

國立交通大學

土木工程學系碩士班

碩士論文

沒水板對非線性波溯上消減研究



Runup Reduction of Nonlinear Waves by a Submerged
Plate in a Numerical Flume

研究生：蕭全佑

指導教授：吳永照

中華民國九十五年十一月

沒水板對非線性波溯上消減研究

Runup Reduction of Nonlinear Waves by a Submerged Plate in a Numerical Flume

研 究 生：蕭全佑

Student : Chung-Yu Hsiao

指 導 教 授：吳永照

Advisor : Yung-Chao Wu



A Thesis Submitted to Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
in Civil Engineering
November 2006
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年十一月

沒水板對非線性波溯上消減研究

學生：蕭全佑 指導教授：吳永照

國立交通大學土木工程學系碩士班

摘 要

本文以邊界元素法(Boundary Element method, BEM) 模擬直推式數值水槽，並於數值水槽置入沒水板，研究沒水板消減有限振幅波溯上的效果。數值模式包括消除造波板引起之二階自由波、測試水槽末端加入海綿層及輻射邊界消滅反射波之效果，並以 Euler-Lagrangian 混合模式及二階 Taylor 級數展開法追蹤自由水面水粒子的運動軌跡，為了增加數值計算精確度，各種物理量之切線方向一階及二階的微分都使用 Cubic Spline 求得。首先發展出非線性波數值水槽並與 Stokes 五階解比較，利用數值水槽計算非線性波浪溯上高度並與實驗值比較驗證本文數值模式之正確性。於數值水槽加入沒水板探討沒水板對波浪溯上的影響，發現波浪的溯上與沒水深度、沒水板與堤腳的距離、沒水板傾角、沒水板的寬度、及傾斜堤面之坡度有關。透過沒水板的波浪與堤面反射的波浪之相位差的不同，會產生不同的駐波波高，發現在愈大的駐波波高會有愈大的溯上高度，因此影響因子可綜合成穩定後的駐波波高。大致上，加入沒水板後均能降低溯上高度，而相對溯上高度隨著相對水深 kh 增加而有週期性遞減的趨勢，尖銳度愈大相對溯上高度則愈低。

Runup Reduction of Nonlinear Waves by a Submerged Plate in a Numerical Flume

Student : Chuan-Yu Hsiao Advisor : Yung-Chao Wu

Institute of Civil Engineering National Chiao Tung University

Abstract

Based on the boundary element method (BEM), a time stepping lagrangian technique is developed to simulate the generation of nonlinear water wave by a piston type wavemaker in a numerical wave tank. The second order free wave which generated by wavemaker, due to finite displacement, is eliminated in this study. Besides radiation condition, a sponge layer is set in front of the end of the wave tank to reduce wave reflection. To demonstrate the accuracy of the proposed numerical scheme, the surface elevation and velocity vector are computed and compared with the fifth order Stokes wave theory. The numerical scheme is also applied to study the runup of nonbreaking waves on plane beaches. The maximum runup predicted by this study is compared to labortary data from other investigations and it is demonstrated that it models the runup process adequately. After having verified the accuracy of the numerical scheme, the effects of submerged plate on the runup of nonbreaking waves are investigated in detail. Our numerical results show that runup is affected by the submerged depth, the width, the inclined slope of plate, and the clearance between plate and beach. But the resulting factors can be intergrated by a variable of partial standing wave height between submerged plate and beach. Runup height increased as well as partial standing wave height increased. Generally, the runup height tends to reduce when a submerged plate is set in the wave tank. The relative runup height periodically decreases as the relative water depth increases; the relative runup height decreases as the wave steepness increases.

誌 謝

首先由衷的感謝恩師 吳永照教授盡心盡力的指導及幫助，讓學生在學習及做研究上成長了許多，有著更多不同的體驗，老師對學生諄諄教悔，學生沒齒難忘。同時感謝口試委員徐虎嘯博士及陳筱華博士細心的批評指教，提供寶貴的意見，讓學生的論文內容更加完備，在此致衷心謝意。

研究室的學習生涯，感謝學長：好爸爸的生哥、好長官維珉、全能的阿文哥、會運動的貓哥、幽默的彬哥、好脾氣的朱老大、撞球好手兼科技新貴的明穎；同窗：風趣的小晉晉、成熟穩重的瑋哥、電腦高手的小蘇、講義氣的任馥佳偶、神算的君儀；學弟妹：酷酷的詹兄、豪氣的牛奶車、好歌喉的女土匪、好手藝的柏成、斯文的為善、會把咩的昱維、會理財的丫~牛、好學生的瀚聖、Zero 樂團鼓手的韋圻等，多虧大家的陪伴，有苦有樂，增添了不少色彩，更要感謝 118A 的水資源團隊，借助電腦讓我執行不少程式。朋友：俊斌贊助電腦，讓我有更多資源，還有一些認識我的朋友們，謝謝你們的支持與鼓勵。

最後要深深的感謝我的家人，父母親、兄姐及姪女羽庭的全力支持及給我信心，讓我可以無後顧之憂完成研究所的學業。

目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
謝誌.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	X
符號表.....	XI
第一章 緒論.....	1
1-1 前言.....	1
1-2 文獻回顧.....	1
1-3 研究目的.....	3
1-4 研究方法.....	4
第二章 理論模式.....	5
2-1 研究範圍界定.....	5
2-2 控制方程式.....	6
2-3 邊界條件.....	6
2-4 各邊界之初始條件($t=0$).....	9
第三章 數值方法.....	10
3-1 邊界元素法.....	10
3-2 自由水面上水粒子移動之模擬.....	14

3-3 計算流程.....	19
3-4 模式之節點設定數.....	20
第四章 結果與討論.....	22
4-1 數值波浪水槽可行性驗證.....	22
4-2 波浪溯上之驗證.....	24
4-3 波浪溯上之模擬.....	25
4-4 波浪通過沒水板後溯上之模擬.....	26
第五章 結論與建議.....	32
5-1 結論.....	32
5-2 建議.....	34
參考文獻.....	35
附錄 A 二階自由波之關係式.....	72
附錄 B 曲線近似法(Cubic Spline).....	76
附錄 C 轉角處之合適條件.....	80
附錄 D 平滑技巧(Smoothing Technique).....	82
附錄 E 模式中質量的定義與推算.....	83
附錄 F 模式中能量的定義與推算.....	84



圖目錄

圖 2-1 造波模式之驗證示意圖.....	38
圖 2-2 非線性波溯上示意圖.....	38
圖 2-3 非線性波通過沒水板後溯上示意圖.....	39
圖 3-1(a) 點源位於邊界上示意圖.....	40
圖 3-1(b) 點源位於邊界內示意圖.....	40
圖 3-2 模式之整個系統的計算流程.....	41
圖 3-3 各邊界線上節點設定分佈圖.....	42
圖 4-1.1 消除二階自由波與包含二階自由波之水面波形比較.....	43
圖 4-1.2 數值造波分別以不同海綿層長度與 Stokes 五階波形比較....	44
圖 4-1.3 數值造波分別以不同海綿係數 c 與 Stokes 五階波形比較....	45
圖 4-1.4 數值造波跟 Stokes 五階理論之速度向量比較圖.....	46
圖 4-1.5 造波模式質量隨時間變化圖.....	47
圖 4-1.6 造波模式能量隨時間變化圖.....	47
圖 4-2.1 波浪溯上水槽平面佈置圖.....	48
圖 4-2.2 無沒水板時相對溯上高度與 h/L 之比較圖.....	49
圖 4-2.3 無沒水板時相對溯上高度與 $\sigma^2 h/g$ 之比較圖.....	50
圖 4-3.1 無沒水板狀況之波浪在堤面上水位時序圖.....	51
圖 4-3.2 無沒水板狀況波浪之相對溯上高度與 kh 及波浪尖銳度關係 圖.....	52
圖 4-4.1 非線性波通過沒水板狀況下在堤面上水位時序圖 ($H/L=0.015$ $W=2L$ $kh=0.7625、1.0、1.5$).....	53

圖 4-4.2	造波板二次反射波時間計算.....	53
圖 4-4.3	非線性波之相對溯上高度與相對水深(kh)關係圖 (H/L=0.015 W=2L kh=0.7~1.5).....	54
圖 4-4.4	線性波通過沒水板之駐波高度與相對水深(kh)關係圖 (H/L=0.015 W=2L kh=0.7~1.5).....	54
圖 4-4.5	非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖 (H/L=0.015 W=2L kh=0.7625、1.0、1.5).....	54
圖 4-4.6	沒水板與堤面間之駐波剖面圖.....	55
圖 4-4.7	線性波通過沒水板之透射率與相對水深(kh)關係圖 (B=5.0h d=0.3h).....	55
圖 4-4.8	非線性波之相對溯上高度與尖銳度(H/L)關係圖 (W=4L H/L=0.005~0.025).....	56
圖 4-4.9	非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖 (W=4L H/L=0.005、0.015、0.025).....	56
圖 4-4.10	非線性波通過沒水板之溯上高度與尖銳度(H/L)關係圖 (W=4L H/L=0.005~0.025).....	56
圖 4-4.11	非線性波之入射波高與尖銳度(H/L)關係圖 (W=4L H/L=0.005~0.025).....	57
圖 4-4.12	非線性波之相對溯上高度與堤面角度(θ)關係圖 (H/L=0.02 W=4L $\theta=30^\circ\sim 90^\circ$).....	58
圖 4-4.13	非線性波通過沒水板狀況下在堤面上水位時序圖 (H/L=0.02 W=4L $\theta=30^\circ、45^\circ、60^\circ、90^\circ$).....	58

圖 4-4.14	線性波通過沒水板產生駐波波高與堤面角度(θ)關係圖 ($W=4L$ $\theta=30^\circ\sim 90^\circ$).....	58
圖 4-4.15	非線性波之相對溯上高度與沒水板離堤腳距離(W)關係圖 ($H/L=0.02$ $W=1L\sim 4L$).....	59
圖 4-4.16	線性波通過沒水板產生駐波高與沒水板離堤腳距離(W)關係圖 ($W=1L\sim 4L$).....	59
圖 4-4.17	非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖 ($H/L=0.02$ $W=1L、2L、3L、4L$).....	59
圖 4-4.18	線性波通過沒水板之透射率與沒水板長度(B)關係圖 ($B=0h\sim 7h$).....	60
圖 4-4.19	非線性波之相對溯上高度與沒水板長度(B)關係圖 ($H/L=0.02$ $W=2L$ $B=0.5h\sim 6.75h$).....	60
圖 4-4.20	線性波之駐波波高與沒水板長(B)關係圖 ($W=2L$ $B=0.5h\sim 7h$).....	60
圖 4-4.21	非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖 ($H/L=0.02$ $W=2L$ $B=1.625h、2.75h、5h$).....	61
圖 4-4.22	線性波通過不同沒水板長產生駐波波高與 kh 關係圖 ($W=2L$ $B=1.57h、5h$ $kh=0.7\sim 1.5$).....	61
圖 4-4.23	非線性波之相對溯上高度與沒水板深度(d)之關係圖 ($H/L=0.02$ $W=2L$ $d=0.25h\sim 0.875h$).....	62
圖 4-4.24	非線性波通過沒水板狀況下在堤面上水位時序圖 ($H/L=0.02$ $W=2L$ $d=0.25h、0.375h、0.5h$).....	62

圖 4-4.25 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較	
圖(H/L=0.02 W=2L d=0.25h、0.375h、0.5h).....	62
圖 4-4.26 線性波通過沒水板之透射率與沒水板之傾角(α)關係圖	
($\alpha = -3^\circ \sim 3^\circ$).....	63
圖 4-4.27 非線性波之相對溯上高度與沒水板之傾角(α)關係圖	
(H/L=0.02 W=4L $\alpha = -3^\circ \sim 3^\circ$).....	63
圖 4-4.28 通過沒水板的狀況下波浪在堤面上水位時序圖	
(H/L=0.02 W=4L $\alpha = -3^\circ、0^\circ、3^\circ$).....	64
圖 4-4.29 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較	
圖(H/L=0.02 W=4L $\alpha = -3^\circ、0^\circ、3^\circ$).....	64



表目錄

表 4-1 非線性波之相對溯上高度與相對水深(kh)關係數據表.....	65
表 4-2 非線性波之相對溯上高度與尖銳度(H/L)關係數據表.....	66
表 4-3 非線性波之相對溯上高度與堤面角度(θ)關係數據表.....	66
表 4-4 非線性波之相對溯上高度與沒水板離堤腳距離(W)關係數據 表.....	67
表 4-5 非線性波之相對溯上高度與沒水板長度(B)關係數據表.....	69
表 4-6 非線性波之相對溯上高度與沒水板深度(d)關係數據表.....	70
表 4-7 非線性波之相對溯上高度與沒水板傾角(α)關係數據表.....	71



符號表

B : 沒水板長度

c : 前進波之相位速度

c_1 : 波浪在水深 h 的波速

c_2 : 波浪在水深 d 的波速

d : 沒水板置於離自由水面之水深

G : 自由空間之 Green 函數

g : 重力加速度

h : 水深

k : 週波數

L : 波長

M : 靜止水槽內的總質量

M^* : 造波中水槽內的總質量

p : 大氣壓力

s_0 : 造波板之衝程

s_f : 消除二階自由波所需之衝程

\bar{s} : 自由水面單位切線向量

T : 造波板週期

t : 時間

TL : 水槽總長(造波板至堤腳長度)

u : 水平速度

V : 靜止水槽內的總體積



V^* : 造波中水槽內的總體積

W : 沒水板離堤腳之距離

w : 垂直速度

x : 卡式座標水平方向

x_0 : 造波板初始 x 座標值

x_1 : 海綿層之起始 x 座標值

x_2 : 海綿層之末端 x 座標值

z : 卡式座標垂直方向

α : 固定沒水板的中心點且轉動之角度

β : \bar{s} 和 \bar{x} 間的夾角

δ : Dirac Delta 函數

ε : 區域座標(範圍-1~1)

Φ : 速度勢能

Φ_n : 法線速度

Γ : 分析領域之邊界

φ : 一階 Stokes 波與二階自由波之相位差

γ : 繞奇異點所需的角

μ : 海綿層之阻滯係數

π : 圓周率

θ : 堤面的傾斜角度

ρ : 流體的密度

ξ : 自由水面之水粒子 x 方向座標



ζ : 自由水面之水粒子 z 方向座標

Ω : 分析領域

σ : 波浪的週頻率

ω : 造波板的週頻率



第一章 緒論

1-1 前言

臺灣是一個海島國家，四面環海，保護沿海居民的身家財產是海岸工程中最重要課題。海岸結構物的設計，可以說是海岸保全中一大工程。波浪於堤面之溯上(Run-up)高度若過高將可能造成海水入侵陸地之越波(overtopping)情形發生，在堤後若沒有良好的排水設計，可能導致堤面後方發生溢淹或背土區發生土壤滲流導致堤面結構物的破壞。所以溯上高度的大小，對於工程設計及施工而言，是一個重要考慮因素。近來，為了使人民對於海的親水性提高，多親近大自然，海岸景觀愈來愈受到人們的重視，沉沒在海水下的海岸結構物(潛沒式沒水板、潛堤或人工潛礁)，可以符合海岸保全及海岸景觀，更可以將海水循環妨礙減小，進而對生態環境影響降到最低。許多研究發現沒水板能有效分散波能、降低波浪透射率。綜合以上的觀點，為了有效降低波浪在海堤之溯上高度，本文主要探討在未碎波情況下，沒水板對波浪溯上的影響。

1-2 文獻回顧

(1)有關於溯上方面的研究：

關於溯上問題的研究，在早期大致上以模型實驗結果分析歸納波浪之溯上，由於大部份之海岸結構物都是設置在淺灘上，波浪在未到達海岸結構物前都已碎波，而陡坡上及未碎波之溯上實驗或理論文獻較少。以往對於波浪溯上的研究，林(1983)假設溯上水體為一線性水面，莊與林(1991)則取溯上水體為一二次線性分布，並根據能量守恆

定理，推導堤前入射波浪所造成波浪溯上計算式，並以實驗數據迴歸出不同堤面坡度下之相對溯上高與波浪尖銳度間的關係。周與馮(1984)先依線性波理論利用邊界元素法，求得線性波波形及溯上高度，之後再考慮非線性項，進而求得非線性波溯上高度。Liu and Cho(1994)則利用邊界元素法探討Solitary Wave及Cnoidal Wave受底床的摩擦效應後對於波浪在溯上之影響。

為了有效降低溯上高度，莊與簡(1993)以不同的矩形條狀物來模擬粗糙堤面，並以不同浪尖銳度之規則波在1:0.5至1:3的坡度範圍進行溯上試驗，發現堤面粗糙度愈大相對溯升高度愈低，並發現相對溯上及溯降與湧波參數有直接關係。學者Neelamani and Sandhya(2004)以堤面上設計有規則小凸起方塊、凹形方格來進行溯上實驗，發現在堤面坡度 30° 、 60° 及 90° 均比光滑堤面有效的降低溯上高度。

