	實驗組	對照組
高成就水準	運用模組化概念	運用一般教學法
低成就水準	~直角三角形	~先教畫法再說明

(3) 依變項

- ① 後測
- ② 延後測
- ③ 認知負荷

2. 研究假設

假設 1：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測表現有顯著交互作用

假設 2：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測表現有顯著交互作用

假設 3：模組化的教材設計與成就水準，對學生的認知負荷感受有顯著交互作用

假設 4：模組化的教材設計，對高成就水準學生不會產生專業知識反轉效應。

3-2-3 實驗流程

本研究之實驗步驟、內容與實驗時間分配如表 2

表 2
教學實驗流程表

步 驟	內 容	時 間
一	前測	20 分鐘
二	課程實驗教學	40 分鐘
三	上課感受量表問卷	5 分鐘
四	後測	20 分鐘
五	延後測（一個月後）	20 分鐘

3-3 研究對象

本研究採準實驗研究法，研究對象依便利抽樣方式取樣，自新竹縣某國中九年級之十三個班級中抽取四個班。該校學生入學時，以常態編班方式編班，為求立足點一致，將體育班(912)、技藝專班(913)排除在外。

該校數學科定期評量題目由校內老師統一命題，未分不同試卷，具有一致的公平性。參考前一個學期(八年級下學期)三次定期評量的平均成績，於班級 901~911 中選取 901、903、908、910 共計四個班為實驗對象，並以 901、910 為實驗組，903、908 為對照組，並將前 50% 設定為高成就水準，後 50% 設定為低成就水準，人數分配如表 3。

表 3
受試學生高、低成就水準人數分配表

組 別	班 級	高成就	低成就	總計
實驗組	901、910	30	30	60
對照組	903、908	30	30	60
總 計		60	60	120

利用獨立樣本 t 檢定來考驗兩組上學期數學科定期評量平均成績，兩樣本的平均數各為 67.02 和 69.84，變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 0.083, p = 0.774$)，代表實驗組與對照組成績的離散情形無明顯差別。由假設變異數相等，其 t 值等於 -0.671 、 $df = 118, p = .504 > .05$ ，考驗結果未達顯著，因此兩組數學程度可視為相同，檢定資料如表 4。

表 4
上學期數學科定期評量平均成績獨立樣本 t 檢定摘要表

變項	實驗組 (n = 60)		對照組 (n = 60)		$t(118)$	p
	M	SD	M	SD		
定期評量平均	67.02	20.90	69.84	21.19	-0.671	0.504

以同樣方式，利用獨立樣本 t 檢定來考驗兩組學生前測成績，前測總分為 32 分。兩樣本的平均數各為 25.98 和 25.93，變異數同質性 Levene 檢定未達顯著 ($F = 0.121, p = 0.729$)，代表實驗組與對照組成績的離散情形無明顯差別。由假設變異數相等，其 t 值等於 0.042、 $df = 118$ 、 $p = .966 > .05$ ，呈現考驗結果未達顯著，因此兩組數學程度可視為相同，檢定資料如表 5。

表 5

前測平均成績 獨立樣本 t 檢定摘要表

變項	實驗組 (n = 60)		對照組 (n = 60)		$t(118)$	p
	M	SD	M	SD		
前測平均	25.98	6.47	25.93	6.50	0.042	0.966

綜合表 4 段考成績與表 5 前測成績之獨立樣本 t 檢定分析，均未達顯著差異，因此兩組學生數學程度可視為一致。

3-4 研究工具


本研究所使用之研究工具共有五項：實驗教材、前測試卷、後測試卷、延後測試卷及上課感受量表，分述如下：

3-4-1 實驗教材

本實驗研究以兩圓內外公切線尺規作圖為主題，兩組教材皆為自製。教材製作以 Power Point 2003 外掛增益集 AMA (陳明璋，2008) 為製作軟體，無論是課堂中的講解、展演或教材設計，兩組教材教法皆融入了多媒體學習理論設計原則、視覺搜尋，並利用 Power Point 的特色，採 SBS (Step By Step 步驟化) 的方式製作教材，以方便學生可隨時前後參照，仔細體察不同處，盡量減少使用動畫。實驗組、對照組兩組教材不同之處在於實驗組運用認知負荷理論中之模組化概念(以直徑為斜邊之圓內接三角形為直角三角形)，對照組則採一般教學模式，即先教作圖步驟，再說明或證明所作圖形即為所求。因公切線作圖非課綱內之教材，所以教科書、書商製作之教學光碟、補習班皆未有相關之教材教法，為求謹慎，因此在製作此教材時，即不斷與指導教授及數位具有十多年數學教學經驗的老師討論後修訂而成。

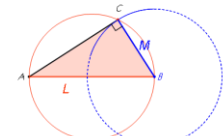
因實驗組教材是「以直角三角形的尺規作圖為模組」，期望學生能熟悉此模組並將其運用於兩圓公切線作圖，所以兩組教材一開始便都教授「利用圓作出直角三角形的尺規作圖」，如圖 13 直角三角形尺規作圖 (左圖：實驗組 右圖：對照組)，只是在後續的公切線作圖時，對照組並不強調直角三角形與切線的關係，而是於作圖教學完畢時，利用此觀念來說明所作圖形即為切線。但實驗組於一開始，即指出直角三角形與切線的關係，讓學生明瞭切線作圖即是直角三角形作圖。

二、直角三角形 作圖(RHS)


已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一股長為 M (RHS)

作法：



二、直角三角形 作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一股長為 M (RHS)

作法：

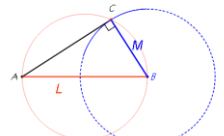
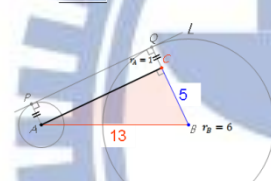


圖 13 直角三角形尺規作圖 (左圖：實驗組 右圖：對照組)

本教材是以求出兩圓內外公切線段長度為先備知識延伸而來，因此兩組教材皆有複習課本內如何求外公切線段長度、內公切線段長度的例題，如圖 14、圖 15。

四、外公切線段 長度

已知： L 為外公切線， P 、 Q 為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
則 $PQ =$ 12



四、外公切線段 長度

已知： L 為外公切線， P 、 Q 為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
則 $PQ =$ 12

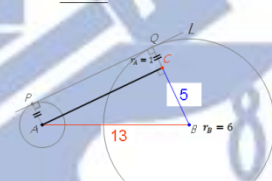
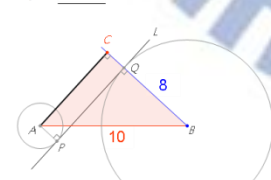


圖 14 計算外公切線段長度 (左圖：實驗組 右圖：對照組)

六、內公切線段 長度

已知： L 為內公切線， P 、 Q 為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
則 $PQ =$ 6



六、內公切線段 長度

已知： L 為內公切線， P 、 Q 為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
則 $PQ =$ 6

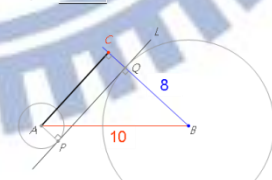


圖 15 計算內公切線段長度 (左圖：實驗組 右圖：對照組)

如前所述，實驗組教材運用模組化概念，故於作圖前先分析直角三角形與切線關係，讓學生明白只要能畫出已知斜邊及一股長之直角三角形，即能作出所求之公切線，如圖 16。詳細完整之教材請見附錄五。

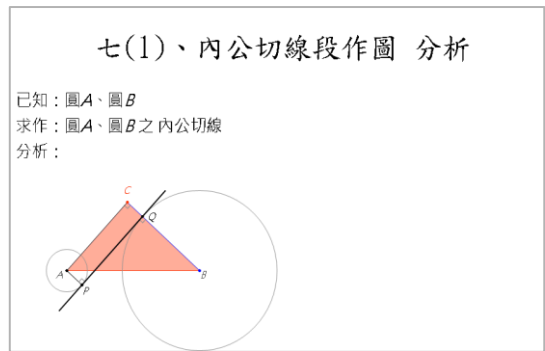
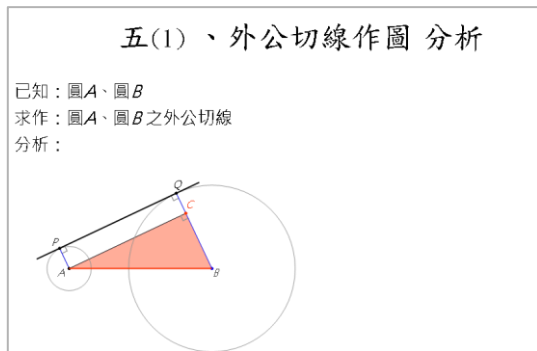


圖 16 實驗組教材：公切線與直角三角形關係之分析

3-4-2 前測試卷

前測試卷有兩個主要目的，其一，可用於再次確認兩組學生之間是否有顯著差異。其二是用來了解學生的起點行為，了解學生是否具備足夠之先備知識、能力，以作為教學實驗設計教材的參考。前測試卷題目共 8 題，每題 4 分，總分 32 分。1~6 題為計算題，7~8 兩題是與公切線作圖有關的先備知識之尺規作圖題。前測試題如附錄一。

因此實驗教材屬於課程內容之延伸教材，補習班不會教授，所以可排除學生有補習或預先學習之因素干擾。但為求慎重，仍於教學實驗前，先請與研究對象同校之兩個班級學生共 57 人進行預試，以了解題目是否適切，再進行前測，之後進行題目的信度、效度、難度、鑑別度之分析，說明如下。

(1) 信度(Reliability)

指的是一份量表測驗所得分數的一致性與穩定性。最常使用的一致性信度指標為 Cronbach (1951) 所發展的 α 係數，可用來檢驗內部是否具有的一致性。其概念類似相關係數，分數介於 0~1 之間，係數愈高代表一致性愈高，當內在信度 α 係數在 0.8 以上，表示有高的信度 (Bryman & Cramer, 1998)。本研究前測試卷作信度分析，得到內部一致性信度 Cronbach α 係數為 .813，表示前測試卷具有良好的信度。

(2) 效度 (Validity)：分內容效度與專家效度，說明如下

①內容效度 (content validity)

是指教學的主題內容能在測驗試題中呈現出來的程度。本研究是採用 Bloom 的雙向細目表來檢核其內容效度，如表 6

表 6

前測試卷之雙向細目表

題 號	1 2 3	4	5 6 7 8
層 次	理解	知識	應用

② 專家效度

預試測驗題目經由 5 位任教年資 8~20 年之國中數學教師(台北市 1 位、新北市 1 位、新竹縣 1 位、新竹市 1 位、台中市 1 位)及指導教授審閱後之建議，修改而成，故具專家效度

(3) 難度與鑑別度

將預試作答成績由高到低排序，取前 50% 為高分組，取後 50% 為低分組，再計算每一題高分組的答對率 P_H 、低分組的答對率 P_L 、難度 P 及鑑別度 D 。

$$P_H \text{ (高分組的答對率)} = \text{高分組答對人數} / \text{高分組總人數}$$

$$P_L \text{ (低分組的答對率)} = \text{低分組答對人數} / \text{低分組總人數}$$

$$P \text{ (難 度)} = \frac{P_H + P_L}{2}$$

$$D \text{ (鑑別度)} = P_H - P_L$$

一份良好的試題，題目難度 P 值最好是介於 .20 至 .80 之間，且平均 P 值約為 .50， P 值越低表示題目越困難， P 值越高則表示題目越簡單。

鑑別度指標 D 值應為正，且愈大愈好，表示分辨高、低分組學生作答情形的功效愈強，最好在 .30 以上(吳明隆、涂金堂，2012)。

本卷 8 個題目之難度值介於 .17 至 .94 之間，難度平均值為 .75，鑑別度平均值為 .30。各題之難度及鑑別度如表 7。

表 7

前測試題難度與鑑別度一覽表

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
P_H	1	1	1	0.97	0.97	0.97	0.97	0.31	0.90
P_L	0.88	0.56	0.84	0.91	0.63	0.50	0.47	0.03	0.60
難度	0.94	0.78	0.92	0.94	0.80	0.73	0.72	0.17	0.75
鑑別度	0.13	0.44	0.16	0.06	0.34	0.47	0.50	0.28	0.30

3-4-3 後測試卷

後測試卷是用於實驗教學結束後立刻進行施測，目的是用來瞭解學生的學習成效。後測試卷共有 10 題，1~8 題與前測試卷相同，每題 4 分；9~10 兩題為本實驗研究主題，因每題皆須具備兩個主要觀念，故每題 9 分，所以總分為 50 分。其中 1、5、6、7、8 題於實驗教材中皆有呈現，因為這 5 題為公切線作圖所需之先備知識，故先於教材中複習。後測試題如附錄二，評分標準如附錄三。

