

國立交通大學

光電工程學系碩士班

碩士論文

韋格納分佈函數應用於光學系統之研究

Study of Wigner Distribution Function in Optical Systems

研究生：楊錫汶

指導教授：田仲豪副教授

中華民國一百零二年七月

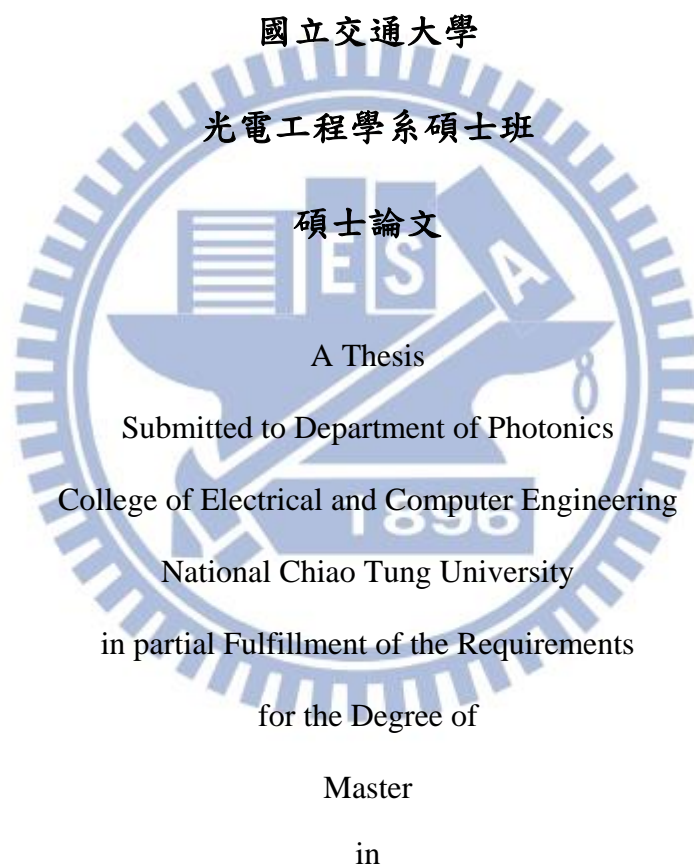
韋格納分佈函數應用於光學系統之研究
Study of Wigner Distribution Function in Optical Systems

研究生：楊錫汶

Student：Shi-Wen Yang

指導教授：田仲豪

Advisor：Chung-Hao Tien



Department of Photonics

July 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年六月

韋格納分佈函數應用於 光學系統之研究

碩士研究生：楊錫汶 指導教授：田仲豪

國立交通大學

光電工程學系碩士班

摘要

以計算效率的角度而言，利用幾何光學模型，並以光線追跡評估光學系統特性是一項重要且方便的手段，然而，光的物理特性僅有在巨觀尺度下滿足直線傳播的特性。為了克服此弱點，我們選擇了韋格納分佈函數為工具，透過統計光學與傅氏光學理論，連結了此項函數模型與光場技術的關係；證明韋格納分佈函數在巨觀條件下與光場等價，同時考慮到繞射效應。接著，我們分析韋格納分佈函數的傅立葉對偶函數-模糊函數在光學系統中的意義，建立模糊函數與光學傳遞函數之關係，並與韋格納分佈函數整合。論文最後，我們將韋格納分佈函數，應用於擴展景深系統。

Study of Wigner Distribution Function in Optical Systems

Master Student: Shi-Wen Yang **Advisor:** Dr. Chung-Hao Tien

Department of Photonics
National Chiao Tung University

Abstract

In viewpoint of computational efficiency, ray tracing based on geometric model is a convenient but effective way to analyze the performance of an optical system. However, neglect of diffraction effect may leads to the error of optical modeling-. In order to overcome this defect, we use the Wigner distribution function (WDF) as a tool, based on statistics and Fourier optics, to address the correspondence between WDF and light field technique. On account of macroscopic conditions, WDF could be proved equivalent to light field including diffraction effect. After discussing the WDF, we examine the physical significance of its Fourier dual – Ambiguity function (AF) associated with optical transfer function. The connection between AF and WDF in optical system will be given. Finally, we employ WDF analyses in extending depth of field (EDoF) system.

誌謝

首先感謝 田仲豪老師與 栗永徽老師兩年來的指導，在碩士學位的期間毫不吝嗇地和我分享學習上與人生經歷上的寶貴經驗，讓我能夠順利完成學業及此論文。

再來感謝實驗室中一路帶領我的李杰恩學長與謝昇勳學長，沒有他們在工作上的協助與研究上的建議，相信我沒有辦法在這麼短暫的時間內交出這些研究成果。還有在這段路上同樣給予我許多經驗的小陸學長、玉麟學長、國恩學長、松柏學長以及孟潔同學，沒有你們伸出的援手我無法走出那些艱困的時刻。以及一起一路努力到畢業的同伴陳柏宇、張睿與邱郁勳，很幸運能有這麼傑出並友好的夥伴。少宏、子豪、承瑋、皓謙等學弟妹們，希望你們都能順利畢業。

感謝我的父母多年來的栽培與教養，沒有他們的諄諄教誨與大力支持，不會造就現在的我，並感謝我其他的好朋友們，因為你們讓我在學習的路上並不孤單。在此，將畢業的喜悅分享給大家。

目錄

中文摘要 Abstract (Chinese)	i
英文摘要 Abstract (English).....	ii
誌謝 Acknowledgement.....	iii
目錄 Table of Contents.....	iv
圖目錄 Figure Captions	vi
一、研究背景與介紹.....	1
1.1 緒論.....	1
1.2 純量繞射理論.....	2
1.2.1 克希荷夫繞射公式.....	3
1.2.2 菲涅爾-克希荷夫繞射公式.....	5
1.2.3 瑞利-索莫菲繞射公式.....	6
1.3 光場技術.....	8
1.3.1 光場相機.....	9
二、同調性與相位空間.....	13
2.1 同調性與相互同調函數.....	13
2.1.1 時間同調.....	13
2.1.2 空間同調.....	16
2.2 相互強度與韋格納分布函數.....	18
2.3 章節總結.....	23
三、光學系統之分析.....	23
3.1 韋格納分布函數與光場技術之關聯.....	23
3.2 模糊函數與光學傳遞函數之關聯.....	26
3.3 模糊函數與韋格納分布函數於光學系統中的連結.....	29

3.3.1 傅立葉切片原理	29
3.3.2 模糊函數與韋格納分布函數於光學系統中的連結	30
3.4 韋格納分布函數與模糊函數於光學系統中的傳播	32
3.4.1 相互強度於光學系統中的傳播	32
3.4.2 韋格納分布函數於光學系統中的傳播	35
3.4.3 模糊函數於光學系統中的傳播	38
3.5 章節總結	39
四、模擬結果	40
五、波前編碼元件應用於擴展景深系統	45
5.1 頻域中探討波前編碼元件與擴展景深	45
5.2 空間中探討波前編碼元件與擴展景深	51
六、結論與未來工作展望	56
6.1 結論	56
6.2 未來工作展望	56
引用 Reference	58

圖目錄

圖 1-1：積分的表面.....	4
圖 1-2：一點光源照在平面孔洞 A 上的繞射情況.....	6
圖 1-3：平面屏幕上的瑞利-索莫菲原理.....	7
圖 1-4：光場模型.....	8
圖 1-5：光場相機技術.....	9
圖 1-6：光場相機運作基本原理.....	10
圖 1-7：光場相機之重新對焦技術.....	12
圖 2-1：邁克森干涉儀.....	14
圖 2-2：兩種不同條紋之清晰度差別.....	16
圖 2-3：楊氏雙狹縫干涉實驗.....	16
圖 2-4：雙狹縫干涉實驗，中央亮紋清晰度與狹縫距離之關係.....	18
圖 2-5：空間同調函數示意圖與其座標轉換.....	19
圖 2-6：雙狹縫相互同調函數.....	20
圖 2-7：點光源在相位空間內的四種描述函數.....	21
圖 2-8：以韋格納分布函數解釋不同光源特性.....	22
圖 3-1：韋格納分布函數與光場的連結.....	24
圖 3-2：光於光纖中傳遞，其韋格納分布函數變化.....	26
圖 3-3：光學成像系統.....	27
圖 3-4：WDF 與 AF 在光學系統上的連結.....	32
圖 3-5：相互強度於空間中的傳播.....	33
圖 3-6：薄元件對入射單色光相互強度的影響.....	34
圖 3-7：透過 ABCD 矩陣作用於韋格納分布函數，描述光場在單透鏡成像系統內各 位置的變化情形.....	37
圖 4-1：單狹縫的同調強度與韋格納分布函數.....	40

圖 4-2：平面波經過寬度為 A 的單狹縫後，韋格納分布函數的變化情形	41
圖 4-3：平面波經過雙狹縫後的相互強度與韋格納分布函數	41
圖 4-4：平面波經過距離 $2B$ 的雙狹縫後，韋格納分布函數的變化情形	42
圖 4-5：平面波通過稜鏡的韋格納分布函數變化	43
圖 4-6：平面波通過薄凸透鏡的韋格納分布函數變化	43
圖 4-7：平面波通過薄凹透鏡的韋格納分布函數變化	43
圖 4-8：平面波通過三次方相位元件的韋格納分布函數變化	44
圖 5-1：一維方形孔徑的模糊函數與不同離焦變數所對應的調製傳遞函數	47
圖 5-2：穩相法範例	48
圖 5-3：三次方相位元件的模糊函數分布圖	51
圖 5-4：傳統成像系統和擴展景深之光場、PSF 分佈之分析情形	53
圖 5-5：傳統成像系統和波前編碼擴展景深 PSF 分佈之比較情形。	55



章節一

研究背景與介紹

1.1 緒論 (Introduction)

全光方程式(plenoptic function)，是記錄影像在所有位置的幅度(radiance)資訊，一般以七個維度的方程式表示：

$$L(x, y, z, u, v, \lambda, \tau) \quad (1-1)$$

其中 x, y, z 表示空間位置， u 指 x 方向上的行進角度， v 則為 y 方向上之行進角度， λ 為波長， τ 則為時間。簡化起見，考慮特定波長，靜態影像，在某一特定深度的 z 平面，全光方程式可被化簡至五維方程式：

$$L(x, y, z, u, v) \quad (1-2)$$

此數學模型亦被稱為光場(light field)[1]，光場技術連結了幾何光學與輻射度量學，是近年來倍受矚目的一種數位影像技術。一般而言，光在光學系統內傳播或是經由元件偏折，其光場資訊可由線性座標轉換來描述。

除了透過全光方程式表示光線在光學系統中的傳播行為，純量的光場亦可由另一種數學形式：韋格納分布函數(Wigner distribution function; WDF) [2,3]描述。與光場資訊相似，光在系統內傳播或是經過元件偏折，可以透過韋格納分布的線性座標轉換來表示。

在此論文中，首先將說明韋格納分布函數與光場的關係[4]，並證明出光場即為韋格納分布函數的一種特例，在特定條件下，韋格納分布函數與光場等價。接著說明韋格納分布函數的傅立葉對偶(Fourier dual)模糊函數(Ambiguity function) [5]在光學系統中的意義，並透過理論連結模糊函數與韋格納分布函數。最後將使用韋格納分布函數應用於光學系統的模擬。我們將以波前編碼技術作為主要討論對象，藉由韋格納分布函數設計相位元件，以達擴展景深的效果[6]。

最後值得一提的是，由於光場技術以純幾何光學為背景，當光學系統尺寸逐漸變小，光的波動性質，如干涉與繞射等現象所造成的影響不可被忽略(例如經過光柵時)，此時

光場技術所預測的結果與實際狀況有非常大的誤差，因此無法使用該模型；然而，韋格納分布函數從物理光學的角度出發再連結到幾何光學，因而保留了光的波動性質，便可應用於微小光學系統的模擬，對如今的尺度越趨微小之光學系統發展頗有益助。

1.2 純量繞射理論

傳統的訊號理論中，大多是在空間域中描述光的場形。或是透過傅立葉轉換將訊號轉移，在頻域中觀察其表現。傅立葉光學理論連結了波動光學與訊號與系統的關係，建立了資訊光學的觀念；然而，由於科技的發展，我們需要一個能同時描述訊號在空間域與頻域的行為的方法，但是傅立葉轉換卻無法滿足這方面的需求。韋格納分布函數可以同時描述訊號在空間與頻域中的行為，才能更進一步地分析訊號的某些行為，如同調性 (Coherence)。無論是傅立葉轉換或是韋格納分布函數，其基礎均為純量繞射理論，它同時也是韋格納分布函數理論發展的不可或缺的重要基石。純量繞射理論將光視為一純量場，忽略極化等具有向量形式的現象，因此可以用一個簡單的波動方程式 (Wave equation) 描述光的行為 [7]，此近似將使繞射等波動行為的形式變得簡易，方便做數學上的推導。而此段的內容即是說明純量繞射理論。

首先從馬克斯威爾方程式出發：

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0 \quad (1-3a)$$

$$\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (1-3b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1-3c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1-3d)$$

假設此波所傳遞介質是線性 (linear)、各向同性 (isotropic)、同質 (homogeneous)，並不具色散 (dispersive) 與磁化 (magnetic) 現象，我們可以用向量分析的觀念，加入 $\nabla \times$ 運算子在方程式 (1-3c) and (1-3d) 上：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon \frac{d(\nabla \times \vec{E})}{dt} \quad (1-4a)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{d(\nabla \times \vec{H})}{dt} \quad (1-4b)$$

將方程式(1-2a)使用(1-1d)置換，與方程式(1-2b)使用(1-1c)置換將得到：

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-5a)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-5b)$$

其中 n 是傳遞介質的折射率，因為以假設其為非磁性介質 $\mu = \mu_0$ ，故：

$$n = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (1-6)$$

c 是真空中光速：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1-7)$$

因為方程式(1-5a)與(1-5b)是相同的形式作用於磁場與電場，我們可以使用單一純量變數 $u(P, t)$ 來代表：

$$\nabla^2 u(P, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u(P, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1-8)$$

其中 $u(P, t)$ 中的 P 代表空間上的變數而 t 代表時間上的變數。

目前我們接假設光所傳遞介質是線性、各向等性、同質，並且沒有色散和磁化現象。在這個情況下，我們可以簡化計算，將電磁波(EM Wave)視為純量場，接著可以使用傅立葉的數學方法加以分析。

1.2.1 克希荷夫繞射公式(Kirchhoff diffraction formula)

此節要介紹的克希荷夫繞射理論將證明惠更斯-菲涅爾原理可視為封閉曲面 P 所包圍的場中任意一點上，同質波動方程式的解，並且被一些特殊的積分定理展開後的近似形式。而其形式將包含波動方程式的解與其一階導數[8]。

我們首先考慮一個嚴格定義的單色(monochromatic)純量波：

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad (1-9)$$

將純量波分成空間變數相關項乘上時間變數相關項，方程式(1-9)中與空間變數相關項目 $U(x, y, z)$ 將滿足真空中的時間獨立波動方程式：

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \quad (1-10),$$

其中波數(wave number) $k = \omega/c$ 。此式子即為常見的亥姆霍茲方程式(Helmholtz equation)。

定義 V 為三維空間中的一塊體積，並被一封閉曲面 S 所包圍。 P 則為此體積範圍中任意一點。我們引入格林定理(Green's theorem)：

$$\iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U)dV = \iint_{S_1+S_2} (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n})dS \quad (1-11),$$

其中 n 為曲面 S 任意一點的法向量，並指向外。 U 和 G 是圖 1-1 中位置的任意函數：

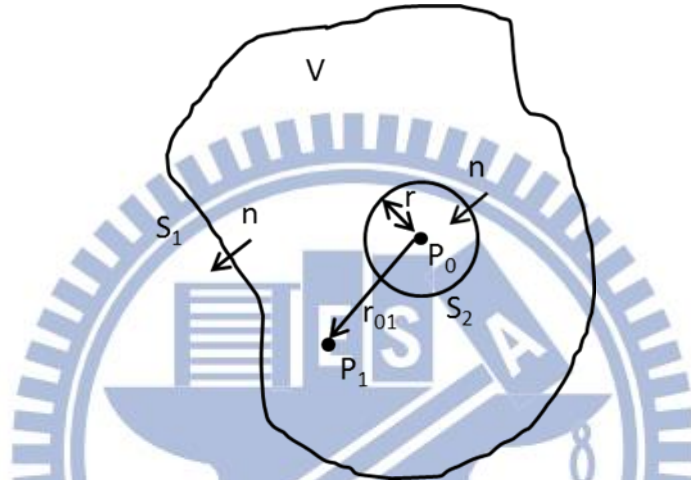


圖 1-1：積分的表面(Surface of integration)。

假設 U 與 G 皆符合亥姆霍茲方程式

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \quad (1-12a)$$

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0 \quad (1-12b)$$

將方程式(1-12a)與(1-12b)代入方程式(1-11)中，我們將會獲得：

$$\iint_{S_1+S_2} (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}) dS = 0 \quad (1-13)$$

假定有一個點光源坐落於位置 P_0 之上，接著對於曲面 S 上的常點 P_1 而言將會有：

$$G(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (1-14a)$$

以及

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (1-14b)$$

其中 r_{01} 是向量 \vec{r}_{01} 的長度，此向量自 P_0 指向 P_1 。對於 S_2 上的 P_1 上的一個特例：

$\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -1$ 而言，方程式(1-14a)與(1-12b)變成：

$$G(P_1) = \frac{\exp(jkr)}{r} \quad (1-15a)$$

和

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \left(\frac{1}{r} - jk\right) \frac{\exp(jkr)}{r} \quad (1-15b)$$

接著我們令 r 趨近於零, U 在點 P_0 上的連續性使我們可以這樣改寫：

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{S_2} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 \left[U(P_0) \left(\frac{1}{r} - jk\right) \frac{\exp(jkr)}{r} - \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \frac{\exp(jkr)}{r} \right] = 4\pi U(P_0) \end{aligned} \quad (1-16)$$

再將方程式(1-13)的結果代入此式，可得到：

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds \quad (1-17)$$

此結果即是克希荷夫公式；它在純量場理論的發展上扮演極為重要的角色。它可以使場中的任意一點 P_0 ，透過包圍此點的封閉曲面上使用球面波的邊界值加以展開。

1.2.2 菲涅爾-克希荷夫繞射公式(Fresnel-Kirchhoff diffraction formula)

我們現在考慮一個常見的情況，當克希荷夫繞射公式中的 r_{01} ，也就是孔洞與觀察點之間的距離遠大於入射波的波長。此情況代表光的波數將遠大於孔洞與觀察點之間的距離的倒數，即 $k \gg 1/r_{01}$ ，方程式(1-14b) 變成

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} \approx jk \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (1-18)$$

將方程式(1-17)的結果代入其中，可得到

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \right] ds \quad (1-19)$$

現在我們將光源加入這個情況內。考慮在位置 P_2 上個點光源，並照在 位置在 P_1 上的孔洞 A 之上，如圖 1-2 所示

我們假設從 P_2 發出、照在孔洞 A 上的光皆是以球面波的形式傳遞

$$U(P_1) = \frac{A \exp(jkr_{21})}{r_{21}} \quad (1-20)$$

其中 r_{21} 與 r_{01} 相同，兩者皆遠大於光的波長，方程式(1-19)變可被表示成

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_A \frac{\exp[jk(r_{21}+r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds \quad (1-21)$$

注意，此結果只在點光源的情況下成立。而此結果即是所謂的非涅爾-克希荷夫繞射公式。

之前所推導的情況皆被嚴格限制在特殊情況下，也就是單一球面波照射在一個孔洞之上。但這個限制將會被接下來的瑞利-索莫菲理論(Rayleigh-Sommerfeld theory)所克服。