(2)有關於沒水板的研究：

Neelamani and Reddy(1992)利用模型實驗控制不同的波浪尖銳度、相對水深、沒水平板的置水深與水深之比及波浪水粒子水平方向位移與平板寬之比，研究平板位於靜水面上及潛沒水中時其反射率、透過率及能量損失係數。發現平板設置在離水面0~0.15倍水深時有良好的消能效果，而在0.0625倍水深處有最大能量損失。

岳(1993)利用邊界元素法，計算無孔洞、單孔、雙孔及傾斜等之沒水板對直立岸壁之波壓力影響、平板所受水平總力及上揚力大小。當波長較長時，波浪通過平板上方時明顯有較大波高的現象，造成直立岸壁前波高顯著增大。並發現沒水板在設置水深、寬度、距岸壁距離等三因素中，以平板設置水深對直立岸壁較具減壓效果。波浪通過水平或傾斜沒水板之反射率約 0.8，設置水深較淺時反射率較設置較

深時為小，而沒水板以水平設置所得減壓效果較傾斜設置為好。

周與韓(1994)利用等能量波譜分割法，將不規則入射波的週頻率波譜以等能量方式分割計算成分波，並視為微小振幅波，利用邊界元素法計算不規則波作用於沒水板之透射率，之後再以線性疊加原理計算出不規則波作用時的透過率，結果發現沒水平板對某些特定較長週期波具良好消波效果。

黃(1995)應用線性元素之邊界元素法並結合有限元素法解析，探討線性波浪與沒水板間之交互作用的問題及沒水板對波浪之影響程度。發現當入射波之頻率，與沒水板材料之自然頻率接近時，沒水板會產生共振，使得反射係數幾乎達到 1.0。當轉動角度時，沒水板離自由水面越近，則反射係數越大；其厚度取太薄時，也使得板子勁度不足以抵擋波浪而震動，產生彈性行為，而加大反射效果，所以以適當的板長、厚度及材料強度，可得到幾乎全反射的效果。

吳與徐(2003)利用邊界元素法在時間領域下，探討二維未碎孤立波通過沒水板之變形後作用於垂直岸壁波力，基本上加入沒水板確實有消減波力的效果，沒水板的增長或放置愈靠近水面均能有效的消減波力，而沒水板的傾斜度則以前低後高的正傾斜消減波力效果較佳。

1-3 研究目的

溯上高度為決定堤防設計高度之重要因素，而入射波特性、水深、堤腳水深及堤面坡度及粗糙度均會影響波浪在堤面上的溯上高度，有效的降低溯上高度為一重要的課題。有鑑於沒水板能有效分散波能、降低波浪透射率，因此本文目的為探討波浪通過沒水板後在堤面溯上高度之消減。本文利用邊界元素法發展一數值水槽模擬非線性

造波問題，並置入一固定沒水板，改變不同入射波條件、堤面坡度及沒水板的擺置，透過分析可以瞭解非線波通過沒水板後之溯上高度變化。以提供在海洋工程上設計與應用之參考。

1-4 研究方法

本文基於線性邊界元素法發展出一數值水槽，在時間領域(time domain)計算模擬由直推式(piston type)造波水槽所造出來的非線性自由水面波動，並消除造波板產生之二階自由波。在此模式中，將邊界分成有限個直線元素，假設所有的物理量在各個元素內做線性變化，而整個自由水面以 Eulerian-Lagrangian 混合模式來描述在不同時間的非線性運動，利用曲線近似法(cubic spline)來計算各種物理量在切線方向之一、二階微分值，以 Taylor 級數展開法求得下一時刻的水位資料，而且在水槽末端應用輻射邊界及加入海綿層來吸收入射波。先與 Stokes 五階解驗證此造波之可行性後，水槽末端改以一不透水傾斜堤面以模擬波浪溯上現象。當波浪傳至堤面時，波浪會沿著堤面呈現週期性爬升，經一段時間此週期性爬升達穩定，取波浪爬升之最大垂直高度與靜水面高度差為溯上高度。在未置入沒水板時，則與 Neelamani and Sandhya(2004)實驗結果及周與韓(1982)的實驗結果相互比較，來確定本文所採用的數值模式的正確性。另於堤面前置入固定式不透水之沒水板，在不同的入射波條件、堤面坡度、沒水板離堤腳的距離、沒水板放置離自由液面的深淺、沒水板的長度及沒水板轉動之傾斜角度等，均對於波浪有不同程度的影響，本文除了數值計算沒水板引起非線性波的變形，並將計算非線性波通過沒水板後的溯上高度。

第二章 理論模式

2-1 研究範圍界定

本文先以一純水槽(未置入沒水板)進行驗證造波模式的可行性，如圖 2-1 所示為一固定水深 h 的數值水槽，水槽的左邊界為一虛擬活塞式造波板邊界 Γ_m ，上邊界為自由水面 Γ_f ，右邊界為幅射邊界 Γ_r ，並有海綿置於幅射邊界前端，下邊界則為不透水底床邊界 Γ_w 。定義造波板的初始位置($t=0$)與自由水面交界點為卡氏座標系之原點。

在波浪溯上模式中，將純水槽的幅射邊界重新定義為一不透水傾斜堤面，並將置於前端的海綿除去，堤面的坡度為 θ (即底床延伸線與堤面之夾角)，如圖 2-2 所示。此溯上模式之計算領域由虛擬造波邊界 Γ_m 、自由水面 Γ_f 、不透水堤面及底床不透水邊界 Γ_w 所圍成之封閉區間。

最後，將一不透水沒水板設置在溯上模式的水槽中，沒水板置於離自由液面之水深 d ，沒水板長為 B ，而沒水板離堤腳之距離為 W ，固定沒水板的中心點且轉動之角度為 α ，逆時針方向為正，如圖 2-3 所示。此模式之計算領域由虛擬造波邊界 Γ_m 、自由水面 Γ_f 、不透水邊界 Γ_w (包括底床、堤面及沒水板)所圍成之封閉區間。

波浪在斜坡堤面上碎波將會對波浪的溯升有著重要的影響。假使波浪不在斜坡上產生碎波，能量由動能轉換成位能，波浪將會呈現重複波狀態將能量反射回去；但若在堤面產生碎波其能量則逸散掉。所以，波浪在堤面上是否產生碎波則對於溯上的影響大大不同。本文僅考慮波浪在堤面上無碎波情況。

2-2 控制方程式

假設水槽中的流體為非黏滯性 (inviscid)，不可壓縮性 (incompressible)，且為非旋性流場 (irrotational)，則有一速度勢 $\Phi(x, z, t)$ 的存在，配合勢能流理論，整個數值研究領域之控制方程式為拉普拉斯方程式 (Laplace equation)：

$$\nabla^2 \Phi(x, z, t) = 0 \quad (2-1)$$

2-3 邊界條件

在卡氏座標 (x, z) 下，可將控制領域中各點的速度 (包括水平速度 u 及垂直速度 w) 定義為：

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2-2)$$

沿著自由水面點，給予一區域座標 (s, n) ，其中 \bar{s} 為單位切線向量， \bar{n} 為單位法線向量，定義邊界之 \bar{n} 向外為正，另可將速度表示成：

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cos \beta - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \sin \beta \quad (2-3)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos \beta \quad (2-4)$$

其中 β 為 \bar{s} 和 \bar{x} 間的夾角，以逆時鐘方向為正。

1. 左邊界條件：為一虛擬造波板之運動邊界條件 (Kinematic boundary condition, KBC)，虛擬造波板之水平運動速度與板上水粒子之水平速度必須相等，其造波板上水粒子的位移為：

$$x = \hat{S}(t; x_0) = \frac{s_0}{2} \sin \omega t + \frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi) + x_0 \quad (2-5)$$

則造波板之 KBC 則為：

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad (2-6)$$

其中 x_0 為造波板初始 x 座標值， s_0 為造波板之衝程， ω 為造波板的週頻率， s_f 為消除二階自由波所需之衝程， φ 為一階 Stokes 波與二階自由波之相位差(附錄 A)。由於造波板所造出之波浪除了二階 Stokes 波亦包含二階自由波，因此造波板的位移需加上 $\frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi)$ 項消除造波板所產生的二階自由波(吳，1987)。

2. 右邊界條件：

A. 純水槽：右邊界條件為一假想無窮遠邊界，即幅射邊界條件：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (2-7)$$

其中 c 為前進波的相位速度(phase velocity)。由於所給的幅射邊界條件為線性，仍會有些微的反射波，所以於幅射邊界前放置海綿層(Ohyama and Nadaoka, 1991)來消滅入射波能及減少波浪反射，在(2-7)

式中加入 $\mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx$ ，因此(2-7)式改寫為

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (2-8)$$

x_1 為海綿層之起始 x 座標值， x_2 為海綿層之末端 x 座標值， μ 為海綿層之人造阻滯係數(damping factor)，海綿層成一線性分佈，在海綿層之起始端與無海綿區域之 μ 值為 0，在最末端與幅射邊界交界處之 μ 值為最大值 μ_{\max} 。

B. 溯上水槽：右邊界條件為一傾斜不透水堤面，邊界之法線方向的流速於任何時刻均為零，即：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-9)$$

3. 自由水面運動邊界條件(Kinematic boundary condition at free surface, KFSBC)：以 Lagrange 方法來描述水粒子的移動，水表面的水粒子速度等於水面波形速度，給予表面水粒子位置座標為：

$$x = \xi(t, x_0) \quad ; \quad z = \zeta(t, z_0) \quad (2-10)$$

這裡 $x_0 = \xi(0, x_0)$ ， $z_0 = \zeta(0, z_0)$ 。所以 KFSBC 即為：

$$\frac{d\xi}{dt} = u \quad , \quad \frac{d\zeta}{dt} = w \quad (2-11)$$

4. 自由水面動力邊界條件(Dynamic boundary condition at free surface, DFSBC)：在 DFSBC 方面，可由白努利方程式(Bernoulli's equation)得：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (2-12)$$

其中 ζ 為水面之高程，並令自由表面大氣壓力 p 恆為一定且為零。本文未考慮質量傳輸問題，假設常數項等於零。

- A. 純水槽的 DFSBC：為了消滅線性幅射邊界所造成的入射波能及減少波浪反射，在幅射邊界前放置海綿層，其 DFSBC 為：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] + \mu \Phi - \int_{x_1}^x \frac{\partial \mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on \Gamma_f} dx = 0 \quad (2-13)$$

x_1 為海綿層之起始 x 座標值。

- B. 湖上水槽的 DFSBC：即滿足(2-12)的條件，此 DFSBC 為：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] = 0 \quad (2-14)$$

5. 底床邊界條件(Bottom boundary condition, BBC)：為一不透水表面，邊界之法線方向的流速於任何時刻均為 0，即：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-15)$$

6. 沒水板之邊界條件：亦為一不透水表面，邊界之法線方向的流速於任何時刻均為 0，即：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-16)$$

2-4 各邊界之初始條件(t=0)

於起始造波時間 t=0 時，各邊界之起始邊界條件分別如下所示：

1. 虛擬造波板邊界 Γ_m 於 t=0 時，可由(2-5)及(2-6)式得到下列之關係：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{d\hat{S}}{dt} \Big|_{t=0} = - \left(\frac{s_0}{2} \omega + s_f \omega \cos(-\varphi - \pi) \right) \quad (2-17)$$

2. 幅射邊界 Γ_r 於 t=0 為水粒子屬於完全靜止狀態，其速度為 0，即：

$$\Phi_n = 0 \quad (2-18)$$

3. 自由水面邊界 Γ_f 在最初始 t=0 為完全靜止之液面，其速度勢為 0，即：

$$\Phi = 0 \quad (2-19)$$

4. 在不透水邊界(傾斜堤面、底床、沒水板) Γ_w ，其法線方向之流速於任何時刻均為 0，即：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-20)$$

第三章 數值方法

真實的水面波動現象為屬於非線性問題，然而頻率領域的計算只適用在線性或是弱非線性的自由水面邊界問題，又近來電腦的快發展及數值技巧的不斷更新，能克服非線性波浪問題之繁瑣的計算。因此，本文在時間領域裡以邊界元素法來計算模擬一完全非線性之自由水面邊界問題；在自由水面上水粒子運動的模擬方面，則使用 Dold and Peregrine(1984)所建議的 Eulerian-Lagrangian 混合式數值技巧，其水面點在下一時刻的新位置及其速度勢是由 Taylor 級數展開式來求得。

3-1 邊界元素法

在過去的三十幾年中，邊界元素法(Boundary Element method, BEM)已被廣泛的應用於水波問題上，邊界元素法的理論基礎與勢能理論(Potential theory)相互輝映，並與奇異積分息息相關。對一邊界值問題而言，如果其控制方程式之 Green 函數(free space Green function)已知，即可應用 BEM 來計算。對於同一維度(dimension)領域之問題，以 BEM 來計算相較於有限元素法(FEM)、有限差分法(FDM)有效維度可減少一維，而且可以避免領域內繁瑣之計算。

應用 BEM 解勢能流問題，首先需將待解邊界值問題轉換為積分方程式，由 Green 第二恆等式：

$$\int_{\Omega} (\Phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n}) d\Gamma \quad (3-1)$$

其中 Ω 為分析領域(domain)， Γ 為分析領域 Ω 之邊界，假設速度勢 Φ

滿足 Laplace equation，即

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3-2)$$

並令 G 為下列方程式的解

$$\nabla^2 G = \delta(x - x_i, z - z_i) \quad (3-3)$$

則 G 稱為自由空間之 Green 函數，這就是 $P'(x_i, z_i)$ 處的點源(singular point)作用產生的場函數， δ 為一 Dirac Delta function。

在二維 Laplace 方程式的問題中，基本解為(Greenberg, 1971):

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (3-4)$$

上式中 $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$ 代表二維區域之點源 $P'(x_i, z_i)$ 至邊界上另一點 $Q'(x, z)$ 的距離，若點源位於邊界上，可由(3-1)式推導得

$$-\frac{\gamma}{2\pi} \Phi(P') = \int_{\Gamma} \left(\Phi(Q) \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n} \right) \cdot ds \quad (3-5)$$

式中 $\Phi(P')$ 為奇異點 P' 的速度勢， γ 為 P' 點之內角，如圖 3-1(a)所示。

(3-5)式為邊界元素法所應用之積分方程式。

若點源位於邊界內， γ 為繞 P' 點一圈的角度 2π ，如圖 3-1(b)所示。

則(3-5)式則表示為

$$\Phi(P') = \int_{\Gamma} \left(\Phi(Q) \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n} \right) \cdot ds \quad (3-6)$$

將(3-5)式分割成 N 段元素，每一個元素的兩端稱為節點(node)，並假定未知值在節點之間作線性變化，此為線性元素(linear element)

的定義，所以可將(3-5)式離散化成：

$$\frac{\gamma}{2\pi} \Phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi}{\partial n} G d\Gamma \quad (3-7)$$

Γ_j 為邊界上第 j 段元素， i 則是代表 P' 點。

依線性元素的定義， Φ 和 Φ_n 在各元素做線性變化，所以定義邊界上的速度勢為

$$\Phi(\varepsilon) = u^1 \Phi^1 + u^2 \Phi^2 = [u^1 u^2] \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_n(\varepsilon) = u^1 \Phi_n^1 + u^2 \Phi_n^2 = [u^1 u^2] \begin{Bmatrix} \Phi_n^1 \\ \Phi_n^2 \end{Bmatrix}$$

式中 u^1 、 u^2 是形狀函數(shape function)：

$$u^1 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon), \quad u^2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$$

ε 表區域座標，範圍為 -1 到 1，上標 1 代表元素 j 的第 1 個節點，上標 2 代表元素 j 的第 2 個節點。

所以(3-7)式中第 j 元素的積分可以表示為：

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_j \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [u^1 u^2] \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi_j^1 \\ \Phi_j^2 \end{Bmatrix} = [h_{ij}^1 \quad h_{ij}^2] \begin{Bmatrix} \Phi_j^1 \\ \Phi_j^2 \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

$$\begin{cases} h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} u^1 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \\ h_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} u^2 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_{n_j} G d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [u^1 u^2] G d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi_{n_j}^1 \\ \Phi_{n_j}^2 \\ \Phi_{n_j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij}^1 & g_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{n_j}^1 \\ \Phi_{n_j}^2 \\ \Phi_{n_j} \end{Bmatrix} \quad (3-9)$$

$$\begin{cases} g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} u^1 G d\Gamma \\ g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} u^2 G d\Gamma \end{cases}$$

邊界之法線速度於轉角處(corner point)，元素 j 與元素 $j+1$ 有不同的值。為了克服此種不合理現象，所以於節點左右各設定一法線速度，將(3-8)，(3-9)式代入(3-7)式中，整理可得

$$\frac{\gamma}{2\pi} \Phi_i + [H_{i1} H_{i2} \cdots H_{iN}] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{Bmatrix} = [R_{i1} R_{i2} \cdots R_{iN}] \begin{Bmatrix} \Phi_{n1} \\ \Phi_{n2} \\ \vdots \\ \Phi_{n2N} \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