(1) 信度(Reliability)

後測試卷作信度分析，得到內部一致性信度 Cronbach α 係數為 .882，表示後測試卷具有良好的信度。

(2) 效度 (Validity)：分內容效度與專家效度，說明如下

本研究是採用 Bloom 的雙向細目表來檢核其內容效度，如表 8。另敦請指導教授及 5 位任教年資 8~20 年之國中數學教師審閱後之建議，修改而成，故具專家效度。

表 8

後測試卷之雙向細目表

題 號	1 2 3	4	5 6 7 8	9 10
層 次	理解	知 識	應 用	分 析

(3) 難度與鑑別度

本卷 10 個題目之難度值介於 .09 至 .91 之間，難度平均值為 .68，鑑別度平均

值為 .28 略小於 0.3。各題之難度及鑑別度如表 9。

表 9

後測試題難度與鑑別度一覽表

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均
P_H	1	1	1	1	0.97	0.94	0.97	0.91	0.19	0.19	0.82
P_L	0.81	0.75	0.75	0.78	0.63	0.63	0.50	0.50	0.00	0.00	0.53
難度	0.91	0.88	0.88	0.89	0.80	0.78	0.73	0.70	0.09	0.09	0.68
鑑別度	0.19	0.25	0.25	0.22	0.34	0.31	0.47	0.41	0.19	0.19	0.28

3-4-4 延後測試卷

延後測試卷是用於實驗教學結束後一個月進行施測，目的是用來瞭解學生的學習延續情形，試題內容及評分標準皆與後測試卷相同(如附錄二、三)。

3-4-5 上課感受量表

認知負荷是心智努力上的一種感受，是一個抽象的概念，不易藉由標準化和科學化的方式測量而得。學者 Wierwille & Eggemeier(1993) 提出三種心智努力的測量方法：

- 1.主觀測量方法(subjective techniques)：通常以量表測量學習者的心智努力。
- 2.生理測量方法(physiological techniques)：假設認知負荷的改變，會影響生理的變化，所以測量項目包含腦部、眼睛、心跳等生理活動。
- 3.任務和績效測量方法(task- and performance-based techniques)：利用客觀的任務困難度及學習成效來測量學習者的心智努力，如：學習成績、學習速度、學習錯誤率等。

學者 Sweller, et al. (1998)、 Paas, et al. (1994) 的研究顯示主觀測量方法(subjective techniques)具有信度、效度及不受干擾的特性，而生理測量方法雖不易受干擾，但較不具信度、效度。此外測量生理反應變化所需的機器設備，通常需花費高昂的研究經費，而主觀測量方法則不需昂貴的儀器來輔助，顯然較為方便與經濟，所以主觀測量方法是測量認知負荷較可行的方法，故 Paas 提出屬於主觀評價量表的九分制李克特量表。因

此本研究以「你覺得要理解本單元的學習內容，在精神上需耗費多少心力？」的七點量表來檢測認知負荷感受，數字越高表示認知負荷越高。

3-5 資料分析

本研究採量化分析，以 PASW 18.0 作為分析的工具，分析的資料有：受試學生前一個學期三次數學科定期評量平均成績、前測成績、後測成績及延後測成績，作為接受或拒絕虛無假設標準的顯著水準 α 皆設為 .05，分別說明如下：

- 1、以獨立樣本 t 檢定檢驗前一個學期三次數學科定期評量平均成績及前測成績，確認實驗組與對照組兩組受試學生程度是否相同。
- 2、以二因子變異數分析檢驗不同教材設計與成就水準對於兩組受試學生的後測、延後測、認知負荷之影響，以及是否有顯著交互作用。

第四章 研究結果與討論

本章內容乃於教學實驗完成後，對研究對象之後測、延後測及上課感受量表等資料，進行分析及討論，並檢驗本研究之假設。本章共分四節：4-1 後測分析，4-2 延後測分析，4-3 認知負荷分析(上課感受量表之花費心力)，4-4 學習效率與投入分數暨專業知識反轉效應分析。

後測試卷主要分成兩部份：第 1 題到第 8 題為計算題，屬於先備知識，每題 4 分；第 9 題到第 10 題為公切線作圖題，每題 9 分。除分析總成績外，亦針對計算題及作圖題進行討論。教學實驗結束一個月後進行延後測，由於未事先告知學生，且本研究主題非學校課本教材，所以未進行任何加強複習，故可將延後測成績視為兩組研究對象之遠移學習成效，延後測試卷題目與後測題目相同。

將學生分為實驗組、對照組來分析後測及延後測之總成績、計算題成績、作圖題成績表現，描述性統計摘要如表 10。

表 10
全體受試學生 後測及延後測成績 描述性統計摘要表

	組別	人數	平均數	標準差
後測 總分 (50)	實驗組	60	39.32	11.35
	對照組	60	37.07	13.95
延後測 總分 (50)	實驗組	60	36.27	10.66
	對照組	60	30.00	10.65
後測 計算題 (32)	實驗組	60	29.05	7.05
	對照組	60	27.80	9.15
延後測計算題(32)	實驗組	60	28.50	7.20
	對照組	60	26.07	8.28
後測 作圖題 (18)	實驗組	60	10.27	5.60
	對照組	60	9.27	6.17
延後測作圖題(18)	實驗組	60	7.77	5.92
	對照組	60	3.93	4.65

註：括號內數字為該項測驗總分

4-1 後測分析

本節將對後測表現進行分析，並將後測細分成總分、計算題、作圖題三部分來探討。

研究假設如下：

假設 1：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測表現有顯著交互作用。

考驗假設 1 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測表現沒有顯著交互作用

4-1-1 後測總分之分析

假設 1-1：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測總分有顯著交互作用。

考驗假設 1-1 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測總分沒有顯著交互作用。

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，「後測總分」為依變項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 11，後測總分平均數摘要表如表 12。

表 11

教材設計與成就水準在後測總分之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	151.875	1	151.875	1.086	0.299	.009
成就水準	2832.408	1	2832.408	20.260	0.000***	.149
教材設計*成就水準	27.075	1	27.075	0.194	0.661	.002
誤差	16217.233	116	139.804			
總數	19228.592	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 12

後測總分 平均數摘要表

		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教材設計	實驗組	43.70	34.93	39.32
	(60)	(30)	(30)	(60)
	對照組	42.40	31.73	37.07
	(60)	(30)	(30)	(60)
邊緣平均數		43.05 (60)	33.33 (60)	38.19 (120)

註：括號內數字為人數，後測總分共 50 分

經二因子變異數分析後，由表 11、表 12：

- (1)「教材設計」與「成就水準」對後測總分無顯著交互作用($F = 0.194, p = .661 > .05$)
- (2)「教材設計」對後測總分的主要效果未達顯著影響($F = 1.086, p = .299 > .05$)
- (3)「成就水準」對後測總分的主要效果達顯著影響($F = 20.260, p = 0.000 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測總分的影響，成就水準變項可以解釋後測總分的 14.9% 的變異量(淨 $\eta^2 = .149$)，為高度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準後測總分 43.05 顯著優於低成就水準後測總分 33.33。因成就水準代表數學程度，所以高成就水準顯著優於低成就水準為理所當然之現象。

假設檢驗如下

假設 1-1：不成立，應接受虛無假設 H_0 。即模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測總分沒有顯著交互作用。

4-1-2 後測計算題之分析

假設 1-2：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測計算題有顯著交互作用。

考驗假設 1-2 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測計算題沒有顯著交互作用。

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，「後測計算題」為依變項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 13，後測計算題平均數摘要表如表 14。

表 13

教材設計與成就水準在後測計算題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	46.875	1	46.875	0.810	0.370	.007
成就水準	1147.008	1	1147.008	19.817	0.000***	.146
教材設計*成就水準	11.408	1	11.408	0.197	0.658	.002
誤差	6714.033	116	57.880			
總數	7919.325	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 14

後測計算題之平均數摘要表

		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教材設計	實驗組	31.83	26.27	29.05
	(60)	(30)	(30)	(60)
	對照組	31.20	24.40	27.80
	(60)	(30)	(30)	(60)
邊緣平均數		31.52	25.33	28.43
		(60)	(60)	(120)

註：括號內數字為人數，後測計算題共 32 分

經二因子變異數分析後，由表 13、表 14：

- (1) 「教材設計」與「成就水準」對後測計算題無顯著交互作用($F = 0.197, p = .658 > .05$)
- (2) 「教材設計」對後測計算題的主要效果未達顯著影響($F = 0.810, p = .370 > .05$)
- (3) 「成就水準」對後測計算題的主要效果達顯著影響($F = 19.817, p = .000 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測計算題的影響，成就水準變項可以解釋後測計算題的 14.6% 的變異量(淨 $\eta^2 = .146$)，為高度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準後測計算題 31.52 顯著優於低成就水準後測計算題 25.33。因成就水準代表數學程度，所以高成就水準顯著優於低成就水準為理所當然之現象。

假設檢驗如下

假設 1-2：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測計算題沒有顯著交互作用。

4-1-3 後測作圖題之分析

假設 1-3：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測作圖題有顯著交互作用。

考驗假設 1-3 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測作圖題沒有顯著交互作用。

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，「後測作圖題」為依變項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 15，後測作圖題平均數摘要表如表 16。

表 15

教材設計與成就水準在後測作圖題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	30.000	1	30.000	0.936	0.335	.008
成就水準	374.533	1	374.533	11.687	0.001***	.092
教材設計*成就水準	3.333	1	3.333	0.104	0.748	.001
誤差	3717.600	116	32.048			
總數	4125.467	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 16

後測作圖題之平均數摘要表

		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教材設計	實驗組	11.87	8.67	10.27
	(60)	(30)	(30)	(60)
	對照組	11.20	7.33	9.27
	(60)	(30)	(30)	(60)
邊緣平均數		11.53 (60)	8.00 (60)	9.77 (120)

註：括號內數字為人數，後測作圖題共 18 分

經二因子變異數分析後，由表 15、表 16

- (1)「教材設計」與「成就水準」對後測作圖題無顯著交互作用($F = 0.104$ ， $p = .748 > .05$)
- (2)「教材設計」對後測作圖題的主要效果未達顯著影響($F = 0.936$ ， $p = .335 > .05$)
- (3)「成就水準」對後測作圖題的主要效果達顯著影響($F = 11.687$ ， $p = .001 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測作圖題的影響，成就水準變項可以解釋後測作圖題的 9.2% 的變異量(淨 $\eta^2 = .092$)，為中度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準後測作圖題 11.53 顯著優於低成就水準後測作圖題 8.00。因成就水準代表數學程度，所以高成就水準顯著優於低成就水準為理所當然之現象。

假設檢驗如下

假設 1-3：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測作圖題沒有顯著交互作用。

綜合上述：

假設 1：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的後測表現沒有顯著交互作用。

4-2 延後測分析

本節將對延後測表現進行分析，並將延後測細分成總分、計算題、作圖題三部分來探討。研究假設如下：

假設 2：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測表現有顯著交互作用

考驗假設 2 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測表現沒有顯著交互作用

4-2-1 延後測總分之分析

假設 2-1：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測總分有顯著交互作用。

考驗假設 2-1 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測總分沒有顯著交互作用。

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，「延後測總分」為依變項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 17，延後測總分平均數摘要表如表 18。

表 17

教材設計與成就水準在延後測總分之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	1178.133	1	1178.133	13.294	0.000***	.103
成就水準	2960.133	1	2960.133	33.401	0.000***	.224
教材設計*成就水準	163.333	1	163.333	1.843	0.177	.016
誤差	10280.267	116	88.623			
總數	14581.867	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 18

延後測總分之平均數摘要表

		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教材設計	實驗組	40.07	32.47	36.27
	(60)	(30)	(30)	(60)
	對照組	36.13	23.87	30.00
	(60)	(30)	(30)	(60)
邊緣平均數		38.10	28.17	33.13
		(60)	(60)	(120)

註：括號內數字為人數，延後測總分共 50 分

經二因子變異數分析後，由表 17、表 18

- (1)「教材設計」與「成就水準」對延後測總分無顯著交互作用($F = 1.843, p = .177 > .05$)
- (2)「教材設計」對延後測總分的主要效果達顯著影響($F = 13.294, p = 0.000 < .05$)，在排除成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測總分的影響，教材設計變項可以解釋延後測總分的 10.3%的變異量(淨 $\eta^2 = .103$)，為中度關連強度。由邊緣平均數得知實驗組總分 36.27 顯著優於對照組總分 30.00
- (3)「成就水準」對延後測總分的主要效果達顯著影響($F = 33.401, p = 0.000 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測總分的影響，成就水準變項可以解釋延後測總分的 22.4%的變異量(淨 $\eta^2 = .224$)，為高度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準延後測總分 38.10 顯著優於低成就水準延後測總分 28.17。因成就水準代表數學程度，所以高成就水準顯著優於低成就水準為理所當然之現象。

