

國立交通大學
機械工程學系碩士班
碩 士 論 文

雙晶壓電梁的定位控制

Application of Piezoelectric Bimorphs in Position Control

研 究 生：蔡德新

指導教授：尹慶中 博士

中 華 民 國 九 十 四 年 七 月

雙晶壓電梁的定位控制

Application of Piezoelectric Bimorphs in Position Control

研 究 生：蔡德新

Student：De-Shin Tsai

指導教授：尹慶中 博士

Advisor：Dr. Ching-Chung Yin

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

July 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 九十四 年 七 月

雙晶壓電梁的定位控制

研究生：蔡德新

指導教授：尹慶中 博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘 要

本研究探討雙晶壓電梁致動器應用於微米尺度的精密定位技術，首先以漢彌爾頓定理推導壓電梁振動的理論模型，利用黏貼於梁上下表面的兩枚應變規，構成半橋式量測系統，量測壓電梁的軸向動態應變。由壓電梁最低的兩個共振頻率響應的波德圖，以系統識別得到動態結構的轉移函數。利用比例積分控制及相位領先補償等古典控制法則對壓電梁共振響應進行即時補償，使梁末端之橫向位移能達到精密定位的性能。壓電梁的遲滯與潛變特性對系統之影響亦一併討論。

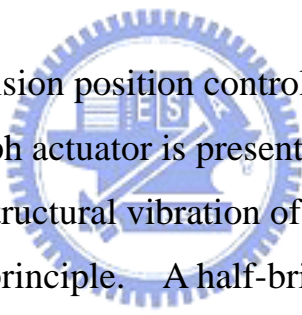
Application of Piezoelectric Bimorphs in Position Control

Student : De-Shin Tsai

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT



A technique of precision position control in sub-micrometer scale using piezoelectric bimorph actuator is presented in this thesis. Mathematical model for structural vibration of the piezoelectric bimorph is derived by Hamilton's principle. A half-bridge system measuring the axial, dynamic strain of the bimorph is composed of two strain gauges mounted on the top and bottom surfaces of the bimorph to get rid of thermal expansion effect. Physical transfer function of the piezoelectric bimorph is determined through system identification from Bode diagram of the lowest two flexural resonant modes. Classical control theories including proportional-plus-integral control and phase-lead compensator are used to real-time compensate the resonant response occurring in lateral deflection at the tip of the bimorph. The influences of creep and hysteresis in piezoelectric bimorphs on the system response are also well discussed in the study.

誌謝

在兩年的研究生生涯當中，感謝指導教授 尹慶中博士的悉心指導與教誨，使德新學習到許多經驗並獲得成長，在此至上由衷的謝意。同時感謝蕭國模老師、陳宗麟老師及何旭川老師撥允擔任學生口試委員，給予學生指教與指正。

德新最感謝的是偉大的雙親，蔡文傑先生與李麗華女士，你們是德新精神上最大的支柱，求學之路有你們的呵護與寬容，並給予德新無匱乏的生活及無限的關懷與支持，讓德新無後顧之憂下成長，即使面對挫折也能以堅毅的心泰然處之，以順利完成學業。能有今天的成就，德新由衷的感謝。

感謝學長王多聞、游泰和、劉育翔、許世明、溫子達、李雨青、羅世青、楊秋華、徐家保及工研院的鄭凱宇、蘇余益學長提供德新生活上及學習上的寶貴經驗，幫助德新提早適應實驗室生活，也謝謝你們讓德新的視野更加開闊。同學許家豪、孫繼增、黃俊傑，讓德新求學之路並不孤獨，給予許多的扶持和幫助及鼓勵。學弟張桓禎、陳俊宏、黃國彰、曾世華過去一年裡謝謝你們的陪伴，讓德新的研究所生活增色不少，也在此祝福你們論文順利。還有許多不及備載的朋友給予德新許多協助與建議，德新亦銘記在心。謹以此論文獻給我的摯愛的父母及朋友，再次謝謝你們，謝謝。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
 第一章 緒論	
1.1 前言	1
1.2 研究背景	1
1.3 文獻回顧	2
1.4 研究內容	3
 第二章 理論基礎	
2.1 壓電雙晶片致動器	4
2.2 壓電雙晶片之動態方程式	4
2.3 壓電雙晶片梁之振動	11
 第三章 實驗系統及系統識別	
3.1 實驗系統	15
3.2 撓曲位移與電橋輸出之關係	15
3.3 頻譜分析法	17
3.4 系統識別	18
 第四章 控制法則與控制實驗	
4.1 系統分析	23



4.2 PI-相位領先控制器之原理與設計	24
4.3 控制實驗	27
4.4 相位領先補償之於 PI 控制法則的影響	27
第五章 實驗結果與討論	
5.1 控制器對壓電梁動態響應的影響	29
5.2 壓電材料的潛變與遲滯	30
第六章 結論與展望	
6.1 結論	32
6.2 未來展望	33
參考文獻	34
附錄	36
圖	38



圖目錄

圖 1	雙晶壓電梁及單晶壓電梁	38
圖 2	雙晶壓電梁長度規格	39
圖 3	d_{31} 致動器， $d_{31} < 0$	39
圖 4	壓電梁彎曲振動	40
圖 5	應變規黏貼、接線及惠斯同電橋示意圖	40
圖 6	系統頻譜分析實驗	41
圖 7	變頻正弦波輸入訊號	42
圖 8	系統經變頻正弦波輸入後之輸出訊號	42
圖 9	頻譜分析法流程圖	43
圖 10(a)	開路系統電壓對應變方塊圖	44
圖 10(b)	開路系統電壓對梁末端橫向位移方塊圖	44
圖 10(c)	路系統加入濾波器之方塊圖	44
圖 11	實驗與模擬之電壓對應變之頻率響應圖	45
圖 12	步階響應頻譜圖	45
圖 13	共振與反共振峰值非常接近，造成能量耦合示意圖	46
圖 14	系統識別與實驗量測的步響應圖形	46
圖 15	系統識別的波德圖與加入濾波器後的系統波德圖	47
圖 16	模擬的橫向位移波德圖	47
圖 17	系統經第一次補償之方塊圖	48
圖 18	系統(實線)與 PI 控制器(虛線)之波德圖	48
圖 19	系統經 PI 控制器補償後的頻率響應圖	48
圖 20	系統經第二次補償之方塊圖	49
圖 21	第一次補償的系統(實線)與相位領先控制器(虛線)之頻率響應圖	49

圖 22	系統經相位領先補償後頻率響應圖	49
圖 23	系統經第三次補償之方塊圖	50
圖 24	第二次補償後的系統(實線)與比例放大器(虛線)之波德圖	50
圖 25	第三次補償後，系統之頻率響應圖	50
圖 26	閉迴路控制實驗架構	51
圖 27(a)	壓電梁末端位移 $100\ \mu\text{m}$ 定位控制的時間響應圖	52
圖 27(b)	雜訊對圖 27(a)定位精度所造成的平均誤差	52
圖 27(c)	未補償與補償後系統之步階響應圖形	53
圖 28	PI-相位領先補償與 PI 控制器補償實驗比較	53
圖 29	PI-相位領先補償與 PI 補償閉迴路系統的頻寬	54
圖 30	PI-相位領先補償之閉迴路極點	54
圖 31	PI 補償後之閉迴路極點	55
圖 32	頻率 $1\ \text{rad/s}$ 與 $100\ \text{rad/s}$ 之遲滯曲線	55
圖 33	壓電管	56
圖 34(a)	穩定系統對應的相位邊限與增益邊限	57
圖 34(b)	不穩定系統對應的相位邊限與增益邊限	57

第一章 緒論

1.1 前言

壓電材料具有位移小、施力大、響應快、能量轉換率高，無電磁干擾等優點，應用非常的廣泛，一般常作為致動器的壓電材料如PZT、PVF₂等，應用在感測元件的材料如PVDF。

壓電材料作為感測器的原理是利用其正壓電效應，將機械能轉換成電能的效應，感測源可能是來自於聲波、速度、加速度、壓力、正向力、剪力、彎曲力矩或溫度等。

本研究的重點主要探討壓電材料在作為致動元件時，應用逆壓電效應，即電能轉換成機械能的效應，產生變形以驅動物體，致動源來自於電流、電壓、脈衝等。通常壓電致動器的最大伸長量僅有數十微米，解析度尺寸可達奈米等級，加上剛性高及響應快的優點，非常適合應用在精密定位的技術上。

壓電致動器雖能達到奈米級解析度的要求，但一般壓電材料都具有非線性的遲滯現象，在開路系統狀態下，無法達到良好的精度。因此，設計控制器補償壓電遲滯效應仍是現今非常熱門的領域。

1.2 研究背景

工業界對微結構觀察的精度需求與日俱增，近年來，陸續有相當多的顯微技術被研發出來，突破傳統光學顯微鏡解析度的限制，掃描式電子顯微鏡(Scanning Electron Microscope, SEM)於1940年開被發出來，利用電子束取代可見光波，將高能電子聚焦在試片掃描上，解析度可達20埃(Å)，是顯微技術上的一大突破。可是必須在真空的環境下操作，非導體的試片還需要鍍上一層金屬薄膜，因此破壞了材料

本身的表面性質。

1982 年，蘇黎世的 IBM 表面科學實驗室的 Binnig 及 Rohrer 發明了掃描式穿隧顯微鏡(Scanning Tunneling Microscope, STM)，利用一支極細的金屬探針與金屬試片表面距離保持在數個奈米以下時，會誘發穿隧電流。當探針在金屬表面掃描時，若保持穿隧電流為一定值，記錄探針尖端的高低位置，可以得知試片表面的型態。在蘇黎世 IBM 實驗室成功發表掃描式穿隧顯微鏡之後，世界各大實驗室爭相研究發展，至今已開發的相關顯微鏡如電子力顯微鏡(Electric Force Microscope, EFM)、磁力顯微鏡(Magnetic Force Microscope, MFM)、原子力顯微鏡(Atomic Force Microscope, AFM)等，不同物理用途的顯微鏡紛紛問世，統稱為掃描式探針顯微鏡(Scanning Probe Microscope, SPM)，儘管這些探針原理不同，掃描時都用到壓電梁的致動原理。

1.3 文獻回顧

在壓電梁的理論探討上，Smits *et al* [1]使用力學及能量觀念，以圖 1(b)的結構做討論，推導了壓電梁靜態的撓曲方程式，Smits 與 Choi [2]於 1991 年，發表了考慮遲滯現象的靜態撓曲方程式。Wolf [3]討論了壓電單晶梁的應用，並以能量法推導其動態的統御方程式。

在壓電梁的靜態控制應用方面，Yang與 Ngoi [4]利用離散式的壓電元件，成對的貼在梁的上下表面，在使其可以產生不同的彎曲形狀。在動態控制應用上，Low與Guo [5]將單一方向擺動壓電雙晶簡支梁，用來驅動物體。Bailey與Hubbard [6]在旋轉的梁形葉片上黏貼一 PVF₂，以抵抗離心力作用所導致梁的彎曲現象。Hirse Korn [7]討論了壓電雙晶片梁在流體中的彎曲振動，將流體的黏滯力視為一遲滯阻尼，予以討論。

1.4 研究內容

本研究以掃描式探針顯微鏡探針的線掃描致動控制為目標，採用壓電晶片梁作為致動器，分為單晶片(unimorph)及雙晶片(bimorph)兩種梁結構。利用漢米爾頓定理，針對壓電懸臂梁結構的基本動態行為作理論分析，並應用古典控制理論，補償壓電梁在動態響應裡，產生的不穩定現象，提高響應速度，使壓電梁末端達到精密定位的要求。



第二章 理論基礎

2.1 雙晶壓電梁致動器

本實驗所採用的壓電雙晶片梁是 APC 公司生產，型號為 40-1010 (600/200/0.60-SA)，結構與圖 1(c)相似。參考圖 2 的示意圖，壓電梁上下層為壓電材料，極化方向皆朝向+z 方向，在上、下壓電片的上、下表面各鍍上一層電極層作為電極連線之用，其長 $l=50\text{ mm}$ ，寬 $b=20\text{ mm}$ ，厚度 $t_a=0.25\text{ mm}$ 。此壓電雙晶片與圖 1(c)不同之處在於兩壓電晶片間所夾的電極層厚度極為微小，因此不予以討論。

壓電雙晶片梁的振動，是利用 d_{31} 致動器原理，參考圖 3 所示，座標軸 1、2、3 分別代表 x_1 、 x_2 、 x_3 軸或習慣上表示之 x 、 y 、 z 座標軸。於 $d_{31}<0$ 的條件下，供給一電場 E ，其方向與壓電極材料的極化方向為 3 方向，則壓電梁朝 1 方向縮短，反之則伸長。參考圖 4 所示，利用此機制，將上下壓電雙晶片梁的電極接上 $+v$ 電位，彈性體夾層接上 $-v$ 電位，則在壓電晶片上各會產生一電場。由前述可知，上壓電片軸向長度會伸長而下壓電片會縮短，在上下壓電片一伸一縮之際，軸向力彼此相互抵消，因此，壓電的梁中性面(neutral surface)不會有軸向應變產生，僅有一純力矩使梁產生彎曲。

2.2 壓電雙晶片之統御方程式

考慮一維的 e 型態之電性位移矩陣張量，表示如下

$$\begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & -e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix}$$

其中， T 為應力(stress)， S 為應變(strain)， D 為電通量或電位移(electric displacement)， E 為電場(electric field)， Y 為剛性係數(Young's

modulus), ε 為介電常數(dielectric constant of constant strain), e 為壓電係數(piezoelectric constant)。

壓電雙晶片在 xz 平面(或稱 $x_1 x_3$ 平面)上的彎曲振動屬於平面應力(plane stress), 電通量只有在 z 方向產生變化, 可將矩陣簡化為

$$T_1 = Y_{11}S_1 - e_{31}E_3 \quad (2.1a)$$

$$D_3 = e_{31}S_1 + \varepsilon_{33}E_3 \quad (2.1b)$$

其中, T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 、 T_6 、 D_1 、 D_2 、 E_1 、 E_2 皆為零。

根據柏努利-尤拉梁(Bernoulli-Euler beam)理論, 梁的位移場(displacement field)為

$$u_1(x, t) = -zw_{,x} \quad (2.2a)$$

$$u_2(x, t) = 0 \quad (2.2b)$$

$$u_3(x, t) = w(x, t) = w \quad (2.2c)$$

其中, 下標的逗點(comma)符號代表對於緊接在逗點之後的其他下標偏微分, 以後出現者定義相同。應變場為

$$S_1 = -zw_{,xx}, \quad S_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, 6) \quad (2.3)$$

首先討論下壓電片, 由(2.1a)式至(2.3)式可得

$$T_1^L = Y_{11}(-zw_{,xx}) - e_{31}E_3^L \quad (2.4a)$$

$$D_3^L = e_{31}(-zw_{,xx}) + \varepsilon_{33}E_3^L \quad (2.4b)$$

假設 z 方向上的電位移為一定值(初始狀態不帶電荷), (2.4b)可得

$$D_{3,3}^L = 0 \quad (2.5)$$

參考 Wolf [3], 由(2.4b)及(2.5)式, 可獲得

$$E_{3,3}^L = \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \quad (2.6)$$

由(2.4b)式, 可知電場為 x 與 z 的函數, 假設電位函數為

$$\phi(x, z) = \phi_0(x) + \phi_1(x)z + \phi_2(x)z^2 \quad (2.7)$$

所以電場為

$$E_3^L = \frac{-\partial\phi}{\partial z} = -\phi_1(x) - 2\phi_2(x)z \quad (2.8)$$

由(2.6)式可得

$$\phi_2 = \frac{-e_{31}w_{,xx}}{2\varepsilon_{33}} \quad (2.9)$$

假設上下壓電片之上下表面電位差為 $\Delta\phi$ ，可得到下列關係：

$$\phi(x,0) - \phi(x,-t_a) = \Delta\phi = -v \quad (2.10)$$

$$\phi_1(x) = \frac{-v}{t_a} + \phi_2(x)t_a \quad (2.11)$$

$$E_3^L = \frac{v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \left(z + \frac{t_a}{2} \right) \quad (2.12)$$

同理，上壓電片之電場可表示為

$$E_3^U = \frac{-v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \left(z - \frac{t_a}{2} \right) \quad (2.13)$$

將(2.12)式代入(2.4a)式，可得到下壓電片軸向應力與側向電位移為

$$\begin{cases} T_1^L = Y_{11}(-zw_{,xx}) - e_{31} \left\{ \frac{v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \left[z + \frac{t_a}{2} \right] \right\} \\ D_3^L = e_{31}(-zw_{,xx}) + \varepsilon_{33} \left\{ \frac{v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \left[z + \frac{t_a}{2} \right] \right\} \end{cases} \quad (2.14)$$