因此 Φ_n 的係數矩陣 $[R]$ 的列(row)會增加一倍(2N)。

H_{ij} 係數矩陣定義如下：

$$H_{ij} = h_{i(j-1)}^2 + h_{ij}^1$$

R_{ij} 係數矩陣定義如下：

$$\text{元素 } j=1: \quad R_{i1} = g_{i1}^1, R_{i2} = g_{i1}^2$$

$$\text{元素 } j=2: \quad R_{i3} = g_{i2}^1, R_{i4} = g_{i2}^2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

令

$$H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & \text{where } i \neq j \\ H_{ij} + \frac{\gamma_i}{2\pi} & \text{where } i = j \end{cases}$$

(3-10)式可改寫成

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \Phi_j = \sum_{k=1}^{2N} R_{ik} \Phi_{nk} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3-11)$$

[H]和[R]僅受幾何形狀影響。將邊界條件帶入(3-11)式，並將未知項移項至左邊，而已知項移項至右邊則(3-11)可得一聯立方程式：

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (3-12)$$

式中 $\{X\}$ 為由未知向量之 Φ 和 Φ_n 所組成的向量， $\{F\}$ 為已知向量， $[A]$ 是係數矩陣，可利用高斯消去法解得未知項之 Φ 或 Φ_n 。

3-2 自由水面上水粒子移動之模擬

為了追蹤自由水面上水粒子在每一時間間距 δt 移動軌跡，本文中採用 Euler-Lagrangian 描述法的觀念(Dold and Peregrine,1984)，在時間 t 時，由已知邊界上的位置座標及節點上已知的 Φ 及 Φ_n 求得未知的 Φ 及 Φ_n 為 Euler 描述法觀念。連接自由水面上各個水粒子的位置來得到整個自由水面在任一時刻的波形，若採用的時間間隔 δt 夠小的話，則任一水粒子從時間 t 的位置 (ξ, ζ) 及速度勢 Φ 移動至下一時刻 $t + \delta t$ 的位置 (ξ', ζ') 及速度勢 Φ' 可由 Taylor 級數展開式來計算，為 Lagrangian 描述法觀念的應用，其 Taylor 級數展開式如下：

$$\xi' = \xi + \frac{d\xi}{dt} \delta t + \frac{d^2\xi}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-13)$$

$$\zeta' = \zeta + \frac{d\zeta}{dt} \delta t + \frac{d^2\zeta}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-14)$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{d\Phi}{dt} \delta t + \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-15)$$

假如式中等號右邊各項對時間之一階及二階全微分值為已知的話，則新的位置及速度勢即可求得，本文計算取至對時間的二次全微分。

1. 一階項 $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\zeta}{dt}$ 及 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的推算：

由自由水面邊界條件(2-3)、(2-4)式中，可得：

$$\frac{d\xi}{dt} = u = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \cos \beta - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sin \beta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3-16)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = w = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \cos \beta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3-17)$$

而 Φ 對時間全微分 $\frac{d\Phi}{dt}$ 與偏微分 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 之關係可表示成

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\Phi \quad (3-18)$$

式中 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 可由 DFSBC 邊界條件(2-13)或(2-14)式求得。

在自由水面上，接觸到海綿層的部份以(3-18)及(2-13)式可得

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \\ &= -g\zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -g\zeta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \quad (3-19) \end{aligned}$$

在沒接觸海綿層部份以(3-18)及(2-14)式得

$$\frac{d\Phi}{dt} = -g\zeta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \quad (3-20)$$

在本文模式中，可由邊界上已知的 Φ 及 Φ_n 值求得邊界上未知的 Φ 及 Φ_n 值，其已知的邊界條件為：

- a. 虛擬造波板邊界之法線流速 Φ_n ：由(2-6)式造波板之KBC求得。
- b. 自由水面之速度勢 Φ ：由(3-15)式求得。
- c. 幅射邊界之法線流速 Φ_n ：由(2-8)式表示，式中之 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 時間導數採用向前差分(forward difference)，則(2-8)式可改寫為：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\Phi - \Phi^*}{\delta t} + \mu_{\max} \Phi^* - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi^* \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (3-21)$$

式中 Φ^* 為幅射邊界節點在前一時刻的速度勢。

- d. 不透水邊界(底床、堤面及沒水板)之法線流速 Φ_n ：任何時刻 Φ_n 值均為0。

將上述已知條件配合(3-12)式求得在同一時刻虛擬造波板邊界之速度勢 Φ 、水粒子在自由水面之法線流速 Φ_n 、幅射邊界之速度勢 Φ 以及不透水邊界上之速度勢 Φ 。而切線速度 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 及水面波形之角度 β ，在這採用曲線近似法(cubic spline)(附錄B)。

2. 二階項 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ 及 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 的推算：

這裡採用 Grill et al.於1989年所提出的關係式，即：

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{du}{dt} &= \left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} \right] \cos\beta \\ &+ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial\Phi_t}{\partial n} - \frac{\partial\beta}{\partial s} (u^2 + w^2) \right] \sin\beta \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{dw}{dt} &= \left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial n} - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} (u^2 + w^2) \right] \cos\beta \\ &+ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} + \frac{\partial\Phi_t}{\partial s} \right] \sin\beta \end{aligned} \quad (3-23)$$

在自由水面有接觸到海綿部份的 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 為

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[-g\zeta + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on \Gamma_f} dx \right]$$

利用萊布尼茲法則(Leibniz rule)可將上式整理為

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt^2} &= -g \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{d^2\xi}{dt^2} + w \frac{d^2\zeta}{dt^2} \\ &- \mu \frac{d\Phi}{dt} + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{on \Gamma_f} dx - \frac{\partial\mu}{\partial x} u\Phi \Big|_{x=x_1} + \frac{\partial\mu}{\partial x} u\Phi \Big|_{x=x} \end{aligned} \quad (3-24)$$

未接觸海綿部份的 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 為

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -g \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{d^2\xi}{dt^2} + w \frac{d^2\zeta}{dt^2} \quad (3-25)$$

同樣的， $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 也會滿足 Laplace equation，所以亦滿足積分方程式。並可由邊界上已知的 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}$ 值求得邊界上未知的 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}$ 值，其已知的邊界條件為：

a. 虛擬造波板邊界之 $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$: 由(2-6)式造波板之 KBC 求得。

b. 自由水面之 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$: 由(2-13)或(2-14)式求得。

c. 幅射邊界之 $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$: 將(2-8)式改寫為

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial n} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} + \mu_{\max} \Phi_t - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial X} \Phi_t \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (3-26)$$

式中之 $\frac{\partial \Phi_t}{\partial t}$ 時間導數採用向前差分，則(3-21)式可改寫為：

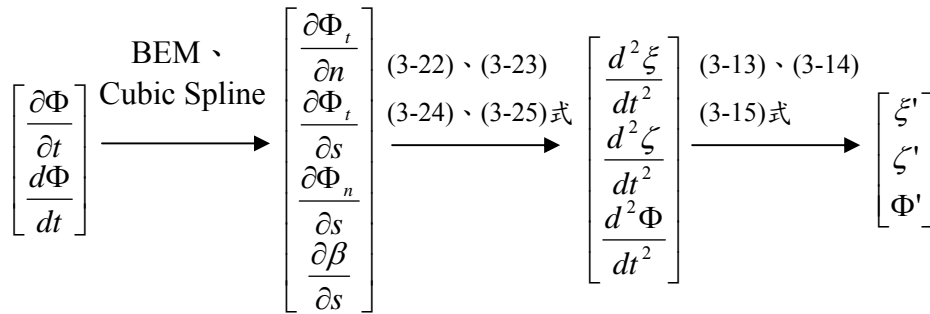
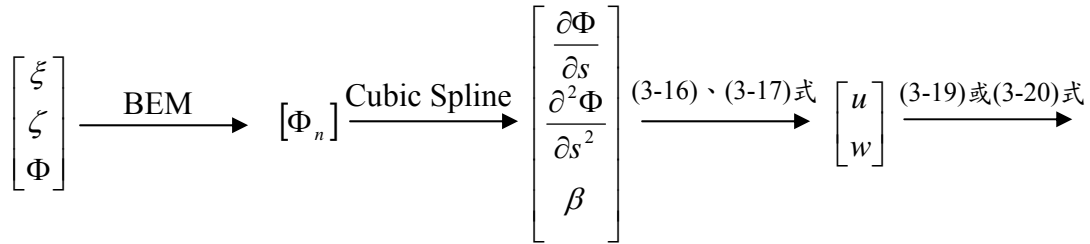
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial n} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\Phi_t - \Phi_t^*}{\delta t} + \mu_{\max} \Phi_t^* - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial X} \Phi_t^* \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (3-27)$$

式中 Φ_t^* 為幅射邊界節點在前一時刻之 Φ_t 值。

d. 不透水邊界(底床、堤面及沒水板)之 $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$: $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$ 值於任何時刻均為 0。

將上述已知條件配合(3-12)式求得在同一時刻虛擬造波板邊界之 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 、水粒子在自由水面之 $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$ 、幅射邊界之 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 以及不透水邊界上之 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 。而在(3-22)、(3-23)式中，切線方向之偏微分變量 $(\frac{\partial \Phi_t}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_n}{\partial s}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \text{ 及 } \frac{\partial \beta}{\partial s})$ 由曲線近似法求得。

3. 由 1.、2. 求得各階之全微分項後便可由(3-13)、(3-14)、(3-15)得到 ξ' 、 ζ' 及 Φ' 之值。整個系統的自由水面各節點之位置及速度勢隨時間變化計算流程如下：



3-3 計算流程

模式之整個系統的計算流程如圖 3-2 所示，其流程說明如下：

1. 給定初始值($t=t_0=0$)， Φ 、 Φ_n 、 Φ_t 、 Φ_m 及 x 、 y (包含自由水面之節點位置 ξ 、 ζ)。
2. 令時刻 $t=t_0$ ，邊界上已知物理量為 Φ 、 Φ_n 、 Φ_t 、 Φ_m 及 x 、 y 。
3. 由邊界已知的 Φ 、 Φ_n 及 x 、 y 利用邊界元素法計算得邊界上未知的 Φ 、 Φ_n (含自由水面的 Φ_n)。
4. 由自由水面之 Φ 及 ξ 、 ζ ，利用 cubic spline 計算得自由水面之 Φ_s 、 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$ 及 β 。
5. 由自由水面之 Φ_s 、 Φ_n 及 β 配合 (3-16) 及 (3-17) 式，求得 u 及 w (即 $\frac{d\xi}{dt}$ 及 $\frac{d\zeta}{dt}$)。同樣可由 (3-18) 式配合 DFSBC，求得 Φ_t 、 $\frac{d\Phi}{dt}$ 。
6. 由邊界上已知的 Φ_t 、 Φ_m 及 x 、 y ，求得邊界上未知的 Φ_t 、 Φ_m (含

- 自由水面的 Φ_n)。
7. 由自由水面之 Φ_t 及 ξ 、 ζ ，利用 cubic spline 計算得自由水面之 $\frac{\partial\Phi_t}{\partial s}$ 。
 8. 由自由水面之 Φ_n 及 ξ 、 ζ ，利用 cubic spline 計算得自由水面之 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial s}$ 。
 9. 由自由水面之 β 及 ξ 、 ζ ，利用 cubic spline 計算得自由水面之 $\frac{\partial\beta}{\partial s}$ 。
 10. 由自由水面之 Φ_n 、 Φ_s 、 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}$ 、 β 、 $\frac{\partial\Phi_t}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial\Phi_t}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial\beta}{\partial s}$ 、 $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\zeta}{dt}$ 代入(3-22)、(3-23)、(3-24)或(3-25)式、求得 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 。
 11. 將以上自由水面已知的 ξ 、 ζ 、 Φ 及已求得的 $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\zeta}{dt}$ 、 $\frac{d\Phi}{dt}$ 、 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 代入 Taylor 級數展開式(3-13)、(3-14)、(3-15)式，求得下一時刻($t=t+\delta t$)水位資料 ξ' 、 ζ' 、 Φ' 。
 12. t 是否達所需要模擬時間 T ，“是”則進流程 14；“否”則進流程 13。
 13. 令 $t_0=t$ 。
 14. 結束。

3-4 模式之節點設定數

在 2-1 節中，定義圖 2-1 為一純水槽，各邊界線上節點數分佈 $N1$ 為造波板上設定點分佈， $N2$ 為自由水面設定點分佈， $N3$ 為幅射邊界設定點分佈， $N4$ 為不透水底床設定點分佈。定義圖 2-2 為一湖上水槽， $N3$ 改為一不透水傾斜堤面設定點分佈。定義圖 2-3 為在湖上水槽置入一沒水板， $N5$ 為沒水板下邊界設定點分佈， $N6$ 為沒水板右邊

界設定點分佈，N7 為沒水板上邊界設定點分佈，N8 為沒水板左邊界設定點分佈。各邊界線上節點設定分佈圖如圖 3-2 所示。



第四章 結果與討論

本文主要在探討傾斜堤面前設置沒水板後，改變造波條件、沒水板距堤腳距離 W 、沒水板的長度 B 、沒水深 d 、轉動角度 α 、及堤面的坡度 θ ，對波浪在堤面上的溯上變化加以討論。在本文利用邊界元素法發展出一數值模式，模擬直推式造波水槽所造出之非線性波形，研究波浪在通過固定式沒水板時，其波形隨時間之變形，以及透過波浪在堤面產生的溯上現象，通過沒水板之波浪會在一傾斜角度 θ 之堤面溯上後反射回去，在連續幾個週期後(在波浪尚未經造波板第二次反射前)，透過波與堤面的反射波疊加會在沒水板與堤面間隨時間成一穩定駐波，駐波會沿接觸堤面隨時間達一穩定的週期性爬升，此爬升的最大高度即為本文所推算的溯上高度 R 。而本文的數值模式為在時間領域下計算，時間間距 δt 的切割愈細則愈能增加其穩定度及精確性，而元素長度的大小 δs 則愈細雖能提升精確度，但會影響數值計算的穩定度。因此，本模式的邊界上元素長度 δs 大致等於波長的 $1/30$ ，而時間間距 δt 取一個週期 128 點($T/128$)，而在庫倫數(Courant number)大約控制在 $0.27375\sim 0.31$ 之間，並且在每經過 32 個時間間距 δt 加入一次的平滑技巧(Smoothing Technique)(附錄 D)，以提升模式的穩定性。

4-1 數值波浪水槽可行性驗證

在此驗證模式中，水槽中未放置沒水板，此數值水槽的左邊界為一造波板，右邊界為幅射邊界，然而幅射邊界所給的線性條件，尚未完全滿足非線性，仍會造成些微的反射，於是在水槽的末端幅射邊界前加入一 3 倍波長長度的海綿層用以消滅入射波能量並降低末端引

起的反射(Ohyama and Nadaoka,1991)。模式中先分別就消除造波板所產生的二階自由波與包含二階自由波來做比較，如圖 4-1.1 所示，在 $h=1\text{m}$ ， $kh=0.8$ ， $H/L=0.03$ 的條件及水槽長度為 13 倍波長(末端的 3 倍波長為海綿層)下取穩定後的第 40 週期的水面波形圖來做比較，圖 4-1.1(a)明顯的看出各個波峰及波谷的高度不盡相同，顯然除了 Stokes 波外，亦含有自由波的存在，而圖 4-1.1(b)為消除自由波之情況，各個波峰及波谷的高度比含有自由波的水面波形顯的一致許多，意即有達到消除自由波的效果，証實消除二階自由波的可行性。

依據 Ohyama and Nadaoka(1991)以線性波針對此種類型之海綿層的寬度小於等於一個波長，其阻滯係數 μ ，從海綿層的前端 $\mu=0$ 至後端 $\mu=\mu_{\max}$ 呈線性增加，當 $\mu_{\max} \cong c\sqrt{g/h}$ 時，以 $c=0.2\sim 0.6$ 間均能有效的降低反射率。本文根據此理論，假設海綿層內的阻滯係數也是呈線性增加，在相同的海綿係數 $c=0.4$ ，分別以 1 倍、2 倍、3 倍及 5 倍波長長度的海綿層，整個試驗水槽長度均為 10 倍波長(未含海綿層長度)，靜水深 $h=1.0\text{m}$ ，控制入射波條件(週波數 $k=1.0$ 、尖銳度 $H/L=0.03$)，入射波經過 40 週期後，取水槽水面之波形來與 Fenton(1985)提出的 Stokes 五階理論波形比較，如圖 4-1.2 所示，發現在 1 倍及 2 倍時其波高與 Stokes 五階理論波形仍有些微的差異，表示在 1 倍及 2 倍波長長度的海綿層仍未完全消除水槽末端所引起的反射波；在 3 倍及 5 倍波長長度的海綿層之波形與 Stokes 五階幾乎重疊，並與 Stokes 五階理論的結果很接近，顯示在 3 倍波長的海綿層已有較佳的消波效果。在海綿係數 c 的選定，固定 3 倍波長長度海綿層下，分別以 $c=0.2$ 、 0.4 、 0.6 及 0.8 四種不同的阻滯係數來做模擬，分別與 Stokes 五階之理論波形做比較，由圖 4-1.3 可以觀察出四組模擬