假設檢驗如下

假設 2-1：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測總分沒有顯著交互作用。

4-2-2 延後測計算題之分析

假設 2-2：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測計算題有顯著交互作用。

考驗假設 2-2 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測計算題沒有顯著交互作用。

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，「延後測計算題」為依變項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 19，延後測計算題平均數摘要表如表 20。

表 19

教材設計與成就水準在延後測計算題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	177.633	1	177.633	3.687	0.057	.031
成就水準	1456.033	1	1456.033	30.220	0.000***	.207
教材設計*成就水準	61.633	1	61.633	1.279	0.260	.011
誤差	5589.067	116	48.182			
總數	7284.367	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 20

延後測計算題之平均數摘要表

		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教材設計	實驗組	31.27	25.73	28.50
	(60)	(30)	(30)	(60)
	對照組	30.27	21.87	26.07
	(60)	(30)	(30)	(60)
邊緣平均數		30.77	23.80	27.28
		(60)	(60)	(120)

註：括號內數字為人數，延後測計算題共 32 分

經二因子變異數分析後，由表 19、表 20

- (1)「教材設計」與「成就水準」對延後測計算題無顯著交互作用($F = 1.279, p = .260 > .05$)
- (2)「教材設計」對延後測計算題的主要效果未達顯著影響($F = 3.687, p = .057 > .05$)
- (3)「成就水準」對延後測計算題的主要效果達顯著影響($F = 30.220, p = 0.000 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測計算題的影響，成就水準變項可以解釋延後測計算題的 20.7% 的變異量(淨 $\eta^2 = .207$)，為高度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準延後測計算題 30.77 顯著優於低成就水準延後測計算題 23.80。因成就水準代表數學程度，所以高成就水準顯著優於低成就水準為理所當然之現象。

假設檢驗如下

假設 2-2：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測計算題沒有顯著交互作用。

4-2-3 延後測作圖題之分析

假設 2-3：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測作圖題有顯著交互作用。

考驗假設 2-3 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測作圖題沒有顯著交互作用。

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，「延後測作圖題」為依變項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 21，延後測作圖題平均數摘要表如表 22。

表 21

教材設計與成就水準在延後測作圖題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	440.833	1	440.833	16.743	0.000***	.126
成就水準	264.033	1	264.033	10.028	0.002**	.080
教材設計*成就水準	24.300	1	24.300	0.923	0.339	.008
誤差	3054.133	116	26.329			
總數	3783.300	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 22

延後測作圖題之平均數摘要表

		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教材設計	實驗組	8.80	6.73	7.77
	(60)	(30)	(30)	(60)
	對照組	5.87	2.00	3.93
	(60)	(30)	(30)	(60)
邊緣平均數		7.33 (60)	4.37 (60)	5.85 (120)

註：括號內數字為人數，延後測作圖題共 18 分

經二因子變異數分析後，由表 21、表 22

- (1) 「教材設計」與「成就水準」對延後測作圖題無顯著交互作用($F = 0.923, p = .339 > .05$)
- (2) 「教材設計」對延後測作圖題的主要效果達顯著影響($F = 16.743, p = 0.000 < .05$)，在排除成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測作圖題的影響，教材設計變項可以解釋延後測作圖題的 12.6%的變異量(淨 $\eta^2 = .126$)，為中度關連強度。由邊緣平均數得知實驗組延後測作圖題 7.77 顯著優於對照組延後測作圖題 3.93。
- (3) 「成就水準」對延後測作圖題的主要效果達顯著影響($F = 10.028, p = .002 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測作圖題的影響，成就水準變項可以解釋延後測作圖題的 8.0%的變異量(淨 $\eta^2 = .080$)，為中度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準延後測作圖題 7.33 顯著優於低成就水準後測作圖題 4.37。因成就水準代表數學程度，所以高成就水準顯著優於低成就水準為理所當然之現象。

假設檢驗如下

假設 2-3：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測作圖題沒有顯著交互作用。

綜合上述：

假設 2：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的延後測表現沒有顯著交互作用。

因本實驗後測與延後測採用相同之試卷，為方便觀察、比較學生學習表現之差異情形，故將實驗組及對照組之後測及延後測計算題、作圖題得分情形繪製成折線圖，如圖 17。從圖中可發現在後測部分之計算題或作圖題，實驗組與對照組得分無顯著差異。一個月後的延後測中，分數皆下滑，在計算題部分，雖然對照組分數衰退情形大於實驗組，但無明顯差異，然而在作圖題部分卻顯現明顯差異，對照組分數大幅滑落。

推測原因為公切線尺規作圖包含大量的幾何知識與作圖能力，對學習者而言，不論

是模組化或步驟化教學的內在認知負荷皆頗重，因此短遷移(後測)效果無顯著差異。但在實驗過程中，不論是點切圓作圖、外公切線計算及作圖、內公切線計算及作圖，實驗組皆不斷強調以及練習以直角三角形為模組進行教學，使學生一想到切線就能與直角三角形產生連結，所以經過一個月後的長時間，使用模組化教材的實驗組因為有較多的學習保留，所以在遠遷移(延後測)效果有無顯著差異。證明以直角三角形為模組對於學習兩圓公切線尺規作圖，的確能降低內在認知負荷，提升學習成效。



圖 17 整體受試學生後測及延後測 計算題、作圖題分數折線圖

4-3 認知負荷之分析

為瞭解受試學生對教學實驗課程的認知負荷感受，並作為分析是否產生專業知識反轉效應，故於教學實驗課程結束後，立即請學生填寫上課感受量表。以量表中的「花費心力」作為檢測受試學生的認知負荷量。「花費心力」為反向題，分數愈高代表越耗費心力，認知負荷也就越高。描述性統計摘要如表 23。

表 23

上課感受量表 描述性統計摘要表

變項	組別	人數	平均數	標準差
上課意願	實驗組	60	5.10	1.72
	對照組	60	4.37	1.50
困難度	實驗組	60	3.85	1.66
	對照組	60	4.02	1.62
花費心力	實驗組	60	3.73	1.54
	對照組	60	4.27	1.76
理解程度	實驗組	60	4.88	1.44
	對照組	60	4.87	1.51
投入努力	實驗組	60	4.77	1.57
	對照組	60	4.62	1.65

註：各題均為 7 點量表

研究假設如下：

假設 3：模組化的教材設計與成就水準，對學生的認知負荷感受有顯著交互作用

考驗假設 3 的虛無假設 H_0

H_0 ：模組化的教材設計與成就水準，對學生的認知負荷感受沒有顯著交互作用

以「教材設計」與「成就水準」為自變項，上課感受量表中之「花費心力」為依變

項進行二因子變異數分析，二因子變異數分析摘要表如表 24，花費心力平均數摘要表如表 25

表 24

教材設計與成就水準在花費心力之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	η^2
教材設計	8.533	1	8.533	3.360	0.069	.028
成就水準	28.033	1	28.033	11.038	0.001 **	.087
教材設計*成就水準	.833	1	.833	0.328	0.568	.003
誤差	294.600	116	2.540			
總數	332.000	119				

註：* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

表 25

花費心力 之平均數摘要表

	成就水準		邊緣平均數
	高成就 (60)	低成就 (60)	
實驗組 (60)	3.17 (30)	4.30 (30)	3.73 (60)
	對照組 (60)	3.87 (30)	4.27 (60)
邊緣平均數	3.52 (60)	4.48 (60)	4.00 (120)

註：括號內數字為人數，此為 7 點量表

經二因子變異數分析後，由表 24、表 25

- (1)「教材設計」與「成就水準」對花費心力感受無顯著交互作用($F = 0.328, p = .568 > .05$)
- (2)「教材設計」對花費心力的主要效果未達顯著影響($F = 3.360, p = .069 > .05$)
- (3)「成就水準」對花費心力的主要效果達顯著影響($F = 11.038, p = .001 < .05$)，在排除教材設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對花費心力的影響，成就水準變項可以解釋花費心力的 8.7% 的變異量(淨 $\eta^2 = .087$)，為中度關連強度。由邊緣平均數得知高成就水準花費心力 3.52 顯著低於低成就水準花費心力 4.48。雖然 3.52 及 4.48 皆已超過 7 點量表中的一半，代表公切線尺規作圖確實為認知負荷頗高之教材，但高成就水準的認知負荷感受仍顯著低於低成就水準。

綜合上述：

假設 3：不成立，應接受虛無假設 H_0 ，即模組化的教材設計與成就水準，對學生的認知負荷感受沒有顯著交互作用。

4-4 學習效率與投入分數暨專業知識反轉效應分析

在第二章文獻探討中，曾於 2-1-4 中提出若只是分析討論後測、延後測成績表現或上課感受量表(即認知負荷量)，是無法全面瞭解學生的整體學習狀況，因此採用認知負荷學者 Paas & Merriënboer (1993) 所提出的學習效率公式 E (Instructional Efficiency)及 Paas 等人 (2005) 所提出的學習投入分數公式 I (Involvement score)及效率圖像 (Efficiency Graph)，來增加對學生整體學習狀況的瞭解。由前面的分析研究得知對有複雜程序的高內在認知負荷之尺規作圖，以模組化策略進行教學時，對後測表現無顯著差異；但對延後測表現則有顯著差異。為了瞭解原因，因此將同時對後測與延後測的認知負荷進行討論。本研究的認知負荷將以上課感受量表中的「花費心力」為依據，將其分數轉化為 Z 分數 (即 Z_c)，並將後測、延後測成績轉化為 Z 分數 (即 Z_p 、 Z_d)。接著再以 $Z_c - Z_p$ 、 $Z_c - Z_d$ 兩種模式探討整體學生、高成就水準學生及低成就水準學生的學習效率、投入分數及專業知識反轉效應。

4-4-1 整體學生認知負荷

1. 後測認知負荷

就後測而言，因實驗組平均分數僅約略高於對照組，但認知負荷較對照組低，所以實驗組的學習效率優於對照組，投入分數低於對照組，如表 26。由學習效率及投入分數圖，發現實驗組位於高效率低投入，對照組位於低效率高投入，如圖 18。

表 26

整體學生後測之學習效率與投入分數

	Z_p (Y)	Z_c (X)	E	I
實驗組	0.09	-0.16	0.18	-0.05
對照組	-0.09	0.16	-0.18	0.05

註： Z_p = 後測 Z 分數， Z_c = 花費心力 Z 分數， E = 學習效率， I = 投入分數。

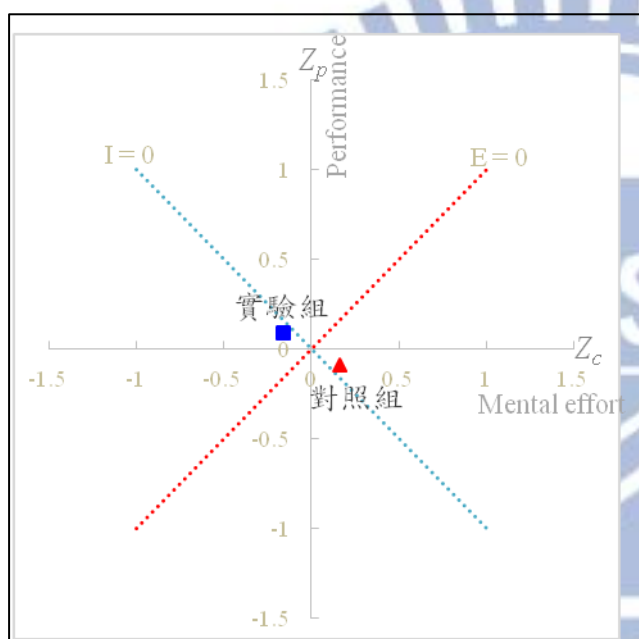


圖 18 整體學生後測的學習效率與投入分數圖

2. 延後測認知負荷

就整體學生延後測而言，實驗組平均分數高於對照組，認知負荷低於對照組，所以實驗組的學習效率、投入分數皆優於對照組，如表 27。由學習效率及投入分數圖，發現實驗組位於高效率、高投入，對照組位於低效率、低投入，如圖 19。表示實驗組的模組化教材設計優於對照組的一般教材設計，因此產生較佳的學習保留。