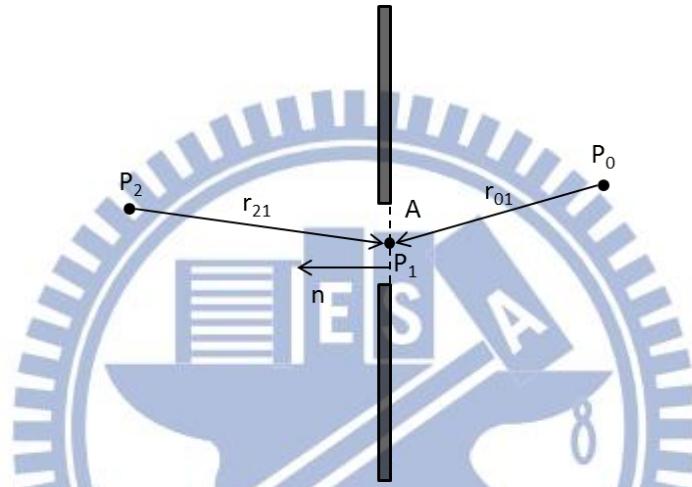


圖 1-2：一點光源照在平面孔洞 A 上的繞射情況。

1.2.3 瑞利-索莫菲繞射公式(Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula)

菲涅爾-克希荷夫理論已被實驗上精確的驗證，並且在實際是廣泛的運用。然而當我們考慮邊界情況(boundary conditions)，也就是觀察點非常接近邊緣或孔洞時，此菲涅爾-克希荷夫繞射公式的結果將出現錯誤。後來被索莫菲(Sommerfeld)所克服，而他所發表的理論稱為瑞利-索莫菲理論(Rayleigh-Sommerfeld theory)。

若 U 是屏幕上的邊界值， G 則必須為零，如此一來格林定理的第二項才會被消去。同樣的，若是 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 是邊界值，則 $\frac{\partial G}{\partial n}$ 必須為零，格林定理中的第一項才可被消去。

考慮一個特殊的情形，如圖 1-3 所示，有一個平面屏幕與孔洞 A。格林方程式透過鏡射法(mirror method)定義，並由兩個球面波所組成。

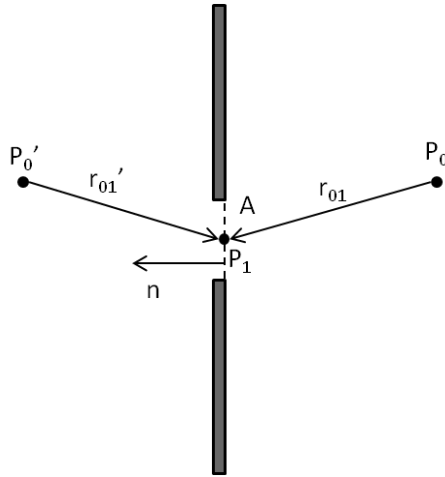


圖 1-3：平面屏幕上的瑞利-索莫菲原理。

在 U 為邊界值的情況下，可以得到瑞利-索莫菲的第一個解。它可以被表示成：

$$U_{1st}(P_0) = \frac{-1}{2\pi} \iint_A U \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (1-22)$$

而 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 為邊界值的情況下，可以得到瑞利-索莫菲的第二個解。

$$U_{2nd}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_A G \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (1-23)$$

將方程式(1-18)與(1-20)代入方程式(1-22)中：

$$U_{1st}(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_A \frac{\exp[jk(r_{01}+r_{21})]}{r_{01}r_{21}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (1-24)$$

方程式(1-24)即是瑞利-索莫菲繞射公式，他同時遵守惠更斯菲涅爾原理(Huygens-Fresnel principle)。接著，我們將方程式(1-22)重新改寫已獲得一個更加特殊且實用並具數學意義的形式

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_A U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\theta ds \quad (1-25)$$

此結果證明一個被觀察到的場 $U(P_0)$ 可以由孔洞 A 上所有的點上所發出的球面波所疊加組合而成。

到目前的推導為止，純量繞射理論已被克希荷夫和索莫菲發展的很健全，而此理論將接下來會透過菲涅爾與弗勞恩霍夫(Fraunhofer)的理論發展而更加完整。

1.3 光場技術(Light field technique)

如同方程式(1-2)，光場技術記錄了光學系統中深度為 z 的平面上，光線經過的位置與行進方向。為了得到光線行進的角度，會在像平面前引入一個參考平面，接著透過幾何關係推算出光線的行進方向。如圖 1-4 所示，將成像平面置放於 z_2 ，並在 z_1 處放置參考平面，欲推算出光線在成像平面上的行進角度，也就是 (u, v) 。

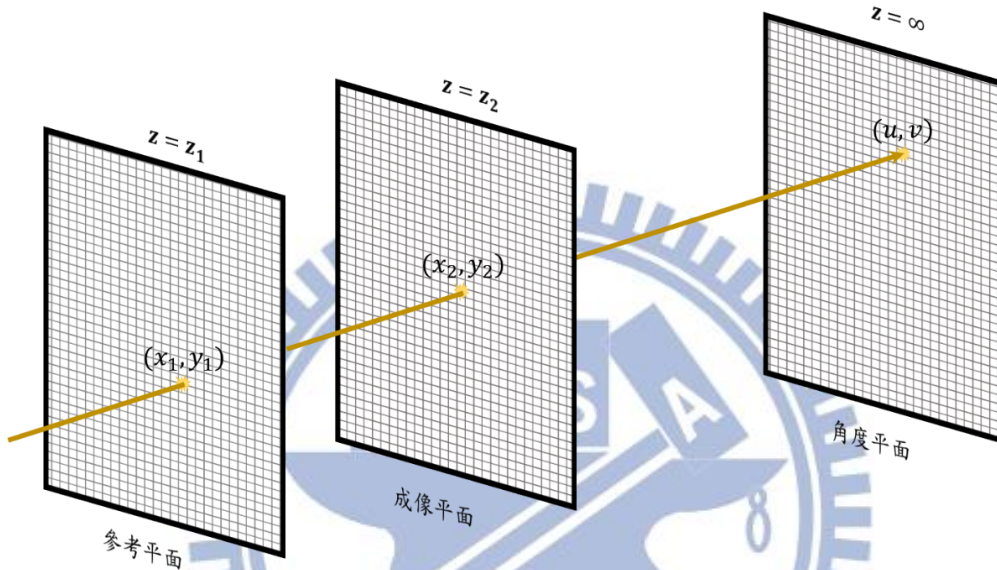


圖 1-4：光場模型。五維光場 $L(x, y, z, u, v)$ 具有光束在深度為 z 的平面上之位置與角度資訊。為了記錄下光束入射像平面的角度資訊，通常會引入一個參考平面，並利用光束直線前進的性質，推算出光線的行進方向。

光學系統的光源或成像系統的物常常位於距離系統主平面很遠處，此時可引入常用的近軸小角度近似

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \right) \sim \tan^{-1} \left(\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \right) \sim \left(\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \right) \quad (1-26a).$$

$$v = \sin^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} \right) \sim \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} \right) \sim \left(\frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} \right) \quad (1-27b).$$

如此一來，便可透過參考平面記錄下了光線在像平面上的位置與行進角度。

光場技術有很多應用，例如 Ashdown[9]利用它估計三維空間中任意位置上的照度，應用於照明工程上。Javidi[10]則利用記錄下光場重建 3D 影像，應用於 3D 電視技術的發展。近期最著名的應用則是 Ng[11,12]所發表的事後對焦相機技術，相較於傳統成像系

統只記錄下了成像平面上所有位置的照度資訊，利用加入微透鏡陣列(micro-lens array)額外記錄下光束入射到感光元件上的方向，利用演算法計算出對焦在不同平面上的影像，並已經商品化推出了光場相機(Plenoptic camera; Light field camera)。

1.3.1 光場相機 (Light field camera)

本節的內容是在說明 Ng[11,12]利用光場技術來達到光場相機事後對焦技術的原理，

圖 1-5 介紹了光場相機的機構[13]。

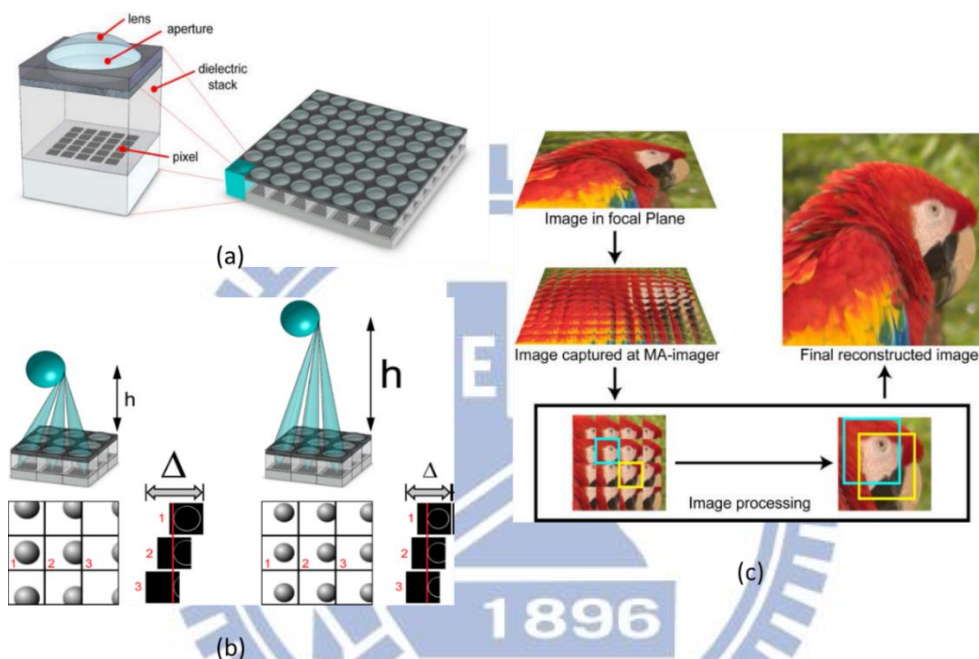


圖 1-5：光場相機技術。(a)微透鏡陣列機構示意圖。(b)與(c)為光場相機之事後對焦技術說明。光場相機不同於一般相機使用單一鏡頭、感光元件接收單一光束的原理，而是透過微透鏡陣列，將不同視角在不同空間位置記錄下來，之後透過軟體定址運算還原影像，並可隨意調整對焦點再次運算出新的影像。此技術將犧牲空間解析度與大量記憶體，但使用者可以通過多種方式對影像資訊做後處理，隨著硬體與數位影像技術的進步，未來十分具有發展性。

[資料來源: R. Ng. Fourier slice photography. In Proc. ACM SIGGRAPH, 2005.]

光場相機透過在感光元件前方加入了微透鏡陣列，記錄下光場資訊，透過電腦演算法，重建出對焦在不同物平面上的影像。其基本的成像原理與傳統數位相機相同，皆是使用鏡頭將外界的光線聚集到感光元件上記錄之。如圖 1-6 所示，不同之處在於光場相

機將原來在傳統相機中置放感光元件位置以微透鏡陣列取代，並在其後方放置感光元件。每一個微透鏡後方皆涵蓋了多個感光元件畫素。對影像而言，每一個微透鏡即為一個影像中的畫素點，即 x 。而後方的多個感光畫素則記錄了光線所行進的方向，並可利用幾何方法對應至主透鏡上的某個位置，即 u 。將此 $L(x, y, u, v)$ 關係記錄下來，如圖 1-6(b)所示，稱為光在光線空間(Ray-space)中的表現。此系統藉著加入了微透鏡陣列記錄下了光場。下段會簡單說明 Ng 是如何使用被記錄下的光場來達到相片事後對焦的目的。

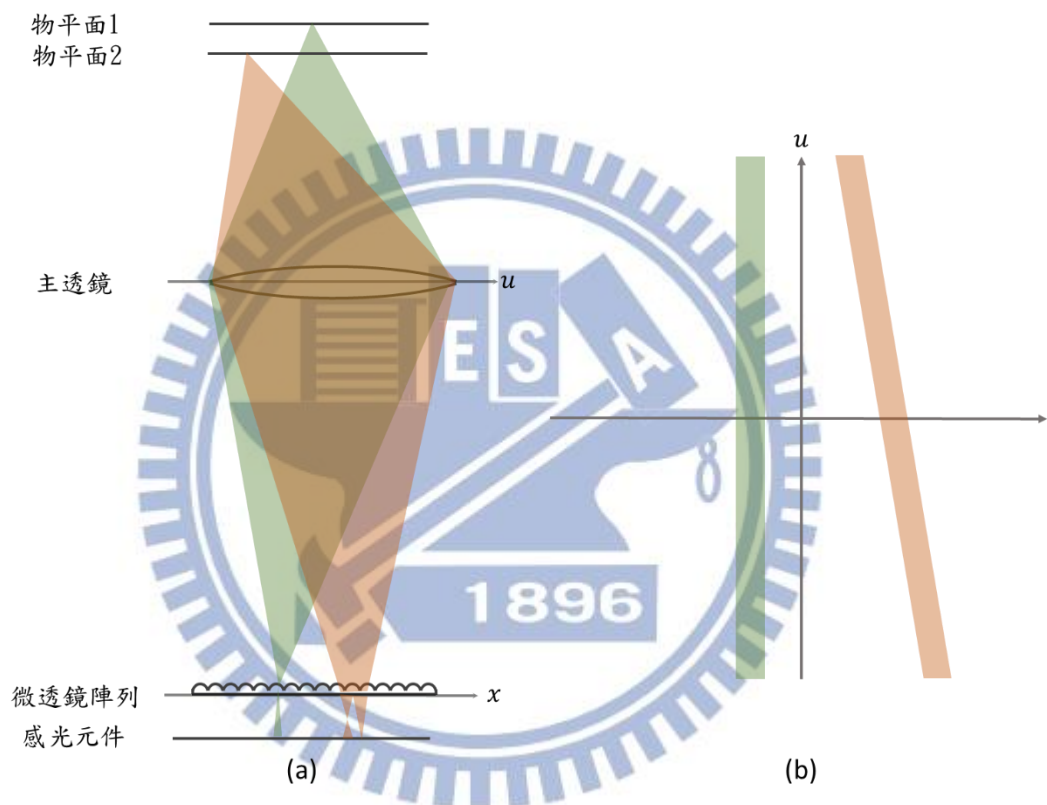


圖 1-6：光場相機運作基本原理。(a)光場相機在傳統相機的感光元件平面改置微透鏡陣列，並在其後方放置感光元件。(b)來自不同物平面的光線在經過光場相機系統記錄後，於光線空間(Ray space)中之呈現方式。其中主透鏡在圖中以單透鏡示意，實際光場相機中的主透鏡為一透鏡組。我們可以注意到來自於物平面 1 並經過主透鏡對焦在微透鏡陣列上(傳統相機的感光元件位置)的光(圖中綠色部分)在光線空間中是一條垂直線，此線的寬度即為單一微透鏡之寬度，其意義為所有角度的入射光線皆曝光於同一影像畫素之上。而來自於物平面 2 非對焦平面的光(圖中紅色部分)，在光線空間中將會是斜線。

對於傳統相機而言，最後的影像與感光元件上的輻射照度(irradiance)成正比，將曝光在感光元件上某個畫素點上所有方向的入射光積分加總，即為：

$$E_{z_1} = \iint L_{z_1}(x, y, u, v) \frac{\cos^4 \phi}{d^2} dudv \quad (1-27)$$

其中 $\frac{\cos^4 \phi}{d^2}$ 項來自於面光源對與平面感光元件的輻度學修正[24]， d 為感光元件與主透鏡的距離， ϕ 為光線與感光元件平面法向量之夾角。此定義意即：影像是四維光場在二維 (x, y) 空間上的投影。

光場相機最具突破性的功能在於，可以將拍攝到的影像透過演算法重新對焦，也就是將影像重建成對焦於不同物平面上。對於單一主透鏡而言，不同的物平面皆有對應共軛像平面，重建對焦於不同物平面上的影像，意即為重建不同其共軛像平面上的影像。

如圖 1-7，於距離主透鏡 d 的感光元件平面上記錄了光場資訊 L_{z_1} ，經幾何運算後，在距離主透鏡 αd 平面上的光場 L_{z_2} 為：

$$\begin{aligned} L_{z_2}(x, y, u, v) &= L_{z_1}\left(u + \frac{x-u}{\alpha}, v + \frac{y-v}{\alpha}, u, v\right) \\ &= L_{z_1}\left(u\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{x}{\alpha}, v\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{y}{\alpha}, u, v\right) \end{aligned} \quad (1-28)$$

根據(1-28)式子可以看出光在空間中傳播，光場傳播時，在光線空間中的表現是以切變(shear)的方式變化。由於光線是直線前進，光線在空間中傳播，在不同深度平面之上位置將改變，但光線行進角度不隨著空間傳播而變化。

而在 z_2 上的影像與平面上的輻射照度成正比：

$$\begin{aligned} E_{z_2} &= \iint L_{z_2}(x, y, u, v) \frac{\cos^4 \phi}{d^2} dudv \\ &= \iint L_{z_1}\left(u\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{x}{\alpha}, v\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{y}{\alpha}, u, v\right) \frac{\cos^4 \phi}{d^2} dudv \end{aligned} \quad (1-29)$$

與(1-27)相同，影像是經過空間傳播，切變過後的四維光場在二維空間上的投影。

透過圖 1-6 中的微透鏡陣列機構記錄下光場，加上式(1-29)的重新對焦演算法，便可得到不同對焦於不同深度像平面的影像，達到影像事後對焦的目的。

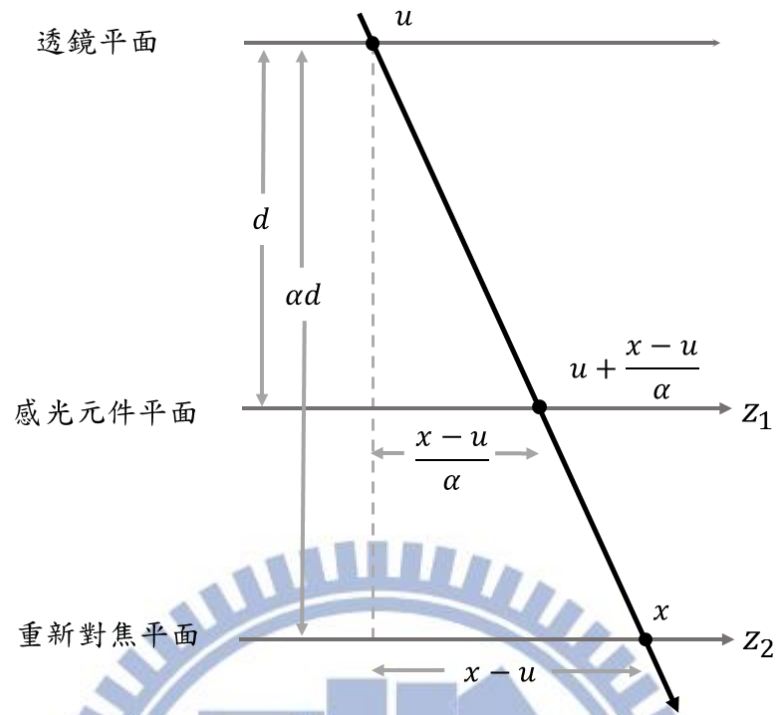


圖 1-7：光場相機之重新對焦技術。感光元件平面距離透鏡平面 d ，另一重新對焦平面距離透鏡平面 αd 。光線來自於透鏡平面上 u 並落在重新對焦平面上 x 的位置，此光線會穿過感光元件平面上 $u + \frac{x-u}{\alpha}$ 的位置。

章節二

同調性與相位空間

若將訊號分析領域的韋格納分布函數應用在光學領域上，在某些特定條件下，即為光場技術。而韋格納分布函數與同調性理論上的相互同調函數(mutual coherence function)有直接的關聯性[7,14]。本章節將從光學上的空間同調性出發，解釋相互同調函數的意義，接著連結到韋格納分布函數與其傅立葉對偶(Fourier dual)；模糊函數(Ambiguity function)。而這些函數所共同展開的空間稱為相位空間(Phase space)[5]。

2.1 同調性與相互同調函數(Coherence and mutual coherence function)

光學上的同調性特定條件下可被分為兩類[15]，空間同調(spatial coherence)與時間同調(temporal coherence)。空間同調性指波動在空間中傳播，同一時刻，空間中任兩點上波的相關性。時間同調性則指固定位置上，同一傳遞波不同時刻的相關性。在說明同調性時，時常引入二種不同的干涉實驗為例子，以邁克森干涉儀(Michelson interferometer)解釋時間同調性，而楊氏雙狹縫干涉(Young's double-slit interferometer)則用於說明空間同調性。