出的數據與 Stokes 五階理論波形幾乎重疊且結果很接近；同樣的，圖 4-1.4 為本模式中以海綿層長度為 3 倍波長且 $c=0.4$ 時，水槽內不同位置水粒子速度向量(紅箭頭)與 Fenton(1985)提出的 Stokes 五階理論(黑箭頭)作比較，可發現紅箭頭與黑箭頭的向量方向及大小的趨勢大致相當一致。可以得知當海綿層的寬度拉長到 3 倍且 $c=0.4$ 時，在本文的數值模擬過程中並不會造成很大的反射，並有達到消除入射及反射波的效果。數值模擬中質量隨時間的變化，可由圖 4-1.5 看出在整個過程中，造波模式的總質量(M^*)與初始質量(M)的比值隨時間最後有達穩定收斂的趨勢且皆趨近於 1(質量的定義與推算，附錄 E)；同樣的，在能量守恒部份，由圖 4-1.6 可看出造波模式中水槽的總位能(Total Potential Energy)、總動能(Total Kinetic Energy)與總能量(Total Energy)均在前面的十五週期隨時間漸漸增加，直到水槽波形達穩定後(十五週期後)，整個水槽的總位能、總動能與總能量亦達穩定狀態(能量的定義與推算，附錄 F)，顯示了本文採用此數值模式的準確性。

4-2 波浪溯上之驗證

關於波浪溯上的研究中，將與 Neelamani and Sandhya(2004) 溯上實驗結果相比較來驗證本文溯上數值模式的正確性。在實驗的佈置方面，造波水槽全長為 30m，寬為 2m，高為 1.7m，靜水深為 0.7m，水槽的右端為一直推式造波器，左端分別有以 60° 及 90° 等傾角的不透水光滑堤面，堤腳位於距離造波器 18.2m，量測溯上的探針置於堤面上以記錄堤面上水位隨時間的變化，另有三支量測波高計及波壓計分別固定於距離造波板 13.5m、13.65m 及 14.0m，其相對位置及整個水槽的佈置圖如圖 4-2.1 所示；實驗造波之入射波條件為固定相對波高 $H/h=0.21$ ，而 $h/L=0.09\sim 0.24$ 間。圖 4-2.2 為與實驗相同條件下，利用

數值造波水槽的方式模擬波浪的溯上並將結果與實驗結果相比較，由圖中顯示出數值計算結果與實驗結果有相同的趨勢，相對溯升高度(R/H)在 $h/L=0.9\sim 1.5$ 間為逐漸變小，而在 $h/L=1.5\sim 2.6$ 則逐漸變大。但此模式的相對溯上高度則顯得比實驗值為大，其原因可能為實際流體具黏滯性，且實際上底床及堤面均會有摩擦力，而模式中並未考慮此影響。

此外，在周與韓(1982)亦有溯上的實驗結果，本文數值模擬結果也與此實驗結果相較驗證，周與韓的實驗中，堤面傾角分別為 30° 、 45° 及 60° ，而實驗的入射波條件則以水深1.0m及分別在大波、小波的條件下(此實驗並未闡明入射波高而僅以大波、小波來表示)，水深週期比(σ^2h/g)分別等於0.2、0.5、1.0及1.5，其中 σ 為週波率(即等於本模式中造波板之週頻率 ω)。本文數值模式則以波高0.1m、水深1.0m下，以不同的水深週期比來進行數值模擬，並與實驗結果做比較，圖4-2.3即相對溯上高度與水深週期比的關係圖，圖中在堤面坡度為 30° 、 45° 及 60° 等傾斜時，相對溯上高度均隨著 σ^2h/g 增大而有變高的趨勢，可看出數值計算的結果與實驗的趨勢相當一致。

4-3 波浪溯上之模擬

波浪的尖銳度 H/L 、相對水深 kh 值及堤面的傾斜角度 θ 均對波浪的溯上高度及穩定時間有不同的影響，如圖4-3.1為在計算水槽長度20倍波長、 $h=1.0\text{m}$ 、 $H/L=0.02$ 、分別 $kh=0.7$ 及1.5的情況下，其波浪在 $\theta=45^\circ$ 堤面爬升之水位時序圖，由圖中可以發現在波長較長 $kh=0.7$ 時約略在第30週期後其相對溯上高度便達一穩定高度，而 $kh=1.5$ 時則到第42週期後才會達穩定；意即波浪在傳遞過程中會有輻射衰減的

現象，在 kh 值小時，波浪輻射衰減的情況會更快。因此，在以相同波長數的水槽長度情況下，波長愈短的波，需要更長週期數才能達穩定，所以本文控制 kh 值在 0.7~1.5 間進行模擬。

有了先前的驗證後，以未置入沒水板的數值水槽進行Stoke波溯上之模擬，整個計算水槽的總長度為 20 倍波長，靜水深 $h=1.0\text{m}$ ，堤面傾斜角為 45° 。在波浪未碎波的情況下，分為兩部份進行模擬計算，分別為 $kh=0.7\sim 1.1$ ，波浪尖銳度為 0.010、0.015 及 0.020，及 $kh=1.1\sim 1.5$ ，波浪尖銳度為 0.020、0.025 及 0.030，圖 4-3.2 即為相對溯上高度與 kh 和波浪尖銳度的關係圖，由圖中可發現在相同 kh 條件下，其相對溯上高度隨著尖銳度的變大而增高的趨勢；若相同波浪尖銳度條件下，其相對溯上高度大致上是隨 kh 增大而增高的趨勢，但當 kh 大於 1.4 時相對溯上高度則隨著 kh 增大而降低。

4-4 波浪通過沒水板後溯上之模擬

在水槽加入沒水板後，影響波浪溯上的因素更多元了，除了先前提及的入射波條件 H/L 、 kh 及堤面的角度 θ 外，更需考慮沒水板長度 B 、沒水板深度 d 、沒水板離堤腳距離 W 及沒水板的傾斜角度 α 等對於溯上的影響(其中沒水板的厚度固定為 0.1 倍的水深)。在本文模式中，給定非線性入射波參數、數值水槽及沒水板的幾何條件為 $h=1.0\text{m}$ 、 $kh=1.0$ 、 $H/L=0.015$ 或 0.02 、 $d=0.3h$ 、 $B=5h$ 、 $W=2L$ 或 $4L$ 、 $\theta=45^\circ$ 、 $\alpha=0^\circ$ ，由於加入了沒水板，必須將水槽長度拉長讓造波板的二次反射延後，以免影響溯上之穩定時間，所以將數值水槽長度增加至 21 倍及 25 倍波長長度。

1. 相對水深 kh 對波浪溯上的影響

固定沒水平板及數值水槽幾何形狀及非線性入射波參數 ($H/L=0.015$)，僅改變相對水深 kh 進行非線性波溯上之數值模擬，經由數值計算後，由圖 4-4.1 可看出波浪隨著時間在堤面呈一穩定的週期性爬升，經由(4-1)式可計算出造波板的二次反射波到達堤面的時間(波浪傳至沒水板而反射，此反射波回到造波板後再由造波板反射，即為造波板的二次反射，如圖 4-4.2 所示)，配合波浪達到穩定所需的時間，所以可取約 49~51 週期之爬升最大高度為相對溯上高度 R/H 。

$$t = \left[3 \times \left(\frac{TL - B - W}{c_1} \right) + \frac{B}{c_2} + \frac{W}{c_1} \right] / T \quad (4-1)$$

t 為二次反射波傳遞至堤腳所需的時間， c_1 為波浪在水深 h 的波速， c_2 為波浪在水深 d 的波速， TL 為水槽總長(造波板至堤腳長度)。

波浪通過沒水板後之相對溯上高度與 kh 之關係，如圖 4-4.3 所示，圖中發現相對溯上高度隨著相對水深的變化大致上呈現週期性遞減的趨勢，此現象可利用線性波的變形來分析，圖 4-4.4 為相同數值水槽置入沒水板條件下線性波在平板與堤面間之相對駐波高(H_s/H)隨 kh 變化關係圖，發現相對駐波高與圖 4-4.3 非線性波之相對溯上高隨 kh 變化的趨勢一致。從非線性波通過沒水板後達溯上高時刻之剖面來看，如圖 4-4.5 所示，沒水板與堤面間(19~21 x/L 間)之駐波高愈大，其相對溯上高度亦愈大(駐波高與溯上高均 $kh=0.7625$ 為最大)，可得知在沒水板與堤面間產生的駐波波高與溯上高度有著絕對的相關，隨著相對駐波高度的增加而相對溯上高也會增大。

綜合以上所述，在通過沒水板後發生波浪變形，達堤面後而反射，反射波與入射波疊加產生部份駐波，如圖 4-4.6 即達穩定後形成駐波現象。入射波長的改變所產生的駐波波長及波高均會有所改變，

而駐波波高是造成相對溯上高改變的重要因素之一，若所形成的駐波波高愈大，則相對溯上高度會愈高。因此，影響波浪通過平板後之溯上高度，不能單憑波浪對沒水板之透射率，透射率 K_t 隨 kh 變化的趨勢(圖 4-4.7)不同於 R/H 隨 kh 變化趨勢(圖 4-4.3)。而在圖 4-4.3 中可以看到 $kh=0.75\sim 0.82$ 及 $1.025\sim 1.075$ 間的相對溯上高度比未加沒水板來的大，因為波浪在通過沒水板後，在板子與堤面間來回反射，能量會集所產生的類似共振現象。

2. 尖銳度 H/L 對波浪溯上的影響

若僅改變尖銳度 H/L ，以固定數值水槽及沒水平板的幾何形狀 ($W=4L$)及相同 $kh=1.0$ 進行數值模擬，結果如圖 4-4.8 所示，相對溯上高度隨 H/L 增大而降低，並與未加沒水平板之情況比較，相對溯上高度均有受沒水平板的影響而較為低，在 H/L 值較大差異更大，可知較大 H/L 受板子影響較為明顯；從圖 4.4-9 達溯上高度時刻之剖面圖來看，在尖銳度較大時其溯上高較為低，亦可看出在 $H/L=0.025$ 時波形上的非線性效應較 $H/L=0.005$ 來的明顯。雖然相對溯上隨 H/L 增加而下降，但實際上溯上高度是隨著 H/L 增加而上升的(圖 4-4.10)，由於在相同 kh 條件下，波高亦隨著尖銳度的增加而變大(圖 4.4-11)，使得相對溯上高度在尖銳度較大時來的低。

3. 堤面坡度 θ 對溯上的影響

僅考慮改變堤面坡度 θ 。在未加入沒水平板情況下，給定入射波參數，溯上高度隨著堤面變陡而變小，當堤面角度 $\theta=90^\circ$ 時(直立壁)，則相對溯上高度減少到約略 1，如圖 4-4.12 所示，在置入沒水平板後 ($W=4L$)，相對溯上有受平板影響均低於未加平板之情況，相對溯上高有隨著 θ 的變大而降低；同樣的，波浪在堤面上水位時序圖中，如

圖 4-4.13 所示，可明顯看出 $\theta=30^\circ$ 時達溯上高度明顯為最大，而坡度變緩而使得波浪在堤面達溯上高度較遲發生，意即在較緩的堤面波浪爬升之水位達最高點時間延後了。線性波在平板與堤面間之相對駐波高與溯上高度隨 θ 而改變兩者趨勢不同，如圖 4-4.14 所示，此由於堤面坡度較陡時，雖然有較大的駐波高度，但波浪在陡坡度上的爬升原本就較不易於緩坡度上，使得溯上高度沒有比緩坡時來的高。

4. 沒水板與堤腳距離 W 對波浪溯上的影響

僅以改變平板至堤角間的距離 $W=1.0\sim 4.75L$ ，且固定水槽幾何形狀及入射波條件，由圖 4-4.15 顯示溯上高度隨 W 的增加而呈現週期性的趨勢；圖 4-4.16 以相同的條件下，線性波在平板與堤面間之相對駐波高亦呈一週期性變化，且週期約為一倍波長。實際上，改變 W 值並不影響通過沒水平板之透射波及堤面反射波之形與量，造成溯上的差異為改變 W 時透射波及反射波之相位差會有所改變，而造成不同駐波高及溯上高度，當 W 差一倍波長時其相位差幾乎一致，如圖 4-4.17 所示，為 $W=1、2、3、4L$ 均差一倍波長達溯上高度時刻之水位波形圖，發現其在沒水板上方及沒水板後的第一個波形幾乎相同且幾乎在週期內同一時刻。

5. 沒水板長度 B 對波浪溯上的影響

波浪對於沒水平板的透射率會隨著板長改變而有所不同，然而有限的增加板長對波浪的透射率不見得可以降低，如圖 4-4.18 所示，線性波($kh=1.0$ 、 $H/L=0.02$)通過板深 $0.3h$ 的沒水平板，在板長 $2.2h$ 時波浪在平板上產生共振造成極低的透射率。因此，將不同板長 ($B=0.5h\sim 6.75h$) 的沒水平板置入固定幾何形狀的水槽中，並以固定的入射波下進行數值模擬，結果如圖 4-4.19 所示，發現在 $B=1.625h$ 時

有一極大的相對溯上值，與線性波在平板與堤面間駐波高隨板長變化趨勢幾乎一致(圖 4-4.20)，配合圖 4.4-21 可看出在 $B=1.625h$ 時波浪達溯上高度時水面波形圖，波浪在平板與堤面間產生共振有極大的駐波高。波浪溯上高度與對板子的透射率隨板長變化的趨勢不同，此由於造成溯上高度的高低不單是板子透射率的影響，而需視平板與堤面間反射與入射波之消長而定。圖 4.4-22 不難發現當 $kh=1.0$ 在 $B=1.57h$ 時，線性波在平板與堤面間產生極大值之駐波波高；若改變 $B=5h$ 時，可推測在 $kh=0.73$ 時其駐波波高與溯上高度也將會是一極大值。

6. 沒水板之沒水深 d 對波浪溯上的影響

僅考慮改變沒水平板吃水深($d=0.25\sim 0.875h$)，固定非線性波參數及水槽幾何形狀，模擬結果如圖 4-4.23 所示，發現溯上高度隨著沒水板放置愈深而增大，且 d 在 $0.375h$ 與 $0.74h$ 間時甚至有大於未置入沒水板的情況，當沒水板置入更深時，其溯上高度會接近於未置入沒水板的情況；由圖 4-4.24 為不同板深時波浪在堤面上水位時序圖，可發現達最高及最低水位在不同板深有時序上的差異，所以在平板與堤面間入射波與反射波相位差有所不同，疊加起來的駐波波高也會有所差別，溯上高度也會有所差異，如圖 4-4.25 所示。因此，隨著 d 變大而波浪對平板有較高的透射率外，在平板與堤面間產生較大的駐波，有可能造成大於未置沒水板時之溯上高度。

7. 沒水板之傾斜角度 α 對波浪溯上的影響

固定沒水板的中心點，轉動沒水平板，定義水平擺置時之角度 $\alpha=0^\circ$ ，以逆時針傾斜為正向，控制 $\alpha=-3^\circ\sim 3^\circ$ 。圖 4-4.26 為在線性波的條件下，計算得波浪對於逆時針與順時針在同一轉動角度下之沒水板透射率均相同。將上述有一傾角的沒水板置入非線性數值水槽內

($W=4L$)，並在相同造波條件下進行模擬，結果如圖 4-4.27 所示，逆時針方向傾角愈大則波浪溯上的高度愈低，而順時針方向傾角的擺置反而其溯上高度比水平擺置來的高。圖 4-4.28 為擷取穩定週期 $55\sim 65t/T$ 在不同傾角時堤面水位時序圖；配合圖 4-4.29 達溯上高時之水位波形圖，在 $\alpha=3^\circ$ 時除了板子與堤面間駐波高較低外，在駐波之主波形旁明顯有微小次波峰出現，可知非線性波在通過 $\alpha=3^\circ$ 與 $\alpha=-3^\circ$ 的沒水板後波浪變形程度不同，導致有不同的溯上高度。



第五章 結論與建議

5-1 結論

本文以邊界元素法建立一數值造波水槽，模擬直推式造波方法所造出之非線性波，為確保數值水槽非線性波的精確度，除了消除造波板引起的二階自由波，並於水槽末端置入海綿層及幅射邊界條件，降低波浪反射，數值造波水槽模擬的非線性波經與五階 Stokes 波比較相當一致。在確保數值造波的可行性後，數值水槽末端改為一與水平面呈一夾角 θ 之不透水海堤，進行波浪溯上的驗證，分別與 Neelamani and Sandhya、周與韓的實驗結果比較，結果趨勢大致相當一致。最後，在堤前放置一沒水板，計算並分析改變不同非線性波之入射波條件、堤面坡度及沒水板的擺置，波浪通過沒水板後之溯上高度變化。數值計算結果得到下列幾點結論：

1. 此數值水槽是在時間領域的計算方式下模擬，在時間間距 δt 的切割愈細則愈能增加其穩定度及精確性，而元素長度的大小 δs 則愈細雖能提升精確度，但會影響數值計算的穩定度，在此考量下，本模式取 δt 為 $T(\text{週期})/128$ ，元素長度 δs 為 $L(\text{波長})/30$ 。
2. 由造波板所造出來的非線性波，除了 Stokes 波外還有各階自由波的存在，本模式在消除造波板產生的二階自由波後，比較消除前後的波形差異，消除後的波形顯得平穩許多，証實消除二階自由波的可行性。並在水槽末端以幅射邊界及 3 倍波長長度的海綿層消減波浪反射，經由不同的 μ_{\max} 計算後，其波形及水槽內水粒子的速度向量與 Stokes 五階理論比較均相當吻合，顯示本文數值造波模式的準確性。