將(2.13)式代入(2.4b)式，可得到上壓電片軸向應力與側向電位移為

$$\begin{cases} T_1^U = Y_{11}(-zw_{,xx}) - e_{31} \left\{ \frac{-v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \left[z - \frac{t_a}{2} \right] \right\} \\ D_3^U = e_{31}(-zw_{,xx}) + \varepsilon_{33} \left\{ \frac{-v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\varepsilon_{33}} \left[z - \frac{t_a}{2} \right] \right\} \end{cases} \quad (2.15)$$

壓電材料之總能量以電焓(electric enthalpy)表示，在電-機械系統(electromechanical system)裡定義為

$$\int_V H dV = \int_V \frac{1}{2} (T_1 S_1 - D_3 E_3) dV \quad (2.16)$$

將(2.14)式與(2.15)式分別代入(2.16)式，可得下壓電片與上壓電片的電焓為

$$\begin{aligned} \int_V H_L dV &= \int_{V_L} \frac{1}{2} \left\{ Y_{11}(-zw_{,xx}) - e_{31} \left[\frac{v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\epsilon_{33}} \left(z + \frac{t_a}{2} \right) \right] \right\} (-zw_{,xx}) dV_L \\ &\quad - \int_{V_L} \frac{1}{2} \left\{ e_{31}(-zw_{,xx}) + \epsilon_{33} \left[\frac{v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\epsilon_{33}} \left(z + \frac{t_a}{2} \right) \right] \right\} \left[\frac{v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\epsilon_{33}} \left(z + \frac{t_a}{2} \right) \right] dV_L \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \int_V H_U dV &= \int_{V_U} \frac{1}{2} \left\{ Y_{11}(-zw_{,xx}) - e_{31} \left[\frac{-v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\epsilon_{33}} \left(z - \frac{t_a}{2} \right) \right] \right\} (-zw_{,xx}) dV_U \\ &\quad - \int_{V_U} \frac{1}{2} \left\{ e_{31}(-zw_{,xx}) + \epsilon_{33} \left[\frac{-v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\epsilon_{33}} \left(z - \frac{t_a}{2} \right) \right] \right\} \left[\frac{-v}{t_a} + \frac{e_{31}w_{,xx}}{\epsilon_{33}} \left(z - \frac{t_a}{2} \right) \right] dV_U \end{aligned} \quad (2.18)$$

總電焓等於(2.17)式與(2.18)式的和，即

$$\begin{aligned} \int_V H_{total} dV &= \int_{V_L} H_L dV_L + \int_{V_U} H_U dV_U \\ &= \int_0^l \frac{bt_a^3(4Y_{11}\epsilon_{33} + e_{31}^2)}{12\epsilon_{33}} w_{,xx}^2 - (vbe_{31}t_a)w_{,xx} - \frac{v^2b\epsilon_{33}}{t_a} dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

假設 ρ 為壓電材料的密度，則上、下壓電片的動能分別為

$$\int_{V_L} T_L dV_L = \int_{V_L} \frac{\rho}{2} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV_L \quad (2.20)$$

$$\int_{V_U} T_U dV_U = \int_{V_U} \frac{\rho}{2} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV_U \quad (2.21)$$

總動能為(2.20)式與(2.21)式的和，即

$$\begin{aligned}\int_V T_{total} dV &= \int_{V_L} T_L dV_L + \int_{V_U} T_U dV_U \\ &= \int_0^l \rho b \left[\frac{t_a^3}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + t_a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx\end{aligned}\quad (2.22)$$

若不考慮旋轉慣性項，(2.22)式可簡化為

$$\int_V T_{total} dV = \int_0^l \rho b t_a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.23)$$

外力與外加電場所做的作虛功(virtual work)為

$$\delta \int_V W dV = \int_A (f_i \delta u_i - \sigma \delta \phi) dA \quad (2.24)$$

其中， f_i 與 σ 分別為表面牽引力(surface traction)與表面電荷密度(surface charge density)， δu_i 與 $\delta \phi$ 分別為虛位移及虛電位。

外加力矩與外加剪力在 $x=0$ 及 $x=l$ 時所作虛功分別為

$$M(l) \delta w_{,x} \Big|_{x=l} - M(0) \delta w_{,x} \Big|_{x=0} \quad (2.25)$$

$$F(0) \delta w(0) - F(l) \delta w(l) \quad (2.26)$$

若結構振動時，因阻尼而消耗能量，其所作的虛功為

$$-\int_V C_V w_{,t} \delta w dV = -\int_0^l C w_{,t} \delta w dx \quad (2.27)$$

其中， C 為每單位面積的阻尼係數。其次，外加電場所作虛功為

$$\int_A (-\sigma \delta \phi) dA = \int_A (D_i n_i \delta \phi) dA = Q \delta \phi \quad (2.28)$$

其中， Q 為表面總電荷，表示為

$$Q = \int_A (D_i n_i) dA \quad (2.29)$$

將(2.14)式與(2.15)式代入(2.29)，可知外加電場所產生的表面總電荷為

$$Q_L = \left(\frac{t_a e_{31} b}{2} \right) w_{,x} \Big|_0^l + \frac{b l v \varepsilon_{33}}{t_a} \quad (2.30)$$

$$Q_U = - \left(\frac{t_a e_{31} b}{2} \right) w_{,x} \Big|_0^l - \frac{b l v \varepsilon_{33}}{t_a} \quad (2.31)$$

由(2.25)、(2.26)、(2.30)、(2.31)式，可知

$$\begin{aligned} \delta W = & M(l) \delta w_{,x} \Big|_{x=l} - M(0) \delta w_{,x} \Big|_{x=0} + F(0) \delta w(0) - F(l) \delta w(l) \\ & + Q \delta \phi - \int_0^l C w_{,t} \delta w dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

利用漢彌爾頓定理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V (T_{total} - H_{total}) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (2.33)$$

其中，各項場變數在時間上下限 t_1 、 t_2 之變分為零，將(2.19)、(2.23)、(2.32)式代入(2.33)式，可得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[(2\rho b t_a) w_{,tt} + C w_{,t} + \frac{b t_a^3 (4Y_{11} \varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6 \varepsilon_{33}} w_{,xxxx} \right] \delta w dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{b t_a^3 (4Y_{11} \varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6 \varepsilon_{33}} w_{,xx} - v b e_{31} t_a \right] \delta w_{,x} \Big|_0^l dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{b t_a^3 (4Y_{11} \varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6 \varepsilon_{33}} w_{,xxx} \delta w \Big|_0^l dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[M(l) \delta w_{,x} \Big|_{x=l} - M(0) \delta w_{,x} \Big|_{x=0} - F(l) \delta w(l) + F(0) \delta w(0) \right] dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (Q \delta \phi) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

因此，統御方程式為

$$(2\rho b t_a) w_{,tt} + C w_{,t} + \frac{b t_a^3 (4Y_{11} \varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6 \varepsilon_{33}} w_{,xxxx} = 0 \quad (2.35)$$

邊界條件為

$$\frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xx} - vbe_{31}t_a + M(0) = 0 \quad \text{or} \quad w_{,x}(0) = 0 \quad (2.36a)$$

$$\frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xx} - vbe_{31}t_a + M(l) = 0 \quad \text{or} \quad w_{,x}(l) = 0 \quad (2.36b)$$

$$\frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xxx}(0) + F(0) = 0 \quad \text{or} \quad w(0) = 0 \quad (2.37a)$$

$$\frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xxx}(l) + F(l) = 0 \quad \text{or} \quad w(l) = 0 \quad (2.37b)$$

$$Q_L = \frac{e_{31}bt_a}{2}w_x(l) + \frac{blv\varepsilon_{33}}{t_a} = 0 \quad \text{or} \quad \phi_L = 0 \quad (2.38a)$$

$$Q_U = \frac{-e_{31}bt_a}{2}w_x(l) - \frac{blv\varepsilon_{33}}{t_a} = 0 \quad \text{or} \quad \phi_U = 0 \quad (2.38b)$$

若邊界 $x = l$ ，不受外力作用，則分別由(2.36b)式與(2.37b)式推得

$$\frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xx} = vbe_{31}t_a \quad (2.39)$$

$$\frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xxx} = 0 \quad (2.40)$$

由(2.39)式可知在邊界 $x = l$ 時，輸入電位 $v(t)$ 將使壓電梁產生一彎曲力矩 M_v ，

$$M_v = \frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}w_{,xx} = v(t)be_{31}t_a \quad (2.41)$$

令 $\Omega = 2\rho bt_a$ ， $\Theta = \frac{bt_a^3(4Y_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{6\varepsilon_{33}}$ ，則統御方程式為

$$\Omega w_{,tt} + C w_{,t} + \Theta w_{,xxxx} = 0 \quad (2.42)$$

邊界條件為

$$w(0, t) = 0 \quad (2.43a)$$

$$w_{,x}(0,t) = 0 \quad (2.43b)$$

$$w_{,xx}(l,t) = \frac{v(t)be_{31}t_a}{\Theta} \quad (2.43c)$$

$$w_{,xxx}(l,t) = 0 \quad (2.43d)$$

2.3 壓電雙晶片梁之振動

由邊界條件(2.43a-d)式，可將 $w(x,t)$ 假設為

$$w(x,t) = \gamma(x,t) + \varphi(x,t) \quad (2.44)$$

其中， $\gamma(x,t)$ 與 $\varphi(x,t)$ 分別滿足下列邊界條件

$$\gamma(0,t) = 0 \quad (2.45a)$$

$$\gamma_{,x}(0,t) = 0 \quad (2.45b)$$

$$\gamma_{,xx}(l,t) = 0 \quad (2.45c)$$

$$\gamma_{,xxx}(l,t) = 0 \quad (2.45d)$$

$$\varphi(0,t) = 0 \quad (2.46a)$$

$$\varphi_{,x}(0,t) = 0 \quad (2.46b)$$

$$\varphi_{,xx}(l,t) = \frac{v(t)be_{31}t_a}{\Theta} \quad (2.46c)$$

$$\varphi_{,xxx}(l,t) = 0 \quad (2.46d)$$

假設

$$\varphi(x,t) = a_1(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_3(t)x + a_4(t)$$

且滿足邊界條件(2.46a-d)式，可得

$$\varphi(x,t) = \frac{v(t)be_{31}t_a}{2\Theta} x^2 \quad (2.47)$$

將(2.47)式代入(2.43)式，改寫成

$$w(x,t) = \gamma(x,t) + \frac{v(t)be_{31}t_a}{2\Theta} x^2 \quad (2.48)$$

將(2.48)式代入(2.42)式，可得



$$\begin{aligned}\Omega\gamma_{,tt} + C\gamma_{,t} + \Theta\gamma_{,xxxx} &= -(\Omega\varphi_{,tt} + C\varphi_{,t} + \Theta\varphi_{,xxxx}) \\ &= -\frac{be_{31}t_a}{2\Theta}(\ddot{v}(t)\Omega + \dot{v}(t)C)x^2\end{aligned}\quad (2.49)$$

利用分離變數法，將 $\gamma(x,t)$ 改寫為空間及時間函數的乘積，
 $\gamma(x,t) = U(x)T(t)$ 。以下先討論齊性解(homogenous solution)即自由振動問題，

$$U_{,xxxx} - \frac{\Omega}{\Theta}\omega^2 U = 0 \quad (2.50a)$$

$$T_{,tt} + \omega^2 T = 0 \quad (2.50b)$$

其中， ω 為自然頻率。且令 $\lambda^4 = \Omega\omega^2/\Theta$ ，則空間函數解為

$$U = a_1 \sin \lambda x + a_2 \cos \lambda x + a_3 \sinh \lambda x + a_4 \cosh \lambda x \quad (2.51)$$

由邊界條件(2.45a-d)式，可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 \sin \lambda l & -\lambda^2 \cos \lambda l & \lambda^2 \sinh \lambda l & \lambda^2 \cosh \lambda l \\ -\lambda^3 \cos \lambda l & \lambda^3 \sin \lambda l & \lambda^3 \cosh \lambda l & \lambda^3 \sinh \lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

若存在非零解，則可得特徵方程式(characteristic equation)

$$\cosh \lambda l \cos \lambda l = -1 \quad (2.53)$$

所以

$$a_1 = -a_3, \quad a_2 = -a_4, \quad a_3 = -\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} a_4 \quad (2.54)$$

將(2.54)式代入(2.51)式，可得空間函數為

$$U = a_4 \left[\cosh \lambda x - \cos \lambda x - \left(\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} \right) (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right] \quad (2.55)$$

將 $\gamma(x,t)$ 以特徵函數展開(eigenfunction expansion)表示，則

$$\gamma(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) U_m(x)$$

代入(2.49)式，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Omega U_m \ddot{T}_m + \sum_{m=1}^{\infty} C U_m \dot{T}_m + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega \omega_m^2 U_m T_m = -\frac{be_{31}t_a}{2\Theta} (\ddot{v}(t)\Omega + \dot{v}(t)C)x^2 \quad (2.56)$$

區間 $[0, l]$ 上的一組特徵函數 $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ 滿足正交性條件，即

$$\int_0^l U_n U_m dx \begin{cases} = 0, & n \neq m \\ \neq 0, & n = m \end{cases} \quad (2.57)$$

因此，改寫(2.56)式，可得

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^l \Omega U_n^2 dx \right) \ddot{T}_n + \left(\int_0^l C U_n^2 dx \right) \dot{T}_n + \left(\int_0^l \Omega \omega_n^2 U_n^2 dx \right) T_n \\ &= -\frac{be_{31}t_a}{2\Theta} (\ddot{v}(t)\Omega + \dot{v}(t)C) \int_0^l U_n x^2 dx \end{aligned} \quad (2.58)$$

討論在 $x=l$ 處的位移量 $\gamma(x,t)|_{x=l}$ ，令(2.58)式等號兩端乘上 $U_n(l)$ ，則

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^l \Omega U_n^2 dx \right) \ddot{\gamma}(l,t) + \left(\int_0^l C U_n^2 dx \right) \dot{\gamma}(l,t) + \left(\int_0^l \Omega \omega_n^2 U_n^2 dx \right) \gamma(l,t) \\ &= -\frac{be_{31}t_a}{2\Theta} (\ddot{v}(t)\Omega + \dot{v}(t)C) U_n(l) \int_0^l U_n x^2 dx \end{aligned} \quad (2.59)$$

只考慮在第一模態($n=1$)時之振動行為，則壓電梁末端 $x=l$ 處的動態方程式為

$$\begin{aligned} & M_1 \ddot{\gamma}(l,t) + C_1 \dot{\gamma}(l,t) + K_1 \gamma(l,t) \\ &= -\frac{be_{31}t_a}{2\Theta} (\ddot{v}(t)\Omega + \dot{v}(t)C) U_1(l) \int_0^l U_1 x^2 dx \end{aligned} \quad (2.60)$$

其中，

$$M_1 = \int_0^l \Omega U_1^2 dx \quad (\text{等效質量}) \quad (2.61)$$

$$C_1 = \int_0^l C U_1^2 dx \quad (\text{等效阻尼}) \quad (2.62)$$

$$K_1 = \left(\int_0^l \Omega U_1^2 dx \right) \omega_m^2 \quad (\text{等效彈性係數}) \quad (2.63)$$

將(2.60)式作拉普拉氏轉換，則

$$\begin{aligned} & M_1 s^2 \gamma(l, s) + C_1 s \gamma(l, s) + K_1 \gamma(l, s) \\ &= -\frac{be_{31}t_a}{2\Theta} (s^2 v(s) \Omega + s v(s) C) U_1(l) \int_0^l U_1 x^2 dx \end{aligned} \quad (2.64)$$

因此，可得壓電梁於 $x=l$ 處之二階轉移函數為

$$\frac{\gamma(l, s)}{v(s)} = \frac{-be_{31}t_a (s^2 \Omega + s C) U_1(l) \int_0^l U_1 x^2 dx}{2\Theta (M_1 s^2 + C_1 s + K_1)} \quad (2.65)$$

其中， $\gamma(l, s)$ 及 $v(s)$ 分別為壓電梁末端位移及輸入電壓差函數的拉普拉式轉換。

第三章 實驗系統及系統識別

3.1 實驗系統

本實驗之系統包含 nF HAS 4051 功率放大器、雙晶壓電梁、應變規以及 Measurement Group System 2200 動態訊號放大器，控制介面是利用 Stanford Research SIM 960 PID 控制器來達成。

本實驗採用的感測器為應變規，在壓電梁同位置的上下表面黏貼電阻值 350Ω 的單軸應變規，應變規各自串聯上一個電阻，組成一個如圖 5 所示的半橋式(half bridge)惠斯同電橋。其中 ΔE 為 A、B 兩端點間的輸出電壓值， V 為提供給電橋的輸入電壓值。應變規因為長度變化產生電阻改變，電橋的輸出電壓值為[8]

$$\Delta E = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_4}{R_4} - \frac{\Delta R_3}{R_3} \right) V \quad (3.1)$$