2.1.1 時間同調(Temporal coherence)

邁克森干涉儀的實驗架構如圖 2-1 所示，將一穩定光源透過分束器(beam splitter)一分為二，兩個電場分別為表示為 E_1 、 E_1 。接著兩束光分別被平面透鏡 M_1 與 M_2 的反射，利用微調 M_2 的位置，造成兩束光之間的光程差(2d)，最後於觀察屏幕上產生干涉條紋。

兩束光在屏幕上干涉所形成的條紋會成正比於

$$\begin{aligned} |E|^2 &= \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^* \rangle \\ &= \langle |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\text{Re}[\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^*] \rangle \end{aligned} \quad (2-1)$$

其中箭型括弧代表對時間上取平均

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2-2)$$

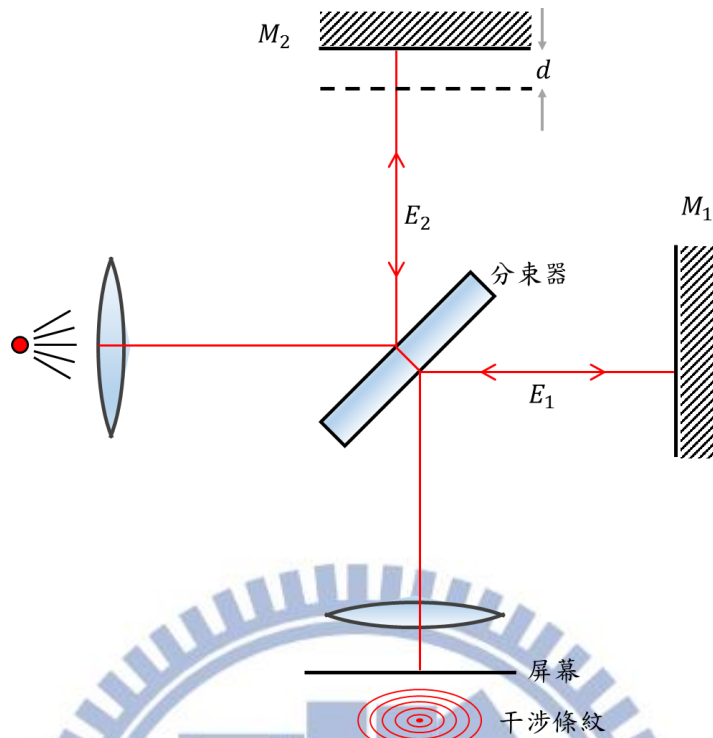


圖 2-1：邁克森干涉儀。

假設兩束光具有相同極化(polarization)方向，並且兩束光的電場之間的相位關係穩定(stationary)。因此干涉條紋的強度為

$$I = I_1 + I_2 + 2c\epsilon_0 \text{Re} \left[\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* \rangle \right] \quad (2-3)$$

其中

$$I_i = c\epsilon_0 |E_i|^2 \quad (2-4)$$

c 為光在介質中的傳播速度， ϵ_0 為真空中的介電常數。假設兩束光因反射鏡距離不同，到達屏幕上時間差 τ ，我們定義了相互同調函數(mutual coherence function)

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t)E_2^*(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_1(t)E_2^*(t + \tau) dt \quad (2-5)$$

其中時間差 τ 與分束器至兩面鏡之距離差 d 有關

$$\tau = \frac{2d}{c} \quad (2-6)$$

當 d 漸漸變大時，因為光程差改變，將看到干涉條紋隨之改變。當干涉條紋完全消失時，定義下同調時間

$$\tau_c = \frac{2d_{max}}{c} \quad (2-7)$$

表示兩道光之時間差若超過此同調時間，彼此將沒有關聯(uncorrelated)，因此不再產生干涉現象；反之，只要兩束光的時間差仍在同調時間之內，即兩束光彼此是有關聯(correlated)。

接著，我們可以定義同調程度(degree of coherence)

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\Gamma_{12}(0)} = \frac{c\epsilon_0\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2-8)$$

將上式代回方程式(2-3)，即可得到：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}[\gamma_{12}] \quad (2-9)$$

$\gamma_{12}(\tau)$ 是一個複數，代表兩個光場間的同調程度。當 $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$ 時，稱為完全同調(complete coherence; coherence)。當 $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$ 時，稱為部分同調(partial coherence)。當 $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$ 時，稱為完全非同調(incoherence)。

接著我們定義條紋清晰度(fringe visibility)

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2-10)$$

如圖 2-2 所示， V 值越大代表條紋的對比度越好。在邁克森干涉儀實驗中，屏幕上干涉條紋之亮紋強度為 I_{max} ，暗紋強度為 I_{min} ，則

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \quad (2-11a)$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \quad (2-11b)$$

可重新改寫方程式(2-10)

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|}{I_1 + I_2} \quad (2-12)$$

表示條紋清晰度與同調程度有關，當兩道光完全同調時，將有最大的條紋清晰度；當兩道光完全非同調時，則條紋清晰度為零，無法看到有亮暗變化的條紋，即無法觀測到干涉現象。

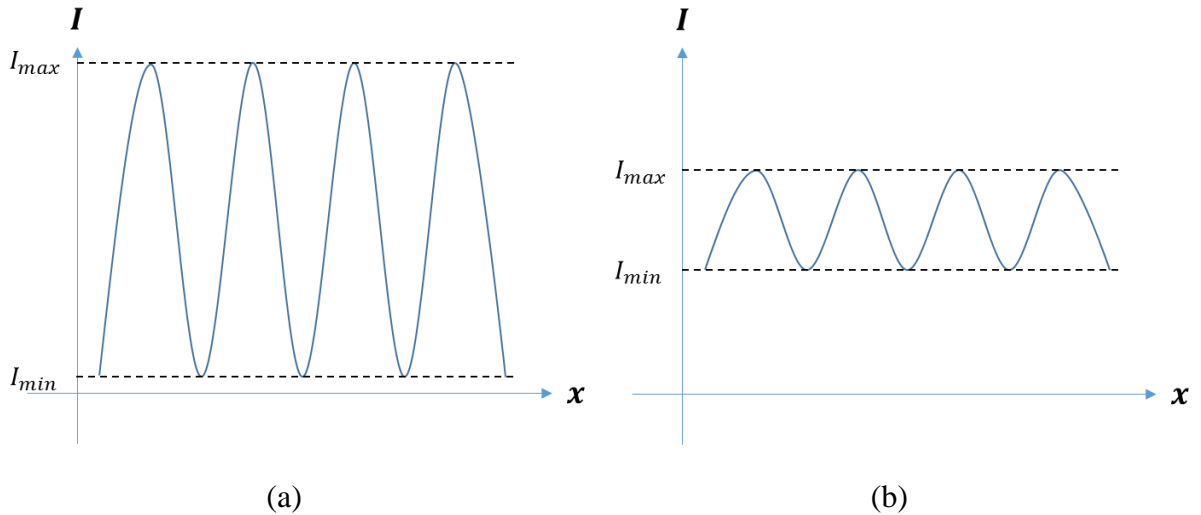


圖 2-2：兩種不同條紋之清晰度差別。條紋(a)的條紋清晰度大於(b)

2.1.2 空間同調(Spatial coherence)

接著我們藉楊氏雙狹縫干涉實驗說明空間同調性，如圖 2-3 所示，一道單色光(quasi-monochromatic)[14]，分別經過光程 r_1' 與 r_2' 後打在一對狹縫上。而狹縫落於位置 P_1 與 P_2 上，兩者距離為 d ，並在遠方屏幕上出現亮暗條紋。

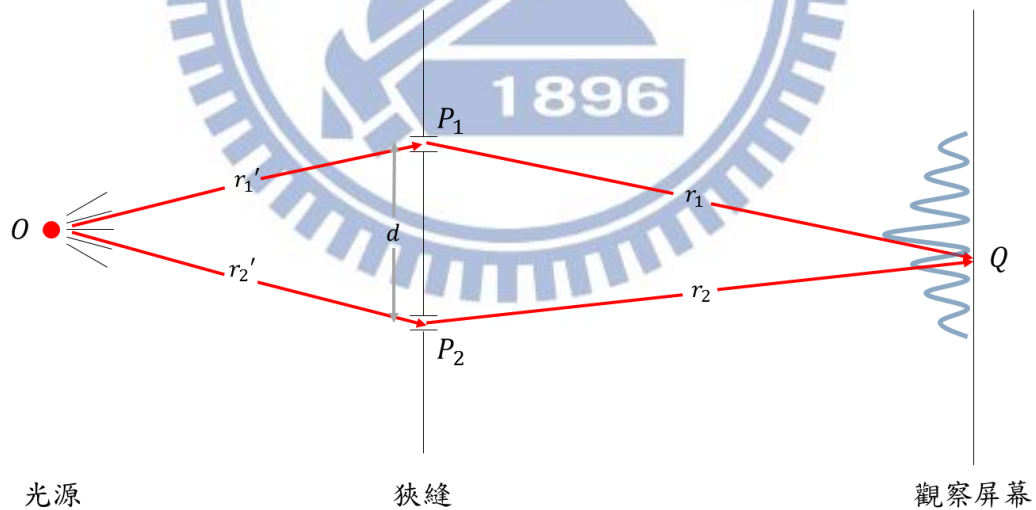


圖 2-3：楊氏雙狹縫干涉實驗。

自惠更斯-菲涅爾定理出發，光由 O 發出，傳播至狹縫，狹縫上的光場可視為光源上各點發出之球面波的疊加

$$E(P_i, t) \cong \int_{A_i} \frac{1}{i\lambda r'} u(O) \cos\theta dS_i \quad (2-13)$$

λ 為入射光之中心波長， A_i 為光源面積， θ 為波前法向量(wave normal)與光軸夾角。接著，光場自狹縫傳播至觀察平面上，假設狹縫的面積很小，其內光場分布近乎相同，可提出積分之外，觀察平面上 Q 點的光場可被表示成

$$E(Q, t) = K_1 E\left(P_1, t - \frac{r_1}{c}\right) + K_2 E\left(P_2, t - \frac{r_2}{c}\right) \quad (2-14)$$

其中

$$K_1 = \int_{A_1} \frac{\cos\theta}{j\lambda r_1'} dS, K_2 = \int_{A_2} \frac{\cos\theta}{j\lambda r_2'} dS \quad (2-15)$$

A_1 與 A_2 代表兩個狹縫的面積。接著，分別設狹縫 P_1 與 P_2 在 Q 點上所造成的強度分別為 I_1 與 I_2

$$I_{p_1}(Q) = I_1(Q) = c\epsilon_0 |K_1|^2 \langle |E\left(P_1, t - \frac{r_1}{c}\right)|^2 \rangle \quad (2-16a)$$

$$I_{p_2}(Q) = I_2(Q) = c\epsilon_0 |K_2|^2 \langle |E\left(P_2, t - \frac{r_2}{c}\right)|^2 \rangle \quad (2-16b)$$

並定義雙狹縫的相互同調函數

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(P_1, t) E_2^*(P_2, t + \tau) \rangle \quad (2-17)$$

其中

$$\tau = \frac{|r_1 - r_2|}{c} \quad (2-18)$$

因此在觀察屏幕上的光強度可以被寫成

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2c\epsilon_0 K_1 K_2 \text{Re}[\Gamma_{12}(\tau)] \quad (2-19)$$

與相互同調函數相關。根據史瓦茲不等式(Schwarz's inequality)

$$|\Gamma_{12}(\tau)| \leq \sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)} \quad (2-20)$$

定義複數同調程度(complex degree of coherence)

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) \equiv \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (2-21)$$

其中 $\Gamma_{11}(0)$ 與 $\Gamma_{22}(0)$ 分別為狹縫為 P_1 與 P_2 的自同調函數(self-coherence function)。若將方程式(2-21)之振幅(amplitude)與相位(phase)分開，可得到

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{-j[2\pi\nu\tau - \alpha_{12}(\tau)]} \quad (2-22)$$

可以將方程式(2-19)改寫成與同調程度相關的形式

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\gamma_{12}(\tau)\cos[2\pi\nu\tau - \alpha_{12}(\tau)] \quad (2-23)$$

ν 為入射光的中心波長。設 $I_1=I_2$ ，則當觀察點 Q 坐落於兩狹縫之對稱軸上時，可獲得 Q 點上的條紋清晰度為

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}(0)}{I_1 + I_2} = \gamma_{12}(0) \quad (2-24)$$

又由上述可知，雙狹縫之間的距離 d 會影響條紋清晰度。圖 2-4 為改變的雙狹縫距離時，狹縫間距 d 與 $\gamma_{12}(0)$ 的關係圖。當雙狹縫間距越大時，中央亮紋的清晰度會隨之下降。代表入射光打在兩狹縫上後，空間同調性隨著狹縫距離增加而下降。

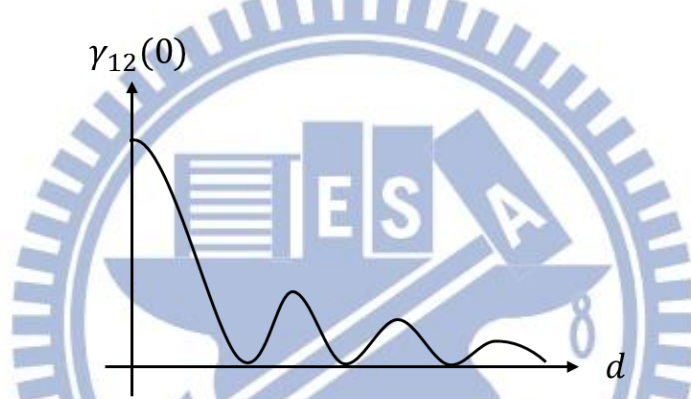


圖 2-4：楊氏雙狹縫干涉實驗，中央亮紋清晰度與狹縫距離之關係。

2.2 相互強度與韋格納分布函數

(Mutual intensity and Wigner distribution function)

前一節介紹了同調性理論與相互同調函數的意義，本節則要將相互同調函數加以延伸，並連結至本論文的中心：韋格納分布函數理論與應用[2,5]。

- 相互強度(mutual intensity)

如圖 2-5 所示，空間中有一純量場 $u(x, t)$ ，為了簡化形式，以向量 $x = [x \ y]^t$ 表示。在考慮特定時間 t 下，空間中兩點 x_1 與 x_2 的相關性(correlation)或同調性(coherence)可表示成

$$\Gamma_{12}(x_1, x_2; \tau) = \langle u(x_1, t + \tau)u^*(x_2, t) \rangle \quad (2-25)$$

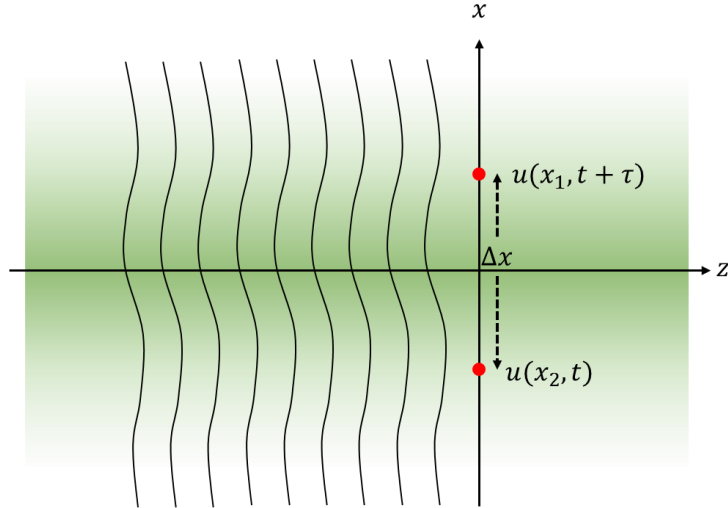


圖 2-5：相互同調函數示意圖與其座標轉換。

其值越大代表兩點的關聯性愈高，反之則愈低。使用座標轉換，令

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \Delta x = x_1 - x_2 \quad (2-26)$$

則方程式(2-25)可改寫成

$$\Gamma_{12}(x, \Delta x; \tau) = \Gamma(x, \Delta x, \tau) = \langle u\left(x + \frac{\Delta x}{2}; t + \tau\right) u^*\left(x - \frac{\Delta x}{2}; t\right) \rangle \quad (2-27)$$

當入射純量場為單色光(quasi-monochromatic)，光到達兩位置上的時間差遠小於同調時間($\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$)，可針對方程式(2-27)中與時間項無關的項目作探討，則

$$\Gamma(x, \Delta x; 0) = \langle u\left(x + \frac{\Delta x}{2}; t\right) u^*\left(x - \frac{\Delta x}{2}; t\right) \rangle \equiv J(x, \Delta x) \quad (2-28)$$

$J(x, \Delta x)$ 稱為相互強度(mutual intensity)，用於描述單色光的空間同調性質。當描述的兩點所指同一位置， $x_1 = x_2$ 或是 $\Delta x = 0$ 時，有最大的同調值

$$J(x, 0) = \langle u(x) u^*(x) \rangle = |u(x)|^2 \quad (2-29)$$

等於純量場在 x 位置上的強度。當入射光為單色光時，兩位置的相互同調函數以相互強度取代可化簡過程。如圖 2-6 所示，一道完全同調的單頻平面波入射雙狹縫上，雙狹縫上的相互同調函數可以相互強度表示。

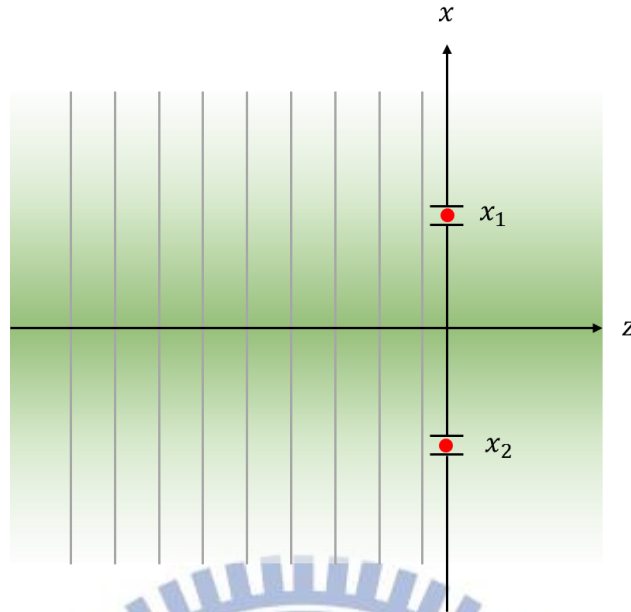


圖 2-6：雙狹縫的相互同調函數。

- 韋格納分布函數(Wigner distribution function；WDF)

韋格納分布函數的定義為

$$W(x, u) = \int J(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \quad (2-31)$$

是將相互強度 $J(x, \Delta x)$ 中的位移空間座標 (Δx) 透過傅立葉轉換，映射到局部空間頻率(u: local spatial frequency)或角譜資訊(slope, angular spectrum)。如圖 2-7，平面波入射一寬度極小之單狹縫，一旦考慮的兩點距離 Δx 超過狹縫的間距，則其中一位置不在狹縫上，其相互強度為零。兩點的位置差與角譜互為傅立葉轉換，如公式(2-31)所示。透過WDF可同時描述一個場的空間(x)與頻譜(u)資訊。

- 模糊函數(Ambiguity function；AF)

模糊函數在最著名的應用是在設計雷達時所用的訊號理論[16]，與待測物體移動造成反射訊號的都卜勒效應有關。而在相位光學中[5]，模糊函數是將相互強度 $J(x, \Delta x)$ 中的空間座標 (x) 透過傅立葉轉換，映射到空間頻率或頻譜資訊上。其定義如下

$$A(\Delta u, \Delta x) = \int J(x, \Delta x) e^{-i2\pi \Delta u x} dx \quad (2-32)$$

當狹縫寬度很小，近似為點光源，便展延 x 座標上的空間頻率，如圖 2-7(d)所示。其中模糊函數與韋格納分布函數兩者具有傅立葉對偶關係(Fourier dual)

$$A(\Delta u, \Delta x) = \int W(x, u) e^{-i2\pi(\Delta u x - u \Delta x)} dx du \quad (2-33)$$