3. 本文的數值水槽造出非線性Stokes波傳達至不透水傾斜堤面，波浪在堤面之相對溯升高度模擬的結果分別跟Neelamani and Sandhya (2004)、周與韓(1982)溯上的數據結果比較，在三種不同堤面坡度 30° 、 45° 、 60° 下，雖相對溯升高度略有些差異，但其趨勢大致相當一致，顯示出本模式的模擬具有某些程度上的準確性。
4. 於數值水槽模擬相同波高不同波長的波浪之溯上，達到波浪穩定溯上所需的時間非常不相同，波長愈短則需要較長的時間才能達到穩定。
5. 大多情況在加入沒水板後能有效的降低溯上高度，但波浪對沒水板的透射率愈高，並不代表通過後的波浪所產生的溯上高度會愈大，其與透過沒水板之波浪及堤面反射波所疊加產生之駐波波高大小有關；原則上，所產生的駐波波高愈大，其溯上高度會愈大。
6. 加入沒水板後，相對溯上高度隨著相對水深 kh 的增加而呈現週期性遞減的趨勢。
7. 在無平板情況，相對溯上高度會隨著波浪尖銳度的增加而些微增高；在置入平板後，相對溯上高度會隨著波浪尖銳度的增大而降低。
8. 不論有沒有加入沒水板，其堤角愈緩則溯上高度愈大。
9. 沒水板與堤腳距離 W 的改變，將造成通過沒水板的入射波與堤面的反射波之相位改變，其溯上高度會隨 W 的增加呈週期性變化，且週期約為入射波波長的一倍。
10. 沒水板的長度愈長，其造成的溯上高度不一定會愈低，而在沒水板長度為 1.625 倍水深，且平板離堤腳距 2 倍波長，對於 $kh=1$ 的

波會在沒水板與海堤間產生共振，將會造成最大的溯上高度。

11. 沒水板在置入有相當水深時，其溯上高度會有高於未置入沒水板的情況；置入接近底床時，其溯上高度則接近於未置入沒水板的情況。
12. 由於沒水板以逆時針及順時針轉動同一角度對於波浪變形程度不同，溯上高度亦不同，沒水板擺置以逆時針方向轉動角度愈大，波浪溯上的高度愈小，而順時針方向的傾角反而造成溯上高度的增加。

5-2 建議

本文對今後的研究提出下列幾點建議：

1. 在本文的造波模式中，經由一定時間的模擬會有造波板邊界的二次反射，而在加入固定式沒水平板後，波浪在溯上需要更長一段時間才能達到穩定，因此必須加長水槽長度，才能延後二次反射的時間；意即可增加水槽長度及模擬造波時間，或可利用其他方法模擬波浪數值水槽，避免二次反射的現象，就不用無謂的增加水槽長度。
2. 在實際狀況中，為有效消減波能，可考慮在沒水板加入適當的粗糙度或孔隙率，或著改變堤面的光滑度以降低溯上高度。
3. 波浪溯上通常為淺水區的現象，可考慮於數值水槽模擬長波進行溯上研究。

參考文獻

1. Brebbia, C. A. and J. Dominguez, Boundary Element: An Introductory Course, McGraw-Hill, New York.
2. Dold, J. W. and Perpgrine D. H., “Steep Unsteady Water Waves : An efficient computational scheme”, Proc. 19th Intl. Conf. On Coastal Eng., pp. 955-967, 1984.
3. Fenton, J. D., “A Fifth-order Stokes Theory For Steady Waves” , Journal of Waterways and Harbors Division, ASCE, Vol.111, pp. 216-234, 1985.
4. Greenberg, M. D., “Application of Green’s functions in science and engineering”, Prentice-Hall, 1971.
5. Grilli S. T., Skourup J. and Svendsen I. A., “An Efficient Boundary Element Method for Nonlinear Water Waves”, Eng. Analysis with Boundary Elements, Vol. 6, pp. 97-107, 1989.
6. Longuet-Higgins M. S. and Cokelet, E. D., “The deformation of steep surface waves on water, I , a numerical method of computation”, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 350, pp. 1-26, 1976.
7. Neelamani, S. and Reddy, M. S., “Wave Transmission and Reflection Characteristics of a Rigid Surface and Submerged Horizontal Plate”, Ocean Engng, Vol. 19, No. 4, pp. 327-341, 1992.
8. Neelamani, S. and Sandhya, N., “Wave Reflection, Run-up, Run-down and Pressures on Plane, Dentated and Serrated Seawalls”, Coast Engineering Journal, Vol. 46, No. 2, pp. 141-169, 2004.
9. Ohyama, T. and Nadaoka, K., ”Development of a numerical wave tank

- for analysis of nonlinear and irregular wave field”, Fluid Dynamics Research, 8, pp. 231-251, 1991.
10. Liu Philip L.-F. and Cho Y.-S., “Integral Equation Model for Wave Propagation with Bottom Frictions”, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 120, No. 6, pp. 594-608, 1994.
11. Sugino, R. and Tosaka, N., “Large amplitude sloshing analysis in a container with multi-sloped wall by boundary element method”, Advances in Boundary Elements Methods in Japan and USA , pp. 307-316, 1990.
12. 林勝福，「斜坡湧升之研究」，國立成功大學水利及海洋工程研究所碩士論文，1983。
13. 周宗仁、馮德榮，「非線性波之湧上研究」，第二屆水利工程研討會論文集，第 505-518 頁，1984。
14. 吳永照，“Constant wave form generated by a hinged wavemaker of finite draft in water of constant depth.”，第 9 屆全國海洋工程會議，第 552-569 頁，1987。
15. 莊甲子、林漢文，「波浪越波之試驗研究」，第十三屆海洋工程研討會論文集，第 142-159 頁，1991。
16. 岳景雲，「潛沒式平板對海岸結構物消波減壓效果之研究」，國立交通大學土木工程研究所博士論文，1993。
17. 莊甲子、周哲民、簡仲璟，「粗糙堤面對波浪湧升湧降影響之試驗研究」，第十五屆海洋工程研討會論文集，第 385-393 頁，1993。
18. 周宗仁、韓文育，「固定海岸結構物消波之研究」，第二期中國土

木水利工程期刊，第 169-182 頁，1994。

19. 黃政勤，「沉沒式平板之消波效應」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文，1995。
20. 蔡文彬，「非線性波與不透水潛堤的交互作用」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文，2000。
21. 游宛真，「非線性波與透水潛堤的交互作用」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文，2001。
22. 吳永照、徐虎嘯，「沒水平板引致海牆孤立波波力變化」，第二十五屆海洋工程研討會論文集，第 389-396 頁，2003。
23. 吳永照、徐虎嘯，「沒水平板摩擦效應對波浪變形之影響」，第二十五屆海洋工程研討會論文集，第 373-380 頁，2003。