表 27

整體學生延後測學習效率與投入分數

	Z_d (Y)	Z_c (X)	E	I
實驗組	0.28	-0.16	0.31	0.09
對照組	-0.28	0.16	-0.31	-0.09

註： Z_d = 延後測 Z 分數， Z_c = 花費心力 Z 分數， E = 學習效率， I = 投入分數

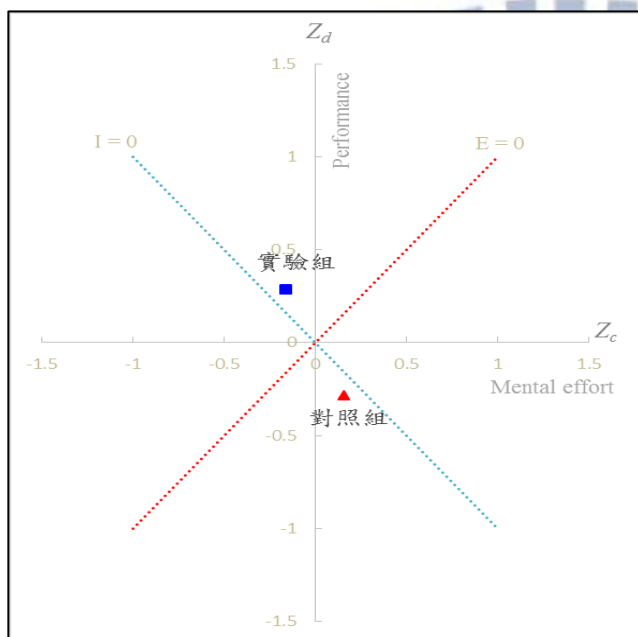


圖 19 整體學生延後測學習效率與投入分數圖

4-4-2 各成就水準認知負荷

1. 後測認知負荷 ($Z_c - Z_p$)：不同成就水準認知負荷數據資料如表 28、圖 20

(1) 在學習效率方面

實驗組高成就 (0.66) > 對照組高成就(0.29) > 實驗組低成就(-0.31) > 對照組低成就(-0.64)，顯示高成就水準之學習效率皆優於低成就水準，對於後測而言，判斷應無專業知識反轉效應產生。

(2) 在投入分數方面

對照組高成就(0.18) > 實驗組高成就(-0.05) = 實驗組低成就(-0.05) > 對照組低成就(-0.08)，發現無論是實驗組或對照組，高成就學生皆未小於低成就學生，對於後測而言，判斷應無專業知識反轉效應產生。

表 28

後測不同成就水準之學習效率與投入分數

	Z_p (Y)	Z_c (X)	E	I
實驗組高成就	0.43	-0.50	0.66	-0.05
對照組高成就	0.33	-0.08	0.29	0.18
實驗組低成就	-0.26	0.18	-0.31	-0.05
對照組低成就	-0.51	0.40	-0.64	-0.08

註： Z_p = 後測 Z 分數， Z_c = 花費心力 Z 分數， E = 學習效率， I = 投入分數。

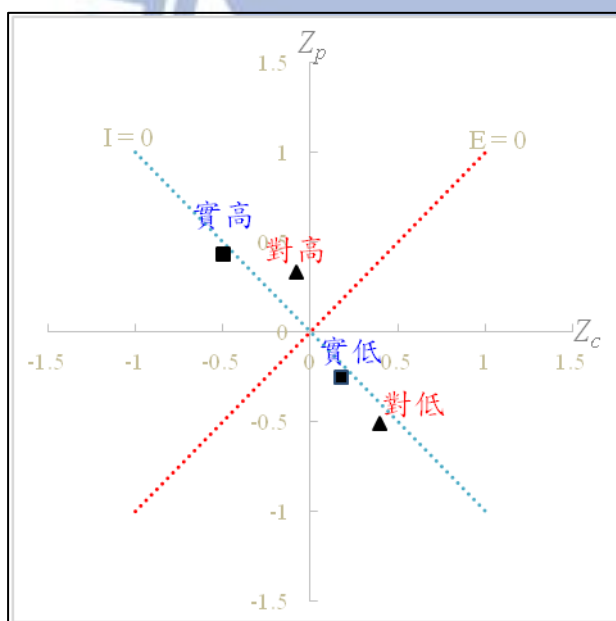


圖 20 後測不同成就水準之學習效率與投入分數圖

2. 延後測認知負荷($Z_c - Z_d$)：不同成就水準數據資料如表 29、圖 21

(1) 在學習效率方面

實驗組高成就(0.80) > 對照組高成就(0.25) > 實驗組低成就(-0.17) > 對照組低成就(-0.87)，顯示無論是實驗組或對照組的高成就水準學生之學習效率皆優於

低成就水準學生，對於延後測而言，判斷應無專業知識反轉效應產生。

(2) 在投入分數方面

對照組高成就(0.14) > 實驗組高成就(0.09) > 實驗組低成就(0.08) > 對照組低成就(-0.31)，發現無論是實驗組或對照組，高成就學生皆優於低成就學生，對於延後測而言，判斷應無專業知識反轉效應產生。

表 29

延後測不同成就水準之學習效率與投入分數

	$Z_d (Y)$	$Z_c (X)$	E	I
實驗組高成就	0.63	-0.50	0.80	0.09
對照組高成就	0.27	-0.08	0.25	0.14
實驗組低成就	-0.06	0.18	-0.17	0.08
對照組低成就	-0.84	0.40	-0.87	-0.31

註： Z_d = 延後測 Z 分數， Z_c = 花費心力 Z 分數， E = 學習效率， I = 投入分數。

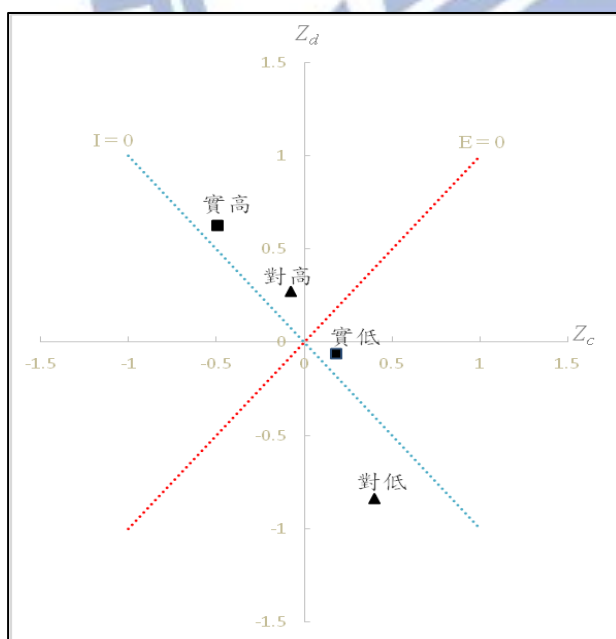
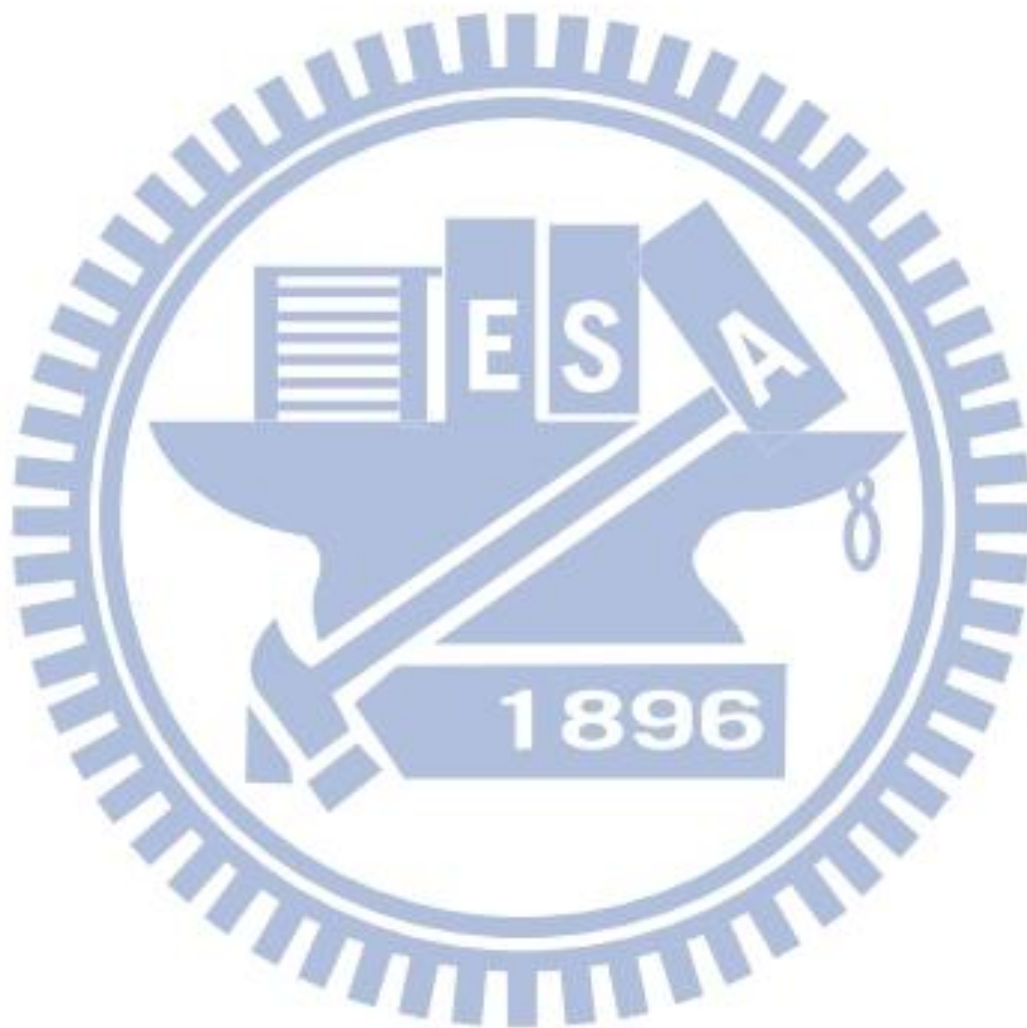
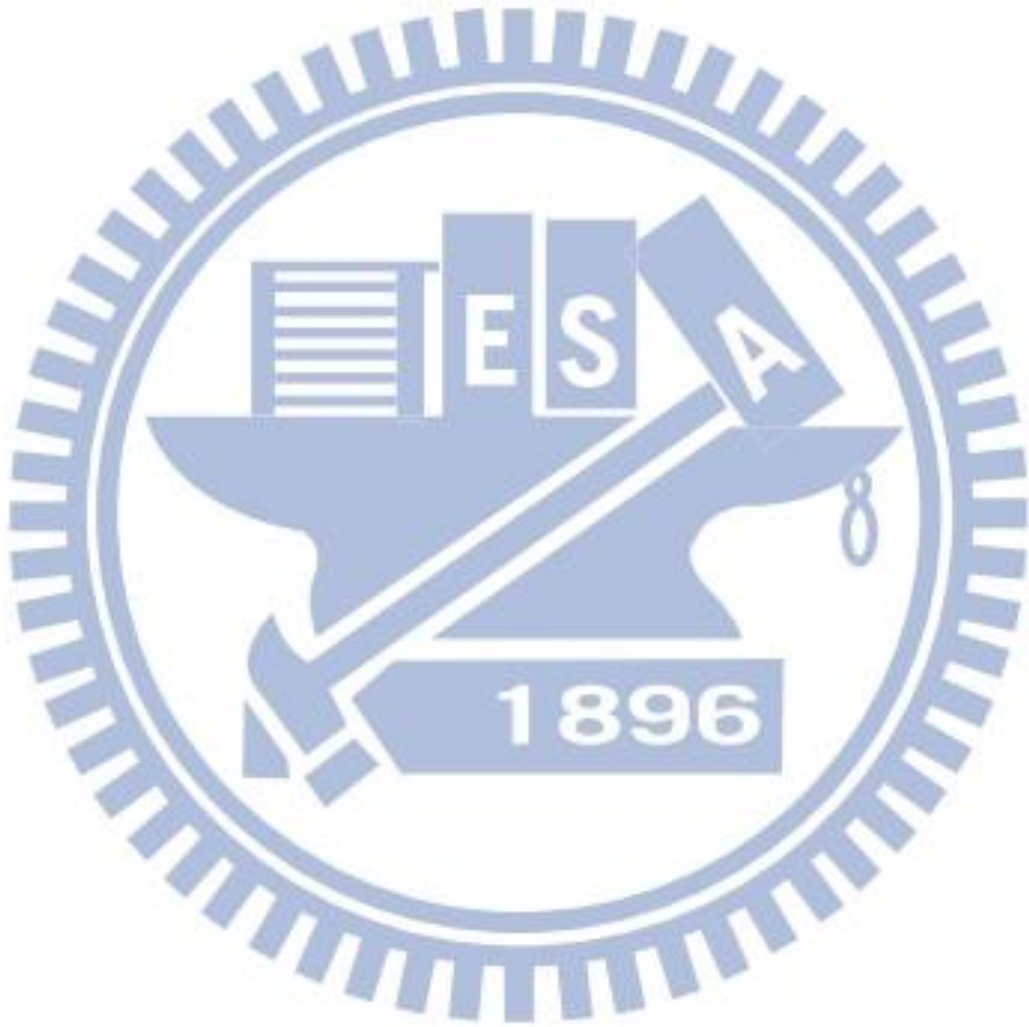