上下兩片應變規的電阻設為 R_1 、 R_2 ，則電橋的輸出電壓值為

$$\Delta E = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) V \quad (3.2)$$

倘若梁的上下兩片應變規電阻 $R_1 = R_2 = R$ ，梁彎曲造成的電阻變化 $\Delta R_1 = (-)\Delta R_2 = \Delta R$ ，則此惠斯同電橋的靈敏度將為一片壓電片時的兩倍，且具有溫度補償功效。

3.2 撓曲位移與電橋輸出之關係

本實驗採用應變規為梁變形的感測器，穩態輸出訊號對應的是一應變訊號而非壓電梁末端的實際撓曲量。穩態輸出 V_{out} 與實際撓曲位移量 $w(l)$ 存在一比例關係，

$$w(l) = \kappa V_{out} \quad (3.3)$$

其中， κ 為每單位輸出電壓所對應的撓曲度。系統的輸出訊號 V_{out} 為實際電橋訊號經動態訊號放大器增益 1000 倍之後所得到的輸出。由 (3.2) 式及圖 5 可知半橋的輸出電壓為

$$\Delta E = \frac{V_{out}}{1000} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) V \quad (3.4)$$

電阻的變化率可表示為電阻率(gage factor) F_g 及應變 ε_{11} 的乘積[8]，

$$\frac{\Delta R}{R} = F_g \varepsilon_{11} \quad (3.5)$$

壓電梁的上下表面各黏貼一片應變規，梁上下表面的應變分別為正負值，半橋的電壓輸出為

$$\Delta E = \frac{V_{out}}{1000} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} (F_g \varepsilon_{11}^{down} - F_g \varepsilon_{11}^{up}) V \quad (3.6)$$

其中 ε_{11}^{up} 、 ε_{11}^{down} 為黏貼於壓電梁上、下表面之應變規的量測應變，且 $\varepsilon_{11}^{up} = -\varepsilon_{11}^{down}$ 。將(3.6)式簡化並且求得 ε_{11}^{down} 與 V_{out} 之間關係為

$$\Delta E = \frac{V_{out}}{1000} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} (2F_g \varepsilon_{11}^{down}) V \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{11}^{down} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{2000 R_1 R_2 F_g V} V_{out} \quad (3.8)$$

由(2.41)得知在邊界 $x=l$ 處輸入電位 v ，會使梁產生一彎曲力矩 M_v ，因此

$$w_{,xx} = \frac{M_v}{Y_{11} I} = -\frac{\varepsilon_{11}^{down}}{t_a} \quad (3.9)$$

$$w(x) = -\frac{\varepsilon_{11}^{down} x^2}{2t_a} \quad (3.10)$$

將(3.8)式代入(3.10)式，推得撓曲位移與電橋輸出電壓之關係為

$$w(x) = -\frac{(R_1 + R_2)^2 x^2}{4000 t_a R_1 R_2 F_g V} V_{out} \quad (3.11)$$

本實驗將每一百微米(100 μm)的撓曲度視為一單位，所用的應變規電阻值 R 為 350 歐姆，電阻率 F_g 為 2.12，供給電橋之電壓值 V 為 10 伏特，梁長度 500 (100 μm)， t_a 在直角坐標系中為 -2.5 (100 μm)，代入(3.11)式，可得到撓曲位移與半橋輸出關係式

$$w(l) = -\frac{(350 + 350)^2 500^2}{4000 \times (-2.5) \times 350 \times 350 \times 2.12 \times 10} V_{out} = 4.72 V_{out} \quad (3.12)$$

因此，比例常 $\kappa = 4.72$ (100 μm /volt)

3.3 頻譜分析法

系統識別是由系統之頻率響應圖形來判別動態系統之參數，原理為輸入一正弦波訊號 $u(t) = \sin \omega t$ ， ω 為輸入信號之角頻率，待系統達穩態輸出時，其穩態響應之振幅大小為輸入訊號與系統放大率 $|G(j\omega)|$ 的乘積，相位角較輸入訊號延遲 $\angle G(j\omega)$ ，關係如下所示：

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (3.13)$$

若輸入不同頻率的正弦波訊號，可對應到相對放大率及相位角，繪出系統的頻率響應圖形，最後再由圖形鑑別出系統之參數。

系統鑑別模型包括功率放大器、壓電雙晶片梁、應變規以及動態訊號放大器，識別方法是利用 NI-DAQ6036E 訊號擷取卡輸出一變頻弦波(chirped waveform)或白雜訊(white noise)至系統，由訊號擷取卡即時接收系統響應的訊號，如圖 6 所示。

頻譜分析法需先對輸入及輸出訊號分別作快速傅利葉轉換，倘若所考慮的系統為線性系統，所得的頻域複變函數之間有如下關係：

$$\Phi_o(j\omega_o) = G(j\omega)\Phi_i(j\omega_i) \quad (3.14)$$

其中， $\Phi_o(j\omega_o)$ 表輸出訊號之頻域函數， $\Phi_i(j\omega_i)$ 表輸入訊號之頻域函數， $G(j\omega)$ 為系統之頻域函數。由(3.14)式可知，系統之頻率響應圖為

$$G(j\omega) = \frac{\Phi_o(j\omega_o)}{\Phi_i(j\omega_i)} = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \quad (3.15)$$

參考圖 7 所示的訊號，若以變頻正弦波作為輸入訊號，輸出訊號如圖 8 所示，將輸出和輸入訊號分別做快速傅利葉轉換得到頻域圖形。若以白雜訊作為輸入參考訊號，則需先將時域訊號加上一 Hanning 窗，再分別做快速傅利葉轉換，最後將輸出頻域響應除以輸入頻域響應，便可求得系統的頻率響應圖，流程如圖 9 所示[9]。圖 10(a-c)為各階段開路系統定義，將在 3.4 節逐一作解說。經頻譜分析法得到電壓對梁軸應變之頻率響應如圖 11 所示。

3.4 系統識別



輸入一步階訊號至系統，觀察輸出訊號之頻率響應圖，實驗結果如圖 12 所示，對照圖 11，可知步階訊號的輸入會激發系統產生兩種模態的振動，所對應的角頻率分別為 335.89 rad/s 和 2423.68 rad/s。因此，以下的系統識別，就以前兩模態作討論。

參考圖 11 所示的實驗量測頻率響應，首先討論角頻率 1 至 1000 rad/s 範圍之系統波德圖(Bode diagram)，包含第一共振角頻率為 335.89 rad/s，峰值大小為 21.58 dB，第一反共振角的頻率為 454.90 rad/s，峰值大小為 32.3 dB。令其轉移函數為如下形式[10]：

$$G_1(j\omega) = \frac{K \left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_1'^2} + \frac{2\xi_1'(j\omega)}{\omega_1'} + 1 \right)}{\left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_1^2} + \frac{2\xi_1(j\omega)}{\omega_1} + 1 \right)} \quad (3.16)$$

其中， K 為低頻訊號放大倍率， ω_1 、 ξ_1 分別代表第一共振模態的自然角頻率及阻尼係數， ω'_1 、 ξ'_1 則分別為第一反共振點之自然頻率及阻尼係數。第一共振頻率(335.89rad/s)與自然頻率(ω_1)、阻尼係數(ξ_1)滿足以下關係式[10]

$$\omega_1 = 335.89 / \sqrt{1 - 2\xi_1^2} \quad (\text{rad/s}) \quad (3.17)$$

同理，

$$\omega'_1 = 454.90 / \sqrt{1 - 2\xi_1'^2} \quad (\text{rad/s}) \quad (3.18)$$

將(3.19)式與(3.20)式代入(3.16)式，得

$$G_1(j\omega) = \frac{K \left(\frac{(j\omega)^2}{\left(454.90 / \sqrt{1 - 2\xi_1'^2}\right)^2} + \frac{2\xi_1'(j\omega)}{454.90 / \sqrt{1 - 2\xi_1'^2}} + 1 \right)}{\left(\frac{(j\omega)^2}{\left(335.89 / \sqrt{1 - 2\xi_1^2}\right)^2} + \frac{2\xi_1(j\omega)}{335.89 / \sqrt{1 - 2\xi_1^2}} + 1 \right)} \quad (3.19)$$

當 $|G(j0)| = K$ ，其對應的低頻訊號放大倍率為 -3.09 dB ，所以設定

$$K = 0.7 \quad (3.20)$$

由圖 11 可知，第一共振頻率與第一反共振角頻率相當接近，共振與反共振峰值的能量強度會相互影響，如圖 13 所示，因此角頻率位於 335.89 rad/s 及 454.90 rad/s，應滿足系統峰值大小 18.49 dB 及 -35.39 dB 的條件。

$$20 \log \left| \frac{0.7 \left\{ \frac{(335.89j)^2}{\left(454.90 / \sqrt{1 - 2\xi_1'^2}\right)^2} + \frac{2\xi_1'(335.89j)}{454.90 / \sqrt{1 - 2\xi_1'^2}} + 1 \right\}}{\left\{ \frac{(335.89j)^2}{\left(335.89 / \sqrt{1 - 2\xi_1^2}\right)^2} + \frac{2\xi_1(335.89j)}{335.89 / \sqrt{1 - 2\xi_1^2}} + 1 \right\}} \right| = 18.49 \quad (3.21)$$

$$20 \log \left| \frac{0.7 \left\{ \frac{(454.90j)^2}{\left(454.90/\sqrt{1-2\xi_1'^2}\right)^2} + \frac{2\xi_1'(454.90j)}{454.90/\sqrt{1-2\xi_1'^2}} + 1 \right\}}{\left\{ \frac{(454.90j)^2}{\left(335.89/\sqrt{1-2\xi_1^2}\right)^2} + \frac{2\xi_1(454.90j)}{335.89/\sqrt{1-2\xi_1^2}} + 1 \right\}} \right| = -35.39 \quad (3.22)$$

(3.21)式與(3.22)式的聯立方程式可解得

$$\xi_1 = 0.019 \quad (3.23a)$$

$$\xi_1' = 0.01 \quad (3.23b)$$

分別代入(3.17)、(3.18)式，得

$$\omega_1 = 336.01 \text{ rad/s} \quad (3.24a)$$

$$\omega_1' = 454.94 \text{ rad/s} \quad (3.24b)$$

將上述已知參數代入(3.16)式，並改寫為

$$G_1(j\omega) = \frac{0.7 \left(\frac{(j\omega)^2}{454.94^2} + \frac{0.02(j\omega)}{454.94} + 1 \right)}{\left(\frac{(j\omega)^2}{336.01^2} + \frac{0.038(j\omega)}{336.01} + 1 \right)} \quad (3.25)$$

其次，討論角頻率於1至4000 rad/s範圍內之轉移函數。接續(3.16)

式的形式，假設

$$G_\varepsilon(j\omega) = \frac{0.7 \left(\frac{(j\omega)^2}{454.94^2} + \frac{0.02(j\omega)}{454.94} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{\left(2818.64/\sqrt{1-2\xi_2'}\right)^2} + \frac{2\xi_2'(j\omega)}{2818.64/\sqrt{1-2\xi_2'}} + 1 \right)}{\left(\frac{(j\omega)^2}{336.01^2} + \frac{0.038(j\omega)}{336.01} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{\left(2423.68/\sqrt{1-2\xi_2}\right)^2} + \frac{2\xi_2(j\omega)}{2423.68/\sqrt{1-2\xi_2}} + 1 \right)} \quad (3.26)$$

第二共振角頻率位於2423.68 rad/s，峰值大小為-3.23 dB，第二反共

振角頻率位於 2818.64 rad/s，峰值大小為-27.62 dB。利用此兩特徵值，連同(3.21)式、(3.22)式可解得

$$G_{\varepsilon}(j\omega) = \frac{0.7 \left(\frac{(j\omega)^2}{454.94^2} + \frac{0.02(j\omega)}{454.94} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{2818.82^2} + \frac{0.042(j\omega)}{2818.82} + 1 \right)}{\left(\frac{(j\omega)^2}{336.01^2} + \frac{0.038(j\omega)}{336.01} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{2424.31^2} + \frac{0.144(j\omega)}{2424.31} + 1 \right)} \quad (3.27)$$

圖 11 的虛線部分為根據(3.27)式所繪之頻率響應圖，模擬曲線的趨勢與 11 實線部份所示的實驗曲線相當吻合。若僅考慮前兩模態做系統識別，因第二反共振點對系統影響不大，控制區域也不在此頻率以上，所以可將(3.27)改寫為

$$G_{\varepsilon}(s) = \frac{0.7 \left(\frac{s^2}{454.94^2} + \frac{0.02s}{454.94} + 1 \right)}{\left(\frac{s^2}{336.01^2} + \frac{0.038s}{336.01} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{2423.68^2} + \frac{0.144s}{2423.68} + 1 \right)} \quad (3.28)$$

(3.28)式為系統軸應變之轉移函數，如圖 10(a)所示，若將其轉換為梁末端撓曲量之轉移函數，乘上每單位輸入電壓所對應的撓曲度，因此放大 κ 倍，如圖 10(b)所示，所以輸入電壓對梁末端撓曲的轉移函數為

$$G_{\gamma}(s) = \frac{3.3 \left(\frac{s^2}{454.94^2} + \frac{0.02s}{454.94} + 1 \right)}{\left(\frac{s^2}{336.01^2} + \frac{0.038s}{336.01} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{2423.68^2} + \frac{0.144s}{2423.68} + 1 \right)} \quad (3.29)$$

圖 14 為系統識別與實驗量測的步階響應曲線圖。

以應變規作為感測器，會有較大的高頻雜訊，利用動態訊號放大器的濾波功能，將 1000 Hz (6238.2 rad/s)以上的高頻雜訊過濾掉，以維持穩定的電壓輸出狀態。如圖 10(c)所示，開路系統之轉移函數因

加入一濾波器而改變，所以(3.29)式改寫為

$$G_{\gamma}(s) = \frac{3.3 \left(\frac{s^2}{454.94^2} + \frac{0.02s}{454.94} + 1 \right)}{\left(\frac{s^2}{336.01^2} + \frac{0.038s}{336.01} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{2423.68^2} + \frac{0.042s}{2423.68} + 1 \right) \left(\frac{s}{6283.2} + 1 \right)} \quad (3.30)$$

壓電梁經過系統識別後，將(3.30)式視其為真實系統之轉移函數，並此轉移函數設計控制器。參考附錄一之系統穩定度的定義，並對照圖 15，討論 1000 至 5000 rad/s 範圍內的系統波德圖，系統在到達相位交越頻率，2841.6rad/s 時，且對應的增益邊限(gain margin)小於零，故系統不穩定。但從實驗曲線觀察得知，系統相位交越頻率等於 2582.84 rad/s，所對應的相位邊限(phase margin)大於零，因此系統穩定，故將(3.30)式視為系統之轉移函數是合理的。



第四章 定位控制法則與實驗

4.1 系統分析

參考圖 14 與圖 12 所示之步階輸入函數引致壓電梁振動的頻率響應，可知第一模態是影響系統暫態響應最顯著的因素，第二模態雖對暫態響應有影響，但程度較小。從時域響應來觀察，第二模態的振動能量衰減速率非常快，所以控制器的設計是以補償第一模態為主。

由頻譜分析法所得到的系統波德圖如圖 16 所示，本章將圖形分為三個區域討論，(a)區為角頻率從 dc 至 1000 rad/s 的範圍，包含第一共振點及第一反共振點，(b)區為角頻率 1000 至 2661.84 rad/s 的範圍，角頻率 2661.84 rad/s 是相位變化率的反曲點，(c)區為角頻率大於 2661.84 rad/s 的範圍。

從相位圖得知在大於 2661.84 rad/s 之後，對應的系統參數對系統影響較小也較難判斷，其中包括高頻雜訊、高頻響應訊號等。大於此頻率後的相位圖經補償之後，邊際穩定所對應的相位邊限(phase margin)或增益邊限(gain margin)相較於模擬系統會有誤差存在，所以將此角頻率視為補償後，系統到達邊際穩定的邊限，大於此頻率之後的區域設定為區域(c)。以下依據圖 16 進行系統模擬及控制器的補償。

現針對受控制系統，在加入控制器之後最大增益交越角頻率(gain crossover frequency)不超過 2661.84 rad/s 的條件下，期望系統在補償之後的頻域規格如下：在區域(a)的最小相位邊限大於 45° ，區域(b)的最小相位邊限大於 30° ，時域規格為暫態響應的最大超越量(overshoot)趨於零、安定時間(t_s)小於 1 秒、穩態誤差為零。