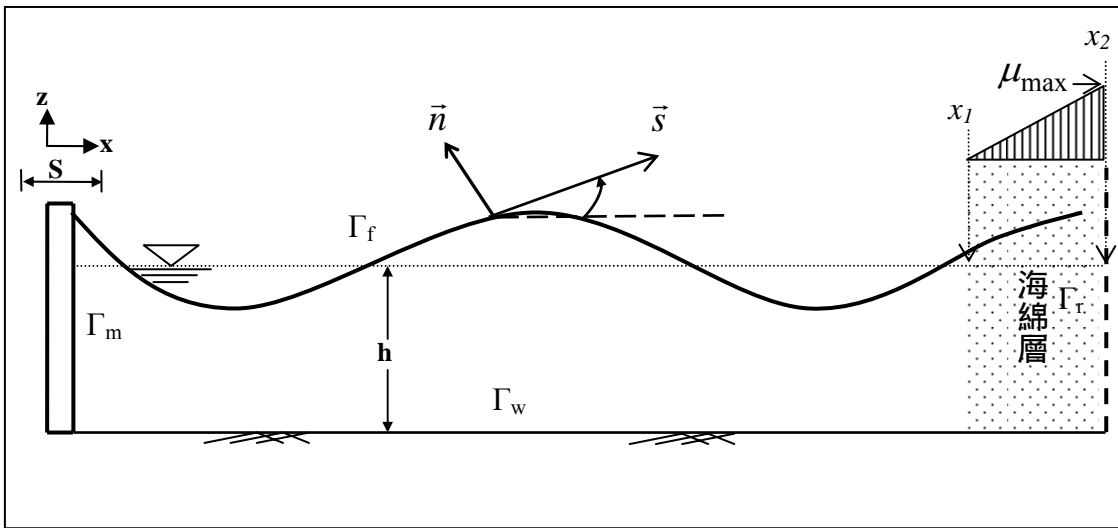


圖 2-1 造波模式之驗證示意圖

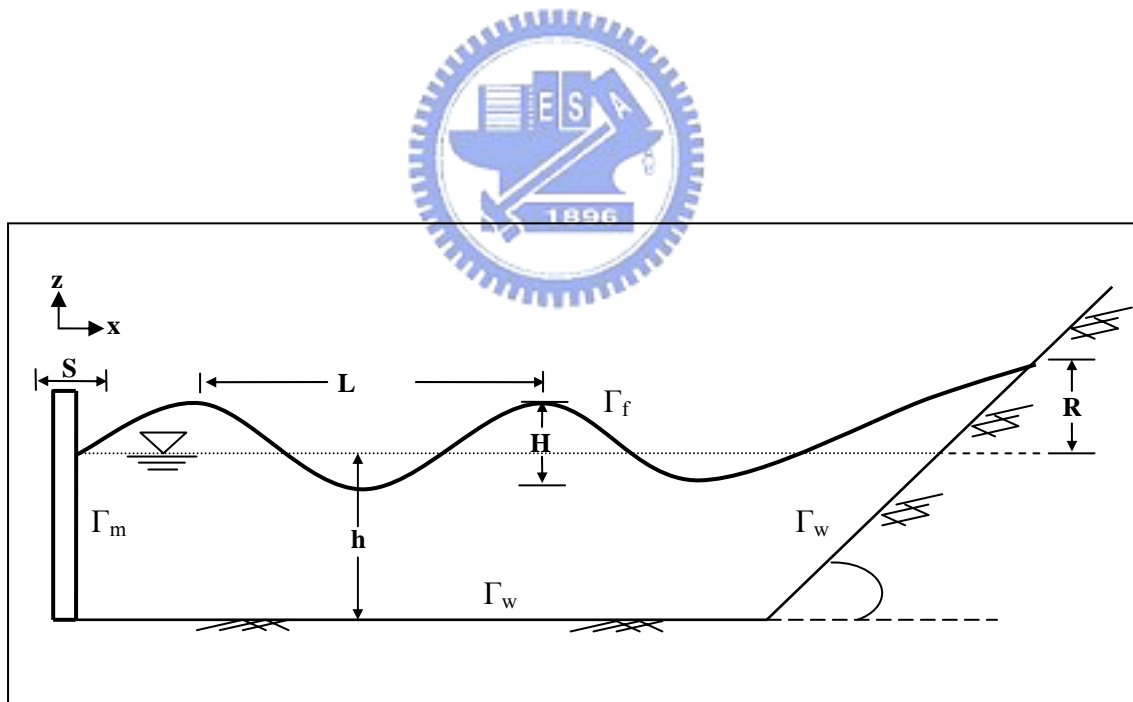


圖 2-2 非線性波湖上示意圖

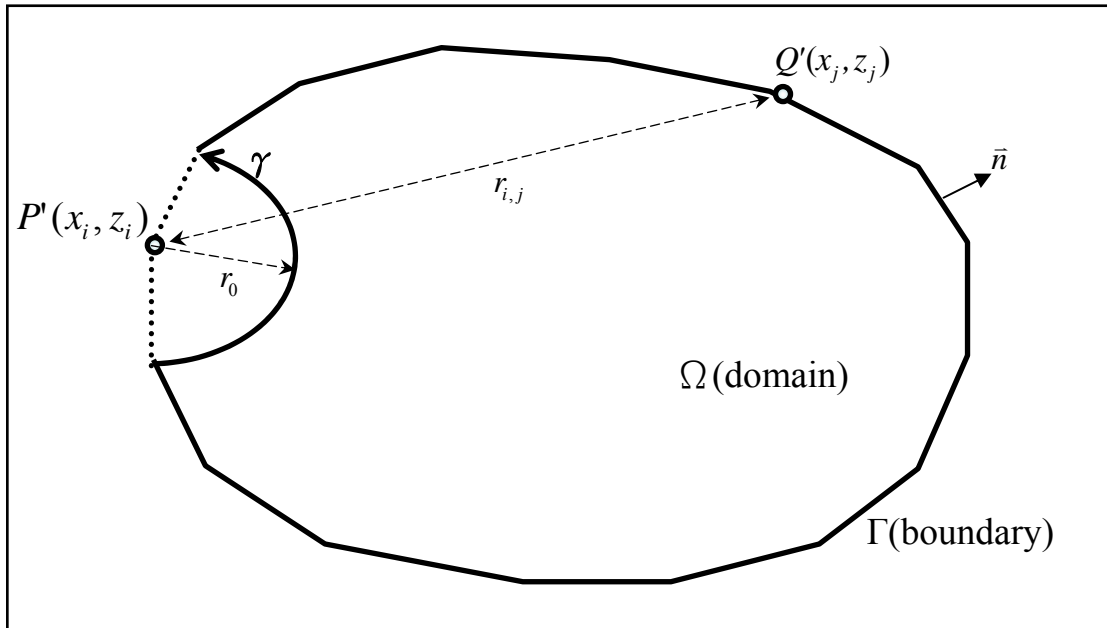


圖 3-1(a) 點源位於邊界上示意圖

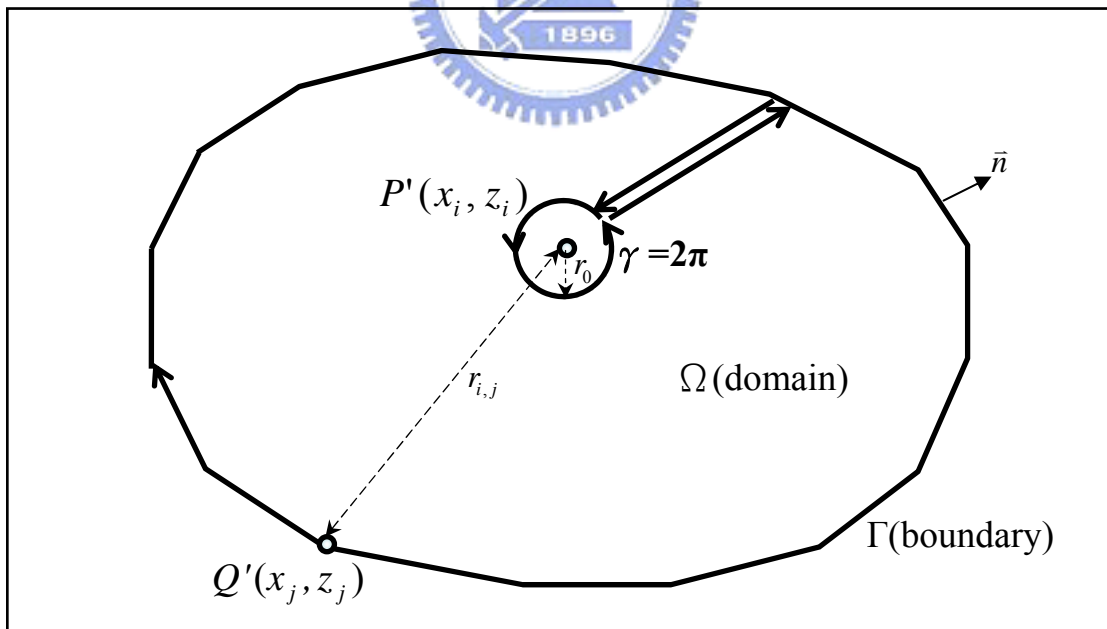


圖 3-1(b) 點源位於邊界內示意圖

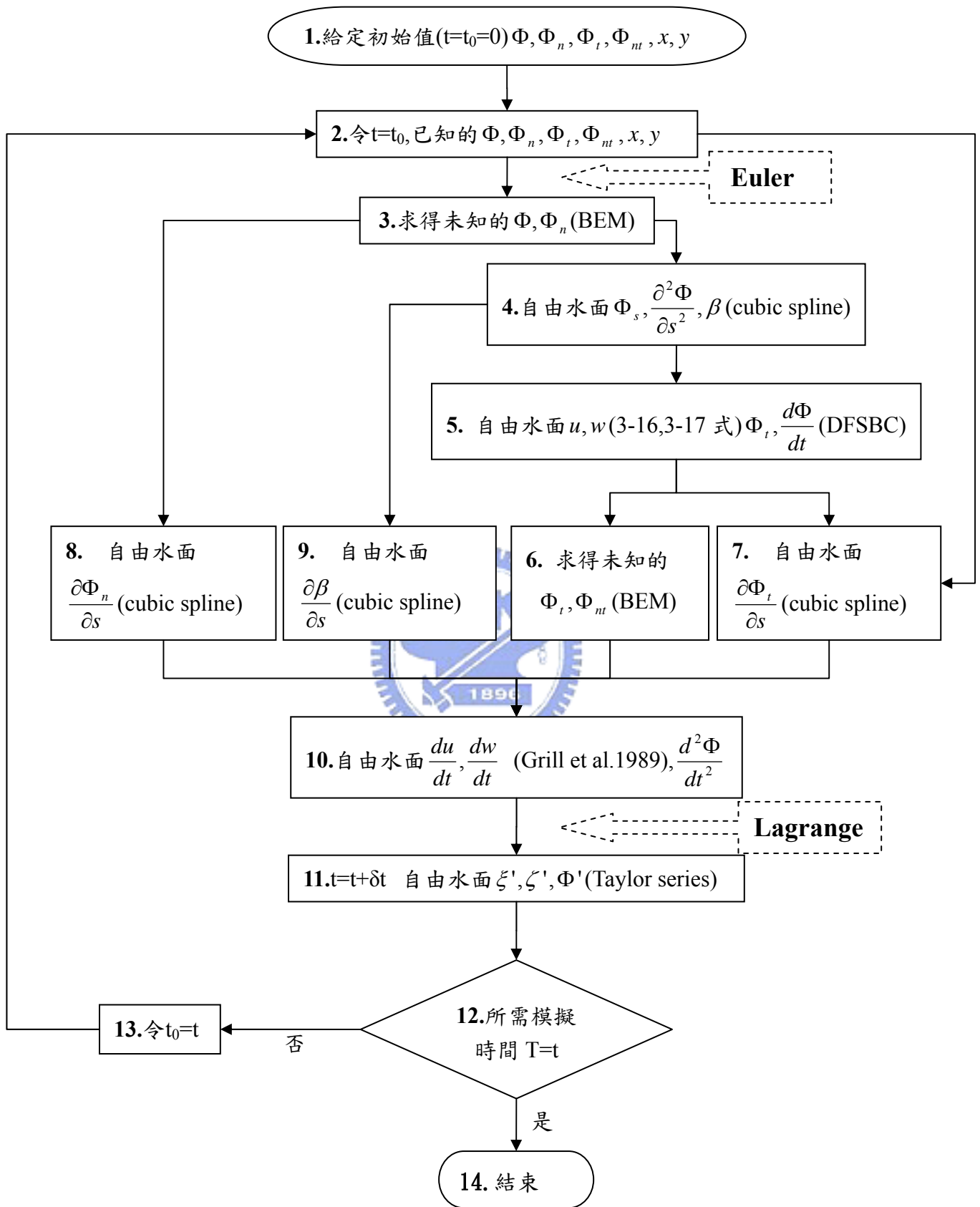
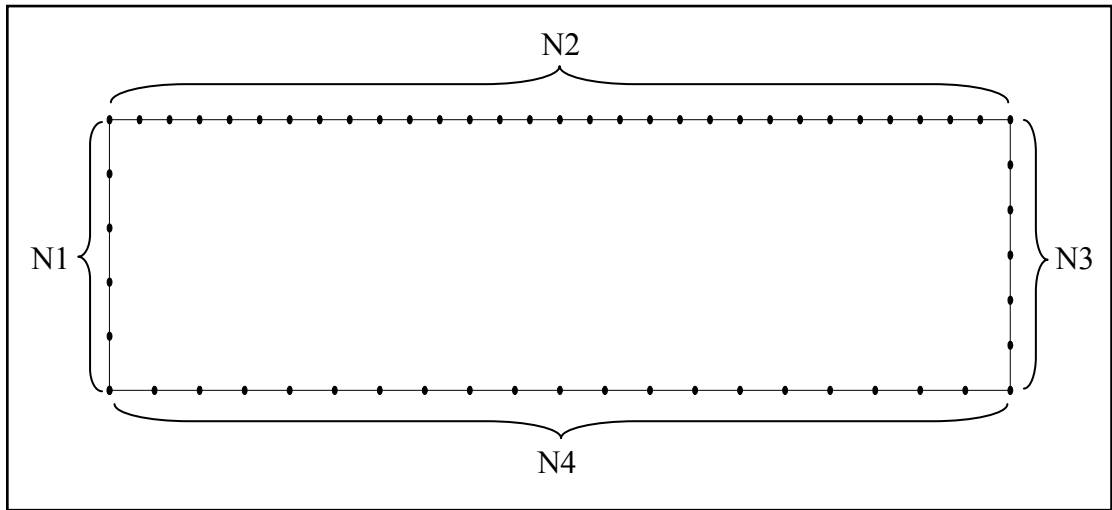
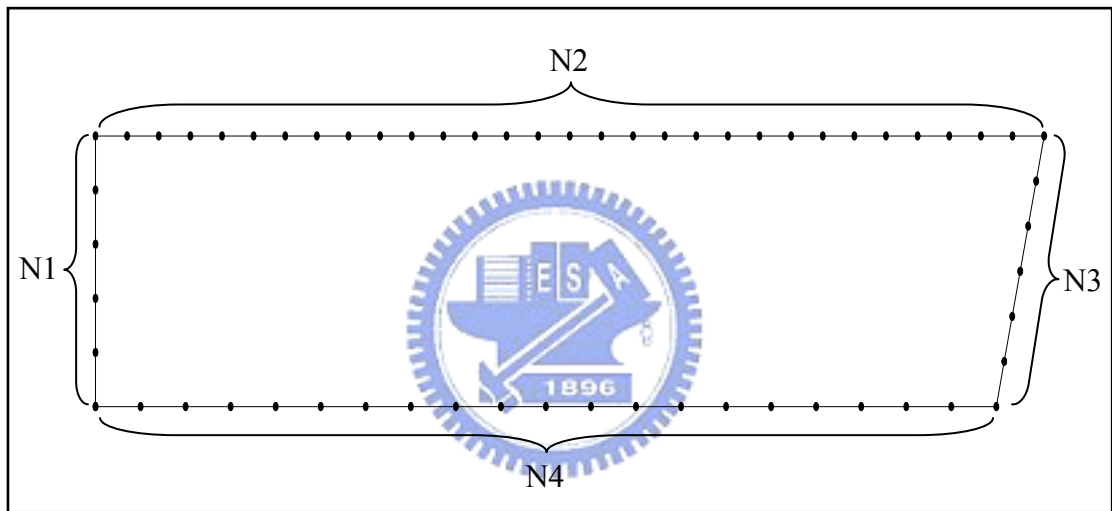


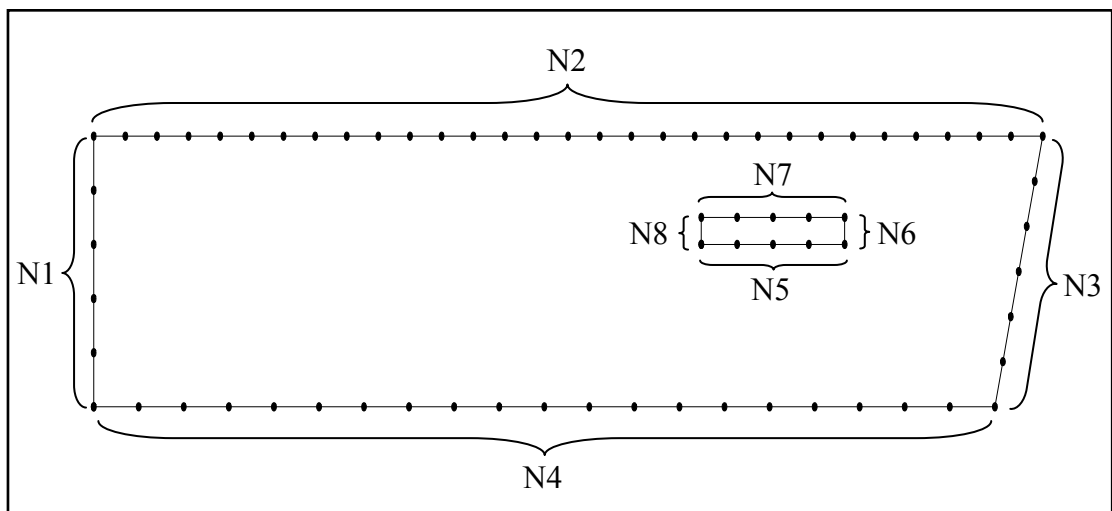
圖 3-2 模式之整個系統的計算流程



純造波水槽

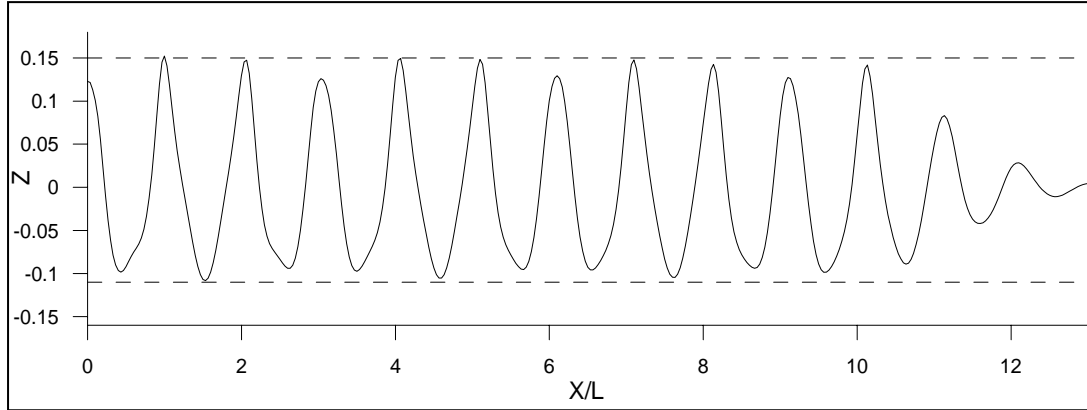


溯上水槽

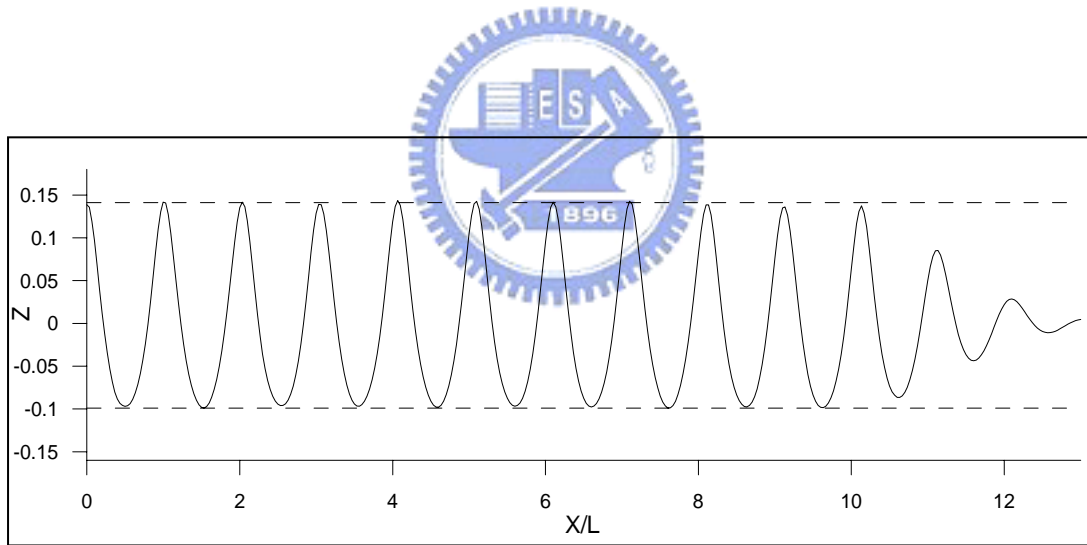


置入沒水板之溯上水槽

圖 3-3 各邊界線上節點設定分佈圖



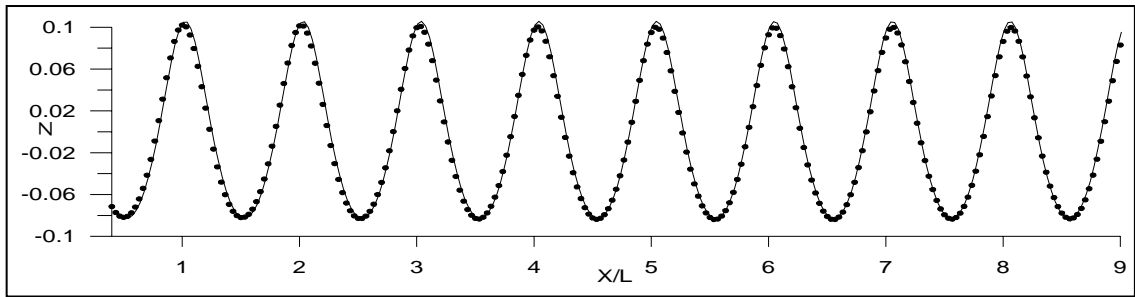
(a)含自由波



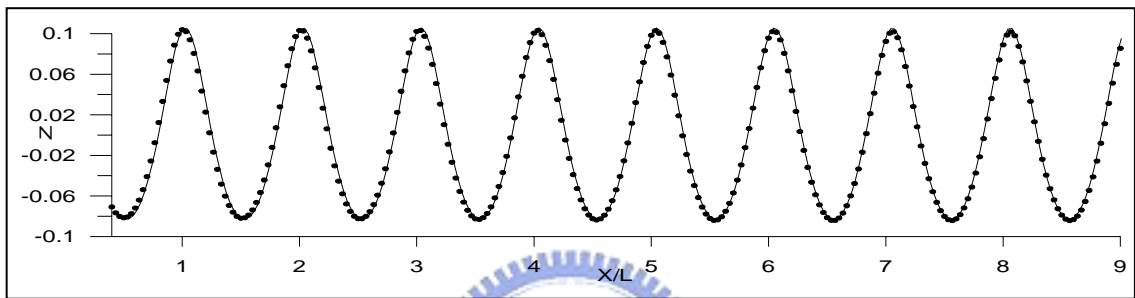
(b)消除自由波

圖 4-1.1 消除二階自由波與包含二階自由波之水面波形比較

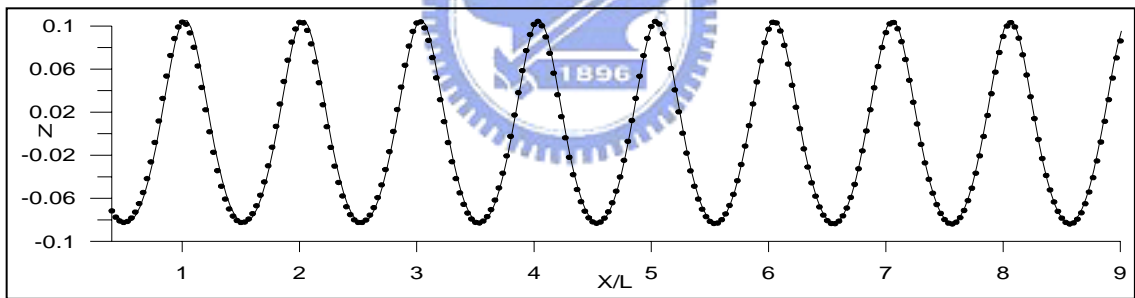
—— 5th order Stokes wave theory
BEM



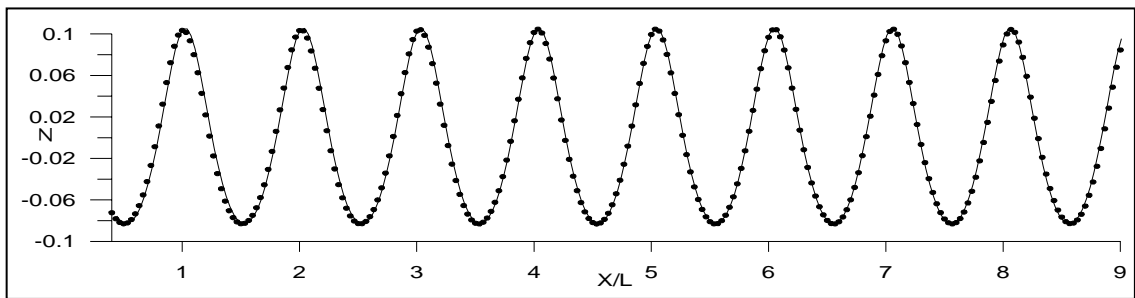
(a) 1 倍波長之海綿層



(b) 2 倍波長之海綿層



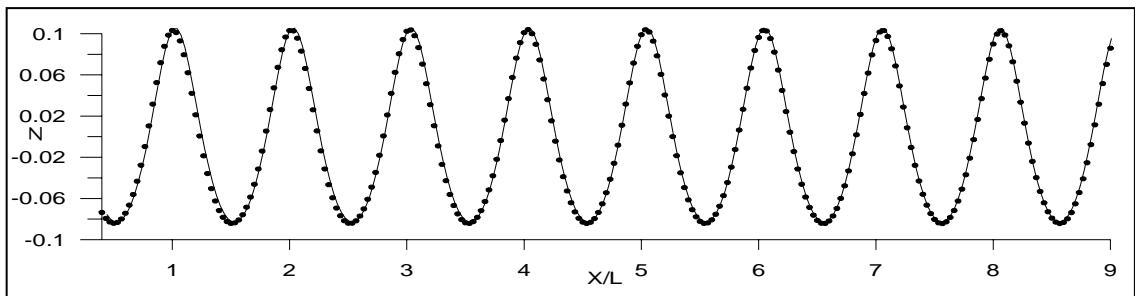
(c) 3 倍波長之海綿層



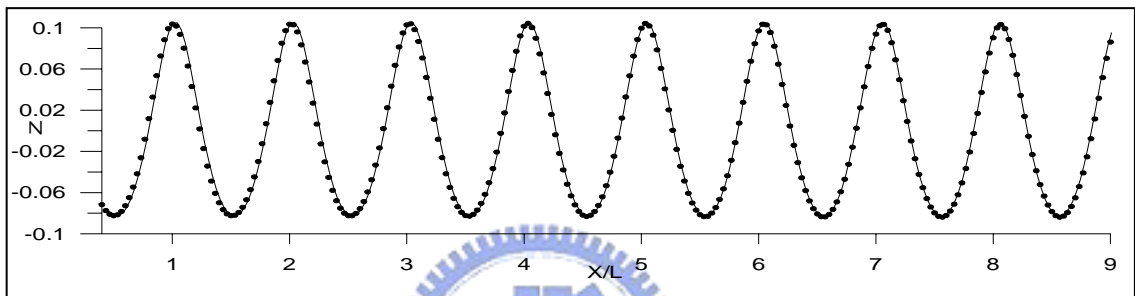
(d) 5 倍波長之海綿層

圖 4-1.2 數值造波分別以不同海綿層長度與 Stokes 五階波形比較
($h=1.0\text{m}$ $kh=1.0$ $H/L=0.03$)