圖 21 延後測不同成就水準之學習效率與投入分數圖

綜合上面分析及圖表可發現：

1. 在後測部分，對照組的高學習成就表現為高效率、高投入，實驗組的高學習成就表現雖然為高效率、低投入，但兩組的低學習成就表現皆為低效率、低投入，所以未產生專業知識反轉效應。
2. 在延後測部分，實驗組與對照組的高學習成就表現皆為高效率、高投入，所以兩組高學習成就學生在延後測皆未產生專業知識反轉效應。





第五章 研究結論與建議

兩圓內外公切線尺規作圖因為認知負荷頗重，所以未納入課程綱要中。本研究目的即為試圖找出能降低認知負荷、提高學習成效的方法，故研究主題為「以直角三角形為模組對兩圓公切線尺規作圖學習成效之影響」，此模組是從九年級計算兩圓內外公切線段長度問題延伸而來。

本研究採準實驗研究法，於九年級四個常態班進行教學實驗，除了探討有無模組化的教材設計及不同成就水準兩個自變項對後測、延後測與認知負荷的影響外，亦探討模組化教材設計是否對高成就水準產生專業知識反轉效應。其中後測及延後測皆分成總分、計算題、公切線作圖題三部分進行分析；認知負荷則以上課感受量表中的花費心力進行分析。以下根據第四章的實驗結果歸納出結論與建議，以作為未來教學、研究之參考。

5-1 研究結論

本研究實驗組是以直角三角形為模組的教材設計，所以先教模組「直角三角形作圖」與切線的關係後，再教公切線作圖；對照組則是以步驟化的教材設計，先教作圖步驟，也就是教師一邊教、學生一邊跟著作之後，再證明所作圖形即為公切線。分析結果如下：

1. 後測分析：

- (1) 教材設計與成就水準兩個變項之間無顯著交互作用。
- (2) 教材設計之主要效果對總分、計算題、公切線作圖題三部分，都未達顯著差異。
- (3) 成就水準之主要效果對總分、計算題、公切線作圖題三部分，都達顯著差異。

2. 延後測分析：

- (1) 教材設計與成就水準兩個變項之間無顯著交互作用。
- (2) 教材設計之主要效果對總分、公切線作圖題都達顯著差異，計算題則無顯著差異
- (3) 成就水準之主要效果對總分、計算題、公切線作圖題三部分，都達顯著差異

3. 認知負荷分析：

- (1) 教材設計與成就水準兩個變項之間無顯著交互作用。
- (2) 教材設計之主要效果對認知負荷，未達顯著差異。
- (3) 成就水準之主要效果對認知負荷，達顯著差異。

4. 實驗組模組化教材的學習效率與學習投入分數暨專業知識反轉效應分析：

- (1) 根據後測總分與花費心力所得到的綜合學習效率與學習投入分數判斷，高成就水準為高效率、低投入，低成就水準為低效率、低投入，未發生專業知識反轉效應。
- (2) 根據延後測總分與花費心力所得到的綜合學習效率與學習投入分數判斷，高成就水準為高效率、高投入，低成就水準為低效率、低投入，未發生專業知識反轉效應。

研究結果發現以直角三角形作圖為模組之教材設計，對於兩圓公切線尺規作圖學習，確實能降低認知負荷、提升學習成效，雖然短遷移(後測)效果無明顯差異，但遠遷移(延後測)效果則有顯著差異。

5-2 建議

5-2-1 對於教學之建議

1. 先備知識的複習納入教學中

本作圖教學，學生需要具備「過線外一點作平行線」、「過線上一點作垂直線」、「作中垂線」等基本尺規作圖能力，但在教學過程中，發現很多學生都已忘記因此頻頻發問，故必須於有限的教學時間中複習基本尺規作圖，所以壓縮主要教材的授課時間進而影響後測的表現。建議於教學實驗前，先行複習基本尺規作圖或增長教學時間以納入基本尺規作圖教學。

2. 以直角三角形為模組應用於兩圓公切線尺規作圖教學

運用模組化教材於認知負荷頗重的兩圓公切線作圖教學，確實能較步驟化教學有效降低認知負荷，使學生保有較多的學習記憶，因而有較佳的遠遷移效果。因此建議對認知負荷頗重之教材，可採模組化教學方式。

3. 運用多媒體教學於高認知負荷之教學單元

在公切線尺規作圖中，因包含許多線段、圓弧、幾何圖形，若能善用多媒體的消失、出現、淡出、淡入、線條粗細、箭頭標註等特性，便可產生快速而有效的視覺引導、減少學生不必要的視覺搜尋與比對，故能降低外在認知負荷，而將較多的工作記憶資源投注於教材本身的內在認知負荷。

5-2-2 對於未來研究之建議

1. 擴大研究樣本數

本研究之樣本取樣為新竹縣某國中 120 位學生，在時間、空間允許下，建議可增加樣本數，擴大至其他學校或縣市，以確認實驗的正確性。

2. 增加質性分析

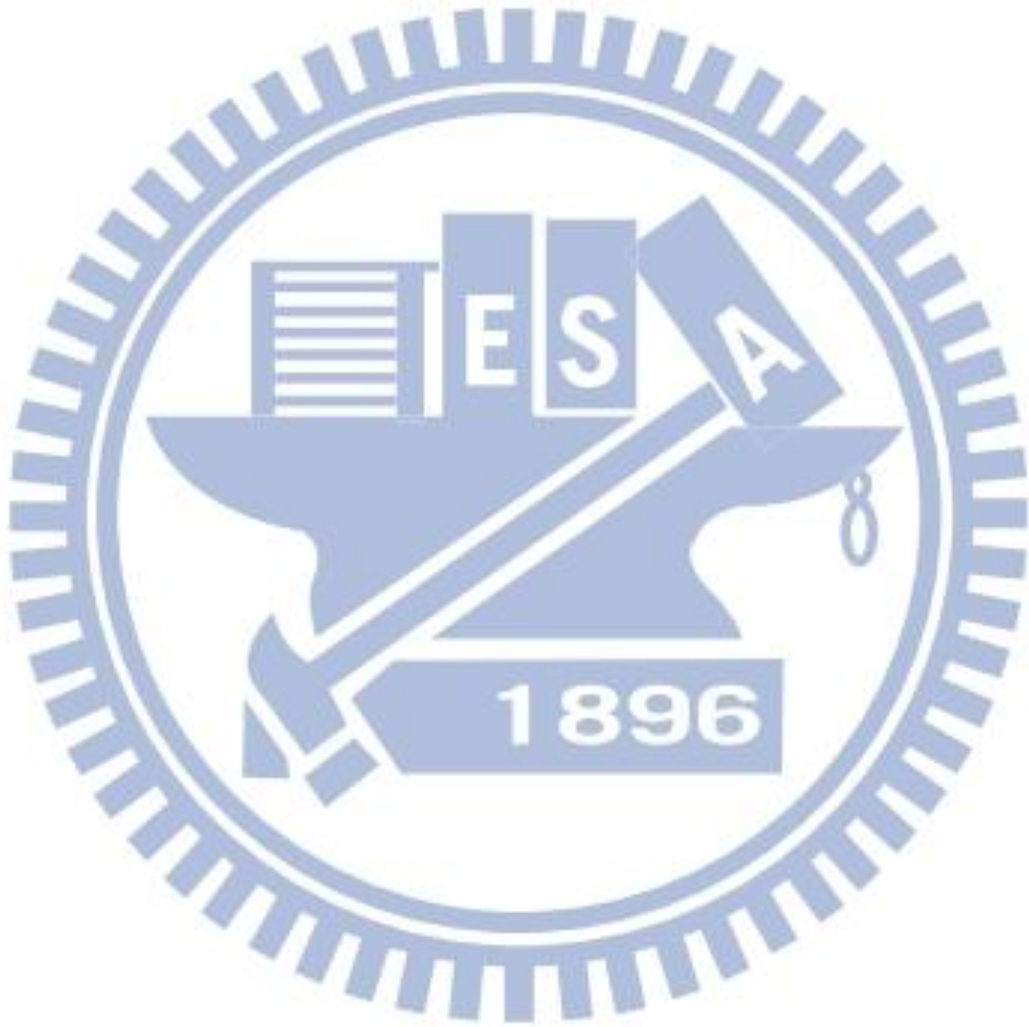
本研究實驗數據顯示學生在延後測表現(總分、作圖)有顯著差異，但在後測卻無顯著差異，建議可增加質性訪談，以進一步瞭解原因。

3. 增加認知負荷之問題題數

本研究用來檢測學生認知負荷的花費心力問題只有 1 題，應至少增加為 3 題以上，才具有統計上的意義。

4. 基本尺規作圖教學模組化

每一種基本尺規作圖都屬於程序性知識，獨立來看，認知負荷都不大。但在一個包含多種基本尺規作圖交互運用的複雜題目中，便造成了極大的認知負荷。因此建議本單元教學，除將直角三角形作圖模組化外，亦應將基本尺規作圖教學模組化形成概念性知識，並列入實驗教材中，應可降低認知負荷，提高學習效益。



參考文獻

1. 中文文獻

- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君 (2011)。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。**教育心理學報**，43，頁 291-314。
- 宋曜廷(2000)。先前知識文章結構和多媒體呈現對文章學習的影響。未出版博士論文，國立臺灣師範大學，台北。
- 吳明隆、涂金堂(2012)。SPSS 與統計應用分析。台北市：五南。
- 呂鳳琳(2010)。幾何證明不同文本呈現方式對學生認知負荷與閱讀理解影響之研究。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學。
- 邱皓政(2010)。量化研究與統計分析：SPSS(PASW)資料分析範例解析(第五版)。台北市：五南。
- 洪蘭(譯)(2009)。大腦當家—靈活用腦 12 守則，學習工作更上層樓(原作者：Medina, J.)。台北市：遠流。
- 張新仁(1990)。從資訊處理談有效的學習策略。**教育學刊**，9，252-271。
- 許湄(2008)。探究式教學法融入幾何尺規作圖單元之行動研究。未出版之碩士論文，國立彰化師範大學，彰化市。
- 陳彙芳、范懿文(2000)。認知負荷對多媒體電腦輔助學習成效之影響研究。**國立中央大學資訊管理研究** 第2卷 第2期 2007年7月 45-60
- 陳依萍(2012)。運用狀態轉換圖於高中數學轉移矩陣教學之研究。未出版之碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 陳一平(2011)。視覺心理學。台北市：雙葉書廊。
- 陳宥良(2009)。探討國中三年級學生透過摺紙活動進行尺規作圖補救教學之成效。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學，台北市。
- 陳聖別(2012)。摺紙活動對尺規作圖學習之效益研究—以八年級學生補救教學為例。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學。
- 教育部(2009a)。97年國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要。
- 張祐誠(2008)。激發式動態呈現之教學設計之研究-以文導圖模式與觸發模式之比較以尺規作圖為例。未出版之碩士論文，國立交通大學，新竹市。

- 曾妙玲 (2008)。激發式動態呈現教學設計之研究—觸發模式有/無字幕之比較—以尺規作圖為例。未出版之碩士論文，國立交通大學，新竹市。
- 葉素玲 (1999)。視覺空間注意力。載於李江山 (主編)，**視覺與認知-視覺知覺與視覺運動系統**。(頁 291-323)。台北市：遠流。
- 葉福進 (2005)。國三學生利用三種不同構圖工具進行構圖活動的表現之探討。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學，台北市。
- 劉繕榜 (2000)。國中數學資優生尺規作圖表現之探討。國立臺灣師範大學。
- 譚克平、陳宥良 (2009)。運用摺紙提升學生尺規作圖技巧。科學教育月刊，323，15-24。