4.2 PI-相位領先控制器原理與設計

本研究選擇 PI-相位領先補償器的原因為：PI 控制器，可減少穩態誤差，適度的降低圖 16 中區域(a)之第一共振模態的能量以及區域(c)高頻響應訊號與高頻雜訊，PI 控制器的放大率 K_I 能適度的提高增益交越頻率。其次，相位領先控制器的主要功能在於減少區域(a)中因 PI 補償及第一模態造成的相位落後。PI-相位領先補償器的數學表示式為

$$\left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) \left(\frac{\frac{1}{z}s + 1}{\frac{1}{p}s + 1} \right), \quad p > z > 0 \quad (4.1)$$

為了設計上的方便，將(4.1)式轉換為時間常數(time constant)形態，表示為

$$K_I \left(\frac{\frac{K_P}{K_I}s + 1}{s} \right) \left(\frac{\frac{1}{z}s + 1}{\frac{1}{p}s + 1} \right), \quad p > z > 0 \quad (4.2)$$

控制器設計步驟如下：

(1) PI 控制器之設計

如 4.1 節的描述，第一共振模態是影響系統暫態響應最為顯著的因素，所以先不考慮 PI 控制器對系統的放大率 K_I ，利用其極點與零點的分布，對系統的波德圖進行補償，適當地降低位於區域(a)與(b)區中的峰值能量大小，進而達到降低振動響應的目的，同時壓低在區域(c)區的高頻響應訊號及高頻雜訊。

在 PI 控制器前，需要先預估相位領先補償在區域(a)峰值處所造成的能量增加，再設計控制器參數將峰值能量及相位領先補償的能量

一併壓低至 0 dB 以下。今相位領先控制器欲補償的最大相位值為 50°，由[11]可知相位領先補償器的最大相位值滿足

$$\frac{z}{p} = \frac{1 - \sin 50^\circ}{1 + \sin 50^\circ} = 0.132 \quad (4.3)$$

補償器最大相位所對應的能量大小值為

$$10 \log \frac{1}{(z/p)} = 8.79 \text{ dB} \quad (4.4)$$

假設經 PI 控制器補償後的最小相位值發生在角頻率 380 至 420 rad/s 範圍之間，且區域(a)的峰值頻率 335.89 rad/s 較相位領先補償器的最大相位發生頻率低，由(4.4)式對應到相位領先補償器的能量值預估為 8 dB，所以與峰值能量疊加後大小為

$$31.96 + 8 = 39.96 \text{ dB} \quad (4.5)$$

由(4.5)式知控制器於頻率 335.89 rad/s 時的能量應為 -39.96 dB，才足以降低合成後的能量。

$$20 \log \left| \frac{(K_P/K_I)(j335.89) + 1}{j335.89} \right| = -39.96 \quad (4.6a)$$

因此，

$$\frac{K_P}{K_I} = \frac{1}{104.22} \quad (4.6b)$$

如圖 18 所示，此控制器為

$$\frac{1}{104.22} \frac{s+1}{s} \quad (4.7)$$

補償後的系統波德圖如圖 19 所示，在區域(a)裡最小的相位發生在 396.98 rad/s，值為 -189.03°

(2) 相位領先控制器之設計

參考圖 20 所示的方塊圖，設計一相位領先控制器，其頻譜如圖

21 的虛線所示，利用控制器的最大相位 50° ，於區域(a)中角頻率 396.98 rad/s 處進行補償，此補償器可同時提高(b)區的相位。由[11]可知最大相位發生頻率滿足下式

$$396.98 = \frac{z}{\sqrt{z/p}} \quad (\text{rad/s}) \quad (4.8)$$

利用(4.3)式的 z/p 結果，可得

$$z = 144.22 \quad (\text{rad/s}) \quad (4.9)$$

將其解代回(4.3)式，可解得

$$p = 1092.57 \quad (\text{rad/s}) \quad (4.10)$$

因此，由(4.9)、(4.10)式可得相位領先補償器為

$$\frac{\frac{1}{144.22} s + 1}{\frac{1}{1092.57} s + 1} \quad (4.11)$$

圖 22 所示為第二次補償後的波德圖形。

(3) 比例控制器設計

如圖 23 方塊圖所示，設計比例控制器 K_I ，以提高頻域中增益交越頻率，放大器 K_I 如圖 24 虛線所示。令

$$K_I = 2.3 \quad (4.12)$$

如圖 25 所示，補償後的系統最高增益交越頻率落在 2656.7 rad/s，剛好使系統達邊際穩定，此頻率也滿足補償邊限必須小於 2661.84 rad/s 的條件。

由(4.7)、(4.11)、(4.12)式，可得 PI-相位領先補償器的形式為

$$2.3 \left(\frac{\frac{1}{104.22} s + 1}{s} \right) \left(\frac{\frac{1}{144.22} s + 1}{\frac{1}{1092.57} s + 1} \right) \quad (4.13)$$

將之改寫成一般式，則

$$\left(0.022 + \frac{2.3}{s}\right) \left(\frac{\frac{1}{144.22} s + 1}{\frac{1}{1092.57} s + 1} \right) \quad (4.14)$$

系統經補償後，區域(a)的最小相位邊限為 60.2° ，區域(b)的最小相位邊限為 31.5° 。補償後之系統在時域上的最大超越量等於零，安定時間等於 0.54 秒，皆滿足先前設定的要求。

4.3 控制實驗

閉迴路控制系統如圖 26 所示，包含 SIM 960 PID 控制器、nF HAS 4051 功率放大器、壓電雙晶片梁、應變規以及動態訊號放大器，另外加上一截止頻率為 1092.57 rad/s 的濾波器，以達成相位領先的功能。其中，SIM 960 PID 控制器的參數設定如附錄二所示。

利用 National Instrument 公司的 6036E 訊號卡，時間在 0.2 秒後，輸入一大小為 1 伏特的步階訊號至系統，輸出訊號由相同的訊號卡接收。如圖 27(a)所示，設定壓電梁末端的位移量為 $100 \mu\text{m}$ ，模擬曲線與實驗曲線非常相近。圖 27(b)為穩態時的系統雜訊對其精度所造成的平均誤差，誤差範圍約在 $\pm 0.36 \mu\text{m}$ 之間。圖 27(c)所示為補償前、後系統之步階響應圖形。

4.4 相位領先補償對於 PI 控制法則的影響

討論一 PI 控制器為

$$\text{PI} = K_I \left(\frac{\frac{K_P}{K_I} s + 1}{s} \right) \quad (4.15)$$

此控制器的設計的前提如次：不降低系統(a)、(b)區最小相位，補償

後，(a)區最小的相位邊限不能低於未補償時的情況。由已知條件，經 PI 補償後的相位在 405.1rad/s 時，必須等於未補償時的相位。

$$\angle \left(\frac{(K_P/K_I)(j405.1)+1}{j405.1} \right) G(j405.1) = \angle G(j405.1) \quad (4.16)$$

所以

$$\frac{K_P}{K_I} = \frac{1}{10.1} \quad (4.17)$$

因為在未補償時的最小相位邊限不能低於未補償時的相位邊限，令 $K_I = 1$ ，因此 PI 控制器為

$$PI = \frac{1}{10.1} + \frac{1}{s} \quad (4.18)$$

補償後，開路系統在區域(a)的最小相位邊限為 17.6° ，對應於增益交越頻率 356 rad/s。

參考圖 28 所示，比較兩閉迴路控制實驗曲線圖，得知單獨的 PI 補償器雖然能降低穩態誤差，但穩態響應的完成時間，明顯較 PI-相位領先補償慢，原因是經相位領先補償後的閉迴路最小頻寬較大，如圖 29 所示。另外，由圖 30 所示的時域根軌跡圖討論，PI-相位領先補償後，閉迴路系統的主極點位於 -6.81 rad/s ，反拉氏轉換之後，對應的函數為 $e^{-6.81t}$ 。如圖 31 所示，PI 控制器主極點位於 -2.49 rad/s ，反拉氏轉換之後，對應的函數為 $e^{-2.49t}$ 。兩者的時域暫態衰減速度可說明，經相位領先補償後的系統響應速度較快。

第五章 實驗結果與討論

5.1 控制器對壓電梁動態響應的改善

本實驗所設計的控制器不僅降低了最大超越量，加快了系統的響應速度，更並減少了穩態誤差，使壓電致動器定位至 $100\mu\text{m}$ ，而穩態時雜訊對其精度所造成的誤差範圍在 $\pm 0.36\mu\text{m}$ 之間。穩態誤差減少，可單純由 PI 控制器的功能達到。響應快速、超越量小，則必須針對閉迴路系統之頻寬與穩定度兩種規格作討論。

系統的「頻寬」扮演影響響應速度的角色，以 4.4 節中的 PI 控制器為例，利用 PI 控制法則加快系統安定時間的條件必須為 $K_I > 1$ ，讓增益交越頻率提高。但 K_I 值的增加，卻會犧牲閉迴路系統的穩定度，使相位邊限減小，造成閉迴路系統發生較大的超越量(overshoot)或較長時間的振動響應。PI 補償雖能減少穩態誤差，但無法減少開路系統在共振頻率上的相位落後。因此，本實驗加設一相位領先補償器，在不影響閉迴路穩定度的情況下， K_I 值可適當的放大，提高閉迴路系統頻寬。

系統的「穩定度」描述系統在動態響應中振動的程度，在 4.1 節中曾提到，第一共振模態是影響系統暫態響應最顯著的因素。當第一模態發生時，開路系統相位變化最急遽，將近有 90° 至 180° 的相位落後。在此頻率下，系統的穩定度最低。對應到時域狀態，步階響應會有最大超越量的產生。若能將落後的相位減少，勢必能提高閉迴路系統的穩定度，降低振動響應的發生。利用單純的 PI 控制器，並不能達到相位領先的要求，僅能減少穩態誤差。

綜合以上所述，閉迴路的頻寬與系統的穩定度是相互制衡的，在設計控制器時，兩者之間必須做一定的取捨，以得到最佳的控制器參

數。設計控制器的準則以先提高系統穩定度為主，再對其系統的頻寬作適當增減。

5.2 壓電材料的潛變與遲滯

輸入一直流電壓訊號給予壓電材料時，材料本身不會馬上產生變形至應有的變形量，其變形的狀態會分成兩個階段，第一階段的變形量較大且反應時間非常快速，通常低於一毫秒，過了此階段後，形變的狀態便趨於緩慢，直到伸長至應有的尺寸為止。如圖 14 所示，此特性稱為潛變(creep)[12]。潛變現象可解釋為何加入控制器後，系統到達穩態的時間仍較模擬慢，因為本研究是將壓電材料假設為一完全線性的系統，潛變現象為系統的一種延遲特性，會導致暫態響應的時間增長。在古典控制理論當中，若一系統的暫態響應不良，解決的辦法就是將落後的相位減少，好讓比例控制器得以適度的放大牽增系統頻寬，提高響應速度，所以須加上相位領先補償器達到此目的。因此，經相位領先補償後，潛變現象較 PI 控制法則小。

遲滯(hysteresis)現象是壓電材料本身特有的非線性行為，發生的原因是輸入至壓電材料的電場方向在過程中有所改變，使得到的輸出不會依照原路徑折返。輸入頻率的高低[13]與輸入能量的大小[14]會使得遲滯曲線的斜率及範圍有所改變。

以圖 11 所示之開路系統頻率響應圖作為參考，在低於第一共振模態頻率範圍，分別輸入 1 rad/s 與 100 rad/s 的正弦波驅動壓電梁，實驗結果如圖 32 所示，頻率越低，系統反應之遲滯曲線包圍的面積愈小，遲滯曲線的去與回路徑愈趨於一重合直線。反之，若頻率愈高，遲滯曲線的去與回路徑偏差愈大，也愈不線性，包圍的封閉面積愈大。在高頻時，壓電梁因遲滯現象所產生的追蹤誤差，對位置精度會

有一定程度的影響，若壓電梁之輸入電壓為單一方向或準靜態 (quasi-static)，不需考慮遲滯現象對系統影響，僅考慮潛變效應。



第六章 結論與展望

6.1 結論

本研究針對壓電雙晶片梁動態的應變與變形理論分析，並應用古典控制法則設計控制器，進行模擬與實驗，相互比較驗證提高系統動態響應的穩定度與速度。

設計控制器的目的在於減少誤差，提升系統的穩定度，加快響應速度與提高系統的強健性。控制器設計之前，須先觀察影響系統暫態響應最顯著的頻域區段，再針對此區段進行控制器的設計。因頻寬與穩定度之間關係是相互制衡的，所以在進行控制器設計時，需在兩者之間做適當的取捨，一般設計的法則是先以穩定度作考量，再對系統頻寬做適當增減。

根據實驗與基本控制理論分析，如果僅要求壓電梁末端的撓曲變形至某一位置，利用 PI-相位領先補償器便可達到基本精密定位需求，設計步驟已有準則可循，遵照設計方式即可簡單的設計出控制器。若希望系統能有更高性能的表現，如追蹤、循跡等，必須將壓電材料的潛變與遲滯特性一併考慮至系統當中，再對其做控制器設計，以提高系統的強健性。

以應變規作為系統的感測器時，因靈敏度較低，僅適合量測機械結構的低頻振動。訊號接收過程中，會有一定程度的雜訊存在。本實驗所採用的商用動態訊號放大器，是針對應變規所設計，因此對於高頻雜訊會有足夠的抑制效果，回授訊號穩定，較容易達成閉迴路控制系統的設計。選定良好的感測器是首要考慮的重點，不僅有利於控制器的設計，雜訊對控制迴路的影響會減少。當系統達穩態時，雜訊對其精度的所造成的誤差範圍在 $\pm 0.36\mu\text{m}$ 範圍之間。

6.2 未來展望

在理論模擬上，除了基本機械結構的動態模型外，還需要視應用對象及規格需求，考慮壓電材料特有的非線性現，建構數學模型，才能針對遲滯、潛變特性，設計可提高系統強健性之控制器，以提高系統動態響應的性能。

若要更精確量測出奈米尺度級的位移，可選用靈敏度較大的光感測儀器，如光纖干涉儀，因為光感測雜訊較小，不需顧慮驅動電源雜訊的干擾，精密度可大幅提升，但需克服其易受環境光害、振動干擾的缺點。

本研究利用壓電材料微小位移的特性，以逆壓電效應原理為出發點，開發出一精度達奈米尺度的致動器。最終的目的是利用致動器移動探針，對於待測試片做一維的線掃描，以偵測試片的表面物理性質。現今掃描式探針顯微鏡的掃描機構以壓電梁、壓電管居多，本文以壓電懸臂梁結構為理論基礎，將來可推廣至如圖 33 所示的壓電圓管形懸臂結構，對其動態響應做更周密的考量。除一般定位控制外，還可對其在線掃描時發生的遲滯現象加以補償，達到精密的追蹤控制。

參考文獻

- [1] J. G. Smits, S. I. Dalke, T. K. Cooney (1991), "Constituent equations of piezoelectric bimorphs," *Sensor and Actuators: A*, **28**, 41-61.
- [2] J. G. Smits and W.S. Choi (1991), "The constituent equations of piezoelectric heterogeneous bimorphs," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **38**(3), 256-270.
- [3] K.D. Wolf (2000), *Electromechanical energy conversion in asymmetric piezoelectric bending actuators*, Darmstadt University.
- [4] S. Y. and B. Ngoi (2000), "Shape control of beams by piezoelectric actuators," *AIAA Journal*, **38**(12), 2292-2298.
- [5] T. S. Low and W. Guo (1995), "Modeling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis," *IEEE Journal of Microelectromechanical System*, **4**(4), 230-237.
- [6] T. Bailey and J. E. Hubbard, Jr. (1985), "Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam," *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, **8**(5), 605-611.
- [7] S. Hirsekorn (2002), "Flexural vibration behavior of piezoelectric heterogeneous bimorph beams," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **49**(7), 59-971.
- [8] J. W. Dally and W. F. Riley (1999), *Experimental Stress Analysis*, third edition, Chapter 7, McGraw-Hill, New York.
- [9] *LabVIEW System Identification Toolkit User Manual* (2004), National Instruments.
- [10] F. Franklin, D. Powell, and E. Naeini (2002), *Feedback Control of Dynamic System*, fourth edition, Chapter 6, Pearson Prentice Hall, New York.
- [11] 張碩(1996)，*自動控制系統*，鼎茂圖書出版股份有限公司,台北市。

- [12] H. J. and D.-G. Gweon (2000), “Creep characteristic of piezoelectric actuators,” *Review of Scientific Instruments*, **71**(4), 1896-1900.
- [13] D. Damjanovic (1997), “Stress and frequency dependence of the direct piezoelectric effect in ferroelectric ceramics,” *Journal of Applied Physics*, **82**(4), 1788-1797.
- [14] G. Robert, D. Damjanovic, and N. Setter (2001), “Piezoelectric hysteresis analysis and loss separation,” *Journal of Applied Physics*, **90**(9), 4668-4675.