而模糊函數在光學系統上有一個著名的應用，是模糊函數與光學系統之調製傳遞函數 (Modulation transfer function; MTF) 的關係，其連結原理我們將在第四章內詳細描述。在本節的最後，我們提及相位空間中最後一個函數：相互頻譜(mutual spectrum)。其定義為

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\Delta u, u) &= \int J(x, \Delta x) e^{-i2\pi(u \Delta x + \Delta u x)} d\Delta x dx \\ &= U(u_1) U^*(u_2) \end{aligned} \quad (2-34)$$

$U(u)$ 是純量場 $u(x)$ 在頻域中的表現。此式代表自頻域中看兩純量場的相關性或同調性。與相互同強度呈現傅立葉對偶關係。

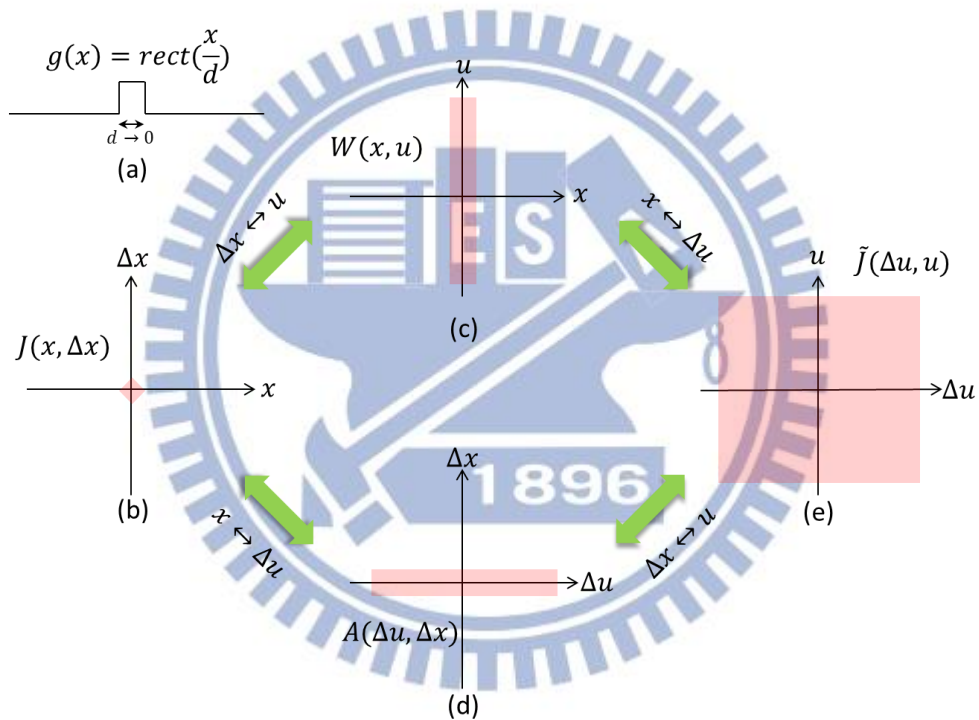


圖 2-7：點光源在相位空間內的四種描述函數。

光源在空間中傳播的行為與其同調性有關，圖 2-8[17] 為一面光源在不同的同調條件下，光場的行為。(a) 為完全同調光源，空間上不同位置皆有最大的同調強度值 $J(x, \Delta x) = 1$ ，則其韋格納分布函數 $W(x, u) = \delta(u)$ ，代表光線具有極高的準直性。(c) 完全非同調，唯有同一位置上有同調強度值，不同位置上的同調強度皆為零， $J(x, \Delta x) = \delta(x)$ ，其韋格納分布函數 $W(x, u) = 1$ ，所有位置皆發出各個方向的光，為朗伯(Lambertian)形式。(b) 則為部分同調的情況，介於完全同調與完全非同調之間。

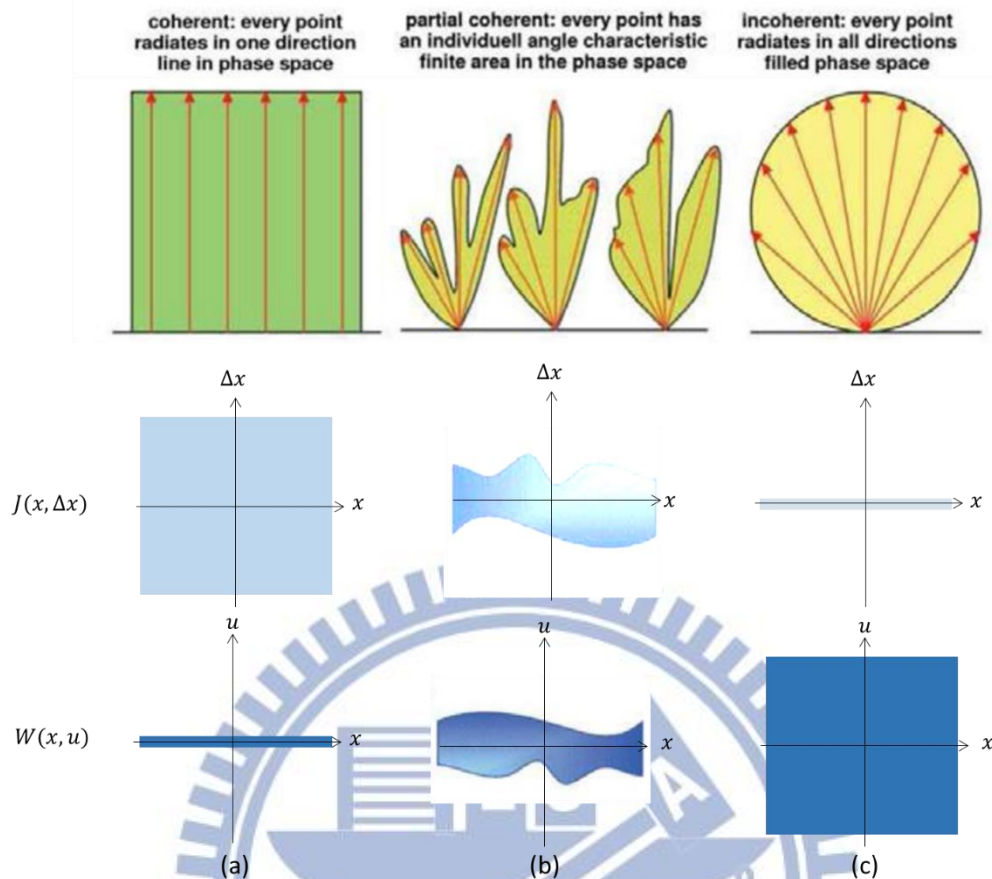


圖 2-8：以韋格納分布函數解釋不同光源特性。

[資料來源:W. Singer et al., Handbook of Optical Systems.]

2.3 章節總結(Summary)

本章第一節中由光學純量場的同調性出發，分別以邁克森干涉儀與楊氏雙狹縫實驗介紹時間同調與空間調的觀念，並解釋相互同調數與相互強度的定義與意義。在第二節中將相位空間中的相互強度連結至本論文的主旨-韋格納分布函數與模糊函數。韋格納分布函數在光學上最常被應用於將純量場，連結至幾何上的光場分布，求得光線位置與行進方向。在最後給了一個面光源的範例。同調光源、部分同調光源與非同調光源不同的韋格納分布情形，證明他在光學系統模擬中很具實用性。至於為何可將韋格納分布函數連結至光場技術，以及其傅立葉對偶-模糊函數的在光學上的連結，將在下一章節中詳述。

章節三

光學系統分析

在介紹相位空間中常見四個方程式的定義與其相互關係之後，此章節主旨是將四個方程式中的韋格納分布函數與模糊函數與光學系統連結。第一與第二段將分別連結〈韋格納分布函數-光場技術〉與〈模糊函數-光學傳遞函數〉的關係，第三段則透過傅立葉切片理論(Fourier slice theorem)[13]將兩者整合。最後說明在光學系統中傳播時，這些函數變化的情形。

3.1 韋格納分布函數與光場技術

(Wigner distribution function and light field)

光場的概念與韋格納分布函數非常相似，即光線的參數化、用以描述光線位置與行進方向。如圖 3-1 所示，根據 Z. Zhang 與 M. Levoy[4]的文章所言，我們首先建構一個純量光場 $f(x, \tau)$ ，向 z 方向傳遞。為簡化討論，我們僅在特定平面考慮一維光場資訊。我們目的在於提出一個方法，可以同時描述波動場在空間與頻譜中的表現。為了達到此目的，Z. Zhang 等人引入一空間參考座標 s，與 x 落在同一平面上，並加上一個範圍有限的觀察孔徑，利用 s 控制孔徑的位置，即 $a(x - s)$ ，此時純量光場形式為：

$$f(x, \tau)a(x - s) \quad (3-1)$$

根據傅氏光學中方向餘弦理論[7]，我們可將純量場視為由朝不同行方向行進的平面波所組成，將純量場由空間基底轉換為以各方向平面波基底。當光學系統為近軸近似，此轉換即為傅立葉轉換，即所我們想要的觀察孔徑內的空間頻譜。

$$\tilde{f}(s, \theta) = \int f(x, \tau)a(x - s)e^{-i2\pi(\frac{\theta}{\lambda}x)} dx \quad (3-2)$$

式(3-2)為複數振幅函數，其光場強度(或稱可視光場；observable light field)為純量場的絕對值平方並對時間取平均：

$$I_{obs}^T(s, \theta) = \langle |\tilde{f}(s, \theta)|^2 \rangle_{\tau} \quad (3-3)$$

其中

$$\begin{aligned} & \langle |\tilde{f}(s, \theta)|^2 \rangle_\tau \\ &= \iint \langle f(x_1, \tau) f^*(x_2, \tau) \rangle_\tau a(x_1 - s) a^*(x_2 - s) \\ & \quad \times e^{-i2\pi\frac{\theta}{\lambda}(x_1 - x_2)} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3-4)$$

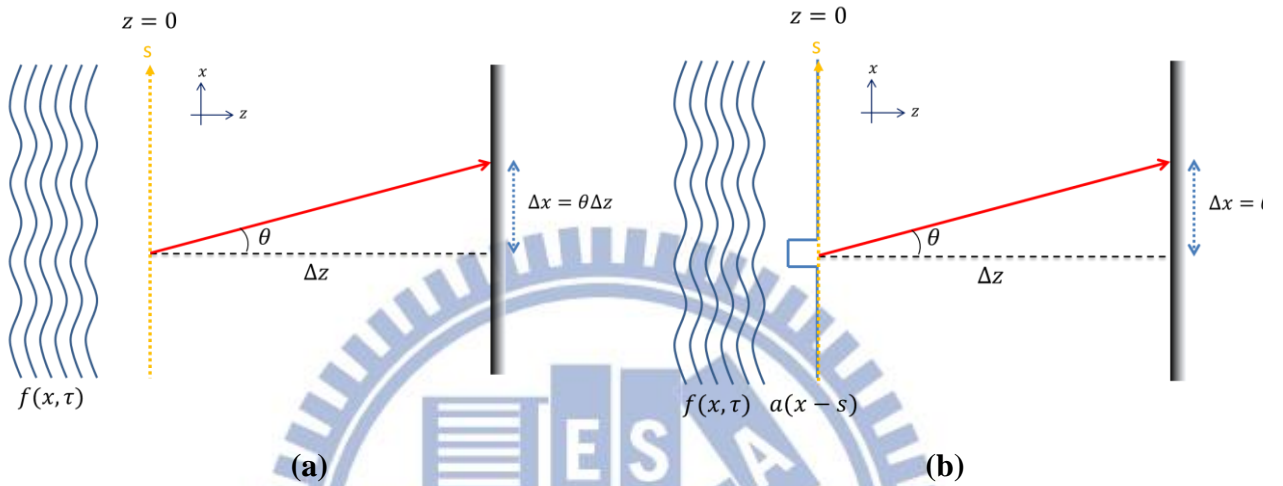


圖 3-1：韋格納分布函數與光場的連結。(a)一純量光場 $f(x, \tau)$ 在 $z = 0$ 平(b)在 $z = 0$ 處放置一觀察孔徑(aperture)，並將其轉換成各方向平面波基底。

接著，我們使用變數變換，將空間座標 x_1 與 x_2 作轉換

$$x_1 - x_2 = \Delta x; \frac{x_1 + x_2}{2} = x \quad (3-5)$$

原式變為

$$\begin{aligned} & \langle |\tilde{f}(s, \theta)|^2 \rangle_\tau \\ &= \iint \langle f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, \tau\right) f^*\left(x - \frac{\Delta x}{2}, \tau\right) \rangle_\tau a\left(x + \frac{\Delta x}{2} - s\right) \\ & \quad \times a^*\left(x - \frac{\Delta x}{2} - s\right) e^{-i2\pi\frac{\theta}{\lambda}(\Delta x)} dx d\Delta x \end{aligned} \quad (3-6)$$

參考相互強度定義後，可將(3-6)改寫成

$$\langle |\tilde{f}(s, \theta)|^2 \rangle_\tau = \iint J_f(x, \Delta x) J_a(x - s, \Delta x) e^{-i2\pi\frac{\theta}{\lambda}\Delta x} d\Delta x dx \quad (3-7)$$

我們會發現方程式(3-7)為入射光場相互強度與孔徑相互強度的相乘，並對 Δx 空間座標進行傅立葉轉換。根據傅立葉摺積定理(convolution)與方程式(2-31)韋格納分布函數的

定義，我們可以將(3-7)可視光場改寫成：

$$\langle |\tilde{f}(s, \theta)|^2 \rangle_\tau = \int W_f \left(x, \frac{\theta}{\lambda} \right) \otimes_{\frac{u}{\lambda}} W_a \left(x - s, \frac{\theta}{\lambda} \right) dx \quad (3-8)$$

$\otimes_{\frac{u}{\lambda}}$ 代表在 $\frac{u}{\lambda}$ 上作摺合積分。

此算式亦是對 x 作摺積，因此原式變成：

$$\langle |\tilde{f}(s, \theta)|^2 \rangle_\tau = W_f \left(s, \frac{\theta}{\lambda} \right) \otimes_{2D} W_a \left(-s, \frac{\theta}{\lambda} \right) \quad (3-9)$$

\otimes_{2D} 表示二維的摺合積分運算。

我們可以得到可視光場(也就是記錄平面上光束的位置與行進方向之函數)的物理意義，是純量場 WDF 與觀察孔徑的 WDF 二維摺積：

$$l_{obs}^T(s, u) = \widehat{W}_f^{(\lambda)}(s, u) \otimes_{2D} \widehat{W}_a^{(\lambda)}(-s, u) \quad (3-10)$$

其中

$$\widehat{W}_f^{(\lambda)}(s, u) = W_f \left(s, \frac{\theta}{\lambda} \right)$$

在此，根據 Zhang[4]對於幾何光學量測上測不準原理的說明，引入了一個假設。我們為了得到局部的頻譜資訊，引入了一個虛構觀察孔徑。若此孔徑尺寸遠大於光波長，則此觀察孔徑將不造成繞射影響，因此可將觀察孔徑代表 WDF 視為一個脈衝函數：

$$\widehat{W}_a^{(\lambda)}(-s, u) = \delta(s, u) \quad (3-11)$$

因此韋格納分布函數由在巨觀系統下與可視光場完全等價。

$$l_{obs}^T(s, u) = \widehat{W}_f^{(\lambda)}(s, u) \quad (3-12)$$

圖 3-2 為一個折射率漸變光纖，韋格納分布函數的變化。由於 GRIN 光纖的相位傳播分布是 chirp 形式，與自由空間傳播相位相似。第二列為 WDF，第三列為光場投射在某一特定平面上的強度分佈。

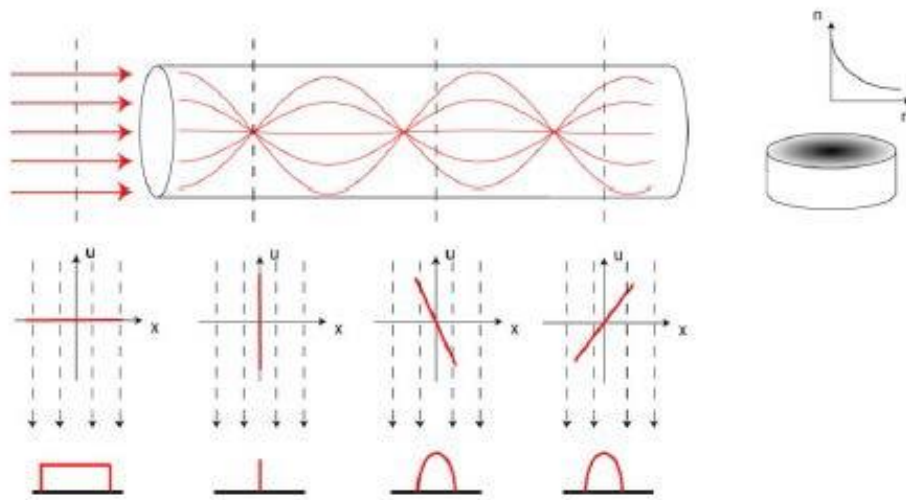


圖 3-2：光纖中的傳遞光韋格納分布函數變化。

[資料來源: Tom Cuypers et al., "Validity of Wigner Distribution Function for Ray-based Imaging," IEEE ICCP, 2011.]