2. 英文文獻

- Broadbent, Donald Eric. (1958). Perception and communication.
- Clark, R.C., & Mayer, R. E. (2007). *e-Learning and the Science of Instruction: Proven Guidelines for Consumers and Designers of Multimedia Learning, 2nd Edition (2nd ed.)*: Pfeiffer.
- Clark, R.C., Nguyen, Frank, & Sweller, J. (2006). *Efficiency in Learning: Evidence-Based Guidelines to Manage Cognitive Load*. San Francisco: Pfeiffer.
- Deutsch, J. A., & Deutsch, D. (1963). *Attention: Some Theoretical Considerations*. *Psychological Review*, 70(1), 80-90. doi: 10.1037/h0039515
- Kalyuga, S. (2007). *Enhancing Instructional Efficiency of Interactive E-learning Environments: A Cognitive Load Perspective*. *Educational Psychology Review*, 19(3), 387-399.
- Kalyuga, S. (2009). *Managing Cognitive Load in Adaptive Multimedia Learning (Vol. Hershey, PA, USA)*: IGI Global.
- Kirschner, Femke, Paas, Fred, & Kirschner, Paul A. (2009). Individual and group-based learning from complex cognitive tasks: Effects on retention and transfer efficiency. *Computers in Human Behavior*, 25(2), 306-314. doi: 10.1016/j.chb.2008.12.008
- Leahy, W., & Sweller, J. (2004). Cognitive load and the imagination effect. *Applied Cognitive Psychology*, 18(7), 857-875. doi: 10.1002/acp.1061
- Leahy, W., & Sweller, J. (2005). Interactions among the imagination, expertise reversal, and element interactivity effects. *Journal of Experimental Psychology Applied*, 11(4), 266. doi: 10.1037/1076-898X.11.4.266
- Leahy, W., & Sweller, J. (2011). Cognitive load theory, modality of presentation and the transient information effect. *Applied Cognitive Psychology*, 25. doi:10.1002/acp.1787
- Mayer, R. E. (2001). *Multimedia Learning (1st ed.)*. New York: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning (2nd ed.)*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press.
- Paas, Fred G. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, 84(4), 429-434. doi: 10.1037/0022-0663.84.4.429
- Paas, Fred G. W. C., & Merriënboer, Jeroen J. G. Van. (1993). The Efficiency of Instructional Conditions: *An Approach to Combine Mental Effort and Performance Measures*. *Human*

Factors, 35(4), 737-743. doi: 10.1177/001872089303500412

Paas, Fred, Tuovinen, Juhani E., Merriënboer, Jeroen J. G., & Aubteen Darabi, A. (2005). A motivational perspective on the relation between mental effort and performance:

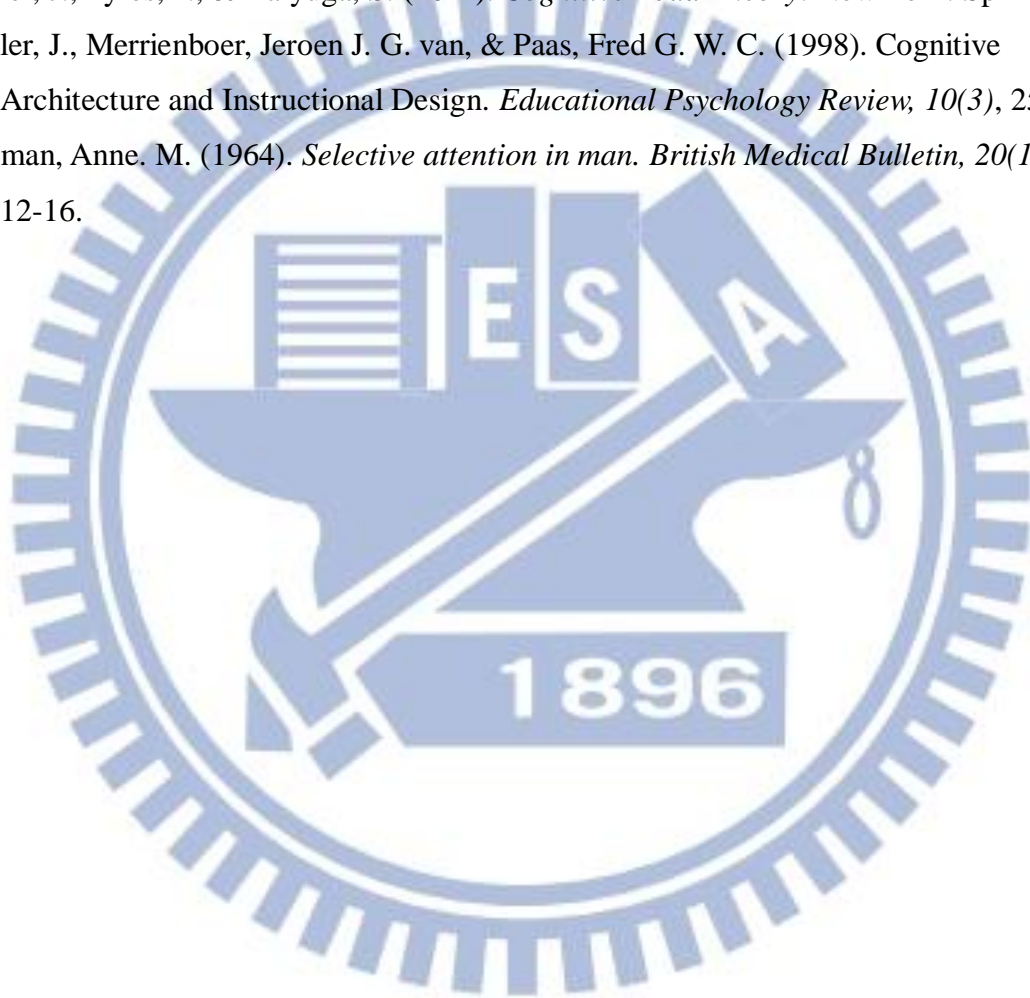
Optimizing learner involvement in instruction. *Educational Technology Research and Development*, 53(3), 25-34. doi: 10.1007/bf02504795

S. MOUSAVI, R. LOW, AND J. SWELLER. (1995). *Journal of Educational Psychology* 1995, Vol. 87, No. 2, 319-334

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. New York: Springer.

Sweller, J., Merrienboer, Jeroen J. G. van, & Paas, Fred G. W. C. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296.

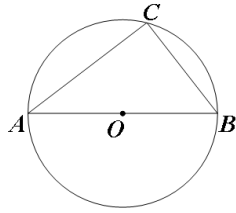
Treisman, Anne. M. (1964). *Selective attention in man*. *British Medical Bulletin*, 20(1), 12-16.



附錄一 前測試卷

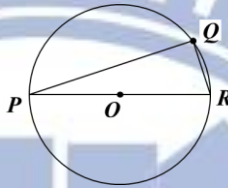
1. 如圖， \overline{AB} 為直徑，

則 $\angle ACB =$ _____ 度

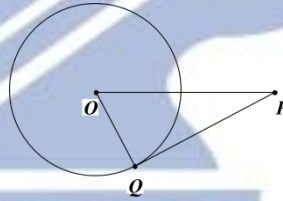


2. 如圖， \overline{PR} 為直徑， $\angle P = 20^\circ$ ，

則 $\angle R =$ _____ 度

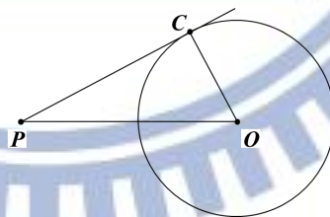


3. 如右圖， \overline{PQ} 與圓 O 切於 Q 點，則 $\angle PQO =$ _____ 度



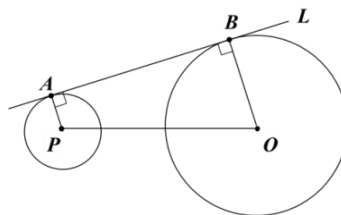
4. 如圖， \overline{PC} 與圓 O 切於 C 點，圓 O 半徑為 6，

$\overline{PO} = 10$ ，則 $\overline{PC} =$ _____

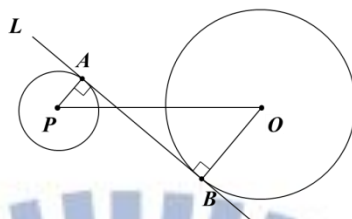


5. L 為外公切線， A 、 B 為切點，若小圓半徑 = 3，

大圓半徑 = 15， $\overline{PO} = 20$ ，則外公切線段 $\overline{AB} =$ _____

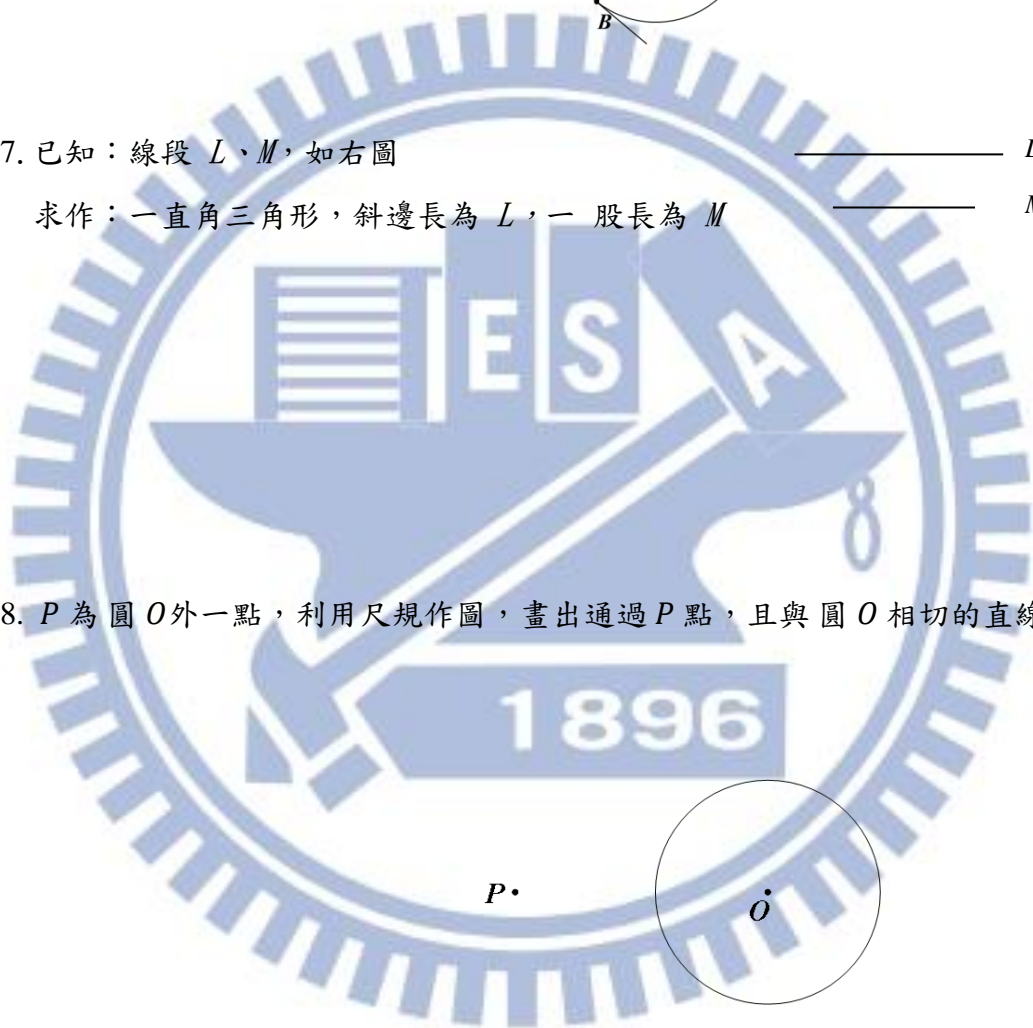


6. L 為內公切線， A 、 B 為切點，若小圓半徑 = 1，
大圓半徑 = 4， $\overline{PO} = 13$ ，則內公切線段 $\overline{AB} =$ _____



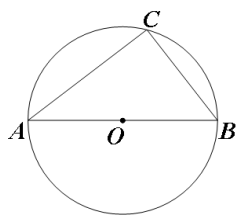
7. 已知：線段 L 、 M ，如右圖 _____ L
求作：一直角三角形，斜邊長為 L ，一股長為 M _____ M

8. P 為圓 O 外一點，利用尺規作圖，畫出通過 P 點，且與圓 O 相切的直線

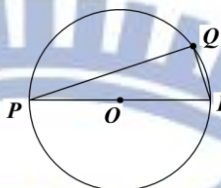


附錄二 後測及延後測試卷

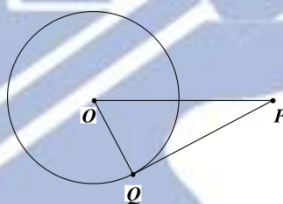
1. 如圖， \overline{AB} 為直徑，
則 $\angle ACB =$ _____ 度



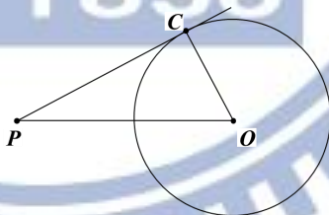
2. 如圖， \overline{PR} 為直徑， $\angle P = 20^\circ$ ，
則 $\angle R =$ _____ 度



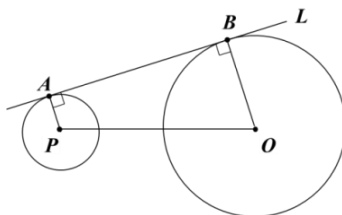
3. 如右圖， \overrightarrow{PQ} 與圓 O 切於 Q 點，則 $\angle PQO =$ _____ 度