附錄一 頻率響應的相對穩定度

參考圖 34(a)、34(b)所示，分別討論 $0.1/s(s+1)^2$ 及 $10/s(s+1)^2$ 兩系統的穩定度[10]。討論前，先作如下的定義：

(1)增益邊限(gain margin)

系統相位於 -180° 時所對應的頻率稱為相位交越頻率(phase crossover frequency) ω_p ，在此頻率下，增益邊限定義為

$$\text{G.M.} = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega_p)|} \quad (\text{dB})$$

若 $\text{G.M.} > 1\text{dB}$ ，系統穩定，如圖 34(a)所示； $\text{G.M.} < 1\text{dB}$ ，系統不穩定，如圖 34(b)所示。

(2)相位邊限(phase margin)

系統增益於 0dB 時所對應的頻率稱為增益交越頻率(gain crossover frequency) ω_g ，在此頻率下，相位邊限定義為

$$\text{P.M.} = 180^\circ + \angle G(j\omega_g) \quad (\text{degree})$$

若 $\text{P.M.} > 0^\circ$ ，系統穩定，如圖 34(a)所示； $\text{P.M.} < 0^\circ$ ，系統不穩定，如圖 34(b)所示。

附錄二 SIM 960 PID 控制器的參數設定

本實驗所採用的 Stanford Research 公司之 SIM 960 PID 控制器參數設定方式為

$$\begin{aligned} \text{PID} &= K_P \left\{ \varepsilon + K_I \int \varepsilon dt + K_D \frac{d\varepsilon}{dt} \right\} \\ &= K_P \left\{ 1 + \frac{K_I}{s} + K_D s \right\} \varepsilon(s) \end{aligned}$$

本實驗所設計的 PI-相位領先補償器為

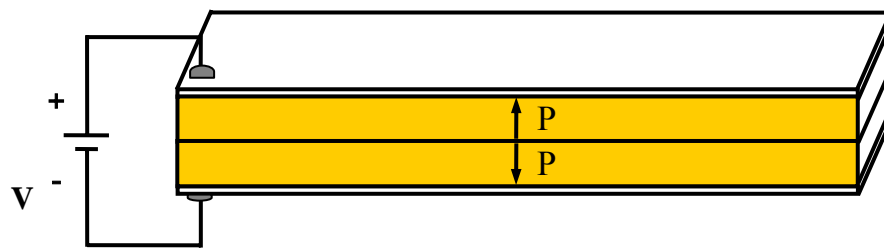
$$\left(0.022 + \frac{2.3}{s} \right) \left(\frac{\frac{1}{144.22} s + 1}{\frac{1}{1092.57} s + 1} \right)$$

此控制器對應的 SIM 960 參數為

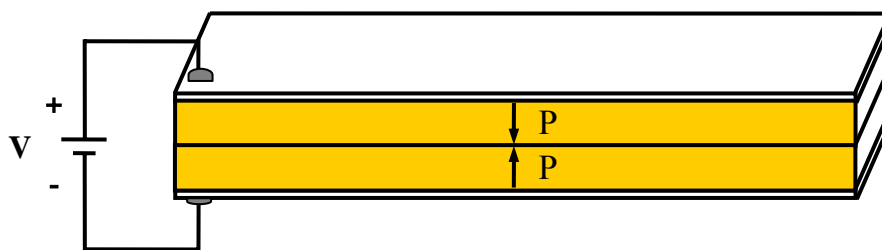
$$0.038 \left\{ 1 + \frac{60.61}{s} + 0.004s \right\} \left(\frac{1}{\frac{1}{1092.57} s + 1} \right)$$

其中， $K_P = 0.038$ ， $K_I = 60.61$ ， $K_D = 0.004$ ，為了達到相位領先補

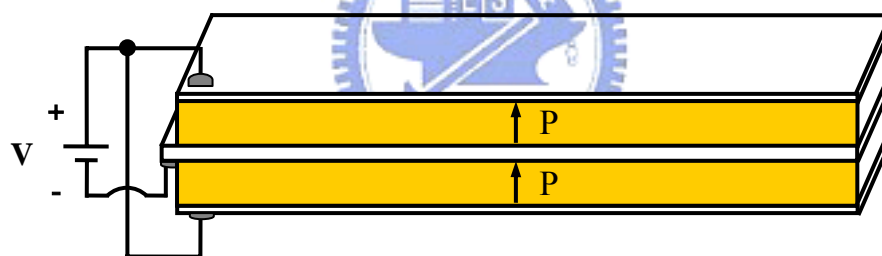
償的功能所設計的濾波器為 $\frac{1}{s/1092.57 + 1}$ 。