3.2 模糊函數與系統的光學傳遞函數

(Ambiguity function and optical transfer function)

前一小節中，我們連結了韋格納分布函數與光場技術的關係。此段將把韋格納分布函數的傅立葉對偶-模糊函數(AF)，傅氏光學中的的光學傳遞函數[7] 作連結。

首先考慮模糊函數的定義：

$$A(\Delta u, \Delta x) = \int J(x, \Delta x) e^{-i2\pi\Delta u x} dx = \int \langle u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) u^*\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \rangle e^{-i2\pi\Delta u x} dx \quad (3-13)$$

當其中的變數 Δx 等於0時

$$A(\Delta u, 0) = \int J(x, 0) e^{-i2\pi\Delta u x} dx = \int \langle u(x) u^*(x) \rangle e^{-i2\pi\Delta u x} dx \quad (3-14)$$

代表將純量場場的強度做傅立葉轉換，在訊號與系統內[19]，我們稱此為訊號的能量頻譜密度(Power spectrum density, PSD)，代表組成訊號各頻率成分的強度。而當 $u(x)$ 代表光學系統中在像平面上的點擴散函數(Point spread function; PSF)時，此時方程式(3-14)與傅氏光學中的非同調系統光學傳遞函數具有相同型式。目前為止，先提供了模糊函數與光學傳遞函數連結概念，接下來將從成像系統的觀念完整地證明兩者的關係。

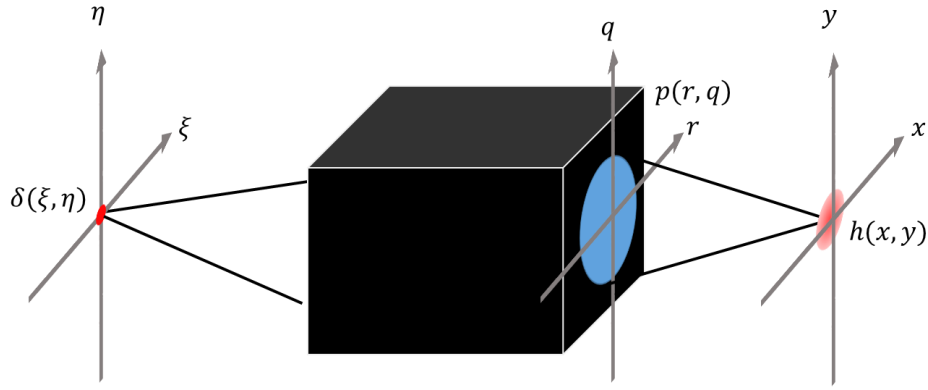


圖 3-3：光學成像系統。將光學系統視為一個黑盒子，輸入點光源脈衝進入系統內，像平面上的點擴散函數為光學系統出瞳(exit pupil) $p(r,q)$ 的夫朗和斐繞射結果，亦即出瞳的傅立葉轉換。

首先自光學成像系統出發，如圖 3-3 所示，根據 Goodman[7]，輸入物體純量場訊號 $u_{ob}(x)$ 進入成像系統中，於像平面上的輸出影像訊號 $u_{im}(x)$ 的關係為

$$u_{im}(x) = u_{ob}(x) \otimes h(x) = \int u_{ob}(\xi) h(x - \xi) d\xi \quad (3-15)$$

其中 $h(x)$ 是系統的点擴散函數。

在像平面上的相互強度為

$$\begin{aligned} J_{im}(x_1, x_2) &= u_{im}(x_1) u_{im}^*(x_2) \\ &= \int u_{ob}(\xi_1) h(x_1 - \xi_1) d\xi_1 [\int u_{ob}(\xi_2) h(x_2 - \xi_2) d\xi_2]^* \\ &= \iint u_{ob}(\xi_1) u_{ob}^*(\xi_2) h(x_1 - \xi_1) h^*(x_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \iint J_{ob}(\xi_1, \xi_2) h(x_1 - \xi_1) h^*(x_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3-16)$$

其中 $J_{ob}(\xi_1, \xi_2)$ 代表物平面上訊號的相強度。引用方程式(2-26)則此方程式改寫為

$$\iint J_{ob}(\xi_1, \xi_2) h\left(x + \frac{\Delta x}{2} - \xi_1\right) h^*\left(x_2 - \frac{\Delta x}{2} - \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 = J_{im}(x, \Delta x) \quad (3-17)$$

像平面上的模糊函數為

$$A_{im}(\Delta u, \Delta x) = \int J_{im}(x, \Delta x) e^{-i2\pi\Delta u x} dx \quad (3-18)$$

類似方程式(2-26)，我們將物平面坐標系作轉換

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \Delta\xi = \xi_1 - \xi_2 \quad (3-19a)$$

$$\sigma = x - \xi \quad (3-19b)$$

方程式(3-18)改寫成

$$\begin{aligned} A_{im}(\Delta u, \Delta x) &= \int dx e^{-i2\pi\Delta u(\xi+\sigma)} \iint d\xi_1 d\xi_2 J_{ob} \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \xi - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \\ &\quad \times h \left(x + \frac{\Delta x}{2} - \xi - \frac{\Delta\xi}{2} \right) h^* \left(x - \frac{\Delta x}{2} - \xi + \frac{\Delta\xi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-20a)$$

$$\begin{aligned} &= \iint d\sigma d\xi e^{-i2\pi\Delta u(\xi+\sigma)} \int d\Delta\xi J_{ob} \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \xi - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \\ &\quad \times h \left(\sigma + \frac{\Delta x - \Delta\xi}{2} \right) h^* \left(\sigma - \frac{\Delta x - \Delta\xi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-20b)$$

$$\begin{aligned} &= \int d\Delta\xi \int d\sigma e^{-i2\pi\Delta u\sigma} J_h \left(\sigma + \frac{\Delta x - \Delta\xi}{2}, \sigma - \frac{\Delta x - \Delta\xi}{2} \right) \\ &\quad \times \int d\xi e^{-i2\pi\Delta u\xi} J_{ob} \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \xi - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-20c)$$

$$= \int d\Delta\xi A_h(\Delta u, \Delta x - \Delta\xi) A_{ob}(\Delta u, \Delta\xi) \quad (3-20d)$$

$$= A_{ob}(\Delta u, \Delta x) \otimes_{\Delta x} A_h(\Delta u, \Delta x) \quad (3-20e)$$

其中方程式(3-20a)到(3-20b)，由座標 (ξ_1, ξ_2) 轉換到 $(\xi, \Delta\xi)$ 的雅可比行列式(Jacobian determinate)值為1。經過座標轉換與整理後，可得到影像在像平面上的模糊函數，為物平面上的模糊函數與點擴散函數在 Δx 坐標軸上的摺和積分。根據方程式(3-14)，物體純量場的能量頻譜密度與模糊函數關係為

$$A_{ob}(\Delta u, 0) = \int u_{ob}(\xi) u_{ob}^*(\xi) e^{-i2\pi\Delta u\xi} d\xi \quad (3-21)$$

代表物體的純量場在各個空間頻率成分的強度。而根據方程式(2-34)的定義，點擴散函數的模糊函數與相互頻譜的關係為

$$\begin{aligned} A_h(\Delta u, \Delta x) &= \int h \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) h^* \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) e^{-i2\pi\Delta ux} dx \\ &= \int H \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right) H^* \left(u - \frac{\Delta u}{2} \right) e^{i2\pi u\Delta x} du \end{aligned} \quad (3-22)$$

其中 $H(\Delta u)$ 代表光學系統的同調傳遞函數(Coherence transfer function; CTF or Amplitude transfer function; ATF)，根據 Goodman 的理論[7]， $H(\Delta u)$ 與像平面上的純量場，也就是

系統點擴散函數呈 $h(x)$ 傅立葉轉換的關係。當方程式(3-22)中的 Δx 變數等於0時

$$A_h(\Delta u, 0) = \int H\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) H^*\left(u - \frac{\Delta u}{2}\right) du = OTF \quad (3-23)$$

同調傳遞函數的自相關運算(autocorrelation)，也就是非同調光學系統的光學傳遞函數，意即影像純量場各空間頻率成分經過光學系統被調製的情況。當方程式(3-20e)中的 Δx 變數為0，可得影像的能量頻譜等於物體的能量頻譜乘上系統的光學傳遞函數

$$A_{im}(\Delta u, 0) = A_{ob}(\Delta u, 0)A_h(\Delta u, 0) \quad (3-24)。$$

目前為止，證明了當模糊函數中的 Δx 等於0時即等於系統的光學傳遞函數，此關係最常被利用於離焦光學系統的模擬，此內容將於章節五中詳細說明。

3.3 模糊函數與韋格納分布函數於光學系統內之連結

(Connection of AF and WDF in optical system)

在分別說明了韋格納分布函數與模糊函數在光學上的意義後，接著要將兩方理論透過傅立葉切片原理(Fourier slice theorem)[13]作連結，使此理論在光學系統上應用性更為廣泛。

3.3.1 傅立葉切片原理(Fourier slice theorem)

傅立葉切片原理是傅立葉轉換在多維度的擴展，可廣泛的應用於各種影像技術，如電腦斷層掃描(CT)影像的重建[20]，Ng的光場相機亦使用此理論來提高計算機重建影像的速度[13]。其定義如下

$$\text{Fourier slice theorem : } F^M \circ I_M^N = S_M^N \circ F^N \quad (3-24)$$

其中 F^M 為傅立葉轉換運算子，表示將方程式中的 M 個維度作傅立葉轉換。 I_M^N 為投影運算子，將 N 維方程式的 M 個維度作積分投影。而 S_M^N 為切片運算子，表示取出 N 維方程式中的 M 個維度為0的值。我們目標是證明方程式(3-24)等號左右兩側作用於同一方程式上有相同的結果。

首先定義一個具有 N 個維度的方程式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3-25)$$

將(3-24)等號左側作用於方程式上

$$\begin{aligned}
 & F^M \circ I_M^N [f(x_1, x_2, \dots, x_N)] \\
 = & F^M \circ \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_{M+1} dx_{M+2} \dots dx_N \\
 & = \int \left[\int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_{M+1} dx_{M+2} \dots dx_N \right] e^{-i2\pi(x_1 u_1 + \dots + x_M u_M)} dx_1 \dots dx_M \\
 & = \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) e^{-i2\pi(x_1 u_1 + \dots + x_M u_M)} dx_1 \dots dx_M dx_{M+1} dx_{M+2} \dots dx_N
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

而(3-24)等號右側運算子作用於方程式上將得到

$$\begin{aligned}
 & S_M^N \circ F^N [f(x_1, x_2, \dots, x_N)] \\
 = & S_M^N \circ \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) e^{-i2\pi(x_1 u_1 + \dots + x_N u_N)} dx_1 \dots dx_M dx_{M+1} dx_{M+2} \dots dx_N \\
 = & \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) e^{-i2\pi(x_1 u_1 + \dots + x_M u_M + x_{M+1} 0 + \dots + x_N 0)} dx_1 \dots dx_M dx_{M+1} dx_{M+2} \dots dx_N \\
 = & \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) e^{-i2\pi(x_1 u_1 + \dots + x_M u_M)} dx_1 \dots dx_M dx_{M+1} dx_{M+2} \dots dx_N
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

最後方程式(3-26)與方程式(3-27)有相同的結果，證明了方程式(3-24)中的傅立葉切片原理。若考慮輸入方程式只有二維的簡單情況

$$\begin{aligned}
 & F^1 \circ I_1^2 = S_1^2 \circ F^2 \\
 F^1 \circ I_1^2 [f(x_1, x_2)] & = \int f(x_1, x_2) e^{-i2\pi x_1 u_1} dx_1 dx_2 = S_1^2 \circ F^2 [f(x_1, x_2)]
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

本節證明了傅立葉切片原理，下一節中我們將把它應於連結韋格納分布函數與模糊函數。

3.3.2 韋格納分布函數與模糊函數於光學上的連結

(Connection of AF and WDF in optical system)

根據 3.1 節的推導結果，系統中某平面上純量場的韋格納分布函數 $W(x, u)$ 在特定條件下，即等於此平面上的可視光場，其中 x 描述了位置， u 則代表了光線行進的方向， W 的值代表強度。Tom[18] 等人提出韋格納分布函數的 u 方向做投影即為純量場的強度，也就是影像

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int W(x, u) du = \iint J(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x du \\
 &= \int d\Delta x J(x, \Delta x) \int du e^{-i2\pi u \Delta x} \\
 &= \int d\Delta x J(x, \Delta x) \delta(\Delta x) \\
 &= u(x) u^*(x) = |u(x)|^2
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

物理圖像為將此位置上各個方向的光線匯集起來，即為影像。值得一提的是，韋格納分布函數會有負值出現，這在觀念上並不合理。其原因是我們將韋格納分布函數應用於光學上，但根據 Bastiaans [3] 的說明，我們並無法找出一種完美的方程式來描述幅度學上的所有現象。不過經過了方程式(3-29)的證明，我們將韋格納分布函數作投影，將得到非負的結果。

另一方面，若將韋格納分布函數的兩個維度皆作傅立葉轉換

$$\begin{aligned}
 &\iint W(x, u) e^{-i2\pi(x\Delta u + u\Delta x)} dx du \\
 &= \iint \left[\int J(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \right] e^{-i2\pi(x\Delta u + u\Delta x)} dx du \\
 &= \int \tilde{J}(\Delta u, u) e^{-i2\pi u \Delta x} du = A(\Delta u, -\Delta x)
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

其結果為倒置的模糊函數。如圖 3-4 所示，引入傅立葉切片原理，取出倒置模糊函數的 $\Delta x = 0$ 切片，即 $A(\Delta u, 0)$ ，根據 3.2 節的推導，此式就是能量頻譜密度，將方程式(3-29)做轉換結果亦為能量頻譜密度。倘若我們輸入系統內的為同調脈衝點光源，則傳播至系統像平面上的韋格納分布函數作方程式(3-29)運算的結果即為點擴散函數的強度。若考慮非同調系統下點擴散函數強度的傅立葉轉換即為光學傳遞函數。

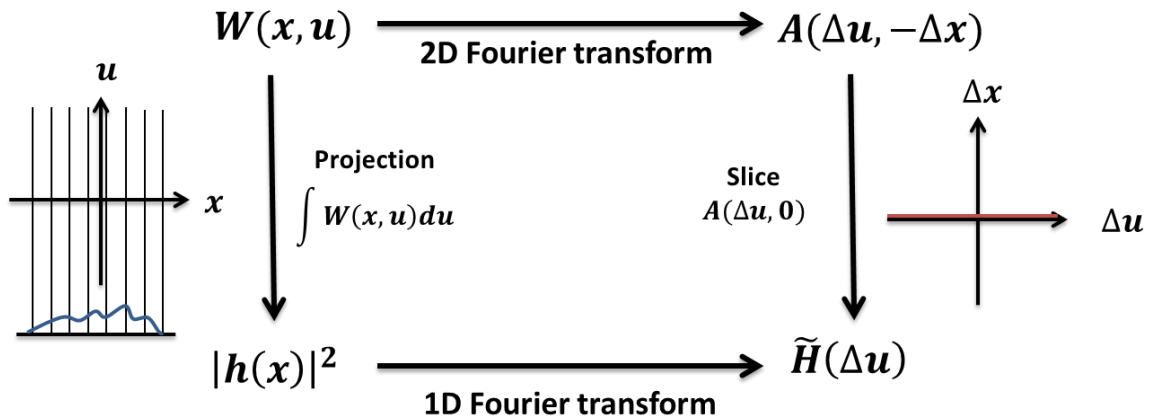


圖 3-4：WDF 與 AF 在光學系統上的連結。

而在本節中我們使用了傅立葉切片原理將章節 3.1 與 3.2 做了完整的連結，強化了韋格納分布函數與模糊函數在光學系統中應用。目前為止，對於韋格納分布函數與模糊函數在光學系統中傳播是如何變化並為詳細說明，此部分將於下一節中陳述。

3.4 韋格納分布函數與模糊函數於系統中的傳播

(Propagation of AF and WDF in optical system)

隨著純量場在光學系統中傳播，可以透過純量繞射理論推算出傳播至不同位置時，純量場的分布情形。同樣地，相互強度、韋格納分布函數與模糊函數亦可透過理論計算傳播後的分布情形。本節內容的將介紹韋格納分布函數與模糊函數在系統中傳播的變化情形。

3.4.1 相互強度的傳播(Propagation of mutual intensity)

● 自由空間中傳播 (Free-space propagation)

在本小節中，我們將探討相互強度在空間中傳播的情形，進而在下一小節中利用本節所推論出的結果推算出韋格納分布函數與模糊函數在空間中傳播的變化情形。

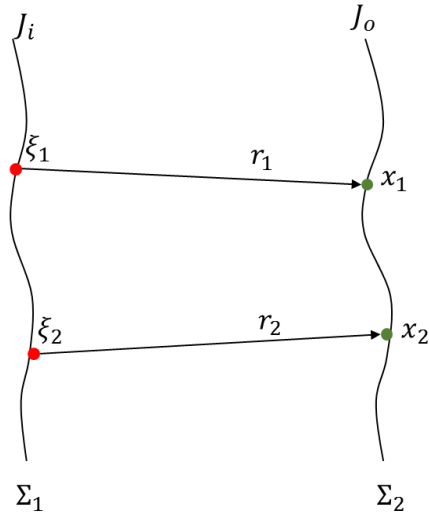


圖 3-5：相互強度於空間中的傳播。

首先考慮一個單色光純量場在空間中傳播，如圖 3-5 所示[14]。在 Σ_2 面上的相互強度為：

$$J_o(x_1, x_2) = \langle u(x_1, t)u^*(x_2, t) \rangle \quad (3-31)$$

根據惠更斯費涅爾定理，則可將其與前方 Σ_1 面上的相互強度連結

$$\begin{aligned} J_o(x_1, x_2) &= \int_{\Sigma_1} \int_{\Sigma_1} \langle u\left(\xi_1, t - \frac{r_1}{c}\right)u^*\left(\xi_2, t - \frac{r_2}{c}\right) \rangle \frac{\chi(\theta_1)}{\lambda r_1} \frac{\chi(\theta_2)}{\lambda r_2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\Sigma_1} \int_{\Sigma_1} J_i(\xi_1, \xi_2) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)} \frac{\chi(\theta_1)}{\lambda r_1} \frac{\chi(\theta_2)}{\lambda r_2} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3-32)$$

考慮近軸情況，則可將振幅項近似為

$$\frac{\chi(\theta_1)}{\lambda r_1} \cong \frac{\chi(\theta_2)}{\lambda r_2} \cong \frac{1}{(\lambda z)^2} \quad (3-33)$$

相位項內的 r_1 與 r_2 近似為

$$r_1 \cong z + \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{2z} \quad r_2 \cong z + \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{2z} \quad (3-34)$$

方程式(3-32)便可近似改寫成

$$J_o(x_1, x_2) \cong \frac{1}{(\lambda z)^2} \int_{\Sigma_1} \int_{\Sigma_1} J_i(\xi_1, \xi_2) e^{-\frac{i2\pi}{2\lambda z}(|x_1 - \xi_1|^2 - |x_2 - \xi_2|^2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (3-35)$$

此式即為近軸情況下，相互強度在空間中傳播的變化。

- 行經元件與光柵 (Passing through element or grating)

考慮光行經一個薄元件，如圖 3-6，元件將對於入射波造成時間延遲

$$u_o(x; t) = B(x)u_i(x; t - \delta) \quad (3-36)$$

$B(x)$ 代表元件對於波振幅的調製。其中

$$\delta = \frac{d(x)}{v_2} + \frac{d_0 - d(x)}{v_1} = \frac{n_2 - n_1}{c} d(x) + \frac{n_1 d_0}{c} \quad (3-37)$$

同樣是考慮單色光入射的情形 $u_i(x; t) = A_i(x; t)e^{-i2\pi\nu t}$ 。則

$$\begin{aligned} J_o(x_1, x_2) &= \langle u_o(x_1, t)u_o^*(x_2, t) \rangle \\ &= B(x_1)B(x_2) \langle u_i(x_1, t - \delta(x_1))u_i^*(x_2, t - \delta(x_2)) \rangle \\ &= B(x_1)B(x_2)e^{-i2\pi\nu(\delta(x_1) - \delta(x_2))} \\ &\quad \times \langle A_i(x_1; t - \delta(x_1) + \delta(x_2))A_i^*(x_2, t_2) \rangle \end{aligned} \quad (3-38)$$

在單色光條件下 $|\delta(x_1) - \delta(x_2)| \ll \tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$ ，故可將方程式(3-38)進一步化簡

$$J_o(x_1, x_2) = t(x_1)t^*(x_2)J_i(x_1, x_2) \equiv J_t(x_1, x_2)J_i(x_1, x_2) \quad (3-39)$$

其中 $t(x)$ 為元件的穿透函數。 $J_t(x_1, x_2)$ 如圖 3-6，可視為平面波通過此元件後的相互強度。因此，一個純量場通過一個薄元件後的相互強度為入射場的相互強度乘上元件的相互強度。注意到，元件可能是透過折射係數的變化而非不同厚度以提供不同位置上的相位差，只要知道元件的穿透函數，此法亦可適用。

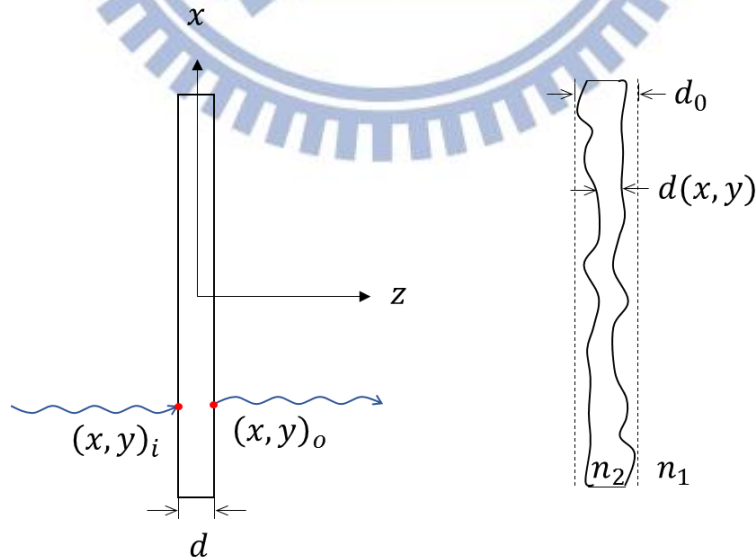


圖 3-6：薄元件對入射單色光相互強度的影響。

3.4.2 韋格納分布函數的傳播 (Propagation of WDF)

● 自由空間中傳播 (Free-space propagation)

我們在上小節中推導了近軸情況下，相互強度在空間中隨著傳播變化的情形，最後結果即方程式(3-35)。接著我們引入方程式(2-26)與(3-19a)的關係式，將其座標作基底轉換並經過整理後可得

$$J_o(x, \Delta x) = \frac{1}{(\lambda z)^2} \iint J_i(\xi, \Delta \xi) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\Delta \xi + \xi\Delta x - x\Delta x - \xi\Delta \xi)} d\xi d\Delta \xi \quad (3-40)$$