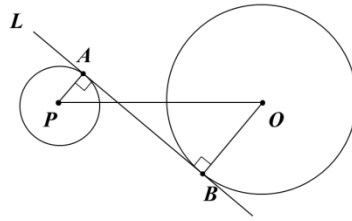
4. 如圖， \overrightarrow{PC} 與圓 O 切於 C 點，圓 O 半徑為 6，
 $\overline{PO} = 10$ ，則 $\overline{PC} =$ _____



5. L 為外公切線， A 、 B 為切點，若小圓半徑 = 3，
大圓半徑 = 15， $\overline{PO} = 20$ ，則外公切線段 $\overline{AB} =$ _____



6. L 為內公切線， A 、 B 為切點，若小圓半徑 = 1，
 大圓半徑 = 4， $\overline{PO} = 13$ ，則內公切線段 $\overline{AB} =$ _____

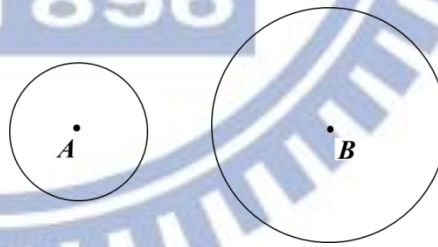


7. 已知：線段 L 、 M ，如右圖 _____ L
 求作：一直角三角形，斜邊長為 L ，一股長為 M _____ M

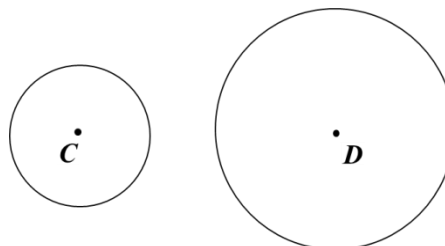
8. P 為圓 O 外一點，利用尺規作圖，畫出通過 P 點，且與圓 O 相切的直線



9. 利用尺規作圖，畫出下圖圓 A 與圓 B 的外公切線

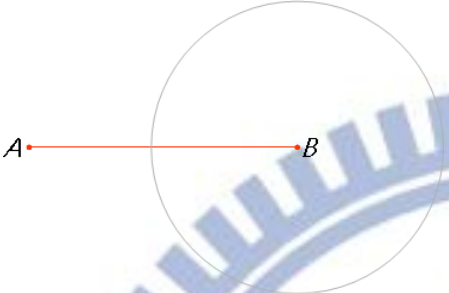
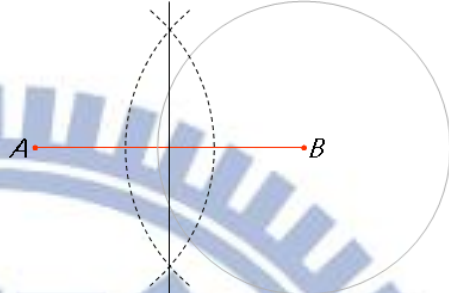
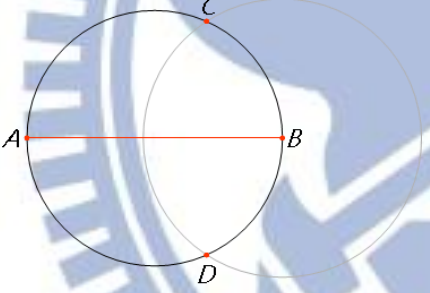
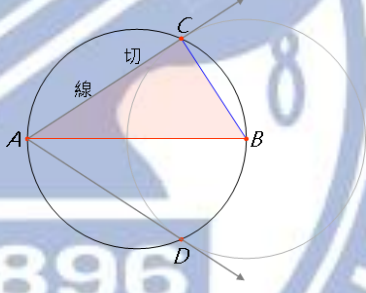


10. 利用尺規作圖，畫出下圖圓 C 與圓 D 的內公切線

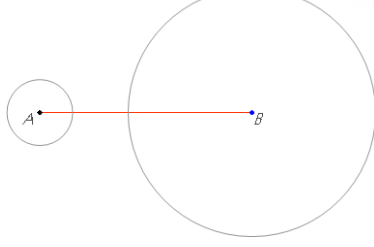
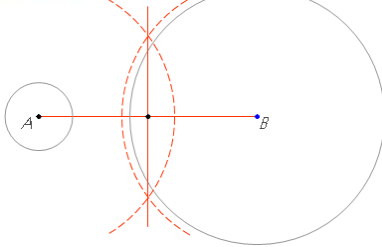


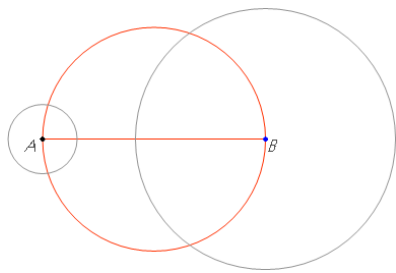
附錄三 後測、延後測試卷作圖題計分標準

1. 1~7 題：每題 4 分，全對才給分
2. 第 8 題：4 分 (點向圓作切線作圖)

 <p>連接 A、B 兩點</p>	 <p>作 \overline{AB} 中垂線</p>
1 分	2 分
 <p>以 \overline{AB} 為直徑畫圓</p>	 <p>連接 \overline{AC}、\overline{AD}</p>
3 分	4 分

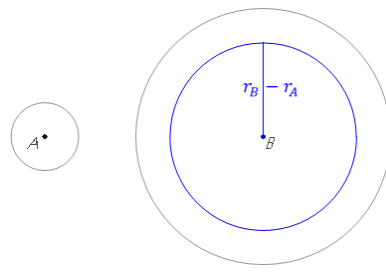
3. 第 9 題：9 分 (外公切線作圖)

 <p>連接 A、B 兩點</p>	 <p>作 \overline{AB} 中垂線</p>
1 分	2 分



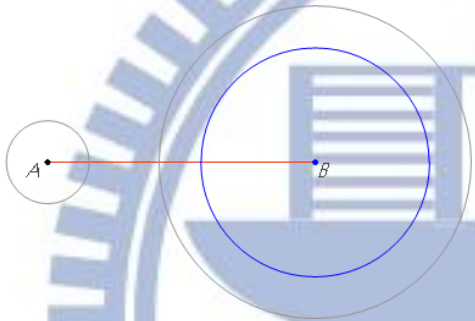
以 \overline{AB} 為直徑畫圓

3 分

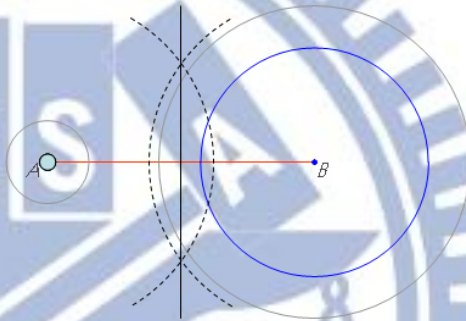


以兩圓半徑差為半徑畫圓

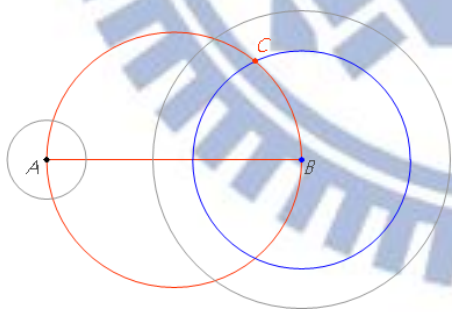
3 分



4 分

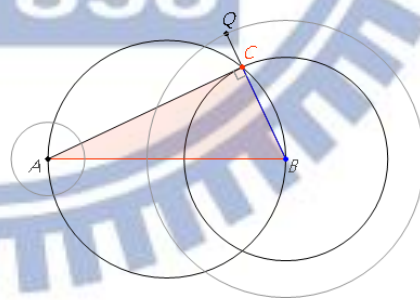


5 分



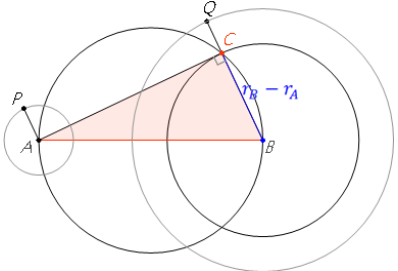
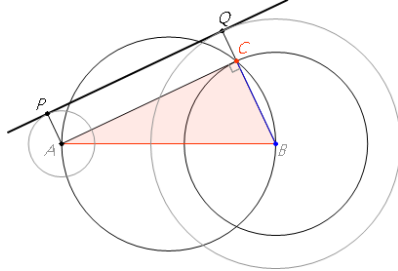
兩圓皆畫出來

6 分


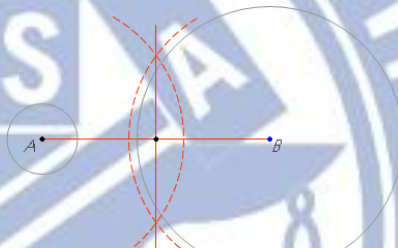
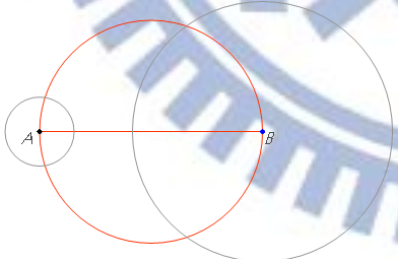
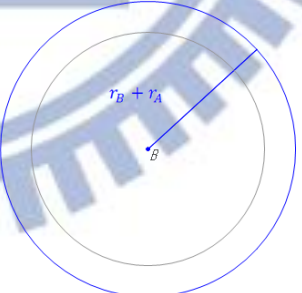


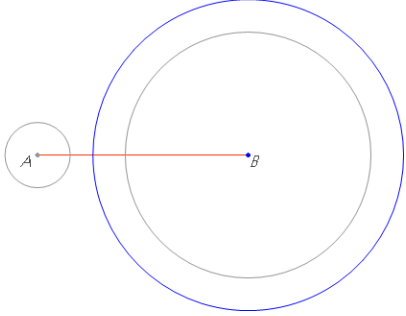
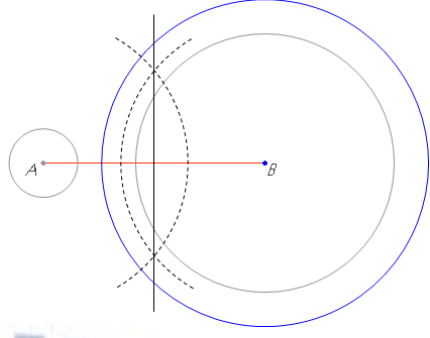
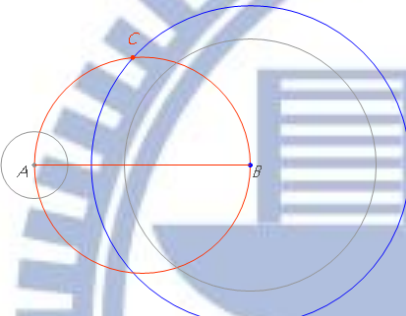
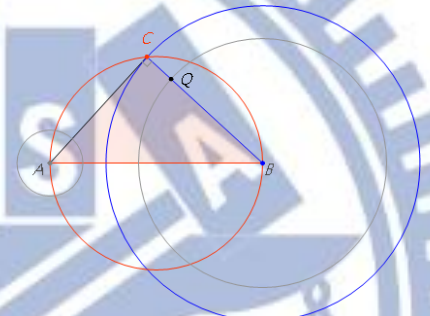
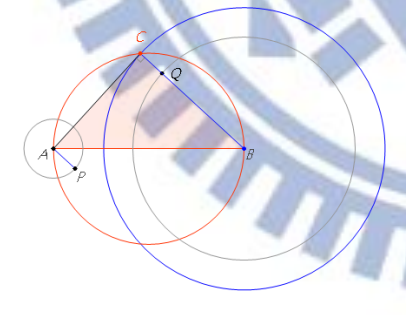
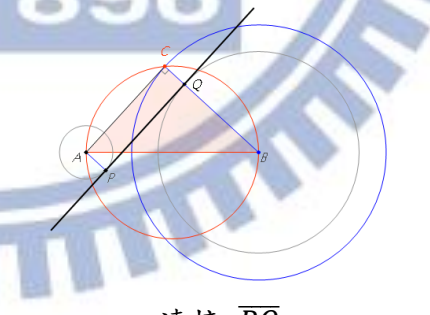
連接 \overline{BC} 、 \overline{AC}

7 分

 <p>作 $\overline{AP} \perp \overline{AC}$ 或 $\overline{AP} \parallel \overline{BC}$</p>	 <p>連接 \overline{PQ}</p>
8 分	9 分 (全對)

4. 第 10 題：9 分 (內公切線作圖)

 <p>連接 A、B 兩點</p>	 <p>作 \overline{AB} 中垂線</p>
1 分	2 分
 <p>以 \overline{AB} 為直徑畫圓</p>	 <p>以兩圓半徑和為半徑畫圓</p>
3 分	3 分