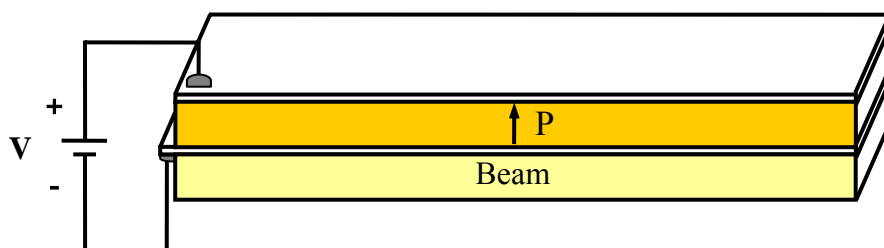
(a) Outward series bimorph



(b) Inward series bimorph



(c) Parallel bimorph



(d) Unimorph

圖 1 雙晶壓電梁及單晶壓電梁

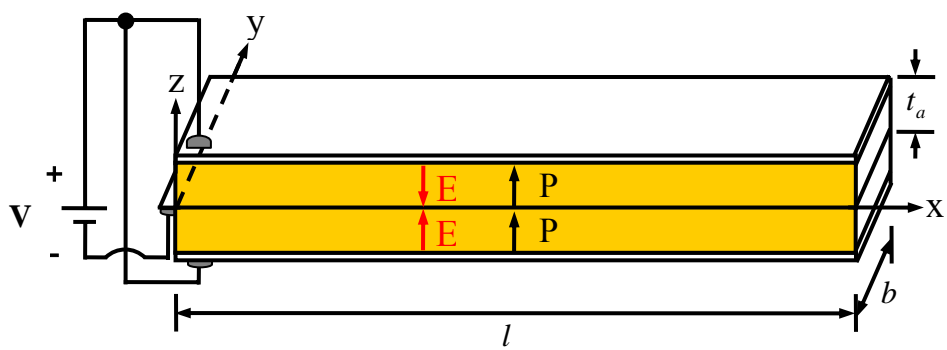


圖 2 雙晶壓電梁長度規格

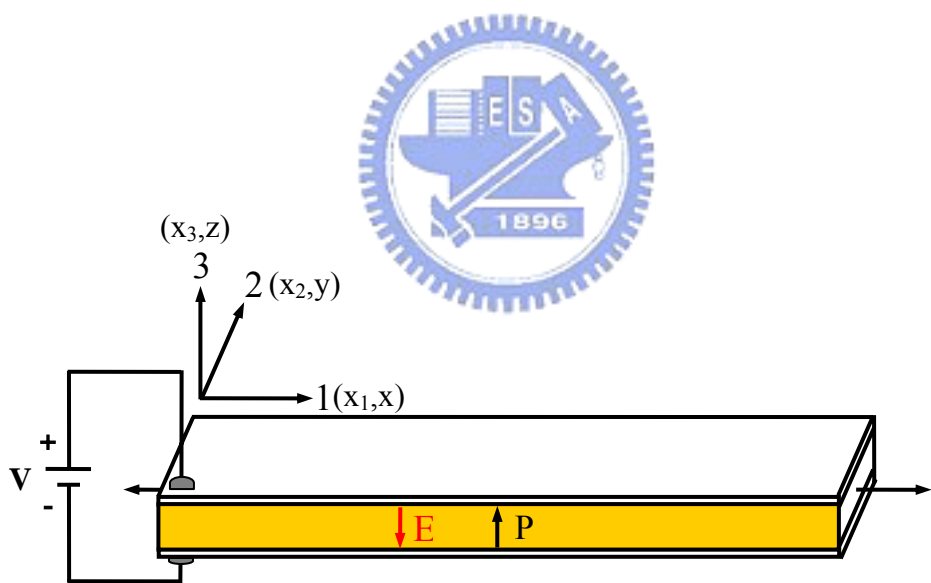


圖 3 d_{31} 致動器， $d_{31} < 0$

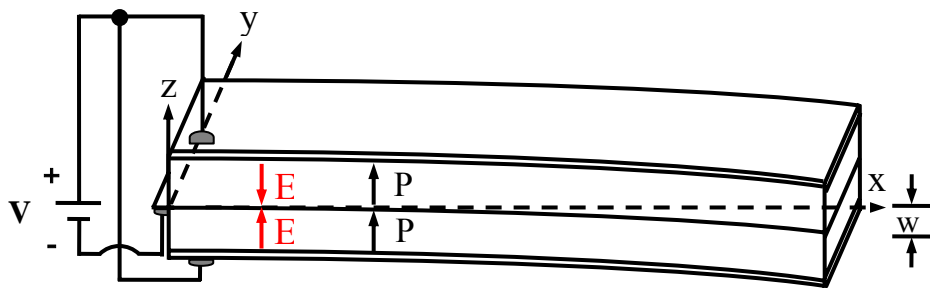


圖 4 壓電梁彎曲振動

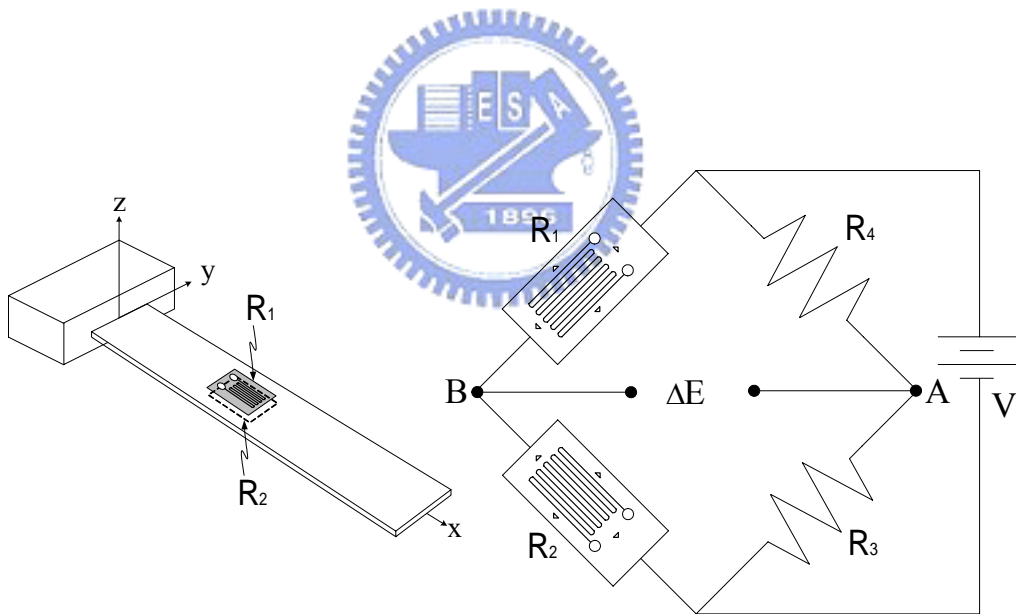


圖 5 應變規黏貼、接線及惠斯同電橋示意圖

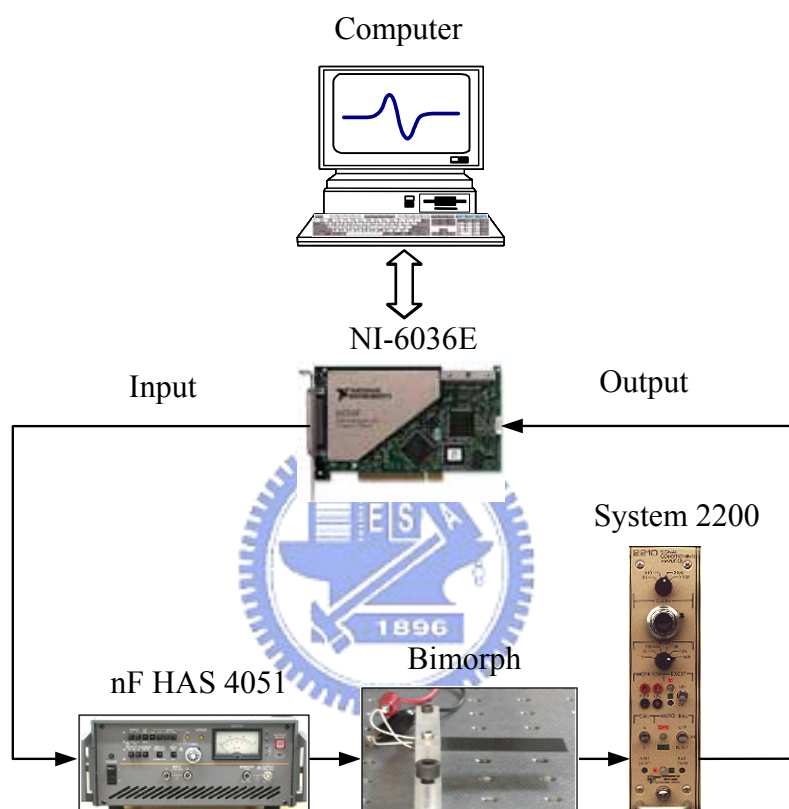


圖 6 系統頻譜分析實驗

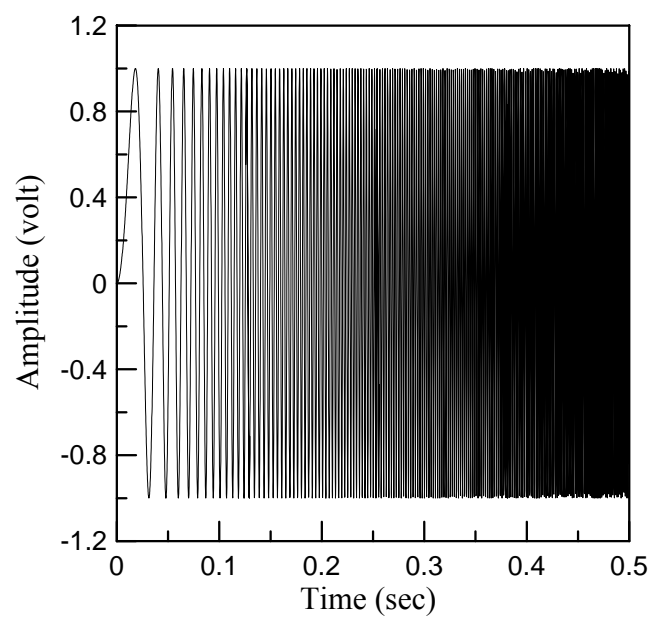


圖 7 變頻正弦波輸入訊號

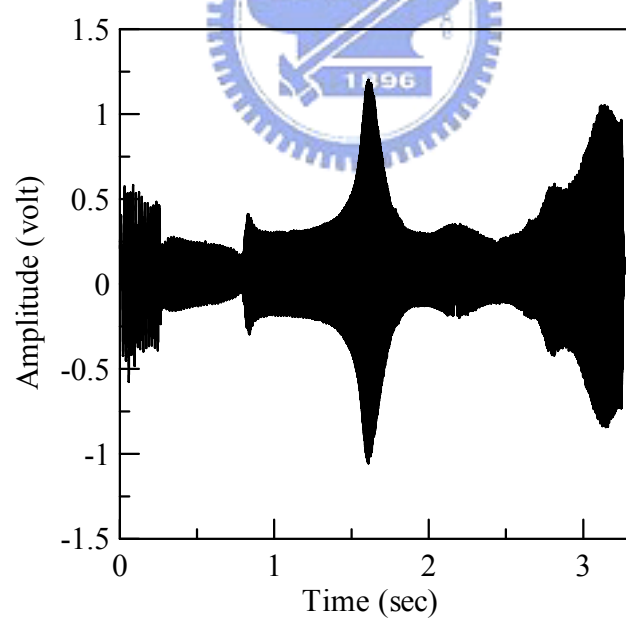


圖 8 變頻正弦波輸入後的系統輸出訊號

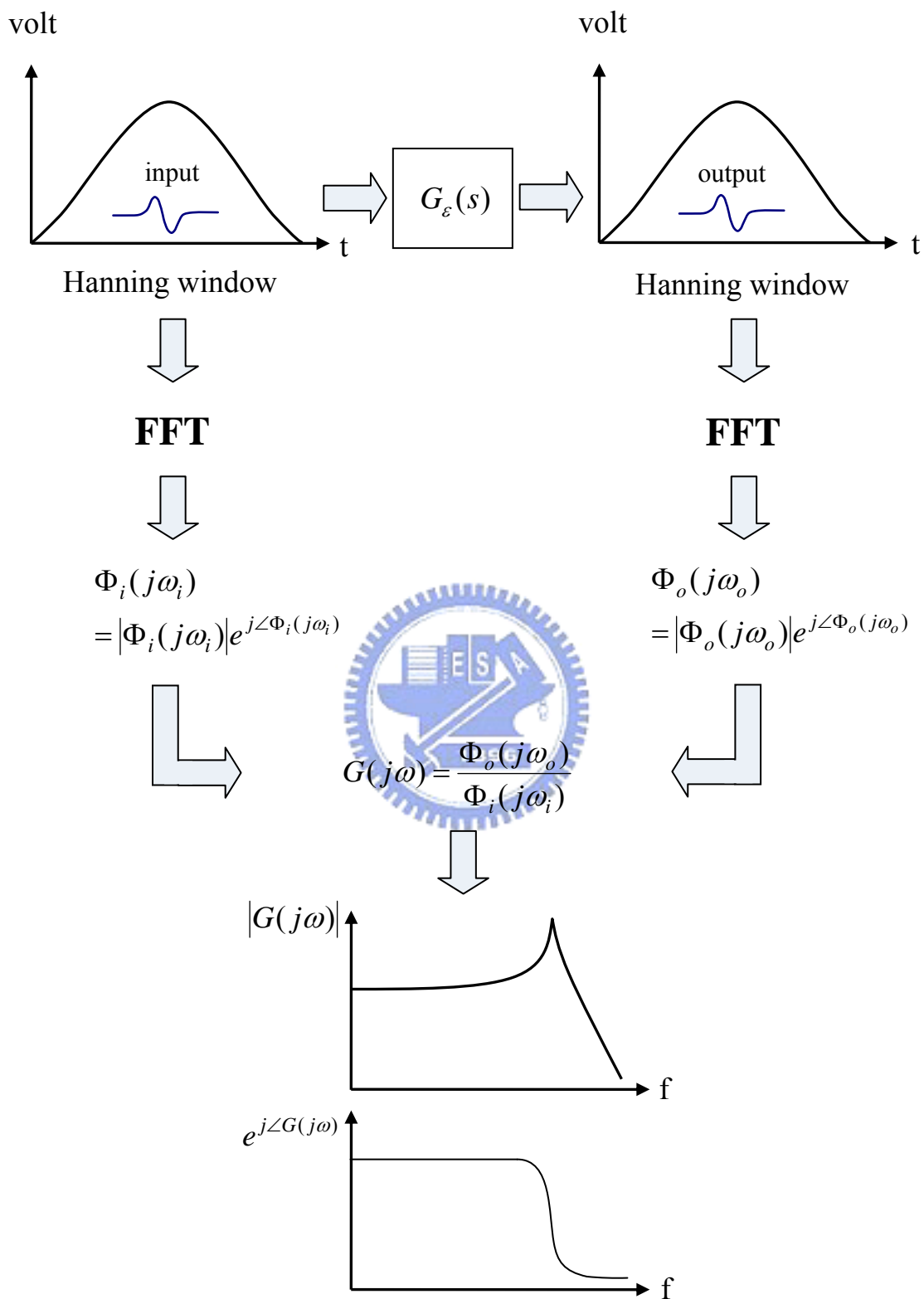
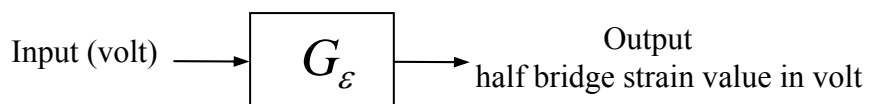
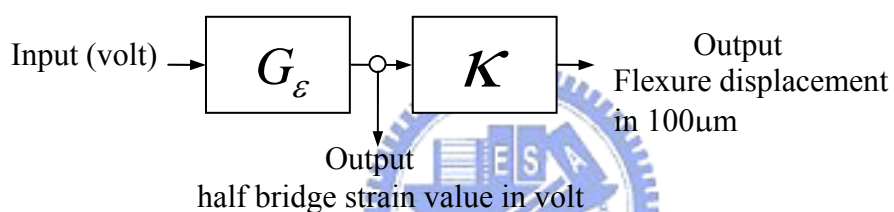