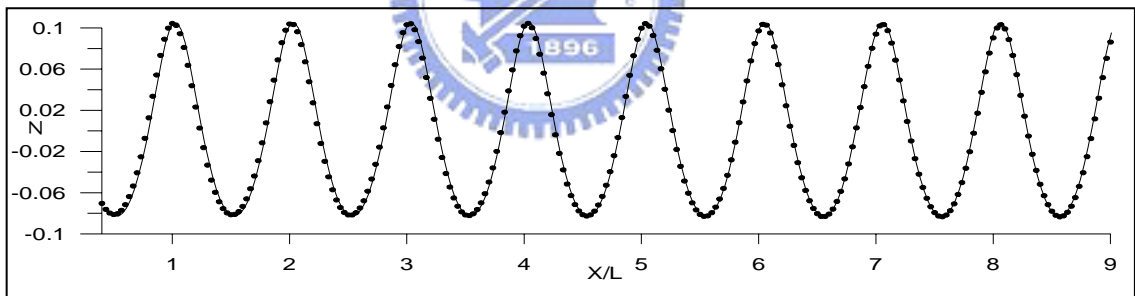
—— 5th order Stokes wave theory
BEM



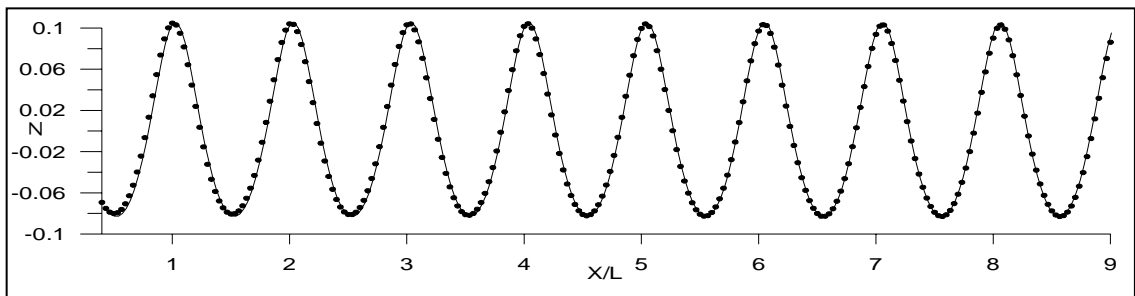
(a) $c=0.2$



(b) $c=0.4$



(c) $c=0.6$



(d) $c=0.8$

圖 4-1.3 數值造波分別以不同海綿係數 c 與 Stokes 五階波形比較
($h=1.0\text{m}$ $kh=1.0$ $H/L=0.03$)

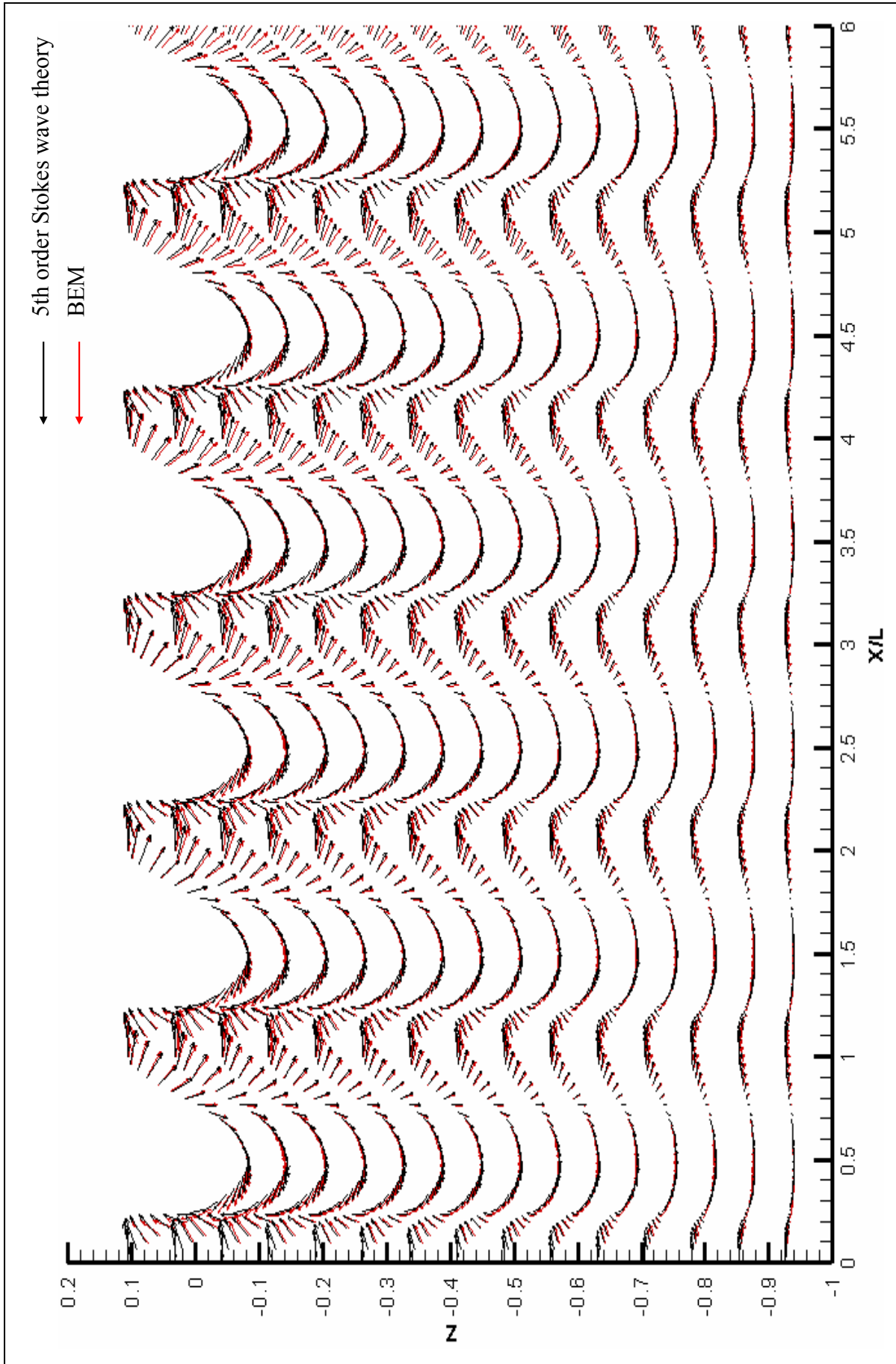


圖 4-1.4 數值造波跟 Stokes 五階理論之速度向量比較圖
 ($h=1.0\text{m}$ $kh=1.0$ $H/L=0.03$ $c=0.4$)

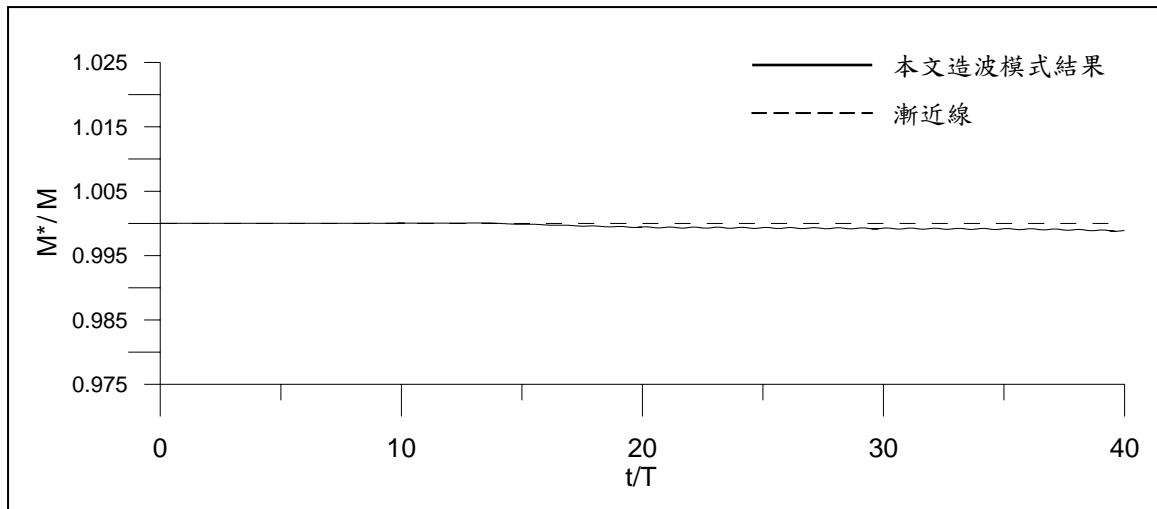


圖 4-1.5 造波模式質量隨時間變化圖
($h=1.0\text{m}$ $kh=1.0$ $H/L=0.03$)

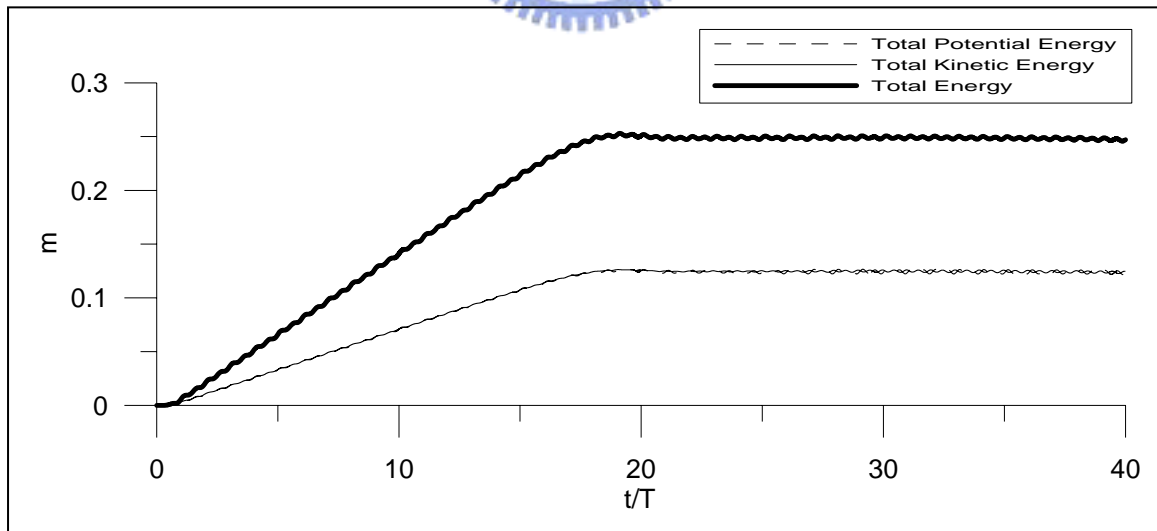


圖 4-1.6 造波模式能量隨時間變化圖
($h=1.0\text{m}$ $kh=1.0$ $H/L=0.03$)

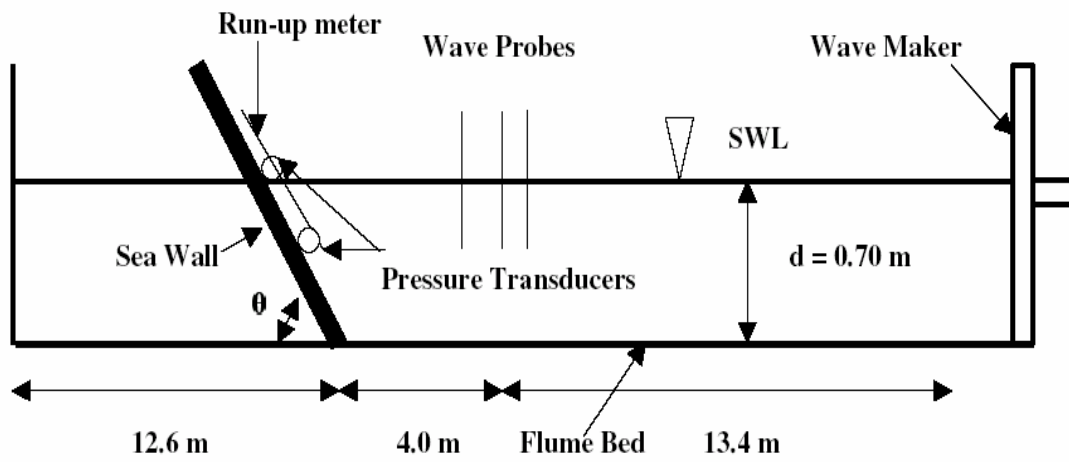
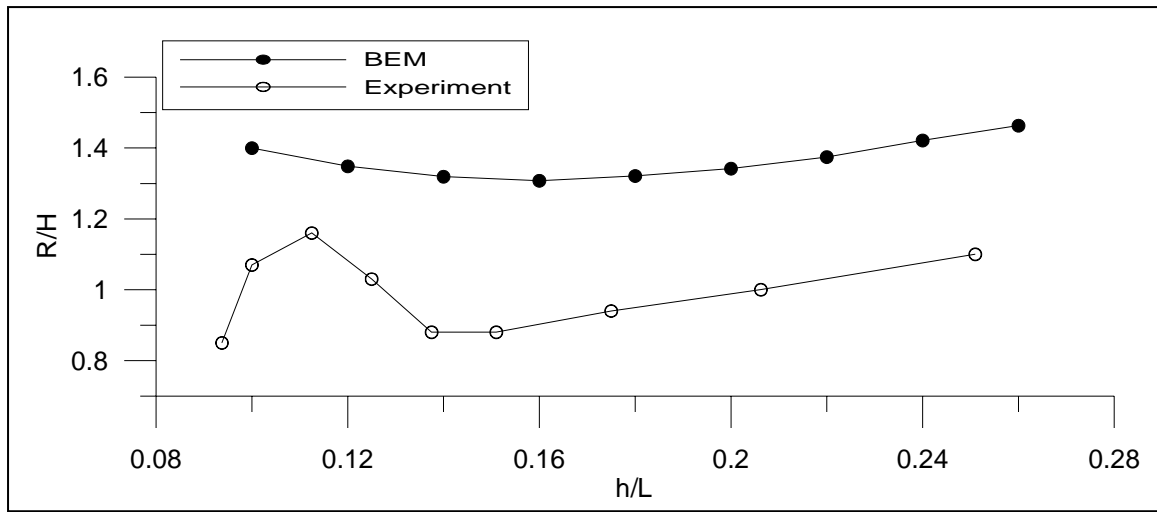
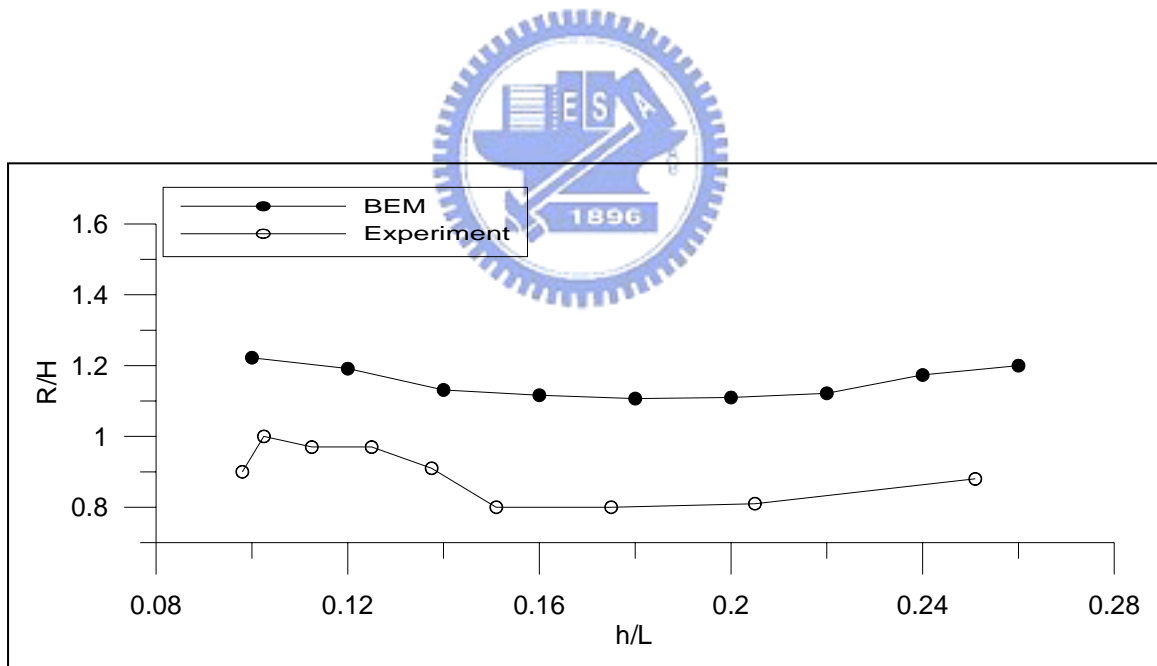