此座標轉換的雅可比行列式為 1。在 Σ_2 面上的韋格納分布函數為

$$\begin{aligned} W_o(x, u) &= \int J_o(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \\ &= \frac{1}{(\lambda z)^2} \int d\Delta \xi \int d\xi J_i(\xi, \Delta \xi) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\Delta \xi - \xi\Delta \xi)} \int d\Delta x e^{i2\pi \left[\frac{x}{\lambda z} - \frac{\xi}{\lambda z} - u \right] \Delta x} \end{aligned} \quad (3-41)$$

切記，以上所有過程為了簡化形式，將與光軸垂直平面(即 x - y 平面)的基底座標以一個二維的向量表示

$$\Delta x = [\Delta x \ \Delta y]^t, \quad d\Delta x = d\Delta x d\Delta y$$

因此，方程式(3-37)中與 Δx 相關的積分結果為

$$\int d\Delta x e^{i2\pi \left[\frac{x}{\lambda z} - \frac{\xi}{\lambda z} - u \right] \Delta x} = (\lambda z)^2 \delta(x - \xi - \lambda z u) \quad (3-42)$$

代入方程式(3-37)中可得

$$\begin{aligned} W_o(x, u) &= \int d\Delta \xi \int d\xi J_i(\xi, \Delta \xi) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\Delta \xi - \xi\Delta \xi)} \delta(x - \xi - \lambda z u) \\ &= \int d\Delta \xi J_i(x - \lambda z u, \Delta \xi) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\Delta \xi - (x - \lambda z u)\Delta \xi)} \\ &= \int d\Delta \xi J(x - \lambda z u, \Delta \xi) e^{-i2\pi(u\Delta \xi)} \\ &= W_i(x - \lambda z u, u) \end{aligned} \quad (3-43)$$

最後可得光場在空間中傳播，其韋格納分布函數變化的情形是在空間座標 x 軸上以切變的形式改變。

自另一個觀點，在本章第一節中我們利用韋格納分布函數將波動學純量場與幾何光線追跡的光場技術做連結。在考慮一階光學(first order optics)的簡單情況之下，韋格納分

布函數也遵守幾何光學的線性轉換，即光線轉換矩陣(ray transfer matrix)，又常稱 ABCD 矩陣[21]，其定義如下

$$\begin{bmatrix} x_o \\ \theta_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

$[x_i \ \theta_i]^t$ 代表輸入光線的位置與角度。 $[x_o \ \theta_o]^t$ 則描述經過 ABCD 矩陣作用後輸出的光線。在一階光學的前提假設之下，我們所考慮的系統為近軸情況，空間頻率與光線行進角度的關係為

$$u = \frac{\sin\theta}{\lambda} \approx \frac{\theta}{\lambda} \quad (3-45)$$

如圖 3-5，點光源入射單透鏡成像系統，透過 ABCD 矩陣作用，描述韋格納分布函數在各位置的變化情形。

光線在空間中傳播一段距離 z ，ABCD 代表矩陣為，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{space} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

將此矩陣與方程式(3-33)代入韋格納分布函數中，可得到傳播一段距離 z 後的韋格納分函數與輸入的韋格納分布函數關係

$$W_o(x, u) = W_i(x - \lambda uz, u) \quad (3-47)$$

其中 W_i 與 W_o 分別代表輸入前與輸出後的韋格納分布函數。此方程式的結果與方程式(3-43)，也就是自相互強度的傳播，推導至韋格納分布函數傳播的結果相同，間接驗證了韋格納分布函數可用於與幾何光場技術的連結。

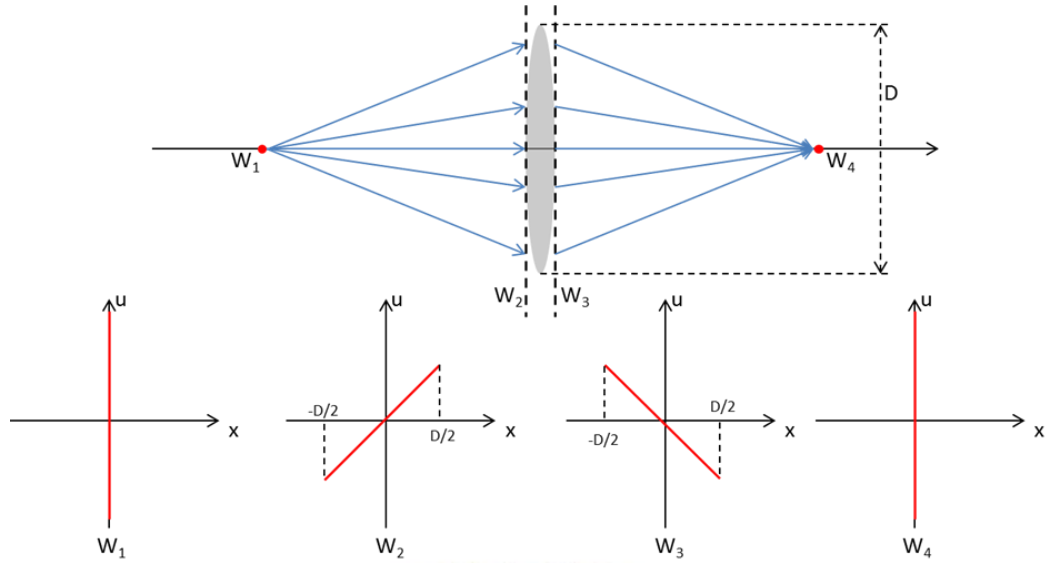


圖 3-7: 透過 ABCD 矩陣作用於韋格納分布函數，描述光場在單透鏡成像系統內各位置的變化情形。

● 行經元件與光柵 (Passing through element or grating)

在第一階光學前提之下，光學系統中大多數的元件皆有其代表的 ABCD 矩陣，除了如方程式(3-44)代入矩陣中得到 W_o 與 W_i 關係之外，亦可透過方程式(3-39)延伸，得到 W_o

$$\begin{aligned}
 W_o(x, u) &= \int J_o(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x = \int J_i(x, \Delta x) J_t(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \\
 &= \int J_i(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \otimes_u \int J_t(x, \Delta x) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \\
 &= W_i \otimes_u W_t = \int W_i(x, \alpha - u) W_t(x, \alpha) d\alpha
 \end{aligned} \tag{3-48}$$

其中 $W_t(x, \alpha)$ 代表平面波穿越此元件(如圖 2-6)後的韋格納分布函數，元件的穿透函數為 $t(x)$ ，則

$$W_t = \int t\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) t^*\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) e^{-i2\pi u \Delta x} d\Delta x \tag{3-49}$$

以一個焦距為 f 的薄透鏡為例，其代表 ABCD 矩陣為

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{thin\ lens} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{3-50}$$

則穿過薄透鏡後

$$W_o(x, u) = W_i\left(x, u - \frac{x}{f\lambda}\right) \tag{3-51}$$

現在改以方程式(3-35)的關係求其 WDF 變化。焦距 f 薄透鏡的穿透函數為

$$t(x) = e^{ik\frac{x^2}{2f}} \quad (3-52)$$

其相互強度

$$J(x, \Delta x) = e^{ik\frac{x\Delta x}{f}} \quad (3-53)$$

則平面波穿過此薄透鏡後，韋格納分布函數變為

$$W_t(x, u) = \int e^{-i2\pi\left(u - \frac{x}{f\lambda}\right)\Delta x} d\Delta x = \delta\left(u - \frac{x}{f\lambda}\right) \quad (3-54)$$

代入方程式(3-48)中得到

$$W_o(x, u) = \int W_i(x, \alpha - u)\delta\left(u - \frac{x}{f\lambda}\right)d\alpha = W_i\left(x, u - \frac{x}{f\lambda}\right) \quad (3-55)$$

此結果與方程式(3-51)利用 ABCD 矩陣計算的結果相同。若光所穿過的元件為光柵等具有繞射或干涉效應的元件時，因為無法找到對應的 ABCD 矩陣而不可行。但可找到透過方程式(3-36)，找到光柵的韋格納分布函數 W_t 。並透過方程式(3-35)找到光經過光柵或繞射元件後的韋格納函數分布。此特性即為使用韋格納分布函數做光學系統設計，較幾何光線追跡的光場技術所強大之處。

● 成像投影 (Imaging projection)

如方程式(3-29)所描述的，光學系統中某個平面上所看到的影像為韋格納分布函數的積分

$$I(x) = \int W(x, u)du \quad (3-56)$$

並如同 3.3.2 節中所描述的，此積分輸出非負值。

3.4.3 模糊函數的傳播 (Propagation of AF)

根據 Guigay[5]所推導的，同樣在空間中傳播時，模糊函數與韋格納分布函數類似，可透過相互強度傳播或是線性的座標轉換求傳播後的模糊函數。推導的方法與過程與前一小節相同。

● 自由空間傳播 (Free-space propagation)

$$A_z(\Delta u, \Delta x) = A(\Delta u, \Delta x - \lambda z \Delta u) \quad (3-57)$$

● 行經元件與光柵 (Passing through element or grating)

$$\begin{aligned}
A_o(\Delta u, \Delta x) &= \int A_i(\eta - \Delta u, \Delta x) A_t(\eta, \Delta x) d\eta \\
&= A_i(\Delta u, \Delta x) \otimes_{\Delta u} A_t(\Delta u, \Delta x)
\end{aligned} \tag{3-58}$$

同樣以焦距 f 單透鏡為例，透過方程式(2-32)與(3-40)可得到其代表模糊函數

$$A_t(\Delta u, \Delta x) = \int e^{-i2\pi\left(\Delta u - \frac{\Delta x}{2f\lambda}\right)x} dx = \delta\left(\Delta u - \frac{\Delta x}{f\lambda}\right) \tag{3-59}$$

代入方程式(3-45)中可得到穿過透鏡前後，模糊函數之間的關係

$$A_o(\Delta u, \Delta x) = A_i\left(\Delta u - \frac{x}{f\lambda}, \Delta x\right) \tag{3-60}$$

3.5 章節總結 (Summary)

本章第一節先驗證第二章內所提及的，在巨觀條件下，韋格納分布函數即可等於光場技術。接著第二節則將模糊函數與能量頻譜密度做連結，若考慮輸入光源為點光源時，則模糊函數與傅氏光學中的光學傳遞函數有關。前兩節出發點看似無關，第三節中則利用傅立葉切片原理連結了第一節與第二節內容，使整套系統更加完善。最後第四節則是說明了韋格納分布函數與模糊函數在光學系統中傳播會遇到的各種變化情形。

連結了韋格納分布函數與模糊函數並知道在系統中傳播兩者的變化情形後，已經可將此套相位空間理論應用於光學系統的模擬，尤其當系統內出現具有繞射現象的元件時，此理論將變得格外實用。

第五章將把此理論作實際應用，分別自韋格納分布函數與模糊函數角度探討擴展景深技術。

章節四

韋格納分布函數的模擬

前面章節中，我們說明了韋格納分布函數於光學系統中的應用。並說明了韋格納分布函數在光學系統中傳播的變化情形。此章節中我們透過 Matlab 為工具，作定性模擬。提供平面波通過一些簡單光學元件的韋格納分布函數，與此元件後，韋格納分布函數在空間中傳播的變化情形，以驗證前面連結光場技術與韋格納分布函數關係的合理性。

根據第三章所述，光學元件將會調變入射光場的相互強度與韋格納分布函數，出射光場的韋格納分布函數為入射光場的韋格納分布函數與元件的韋格納分布函數做摺合積分。以下我們模擬光場入射各式光學元件，假設入射光場為一平面波，其相互強度 $J(x, \Delta x) = 1$ ，此時的韋格納分布函數 $W(x, u) = \delta(x)$ ，結果分別如下所述：

- 單狹縫 $t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{A}\right)$

平面波入射單狹縫後，同調強度與韋格納分布函數如圖 4-1 所示。單狹縫之外的範圍，因沒有光通過，故沒有相互強度值。而韋格納分布函數則因繞射的影響，在狹縫的位置，光向四面八方出射。

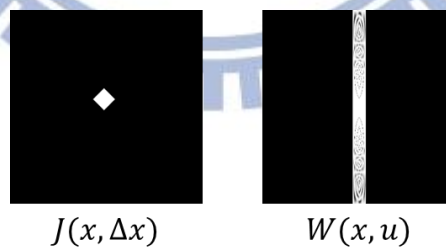


圖 4-1：單狹縫的同調強度與韋格納分布函數。

圖 4-2 提供了平面波經過單狹縫，韋格納分布函數隨著空間傳播變化的情況。經過單狹縫後，光向四面八方發散。隨著空間傳播。如方程式(3-43)所示，韋格納分布函數將隨著空間傳播，進行切變變化。

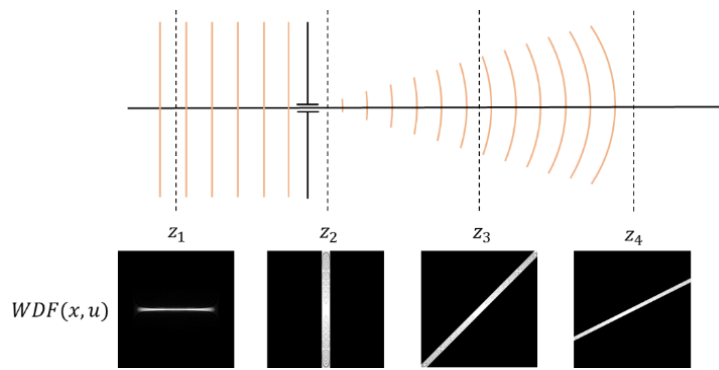


圖 4-2：平面波經過寬度為 A 的單狹縫後，韋格納分布函數的變化情形。

- 雙狹縫 $t(x) = \text{rect}\left(\frac{x-B}{A}\right) + \text{rect}\left(\frac{x+B}{A}\right)$

平面波入射雙狹縫後的同調強度與韋格納分布函數如圖 4-3 所示。(a)代表兩狹縫上的光場完全同調的情況，韋格納分布函數圖上，中央條紋源自於兩狹縫光場干涉的影響。(b)代表兩狹縫上的光場完全非同調的情況，韋格納分布函數與(a)情況不同，沒有干涉項出現。

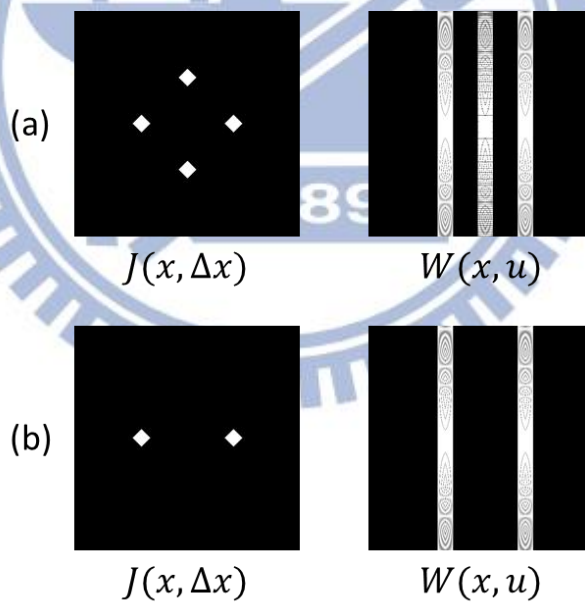


圖 4-3：平面波經過雙狹縫後的相互強度與韋格納分布函數。

圖 4-4 提供了平面波經過雙狹縫，韋格納分布函數隨著空間傳播變化的情況。經過雙狹縫後，光向四面八方發散，並且出現干涉的項目。並隨著空間傳播，韋格納分布函數切變變化。

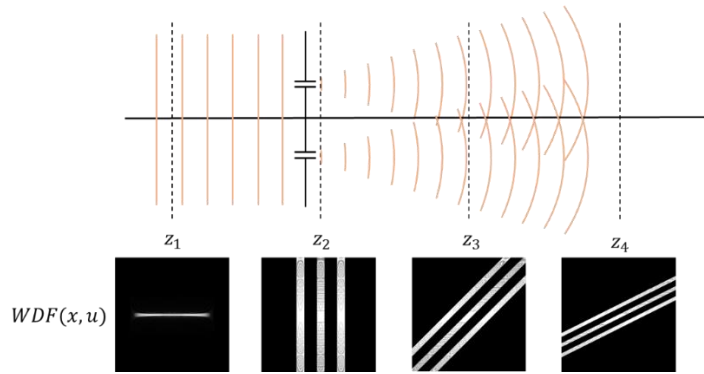


圖 4-4：平面波經過距離 $2B$ 的雙狹縫後，韋格納分布函數的變化情形。

- 稜鏡 $t(x) = e^{i\alpha x}$

稜鏡(prism)不調製通過光場的振幅，只調製相位。相位與位置呈線性關係。在光學上，常被用於改變光線行進方向。圖 4-5 中，利用稜鏡的穿透函數，模擬平面波入射稜鏡後，韋格納分布函數變化的情形。平面波的出射方向叫入射時多了傾斜角。

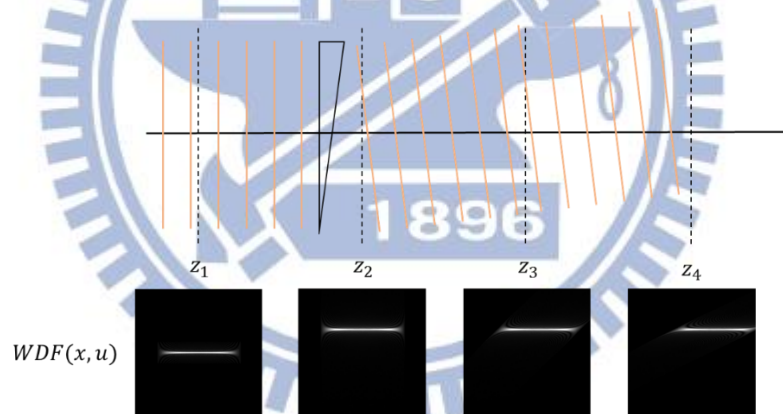


圖 4-5：平面波通過稜鏡的韋格納分布函數變化。

$$\lambda = 550\text{nm}, \alpha = 0.0025\text{mm}^{-1} \quad z_{i+1} - z_i = 50\text{mm}$$

- 薄凸透鏡 $t(x) = e^{ik\frac{x^2}{2f}}$

透鏡為光學系統中最常見的元件，可分為凹透鏡與凸透鏡。平面波入射凸透鏡後將被匯聚到焦點上。圖 4-6 提供了平面波通過薄凸透鏡後，韋格納分布函數的變化情形。

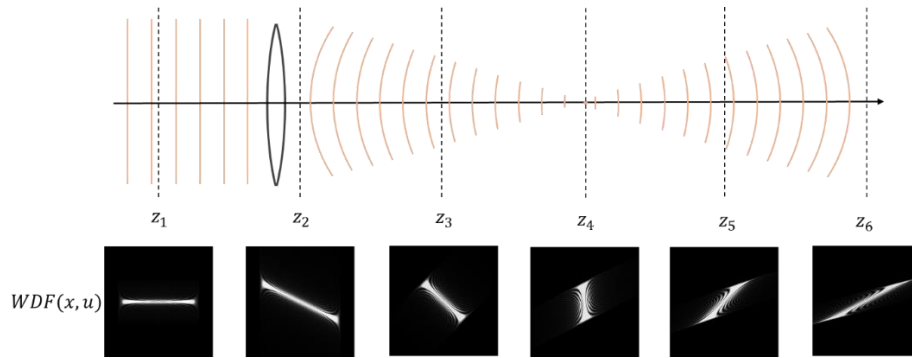


圖 4-6：平面波通過薄凸透鏡的韋格納分布函數變化。

$$\lambda = 550\text{nm}, f = 100\text{mm}, z_{i+1} - z_i = 50\text{mm}$$

- 薄凹透鏡 $t(x) = e^{ik\frac{x^2}{2f}}$

如圖 4-7 所示，平面波入射凹透鏡後將被發散。

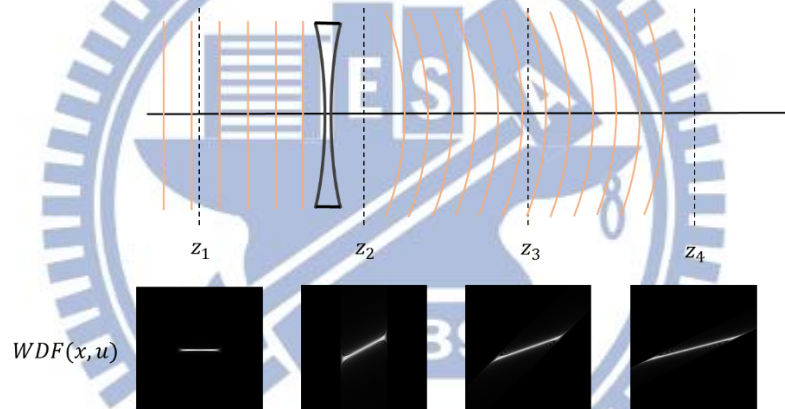


圖 4-7：平面波通過薄凹透鏡的韋格納分布函數變化。

$$\lambda = 550\text{nm}, f = -100\text{mm}, z_{i+1} - z_i = 50\text{mm}$$

- 三次方相位元件 $t(x) = e^{iax^3}$

圖 4-8 為平面波通過平面波經過三次方相位元件後，在光線空間中類似拋物線分布，並且不具有行進方向朝與光軸夾角為負值的成分。三次方相位元件最著名的應用是，擴展成像系統的景深，需要與透鏡組成成像系統，詳細內容將於下章節說明。