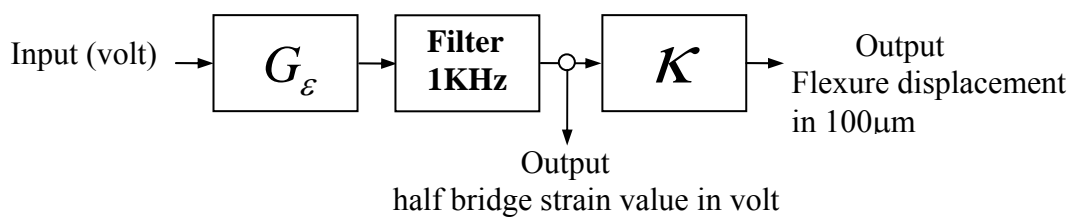
圖 9 頻譜分析法流程圖



10(a) 開路系統電壓梁軸應變方塊圖



10(b) 開路系統電壓對梁末端橫向位移方塊圖



10(c) 開路系統加入濾波器之方塊圖

圖 10 開路系統之定義與示意圖

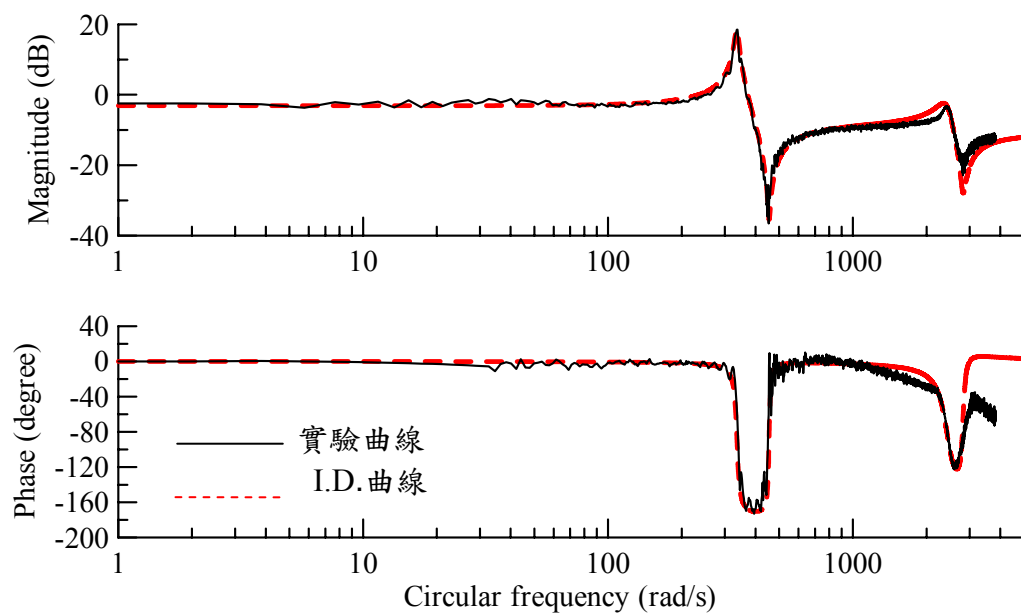


圖 11 實驗與模擬之電壓對應變之頻率響應圖

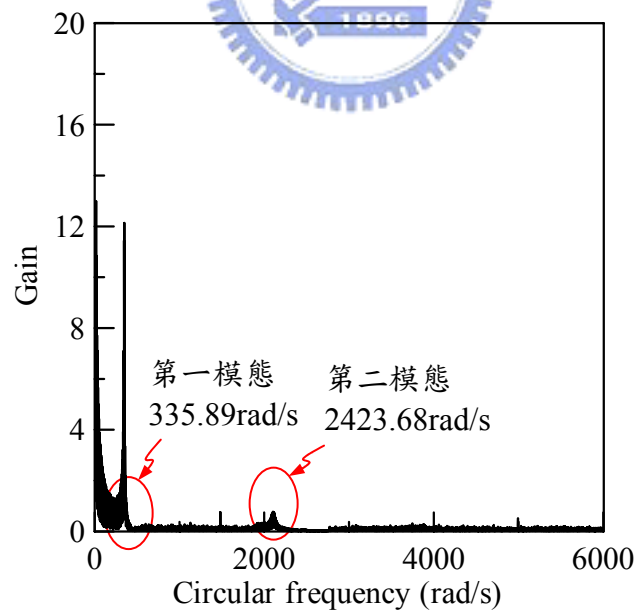


圖 12 步階響應頻譜圖

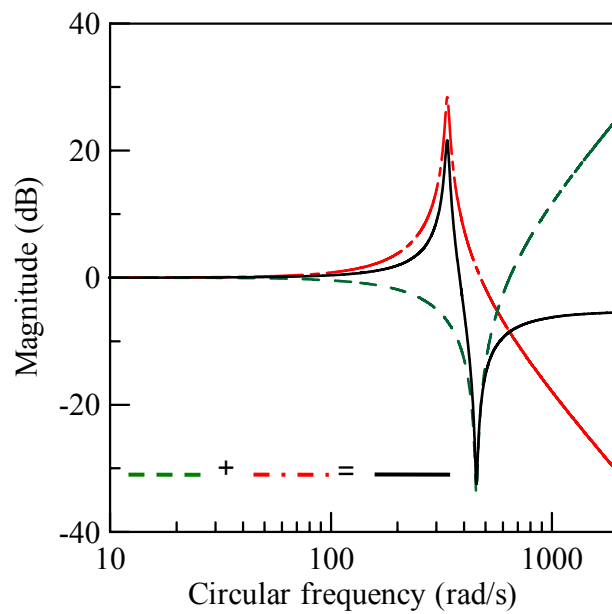


圖 13 共振與反共振峰值非常接近，造成能量耦合示意圖

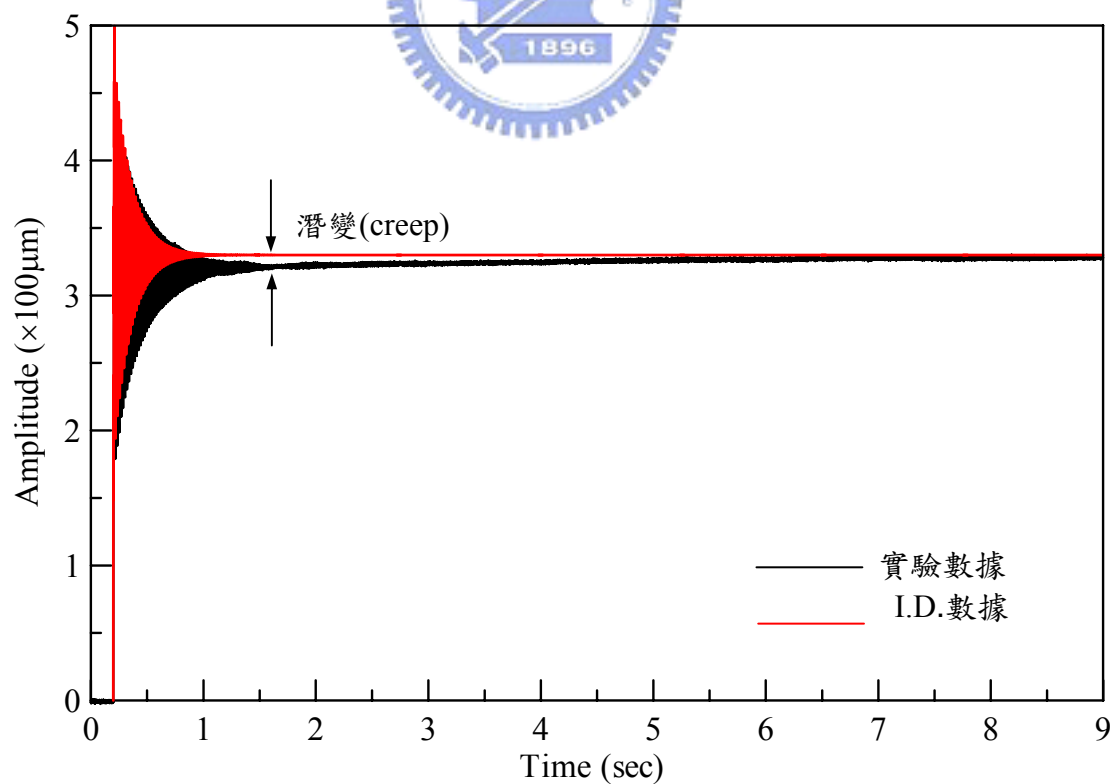


圖 14 系統識別與實驗量測的步響應圖形

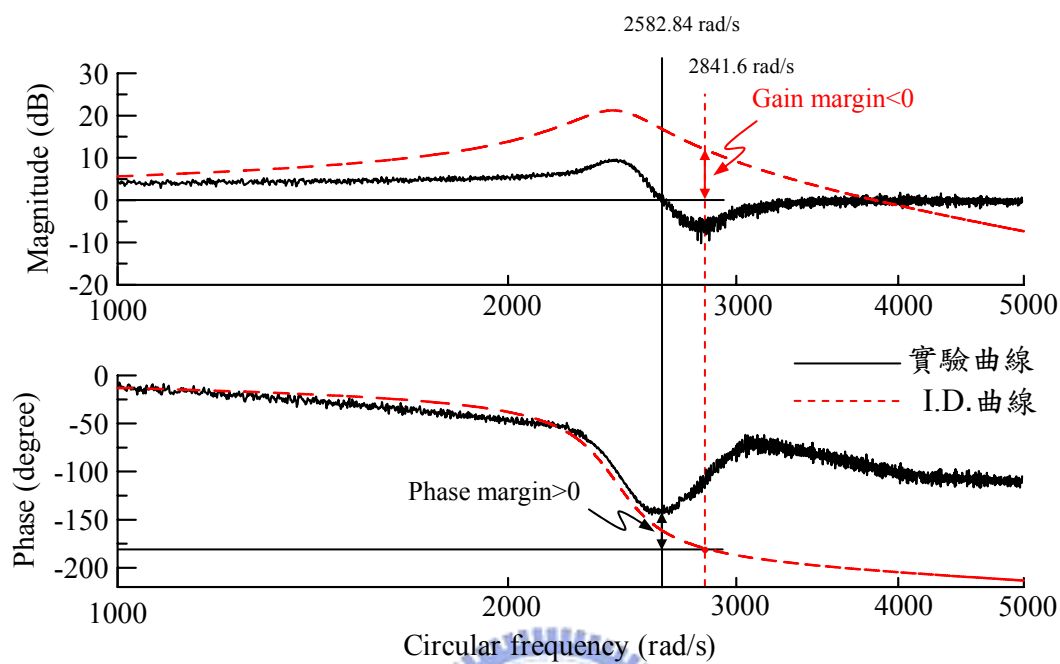


圖 15 系統識別的波德圖與加入濾波器後的系統波德圖

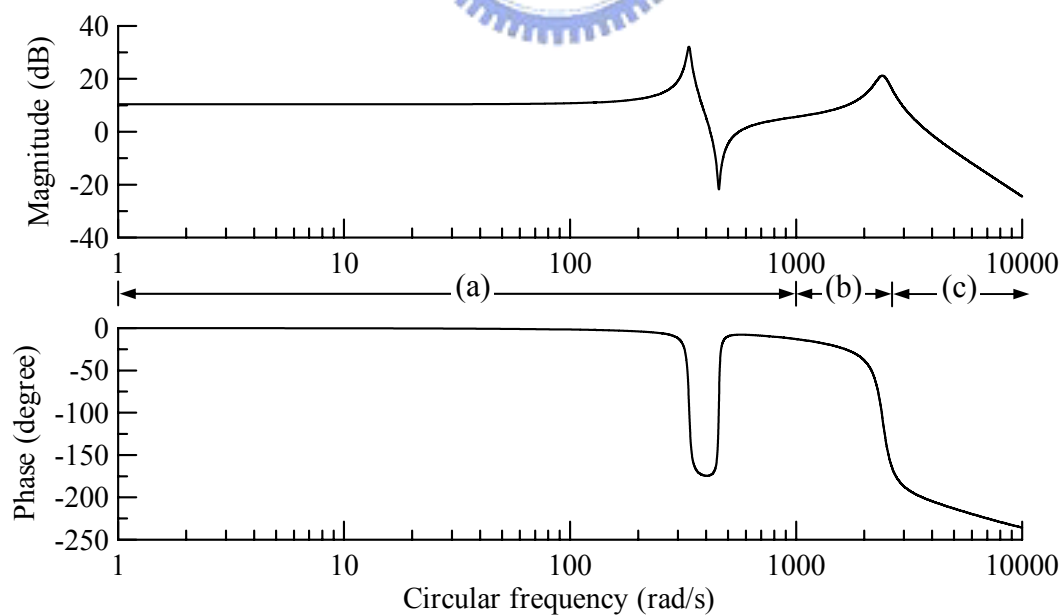


圖 16 模擬的橫向位移波德圖

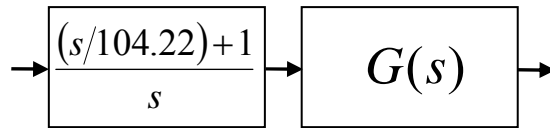


圖 17 系統第一次補償方塊圖

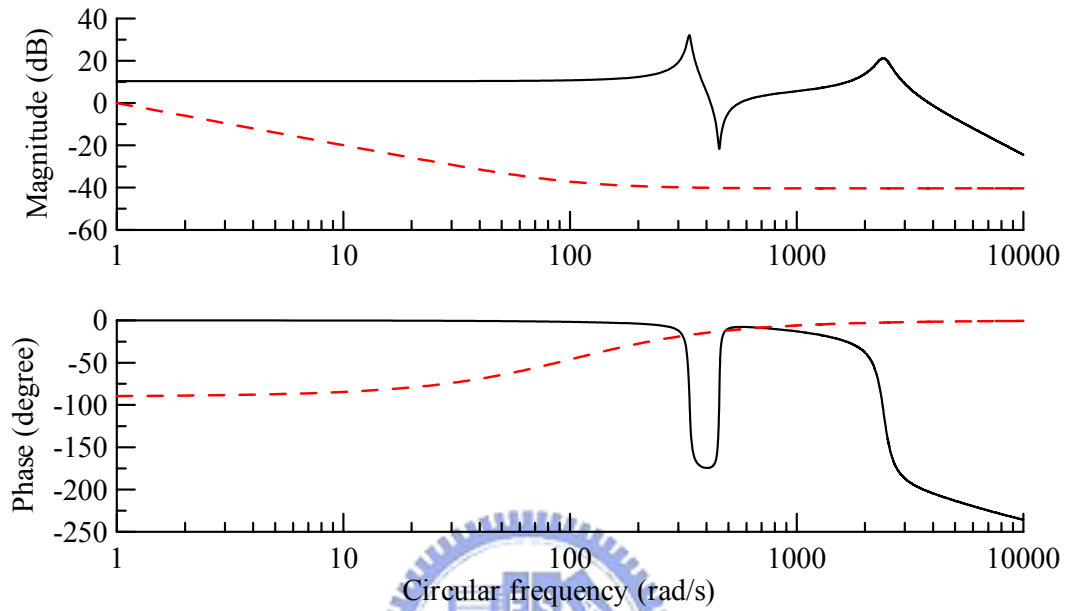


圖 18 系統(實線)與 PI 控制器(虛線)之波德圖

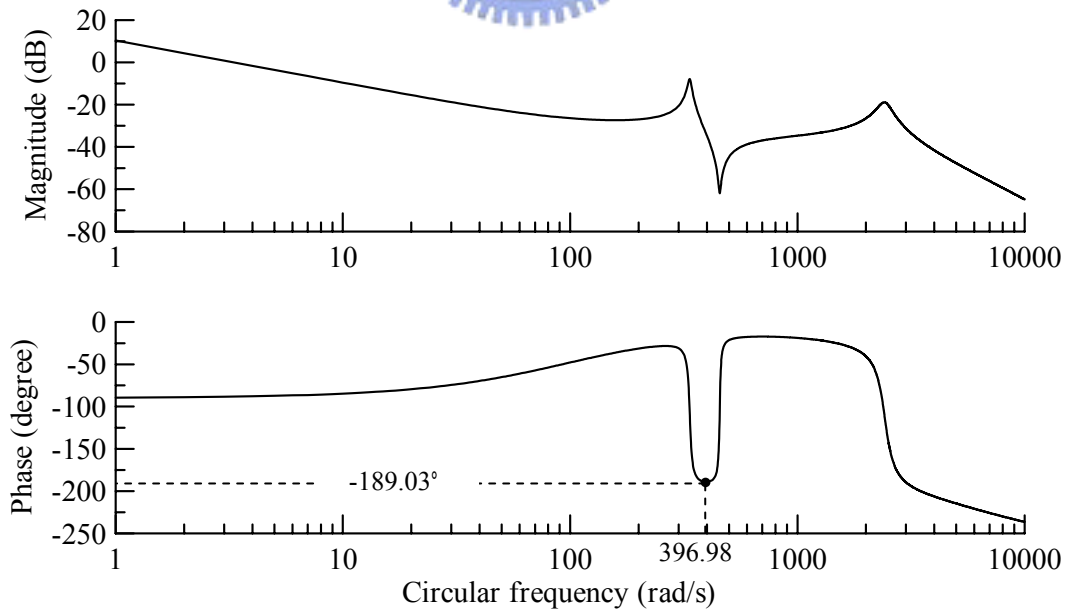


圖 19 系統經 PI 控制器補償後的頻率響應圖

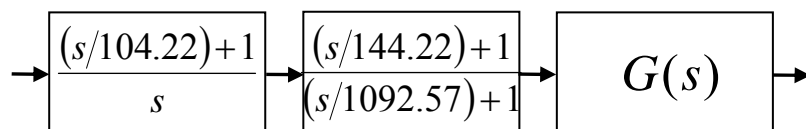


圖 20 系統第二次補償方塊圖

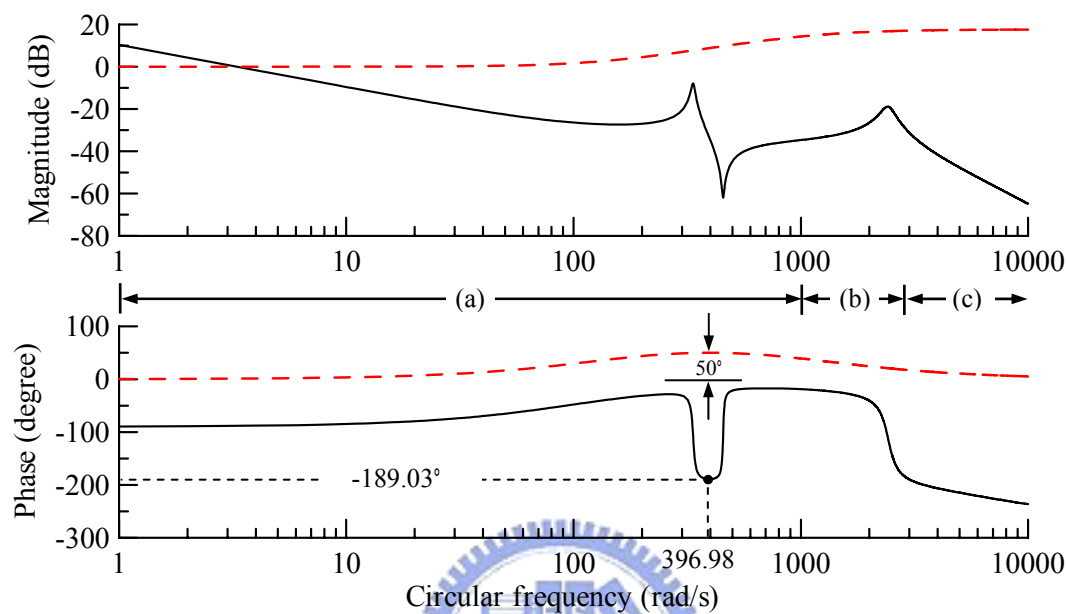


圖 21 第一次補償的系統(實線)與相位領先控制器(虛線)之頻率響應圖

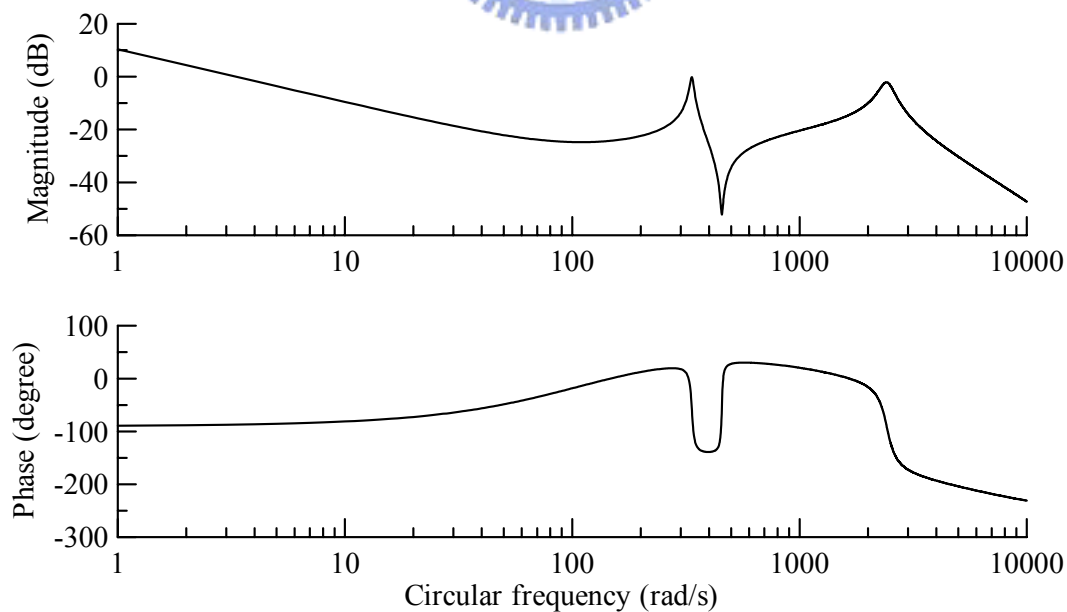


圖 22 系統經相位領先補償後頻率響應圖

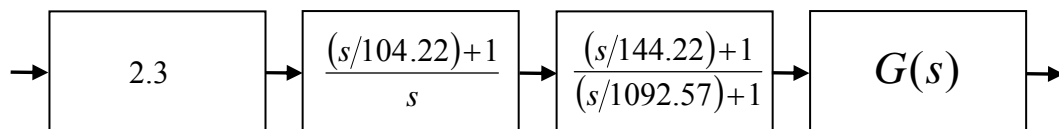