	
4 分	5 分
 <p>兩圓皆畫出來</p>	 <p>連接 \overline{BC}、\overline{AC}</p>
6 分	7 分
 <p>作 $\overline{AP} \perp \overline{AC}$ 或 $\overline{AP} \parallel \overline{BC}$</p>	 <p>連接 \overline{PQ}</p>
8 分	9 分 (全對)

附錄四 實驗組教材

內公切線、外公切線 作圖

一、直徑所對的圓周角	二、直角三角形作圖	三、點切圖作圖	四、外公切線段長度
五、外公切線作圖	六、內公切線段長度	七、內公切線作圖	八、結論

1

一、直徑所對圓周角

若 \overline{AB} 為直徑
則圓周角 $\angle C = 90^\circ$ 度

2

一、直徑所對圓周角

若 \overline{AB} 為直徑
則圓周角 $\angle C = 90^\circ$ 度

3

一、直徑所對圓周角

若 \overline{AB} 為直徑
則圓周角 $\angle C = 90^\circ$ 度

說明：

4

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：

5

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：

6

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：

7

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：

8

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



9

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



10

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：

11

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



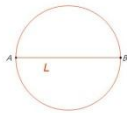
12

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



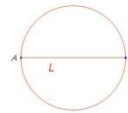
13

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



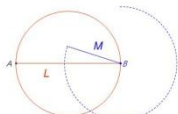
14

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



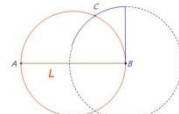
15

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



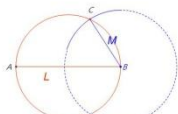
16

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

作法：



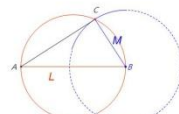
17

二、直角三角形作圖(RHS)

已知：線段 L 、 M ，如右圖 

求作：直角三角形，
使斜邊長為 L ，
一腿長為 M (RHS)

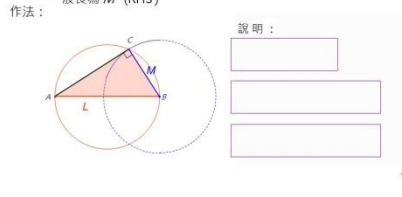
作法：



18

二、直角三角形作圖(RHS)

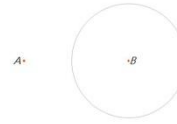
已知：線段 L 、 M ，如右圖
 求作：直角三角形，
 使斜邊長為 L ，
 一腿長為 M (RHS)



19

三、點切圓作圖

已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



20

三、點切圓作圖

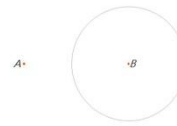
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



21

三、點切圓作圖

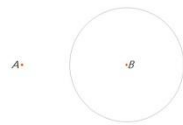
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



22

三、點切圓作圖

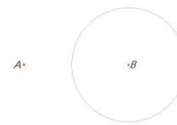
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



23

三、點切圓作圖

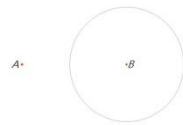
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



24

三、點切圓作圖

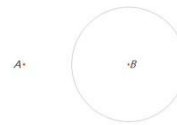
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



25

三、點切圓作圖

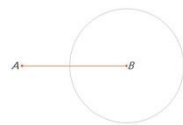
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



26

三、點切圓作圖

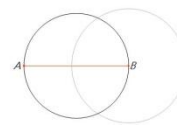
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



27

三、點切圓作圖

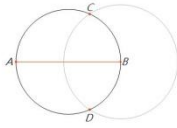
已知：A點為圓B外一點
 求作：過A點作圓B的切線
 作法：



28

三、點切圓作圖

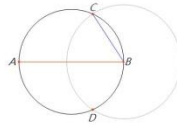
已知：A點為圓B外一點
求作：過A點作圓B的切線
作法：



29

三、點切圓作圖

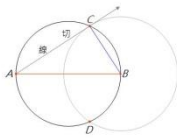
已知：A點為圓B外一點
求作：過A點作圓B的切線
作法：



30

三、點切圓作圖

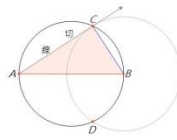
已知：A點為圓B外一點
求作：過A點作圓B的切線
作法：



31

三、點切圓作圖

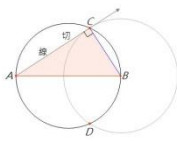
已知：A點為圓B外一點
求作：過A點作圓B的切線
作法：



32

三、點切圓作圖

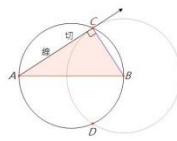
已知：A點為圓B外一點
求作：過A點作圓B的切線
作法：



33

三、點切圓作圖

已知：A點為圓B外一點
求作：過A點作圓B的切線
作法：

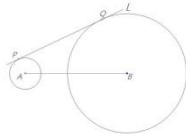


說明：

34

四、外公切線段長度

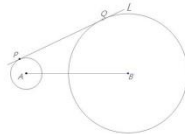
已知：L為外公切線，P、Q為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
則 $PQ = ?$



35

四、外公切線段長度

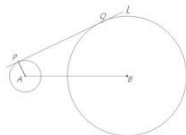
已知：L為外公切線，P、Q為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
則 $PQ = ?$



36

四、外公切線段長度

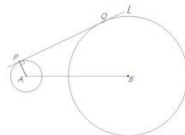
已知：L為外公切線，P、Q為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
則 $PQ = ?$



37

四、外公切線段長度

已知：L為外公切線，P、Q為切點
若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
則 $PQ = ?$



38

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

39

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

40

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

41

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

42

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

43

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

44

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

45

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

46

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = ?$

47

四、外公切線段長度

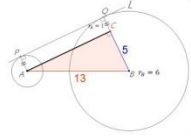
已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $\overline{AB} = 13$
 則 $\overline{PQ} = 12$

48

四、外公切線段長度

已知：L 為外公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 6$ ， $AB = 13$
 則 $PQ = 12$

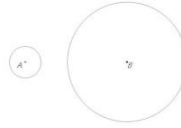
說明：



49

五(1)、外公切線作圖分析

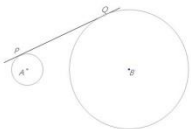
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



50

五(1)、外公切線作圖分析

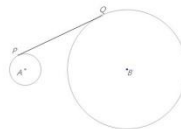
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



51

五(1)、外公切線作圖分析

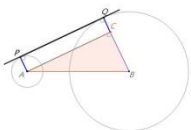
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



52

五(1)、外公切線作圖分析

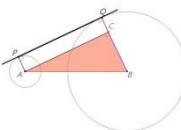
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



53

五(1)、外公切線作圖分析

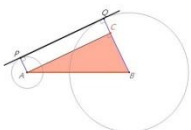
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



54

五(1)、外公切線作圖分析

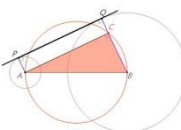
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



55

五(1)、外公切線作圖分析

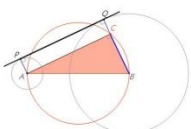
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



56

五(1)、外公切線作圖分析

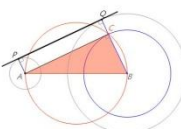
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



57

五(1)、外公切線作圖分析

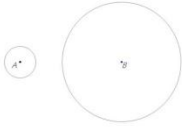
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 分析：



58

五(2)、外公切線作圖 作法

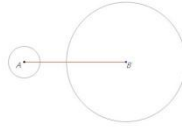
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



59

五(2)、外公切線作圖 作法

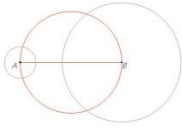
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



60

五(2)、外公切線作圖 作法

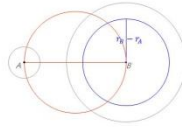
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



61

五(2)、外公切線作圖 作法

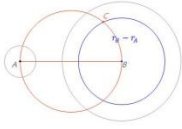
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



62

五(2)、外公切線作圖 作法

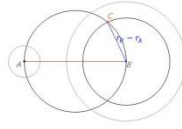
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



63

五(2)、外公切線作圖 作法

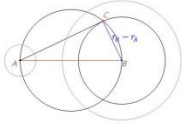
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



64

五(2)、外公切線作圖 作法

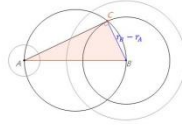
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



65

五(2)、外公切線作圖 作法

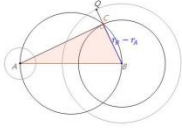
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



66

五(2)、外公切線作圖 作法

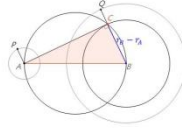
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



67

五(2)、外公切線作圖 作法

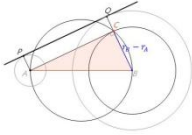
已知：圓 A 、圓 B
 求作：圓 A 、圓 B 之外公切線
 作法：



68

五(2)、外公切線作圖 作法

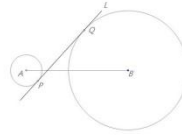
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之外公切線
 作法：



69

六、內公切線段長度

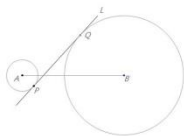
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



70

六、內公切線段長度

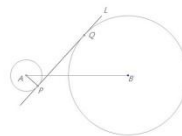
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



71

六、內公切線段長度

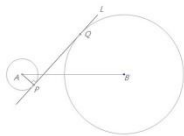
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



72

六、內公切線段長度

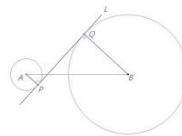
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



73

六、內公切線段長度

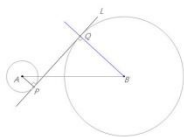
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



74

六、內公切線段長度

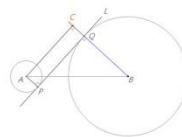
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



75

六、內公切線段長度

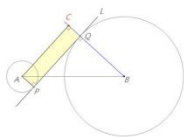
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



76

六、內公切線段長度

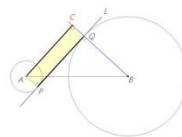
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



77

六、內公切線段長度

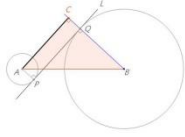
已知：L為內公切線，P、Q為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



78

六、內公切線段長度

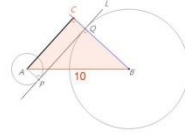
已知：L 為內公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



79

六、內公切線段長度

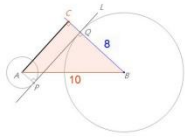
已知：L 為內公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



80

六、內公切線段長度

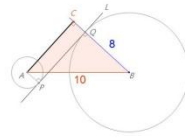
已知：L 為內公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = ?$



81

六、內公切線段長度

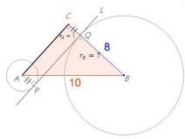
已知：L 為內公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = 6$



82

六、內公切線段長度

已知：L 為內公切線，P、Q 為切點
 若 $r_A = 1$ ， $r_B = 7$ ， $AB = 10$
 則 $PQ = 6$

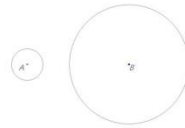


說明：

83

七(1)、內公切線段作圖分析

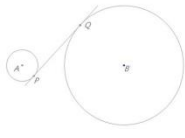
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：



84

七(1)、內公切線段作圖分析

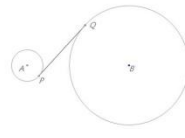
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：



85

七(1)、內公切線段作圖分析

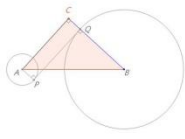
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：



86

七(1)、內公切線段作圖分析

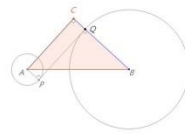
已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：



87

七(1)、內公切線段作圖分析

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：



88

七(1)、內公切線段作圖 分析

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：

89

七(1)、內公切線段作圖 分析

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：

90

七(1)、內公切線段作圖 分析

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：

91

七(1)、內公切線段作圖 分析

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 分析：

92

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

93

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

94

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

95

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

96

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

97

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

98

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

99

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

100

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

101

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

102

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

103

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

104

七(2)、內公切線段作圖 作法

已知：圓A、圓B
 求作：圓A、圓B之內公切線
 作法：

105

八、結 論

106

八、結 論

107

八、結 論

108

八、結 論

作圖	直角三角形 (RHS)	點切圓	外公切線	內公切線
圖示				
相似處	1.皆須作 直角三角形 ，斜邊長及一股長為已知 2.斜邊長即為兩點之距離 3.以 斜邊長 為 直徑 畫圓			
相異處	以股長為半徑 畫第二個圓	不需再畫第 二個圓	以 半徑差 為半徑 畫第二個圓	以 半徑和 為半徑 畫第二個圓