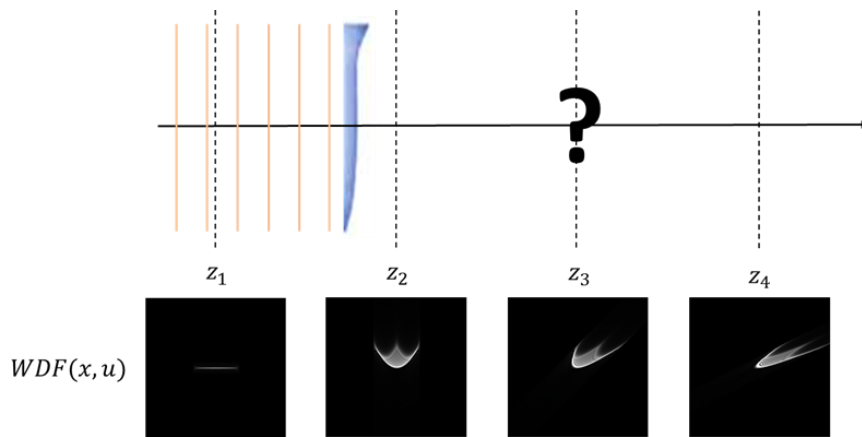


圖 4-8：平面波通過三次方相位元件的韋格納分布函數變化。

$$\lambda = 550\text{nm}, \alpha = 0.01, z_{i+1} - z_i = 50\text{mm}$$

目前為止，本章節所提供的範例皆為簡單的薄光學元件。光學上的理論目前已頗完備，期望接下來我們可建構出一套完整的光學模擬系統，並且用於模擬望遠鏡或是有置入繞射元件的光學系統。如此一來便可克服市面上許多以幾何光線追跡為基礎的序列成像模擬軟體在繞射處理上的不足。

章節五

波前編碼元件應用於擴展景深

前面章節中，說明了韋格納函數與模糊函數於光學系統中的應用。韋格納分布函數同時描述光在空間中上光線位置與行進方向。而模糊函數則可與成相系統的光學傳遞函數連結。本章將以 Dowski[6]所發表的三次方相位元件為主角，分別透過韋格納分布函數與模糊函數探討此元件在空間與頻域中所造成的影響，從兩個不同的角度討論擴展景深技術。

5.1 頻域中探討波前編碼元件與擴展景深

(Extending depth of field by wavefront coding in frequency domain)

Dowski 於 1995 年首先發表了以三次方相位元件進行擴展景深的理論打開了光學擴展景深的大門，接著開始有許多人陸陸續續發表不同的相位元件來達擴展景深的目的，如 Sherif[24]設計以對數形式的相位形式的元件可以達到更好的表現。Dowski 最初所推導出的結果是解析解的形式，而其後多是發表形式較為複雜或非解析形式的相位元件，但多數仍是承接 Dowski 理論加以延伸而來，因此要進行波前編碼研究者皆須了解最基礎的擴展景深系統模型。本節將詳述 Dowski 的理論，首先考慮不同離焦系統的光學傳遞函數，並與模糊函數連結。接著再透過數學上的穩相法[8,23]近似出適合擴展景深的相位元件，最後選擇適當的數位影像還原濾波器以達擴展景深的目的。

● 離焦系統與模糊函數 (Defocus system and AF)

在第 3 章中，我們說明了成像系統中系統的光學傳遞函數為像平面上模糊函數在 Δu 軸上的切片。並且模糊函數將隨著空間傳播在 Δx 方向上進行切變，離焦系統的光學傳遞函數為切變後的模糊函數在 Δu 軸上的切片。若我們將目光放在成像系統的焦平面上，則離焦的光學傳遞函數為焦平面上模糊函數的斜向切片。考慮一個一維的孔徑函數(pupil function) $P(r)$ 並加入離焦所造成的相位差

$$\phi = e^{ir^2\psi} \quad (5-1)$$

其中 ψ 與離焦距離成正比[6,7,17]。根據 Goodman[7]的理論，對非同調成像系統而言，光學傳遞函數等於出瞳方程做自相關運算

$$\tilde{H}(\Delta u, \psi) = \int \left\{ P\left(r + \frac{\lambda z \Delta u}{2}\right) e^{i\left(r + \frac{\lambda z \Delta u}{2}\right)^2 \psi} \times P^*\left(r - \frac{\lambda z \Delta u}{2}\right) e^{-i\left(r - \frac{\lambda z \Delta u}{2}\right)^2 \psi} \right\} dr \quad (5-2)$$

而系統的同調傳遞函數與出瞳方程的關係為

$$H(\Delta u) = P(\lambda u \Delta u) \quad (5-3)$$

因此方程式(5-2)可改寫成

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\Delta u, \psi) &= \int \left\{ H\left(r + \frac{\Delta u}{2}\right) H^*\left(r - \frac{\Delta u}{2}\right) e^{i2\psi \Delta u r} \right\} dr \\ &= \int \left\{ H\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) H^*\left(u - \frac{\Delta u}{2}\right) e^{i2\psi \Delta u u} \right\} du \end{aligned} \quad (5-4)$$

此式的形式與模糊函數有一樣的形式，其定義為

$$A(\Delta u, \Delta x) = \int H\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) H^*\left(u - \frac{\Delta u}{2}\right) e^{i2\pi u \Delta x} du \quad (5-5)$$

當模糊函數中的 Δx 等於 $\frac{\Delta u \psi}{\pi}$ 時，光學傳遞函數與模糊函數有相同的形式

$$\tilde{H}(\Delta u, \psi) = A\left(\Delta u, \frac{\Delta u \psi}{\pi}\right) \quad (5-6)$$

即模糊函數空間中的斜率為 $\frac{\psi}{\pi}$ 斜線，等於離焦後的光學傳遞函數。

舉例來說，考慮一個一維出瞳

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-7)$$

圖 5-1(a)為此出瞳的模糊函數分布圖，白色代表最大值，白色最小值為 0，不同斜率的直線代表不同的離焦距離。圖 5-1(b)與(c)分別代表不同離焦變數的調製傳遞函數 MTF，(b)為焦平面上的調製傳遞函數，即 $\psi = 0$ ，對應至模糊函數分布圖(a)水平紅色虛線。而(c)為離焦變數 $\psi = \frac{\pi^2}{2}$ 的調製傳遞函數，在模糊函數分布圖中為傾斜紅色虛線。可發現離焦後調製傳遞函數迅速劣化，並且有零點出現，零點出現表示此空間頻率的訊號完全無法通過系統。

擴展景深技術目的是希望能設計出一個出瞳使得在不同離焦距離，能維持相同的調製傳遞函數，並且沒有零點的出現。也就是設計出一個出瞳使其模糊函數分布圖上通過原點不同斜率的切片能有相同的函數表現。而推導過程中一個重要的步驟是透過穩相法 (Stationary phase method) 估計，它是數學上的一種近似方法，將於下小節中說明。

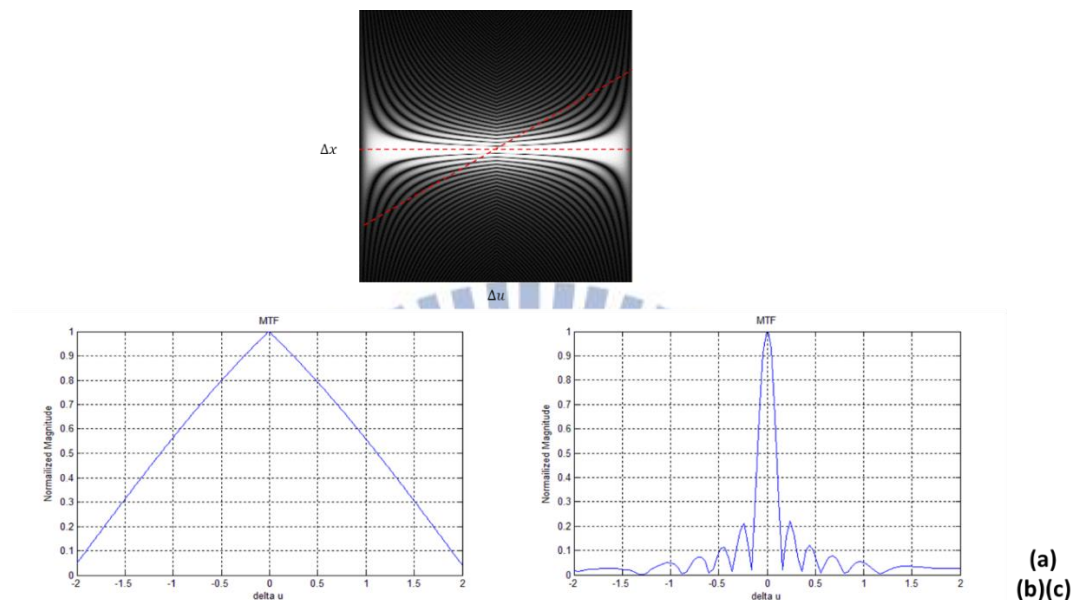


圖 5-1：一維方形孔徑的模糊函數與不同離焦變數所對應的調製傳遞函數。

- 穩相法 (Stationary phase method)

在電腦還沒高度發展前，一些複雜複數函數的積分很難處理，可以用穩相法 [8,23] 來近似積分的結果。舉例而言，首先考慮函數積分：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)e^{i\mu(x)} dx \quad (5-8)$$

其中 $r(x)$ 與 $\mu(x)$ 皆為實函數，如圖 5-2(a) 與 (b) 所示。 $r(x)e^{i\mu(x)}$ 的實部與虛部分別如圖 5-2(c) 與 (d) 所示。

此函數震盪快的部分，也就是相位變化比較快的部分，若 $r(x)$ 相對於 $e^{i\mu(x)}$ 變化速率慢，函數正負的快速震盪，而且大小相同，積分值就互相抵銷。故積分值主要的貢獻就來自於相位變化緩慢的部分。圖 5-2(e) 與 (f) 為自負無窮大積分至 x 的半積分值 $I = \int_{-\infty}^x r(x)e^{i\mu(x)} dx$ 。可以看到積分值的主要貢獻來自於震盪慢，也就是相位變化慢的區

域。函數變化慢的區域即為函數的極值附近，在此區域內函數的一階導數很小，或者是等於零。

此相位項微分等於零的點 我們稱為穩相點(stationary phase point)，而對積分主要貢獻區（穩相點附近）稱為穩相區(stationary phase region)。值得注意的是，相位函數 $\mu(x)$ 必須大於等於二次函數，才具有穩相點存在。

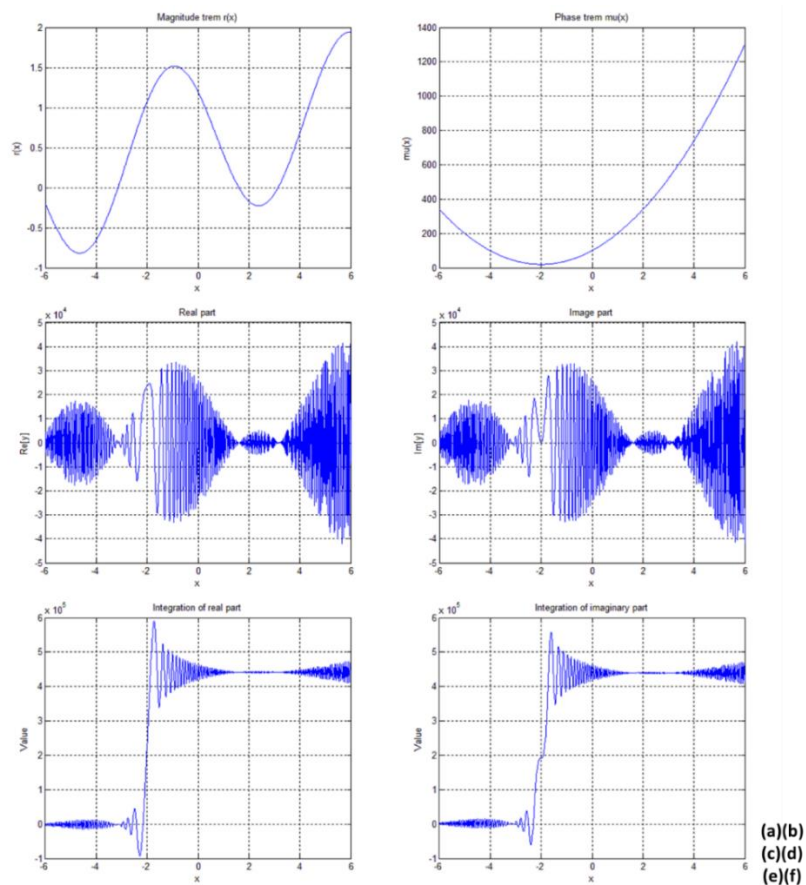


圖5-2：穩相法範例。

穩相法的基本觀念到此為止，下一小節將透過穩相法，找出適合用於擴展景深的相位元件。

● 三次方相位元件(Cubic phase mask)

考慮一個不調製強度，只調製相位的全通率波元件(all-pass filter)放置於光學系統出瞳位置

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi(x)} & \text{for } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-9)$$

其模糊函數為

$$A(\Delta u, \Delta x) = \frac{1}{2} \int e^{i\phi(u+\frac{\Delta u}{2})} e^{-i\phi(u-\frac{\Delta u}{2})} e^{i2\pi u\Delta x} du \quad (5-10)$$

令相位為整數次方多項式

$$\phi = \alpha x^\gamma \quad \gamma \neq 0,1 \quad (5-11)$$

則方程式(5-10)改寫為

$$A(\Delta u, \Delta x) = \frac{1}{2} \int e^{i\alpha(u+\frac{\Delta u}{2})^\gamma} e^{-i\alpha(u-\frac{\Delta u}{2})^\gamma} e^{i2\pi u\Delta x} du \quad (5-12)$$

令相位項為 $\mu(x)$ ，則

$$A(\Delta u, \Delta x) = \frac{1}{2} \int e^{i\mu(u)} du$$

$$\mu(u) = \{\alpha[(u + \frac{\Delta u}{2})^\gamma - (u - \frac{\Delta u}{2})^\gamma]\} + 2\pi u\Delta x \quad (5-13)$$

接著將 $\mu(x)$ 針對任意非奇異點做泰勒展開：

$$\mu(u) = \mu(u_0) + (u - u_0)\mu'(u_0) + \frac{1}{2}(u - u_0)^2\mu''(u_0) + \frac{1}{6}(u - u_0)^3\mu'''(u_0) + \dots \quad (5-14)$$

代入模糊函數中

$$A(\Delta u, \Delta x) = \frac{1}{2} \int e^{i\{\mu(u_0) + (u-u_0)\mu'(u_0) + \frac{1}{2}(u-u_0)^2\mu''(u_0) + \frac{1}{6}(u-u_0)^3\mu'''(u_0) + \dots\}} du \quad (5-15)$$

對穩相點而言 $u_0 \rightarrow \mu'(u_0) = 0$ 而且零階微分項與積分無關

$$A(\Delta u, \Delta x) = \frac{1}{2} e^{i\mu(u_0)} \int e^{i[\frac{1}{2}(u-u_0)^2\mu''(u_0) + \frac{1}{6}(u-u_0)^3\mu'''(u) + \dots]} du \quad (5-16)$$

若穩相區域夠窄 $(u - u_0)^2 \gg (u - u_0)^3$

$$A(\Delta u, \Delta x) \cong \frac{1}{2} e^{i\mu(u_0)} \int e^{i[\frac{1}{2}(u-u_0)^2\mu''(u_0)]} du \quad (5-17)$$

(做變數變換，以方便積分) 令

$$\Delta u^2 = \frac{\mu''(u_0)(u - u_0)^2}{2\pi}$$

$$A(\Delta u, \Delta x) = \frac{1}{2} e^{i\mu(u_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu''(u_0)}} \int e^{i\pi\Delta u^2} d\Delta u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu''(u_0)}} e^{i\mu(u_0)} e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (5-18)$$

推導的下一步是找出適當的穩相點 u_0 並代入(5-18)中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \mu(u) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \alpha \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right)^\gamma - \alpha \left(u - \frac{\Delta u}{2} \right)^\gamma + 2\pi u \Delta x \right\} &= 0 \\ \mu'(u) = \gamma \alpha \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right)^{\gamma-1} - \gamma \alpha \left(u - \frac{\Delta u}{2} \right)^{\gamma-1} + 2\pi \Delta x &= 0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

擴展景深目的是對應不同的離焦變數 ψ 而保有相同的調製傳遞函數，亦即對應不同的 Δx 保有相同的模糊函數值

$$|A(\Delta u, \Delta x)| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu''(u_0)}} \quad (5-20)$$

利用方程式(5-19)找出適當的 γ 使得 $\mu''(u_0)$ 不隨著 Δx 改變而變化。測試後發現唯有在 $\gamma = 3$ 時符合需求。穩相點位置與模糊函數大小為

$$u_0 = -\frac{\pi \Delta x}{3\alpha \Delta u} \quad (5-21)$$

$$|A(\Delta u, \Delta x)| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu''(u_0)}} = \left| \frac{\pi}{12\alpha \Delta u} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5-22)$$

圖 5-4(a)為三次方相位元件的模糊函數強度分布圖。圖 5-4(b)與(c)分別代表焦平面上與離焦變數 $\psi = \frac{\pi^2}{2}$ 位置的調製傳遞函數。兩者有相近的表現。雖然在焦平面上的表現並不如傳統系統，但維持了不同離焦距離有相同的調製傳遞函數，因此可使用同一反向濾波器對於不同離焦距離的影像進行還原。

最後經過計算，得到不同離焦距離的光學傳遞函數為

$$\tilde{H}(\Delta u, \psi) = \left| \frac{\pi}{12\alpha \Delta u} \right|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\alpha \Delta u^3}{4}} e^{-i\frac{\psi^2 \Delta u}{3\alpha}} \quad (5-23)$$

其中的 $e^{-i\frac{\psi^2 \Delta u}{3\alpha}}$ 是離焦所造成的相位變化，將造成不同的離焦距離點擴散函數的位移。

故若 α 值越大，離焦所造成的影響越小，也就是光學傳遞函數維持不變的距離可以越遠，但是過大的 α 亦會造成調製傳遞函數劣化，造成難以使用數位方法還原影像，因此 α 值的大小需要經過設計。