圖 23 系統第三次補償方塊圖

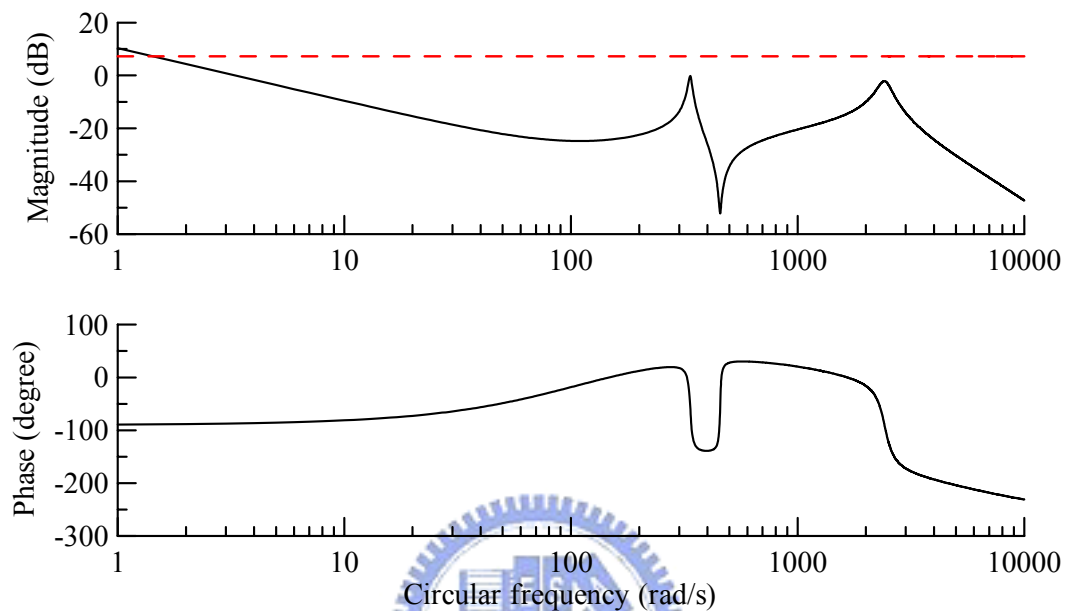


圖 24 第二次補償後的系統(實線)與比例放大器(虛線)之波德圖

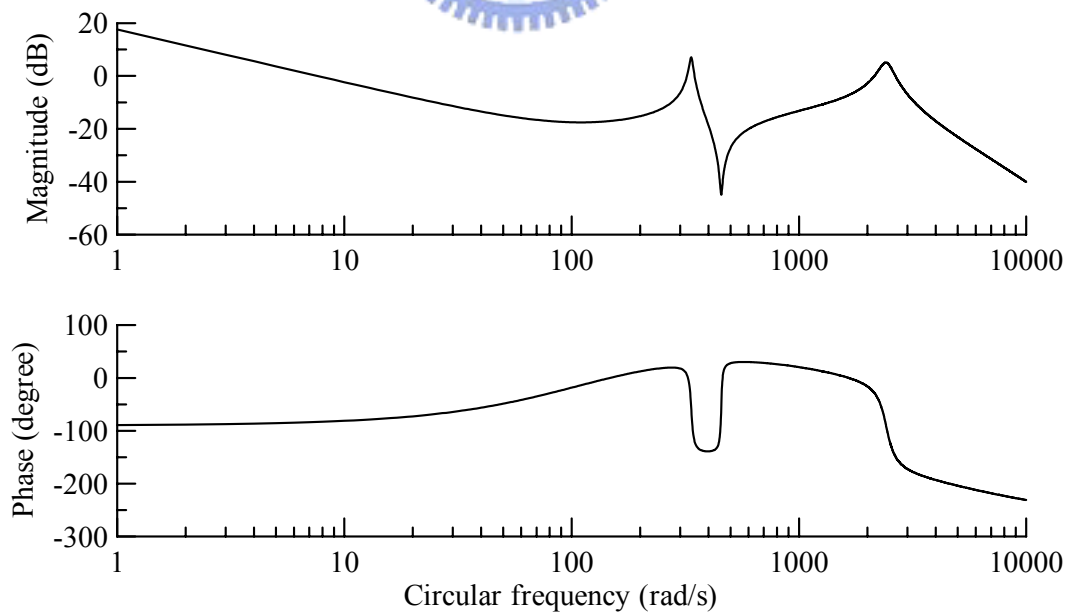


圖 25 第三次補償後，系統之頻率響應圖

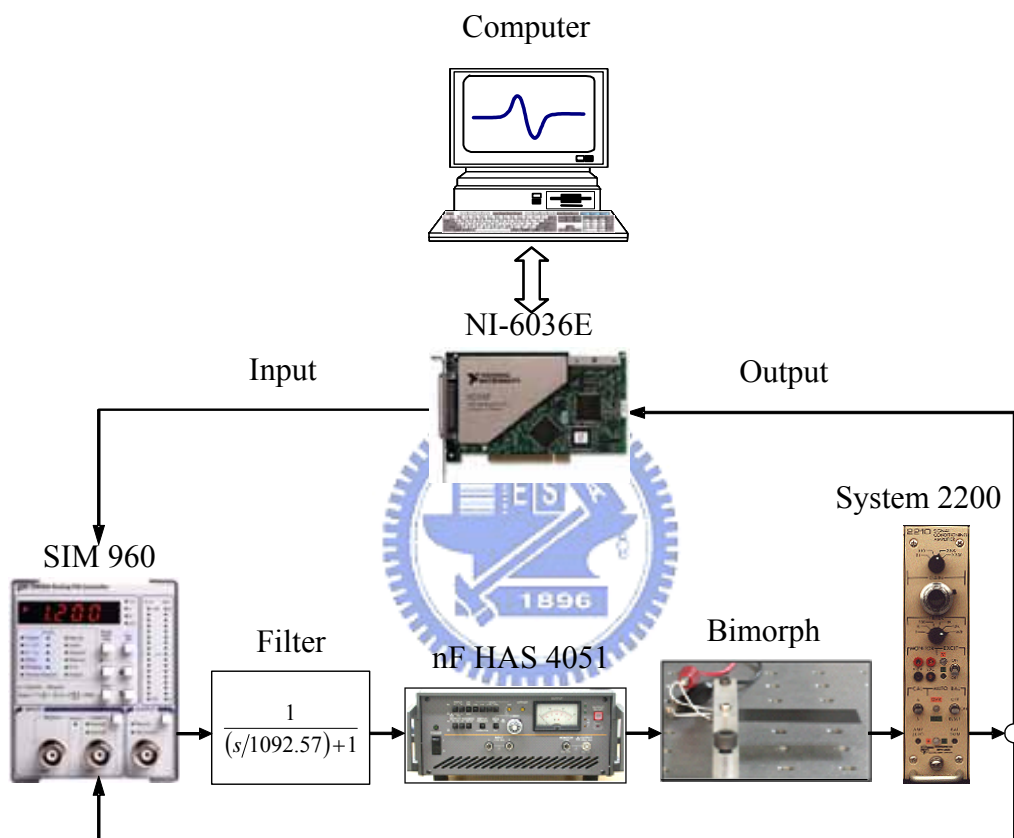


圖 26 閉迴路控制實驗架構

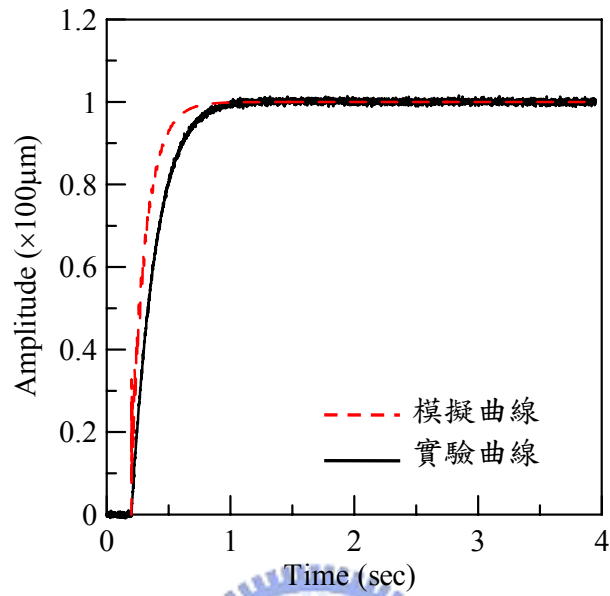


圖 27(a) 壓電梁末端位移 $100\ \mu\text{m}$ 定位控制的時間響應圖

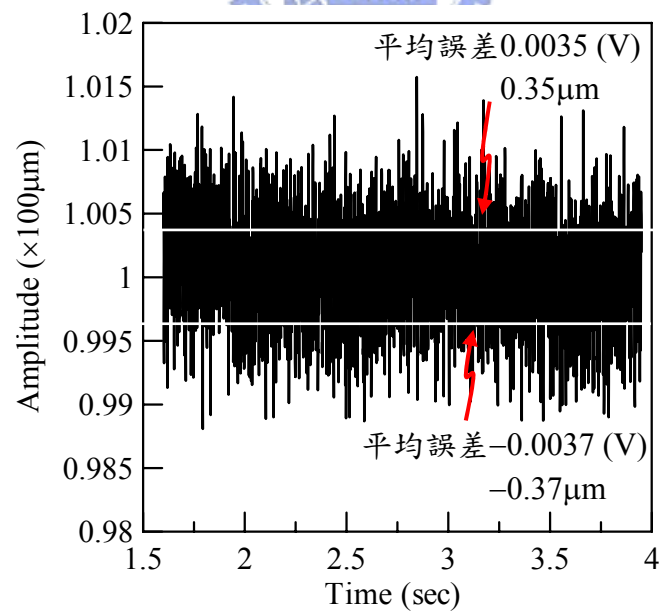


圖 27(b) 雜訊對圖 27(a)定位精度所造成的平均誤差

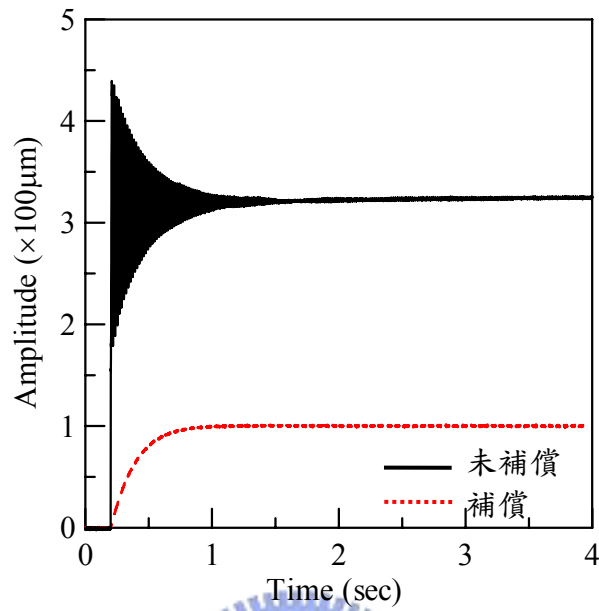


圖 27(c) 未補償與補償後系統之步階響應圖形

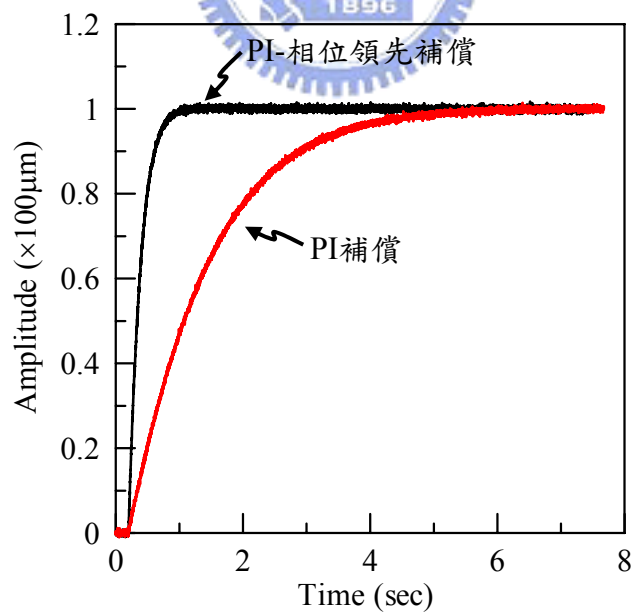


圖 28 PI-相位領先補償與 PI 控制器補償實驗比較

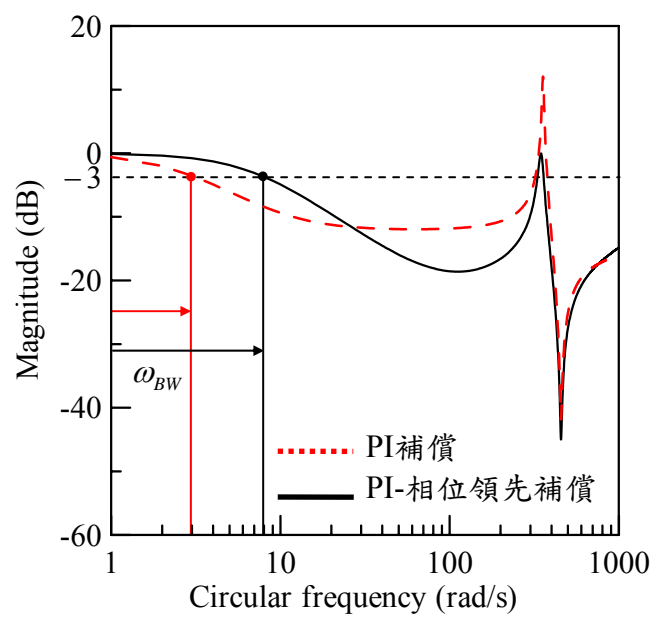


圖 29 PI-相位領先補償與 PI 補償閉迴路系統的頻寬

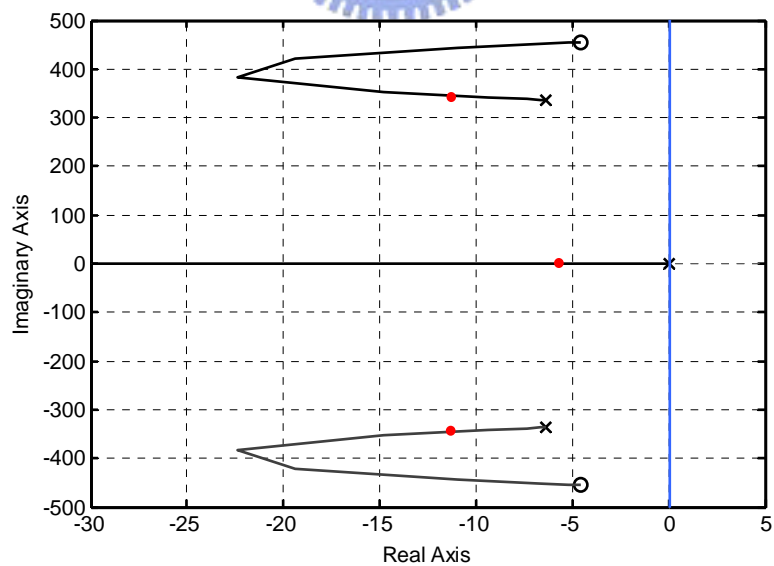


圖 30 PI-相位領先補償之閉迴路極點

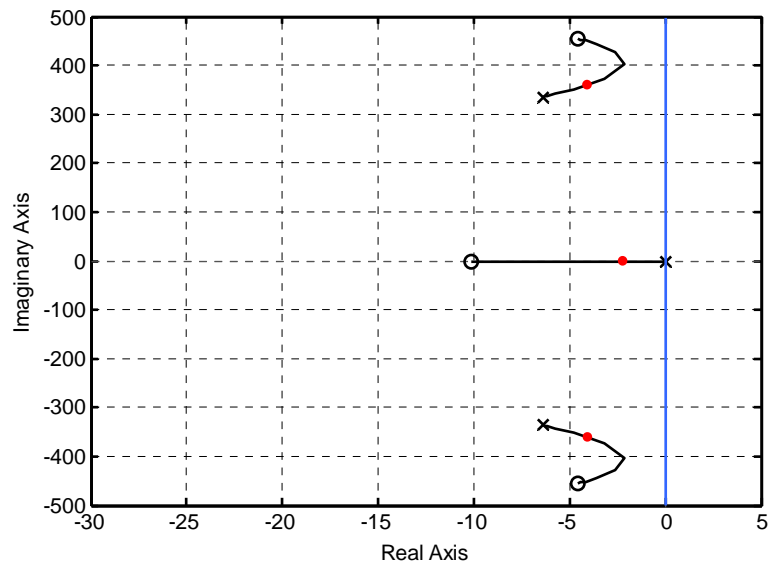


圖 31 PI 補償後之閉迴路極點

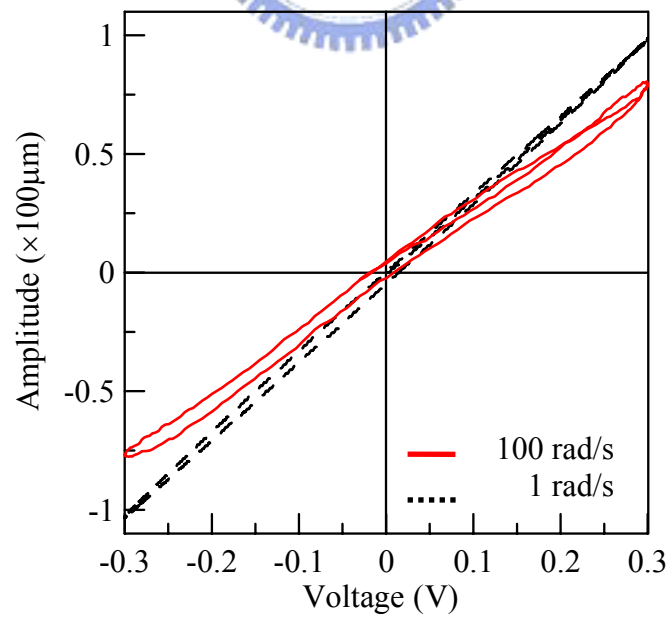


圖 32 頻率 1 rad/s 與 100 rad/s 之遲滯曲線



圖 33 壓電管

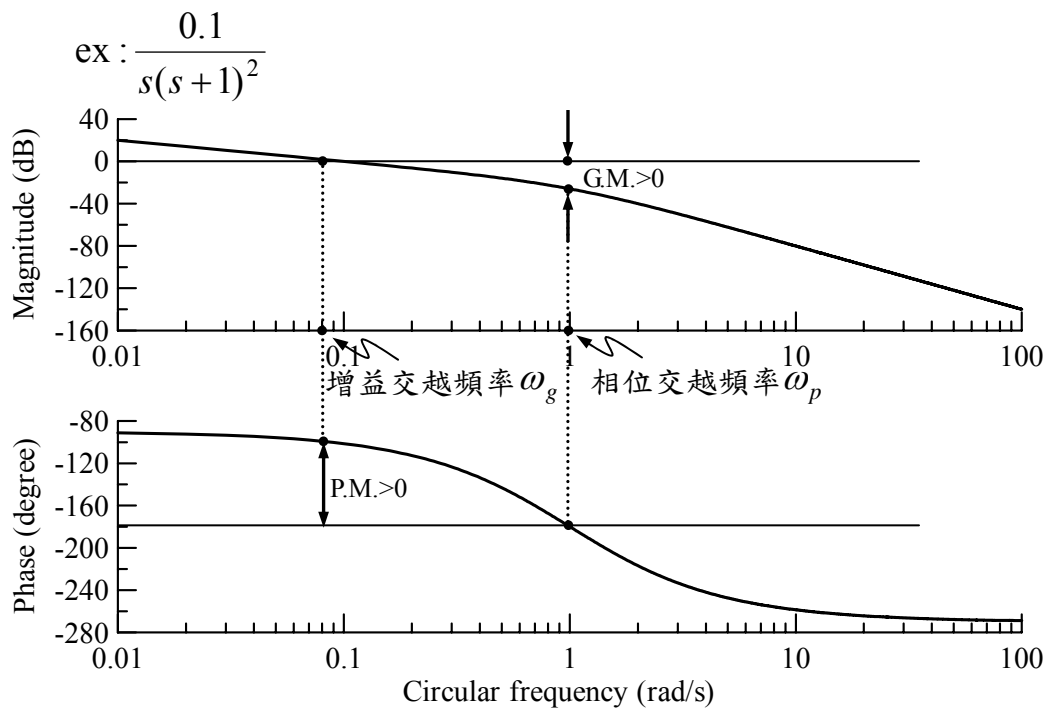


圖 34(a) 穩定系統對應的相位邊限與增益邊限

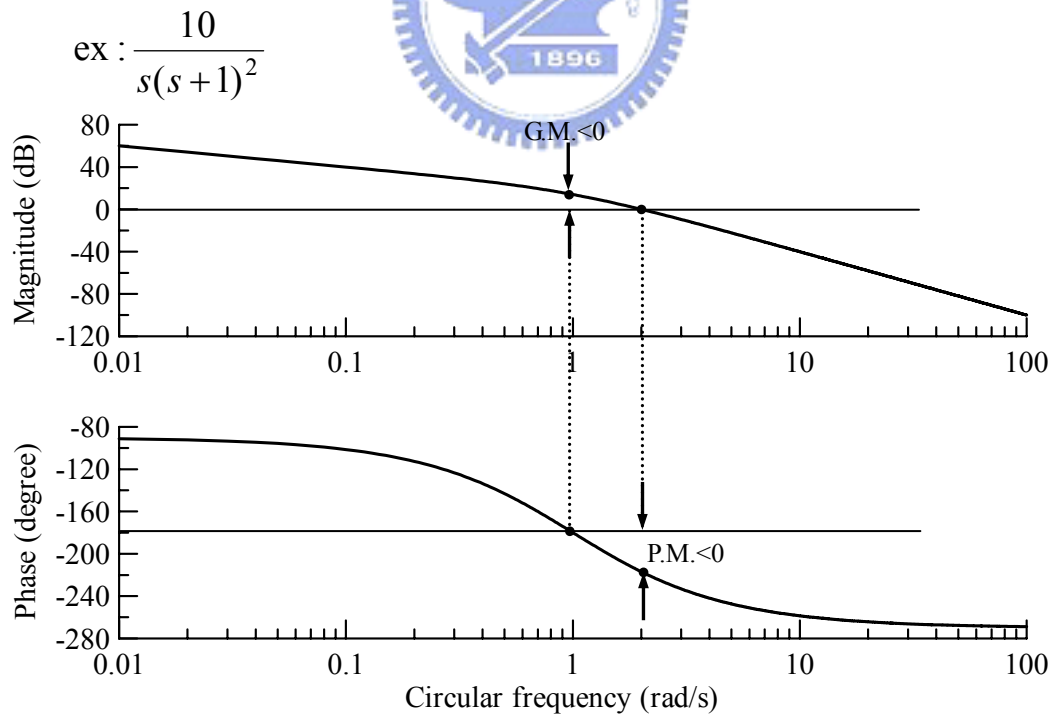


圖 34(b) 不穩定系統對應的相位邊限與增益邊限