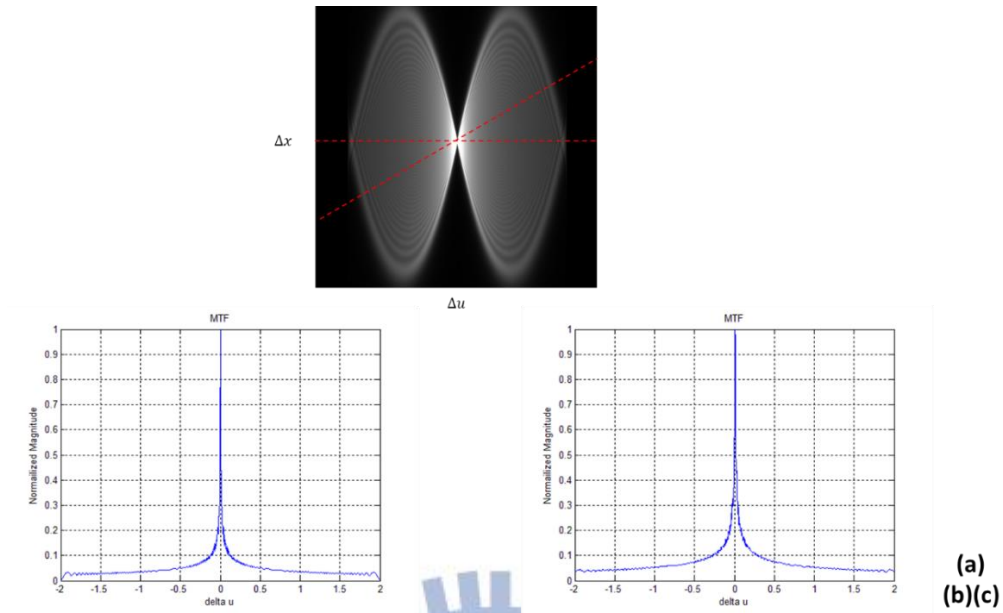


圖 5-3：三次方相位元件的模糊函數分布圖。

5.2 空間中探討波前編碼元件與擴展景深

(Extending depth of field by wavefront coding in space domain)

在 3.1 節中，我們瞭解光場與韋格納分布函數之間的關係，本節中，我們將此分析技巧應用於實際光學系統中，其中我們從 WDF 的角度來探討三次方相位元件，並將此相位分佈應用於孔徑函數，達到擴展景深目的。不同於 Dowski 使用模糊函數在頻域上探討擴展景深的做法，韋格納分布函數則是在二維座標 (x, u) 上討論。擴展景深從模糊函數角度來看是希望在不同的離焦位置系統維持相同的調製傳遞函數，而從空間角度來看，則是維持相同的點擴散函數，兩者具有四個維度的傅立葉轉換關係(Fourier Dual)。

以最簡單的單透鏡系統來說明，首先從普通的單透鏡，透過 WDF 看其 PSF 的效果。接著在此透鏡的孔徑函數插入三次方相位原件，觀察系統之 PSF 做何種形式的變化。本段中我們引入了幾何光學中的 ABCD 矩陣[21]，如同 WDF 一樣，ABCD 矩陣可同時描述了光的位置與角度資訊。透過此方法，可看出光源或影像進入某些光學系統的相位傳播，其 WDF 分布在系統中行進是如何變化的。承接 3.1 節的內容，可視光場經過 ABCD 矩陣轉換後

$$l_{out} = M * l_{in}; \begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

根據 Z. Zhang 的推導[4]，我們對可視光場 $l_{obs}^T(s, u)$ 或是 WDF 對其角頻譜 u 作積分，亦即將可視光場投影在空間座標 (s) 上，亦即在此平面上的幾何影像(geometric image)，其物理意義為將此平面上某個位置所具有的角譜做積分，獲得其照度(radiance)。

$$I_{gemo} = \int l_{obs}^T(s, u) du \quad (5-25)$$

假設物為一點光源 $\delta(s)$ ，此非同調光學系統之脈衝響應為：

$$I_{gemo} = |PSF|^2 = \int l_{out}(s, u) du \quad (5-26)$$

圖 5-4 為成像系統示意圖，當放置一個點光源在光學系統之 $z = 0 (Z_0)$ 平面上， $l_0(s, u) = \delta(s)$ 。根據成像公式，經過一系列的推導，在透鏡的成像平面 Z_4 上

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}; M_3 = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{q}{f} & f \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{p}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

$$l_{focus}(s, u) = l_0\left(\frac{f}{f-q}s, \frac{f}{(f-p)(f-q)}s + \frac{f}{f-p}u\right) = \delta\left(\frac{f}{f-q}s\right) \quad (5-28)$$

根據公式(5-26)，韋格納分布函數在 x 軸上的投影，是系統的脈衝響應(PSF)：

$$\int l_{focus}(s, u) du = |h(x)|^2 = |\delta(x)|^2 \quad (5-29)$$

此推導結果一如我們所預期，當一個簡單的成像系統，若完美成像並忽略其它像差，其脈衝響應(PSF)是一個 δ -函數。一旦離焦，從成像面往後距離 d 的平面 Z_5 而言：

$$\begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix} = M_4 M_3 M_2 M_1 \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{q}{f} - \frac{d}{f} & d\left(1 - \frac{p}{f}\right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{p}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

$$\begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{f-q} & d\left(\frac{f}{f-q}\right) \\ \frac{f}{(f-p)(f-q)} & \frac{f(f-q-d)}{(f-p)(f-q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix}$$

$$l_{defocus,d}(s, u) = \dots = \delta\left(\frac{f}{f-q}(s - du)\right) \quad (5-31)$$

其可視光場或韋格納分布函數是以原點為中心呈現切變(shear)形式。

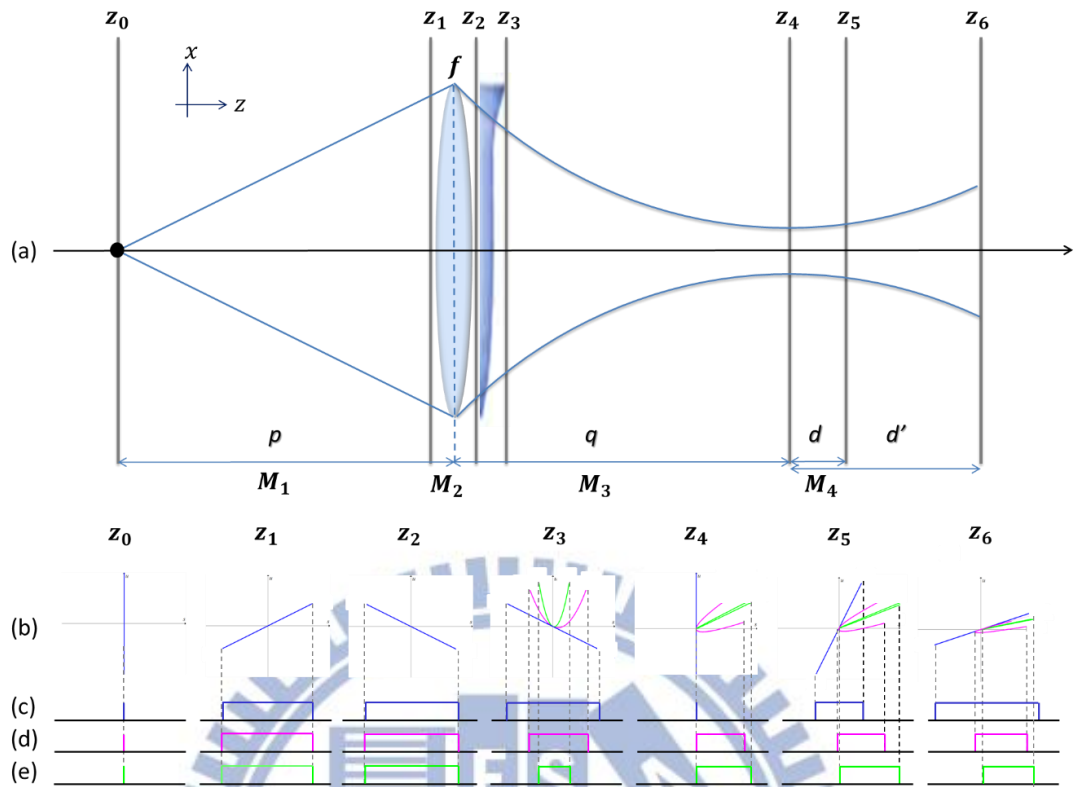


圖 5-4：傳統成像系統和擴展景深(Extended Depth of Field)之光場、PSF 分佈之分析情形。(a)為系統架構圖，在單透鏡後方加入三次方(cubic phase)相位元件，以達擴展景深之目的。(b)代表不同位置下光場分佈之情形。藍色表示傳統成像系統；洋紅色表示 EDoF 系統($\alpha=0.5$)， α 為相位調變權重因子；綠色表示 EDoF 系統($\alpha=10$)。(c) 成像系統 PSF。其中 z_0 為物平面； z_4 為成像平面； z_5 、 z_6 分別代表不同離焦下之 PSF 變化。(d) EDoF PSF，當 $\alpha=0.5$ ， z_5 、 z_6 幾乎維持相同大小但有較大之橫向位移。(e) EDoF PSF，當 $\alpha=10$ ，其中 z_5 、 z_6 幾乎維持相同大小並且有較小之橫向位移，代表光學系統在高相位調變下，其 PSF 可以呈現相當程度的一致性。

如圖 5-4 藍色所示。其點擴散函數會隨著離焦愈大，而落在愈大的區間上，預測結果與文獻完全吻合。在一般的光學系統上，成像面的點擴散函數會由原先理想的點函數，隨著離焦像差的增加，會形成一個愈來愈大的擴散光場。擴散光場與後端影像感測器的分辨率，定義了數位光學系統的景深條件。

當我們考慮擴展景深技術，將三次方相位元件置放於光學系統光瞳，如圖 5-4 紅色

與綠色所示。同樣的，我們使用 ABCD 矩陣推導光線在近軸近似下，經過不同光學元件或傳遞後的空間位置與角度資訊。

在進入三次方相位原件之前 $z = z_2$ ，此時光的 WDF 與傳統之成像系統相同：

$$\begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix} = M_2 M_1 \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{p}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} \quad (5-32)$$

$$\begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{f} & -p \\ \frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix}$$

$$l_{cubic^-}(s, u) = l_0 \left(\left(1 - \frac{p}{f}\right) s - pu, \frac{s}{f} + u \right) = \delta \left(s - \left(\frac{fp}{f-p}\right) u \right) \quad (5-33)$$

一旦光場經過三次方相位調變，在 $z = z_3$ ：

$$\phi(s) = \alpha s^3 \quad (5-34)$$

$$l_{out}(s, u) = l_{in} \left(s, u - \frac{1}{k} \frac{d\phi(s)}{ds} \right) \quad (5-35)$$

$$\begin{aligned} l_{cubic^+}(s, u) &= l_{cubic^-} \left(s, u - \frac{1}{k} (3\alpha s^2) \right) \\ &= l_0 \left(\left(1 - \frac{p}{f}\right) s - p \left(u - \frac{1}{k} (3\alpha s^2) \right), \frac{s}{f} + u \right) \\ &= \delta \left(u + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right) s - \frac{1}{k} (3\alpha s^2) \right) \end{aligned} \quad (5-36)$$

光的 WDF 經過了相位元件後，被調制成了拋物線分布。當光場達到成像系統之像平面 (z_4) 時：

$$\begin{bmatrix} S_{in} \\ u_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{out} \\ u_{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{focus}(s, u) &= l_{cubic^+}(s - qu, u) \\ &= l_0 \left(\left(1 - \frac{p}{f}\right) (s - qu) - p \left(u - \frac{1}{k} 3\alpha (s - qu)^2 \right) \right) \\ &= \delta \left(\frac{p}{k} 3\alpha (s - qu)^2 + \left(1 - \frac{p}{f}\right) s \right) \end{aligned} \quad (5-37)$$

一旦離焦，從成像面往後距離 d 的平面 z_5 而言：

$$\begin{aligned}
l_{focus+d} &= \delta \left(\frac{p}{k} 3\alpha (s - (q + d)u)^2 + \left(\frac{(q + d)p}{f} - (q + d) + p \right) u + \left(1 - \frac{p}{f} \right) s \right) \\
&= \delta \left(\frac{p}{k} 3\alpha (s - (q + d)u)^2 + \left(1 - \frac{p}{f} \right) (s - du) \right) \quad (5-38)
\end{aligned}$$

以放大倍率 $M = 1$ 為例，取 $p = 2f$; $q = 2f$; $k = 1$; $d = 0.5f$; $d' = 5f$ 。觀察系統的可視光場自源點開始向方向傳播的變化情形，其光場結果如圖 5-4 下方所示。與傳統透鏡系統之 PSF 隨著離焦劇烈的變化相比，三次方相位元件的系統對於離焦像差則具有相當的抵抗力。

同樣為三次方相位元件系統，公式(5-38)中所示，不同大小的波前編碼權重因子(α)會對於離焦像差有不同程度的變化。綠色($\alpha = 10$)的 PSF 在一定範圍的焦平面，皆保持一定大小，此種特性可經由後段濾波器設計，將調變過的影像信號還原。

圖 5-5 為實際傳統成像系統和波前編碼擴展景深 PSF 分佈的比較情形，此技術被應用於虹膜辨識系統。我們將 $\alpha = 150$ 的三次方元件置於鏡頭的出瞳，並於三公尺遠處架設點光源，前後移動點光源位置拍攝成像系統的 PSF。上排為傳統、下排為波前編碼系統的 PSF 表現。傳統系統在對焦位置上 PSF 表現為一個點，並隨著離焦擴散，造成影像品質的劣化。波前編碼系統在對焦位置上雖表現不如傳統系統好，但隨著離焦確有相似的 PSF 表現，可事後透過影像處理還原將對焦與離焦的影像還原，達到擴展景深的效果。

至此，我們已經將此數學模型做一定的假設與簡化，並將此分析工具應用至光場相機與擴展景深這兩種重要且富發展性的技術中。此模型可擴展是更多更加複雜之光學系統設計，例如光學鏡頭設計、半導體之光罩設計等，具有非常大的發展潛力，可用來發展更多強而有力的系統。

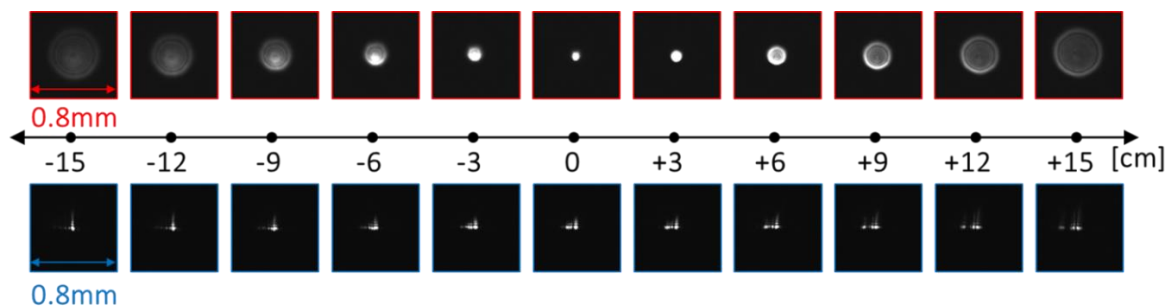


圖 5-5：傳統成像系統和波前編碼擴展景深 PSF 分佈之比較情形。

章節六

結論與未來工作展望

6.1 結論 (Conclusions)

以光線追跡作光學系統模擬是方便而快速的，但時而會因沒有考慮到波動現象的影響而造成誤差；而為了克服此弱點，我們選擇了訊號分析上的韋格納分布函數。透過第二章的光學同調性理論與第三章的傅式光學理論，給予韋格納分布函數在光學上的意義，並與光場技術作連結，證明他在巨觀條件下與光場技術是等價的。但當系統尺度進入微、奈米等級，如光柵或針孔時，韋格納分布函數可考慮到光場技術無法處理的繞射與干涉現象。

接著我們說明了韋格納分布函數的傅立葉對偶-模糊函數在光學上的涵義，也就是像平面上的模糊函數在水平軸 $\Delta x = 0$ 上的切片，即為此系統的光學傳遞函數。不同斜率的切片則代表了像平面離焦系統的光學傳遞函數。給定了兩者的意義後，再透過傅立葉切片原理連結這兩函數在光學上的涵義；也就是傅氏光學中的點擴散函數與光學傳遞函數。

在論文後半段 3.4 節中，自光學同調理論出發，純量場的同調強度的傳播，進而推導至韋格納分布函數與模糊函數的傳播。並在第四章給了一些簡單光學元件的韋格納分布函數模擬。第五章則利用兩個函數實際應用於擴展景深系統的探討，驗證這套理論的可行性。

6.2 未來工作展望 (Future work)

一、光線角度之限制

目前韋格納分布函數推導為近軸近似，未來將加入非近軸近似之推導，方可應用於真實系統之上。

二、運算速度上之限制

現今的韋格納分布函數運算平台為 MATLAB，在計算量上比起傳統的成像光學更為

龐大；未來將可使用已定義好之光學元件韋格納分布函數，便可加速運算及減少系統複雜度。

三、單位量綱

本論文僅定性探討及分析韋格納分布函數，在單位上並無實際定義；未來將加入真實單位以方便驗證系統。



References

- [1] A. Ashok and M. Neifeld, "Compressive light field imaging," Proc. SPIE 7690, 76900Q, 2010.
- [2] M. J. Bastiaans. "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems," Opt. Commun., 25(1):26-30, Apr. 1978.
- [3] M. J. Bastiaans. "The Wigner distribution - theory and applications in signal processing, chapter Application of the Wigner distribution in optics," Elsevier Science, 1997
- [4] Z. Zhang, M. Levoy, "Wigner distributions and how they relate to the light field," IEEE International Conference on Computational Photography, 2009.
- [5] M. E. Testorf, B. M. Hennelly and J. Ojeda-Castañeda. *Phase-Space Optics Fundamentals and Applications* (McGraw-Hill, New York, 2010).
- [6] E. R. Dowski, Jr. and W. T. Cathey, "Extended depth of field through wave-front coding," Applied Optics, 34(11):1859-1866, Apr. 1995.
- [7] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [8] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics 7thed* (University Press, Cambridge, 2005).
- [9] Ashdown. "Near-field photometry: A new approach," Journal of the Illuminating Engineering Society, Vol. 22, No. 1, pp. 163-180, winter, 1993.
- [10] B. Javidi and Y. Frauel, "Three-dimensional object visualization and recognition based on computational integral imaging," SPIE Optical Pattern Recognition XIV, 2003.
- [11] R. Ng. "Digital light field photography," PhD thesis, Stanford, CA, USA, 2006. Adviser- Patrick Hanrahan.
- [12] R. Ng, M. Levoy, M. Bredif, G. Duval, M. Horowitz, P. Hanrahan, "Light field photography with a hand-held plenoptic camera," Computer Science Technical Report CSTR, Jan 2005.
- [13] R. Ng. "Fourier slice photography." In Proc. ACM SIGGRAPH, 2005.
- [14] J. W. Goodman, *Statistical Optics* (Wiley, 2000)
- [15] C. A. Bennett, *Principles of Physical Optics* (Wiley, 2008)
- [16] P. M. Woodward, *Probability and Information Theory with Applications to Radar* (Norwood, MA: Artech House, 1980).

- [17] W. Singer, M. Totzeck and H. Gross, *Handbook of Optical Systems Vol. 2.* (Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2005)
- [18] T. Cuypers, R. Horstmeyer, S. B. Oh, Philippe Bekaert and R. Raskar, "Validity of Wigner distribution function for ray-based imaging," IEEE ICCP, 2011.
- [19] S. S. Haykin and B. V. Veen, *Signals and Systems 2nd Edition* (Wiley, 2002)
- [20] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing 3rd Edition* (Prentice Hall, 2007)
- [21] B. E. A. Saleh and M. C. Teich *Fundamentals of Photonics* (Wiley-Interscience, 2007)
- [22] S. Sherif, W. Thomas Cathey, and E. R. Dowski, "Phase plate to extend the depth of field of incoherent hybrid imaging systems," Applied Optics, 2004.
- [23] R. L. Easton, Jr., *Fourier Methods in Imaging* (Wiley, 2010)
- [24] J. Chaves, *Introduction to Nonimaging Optics* (CRC Press, 2008)
- [25] S. B. Oh, G. Barbastathis, R. Raskar, "Augmenting Light Field to Model Wave Optics Effects," Tech report, 2008.
- [26] S. B. Oh, S. Kashyap, R. Garg, S. Chandran and R. Raskar, "Rendering Wave Effects with Augmented Light Field," EUROGRAPHICS 2010.