圖 4-2.1 波浪溯上水槽平面佈置圖
(摘自 Neelamani and Sandhya,2004)



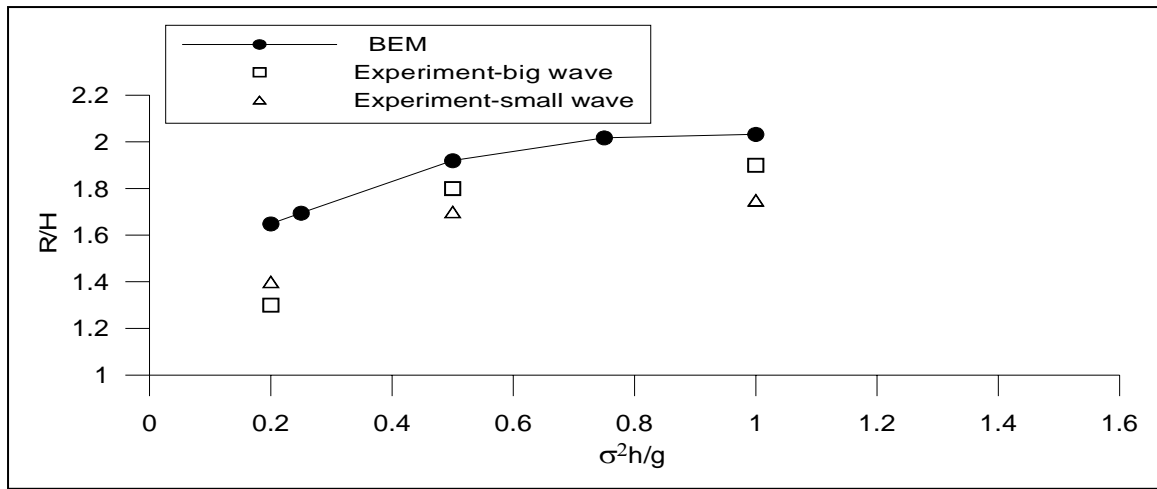


(a) $h=1.0\text{m}$ $H/h=0.21$ $\theta=60^\circ$

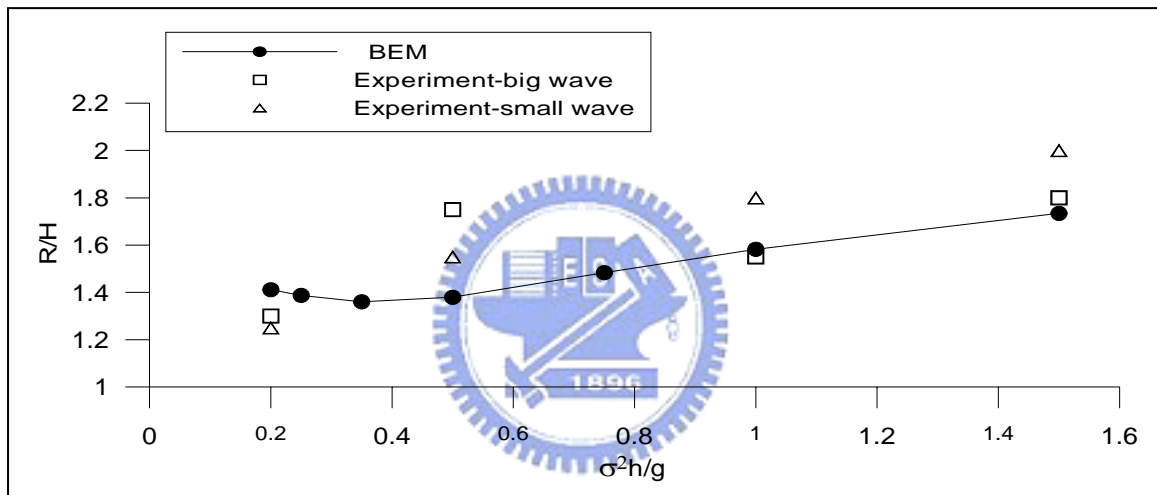


(b) $h=1.0\text{m}$ $H/h=0.21$ $\theta=90^\circ$

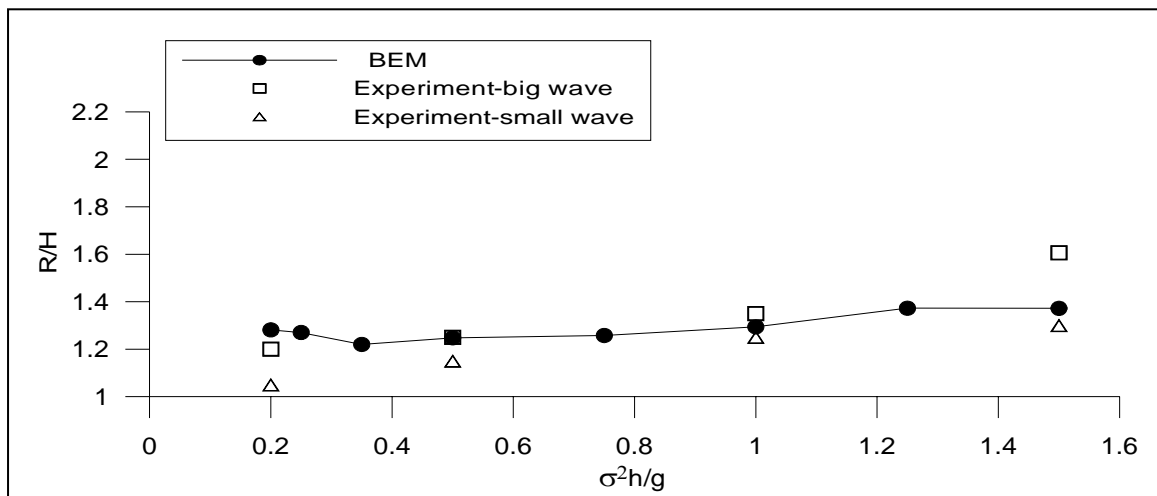
圖 4-2.2 無沒水板時相對溯上高度與 h/L 之比較圖



(a) $h=1.0\text{m}$ $H=0.1\text{m}$ $\theta=30^\circ$

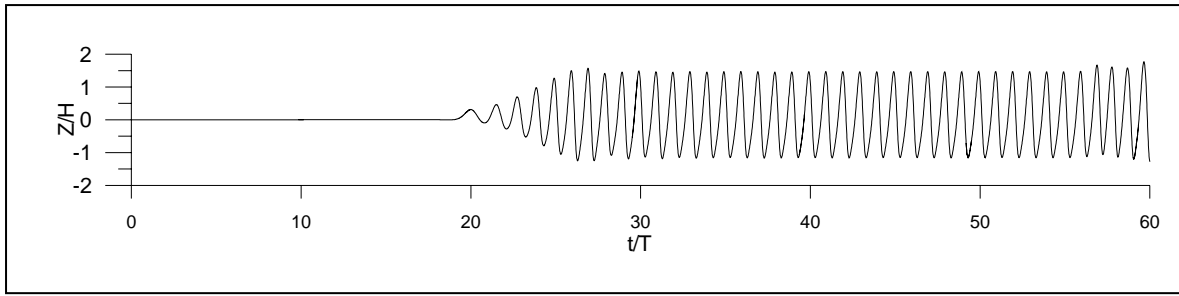


(b) $h=1.0\text{m}$ $H=0.1\text{m}$ $\theta=45^\circ$

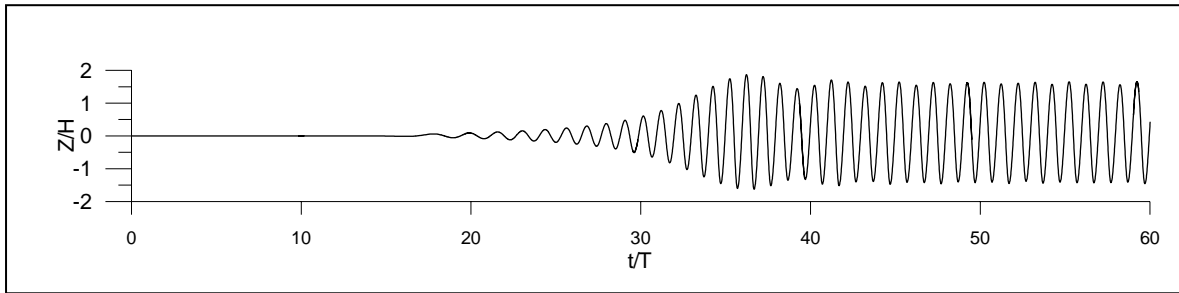


(c) $h=1.0\text{m}$ $H=0.1\text{m}$ $\theta=60^\circ$

圖 4-2.3 無沒水板時相對溯上高度與 $\sigma^2 h/g$ 之比較圖



(a) $h=1.0\text{m}$ $H/L=0.02$ $kh=0.7$



(b) $h=1.0\text{m}$ $H/L=0.02$ $kh=1.5$

圖 4-3.1 無沒水板狀況之波浪在堤面上水位時序圖



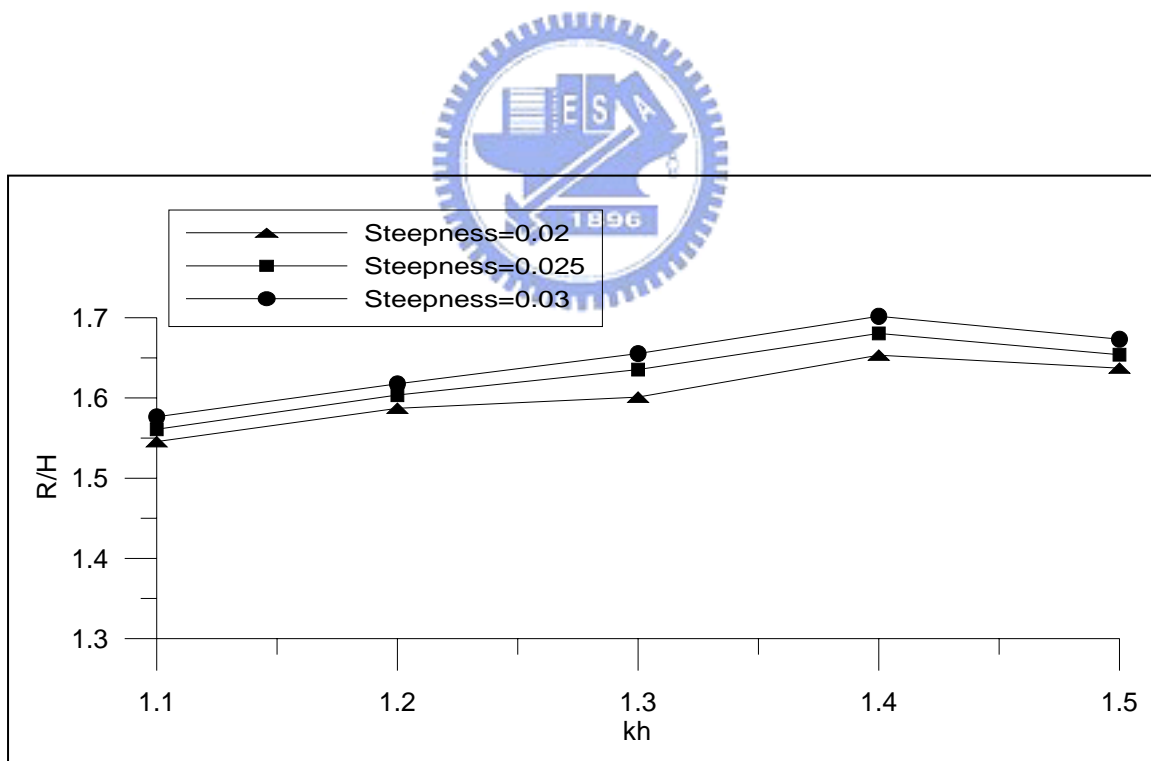
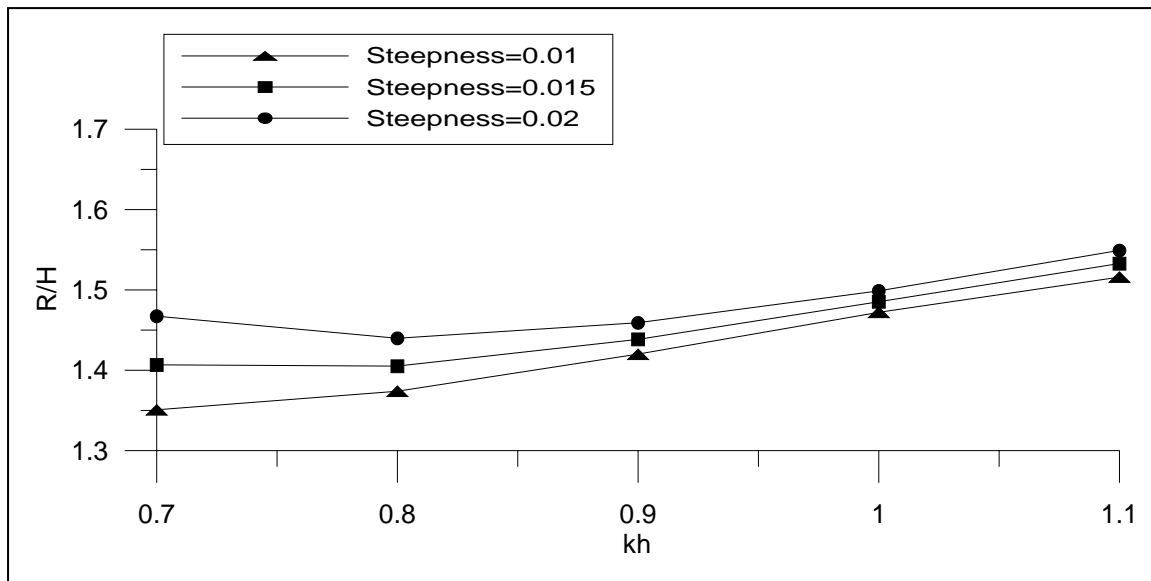


圖 4-3.2 無沒水板狀況波浪之相對溯上高度與 kh 及波浪尖銳度關係圖
($h=1.0\text{m}$ $\theta=45^\circ$)

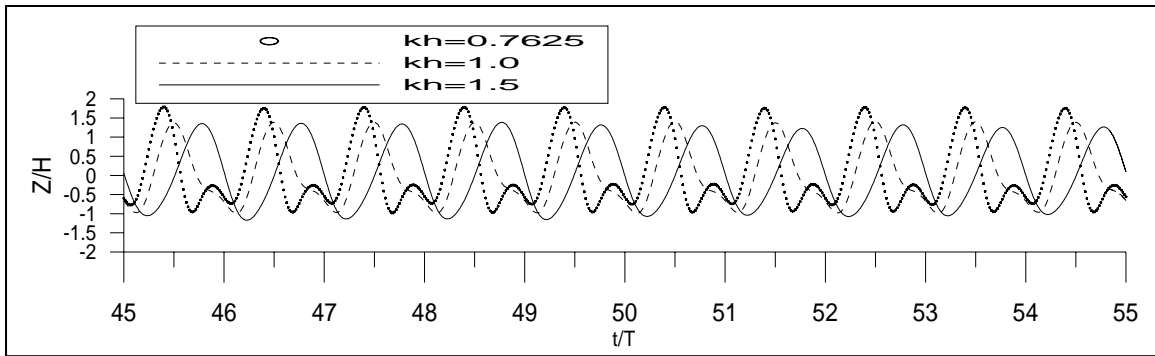


圖 4-4.1 非線性波通過沒水板狀況下在堤面上水位時序圖
($H/L=0.015$ $W=2L$ $kh=0.7625, 1.0, 1.5$)

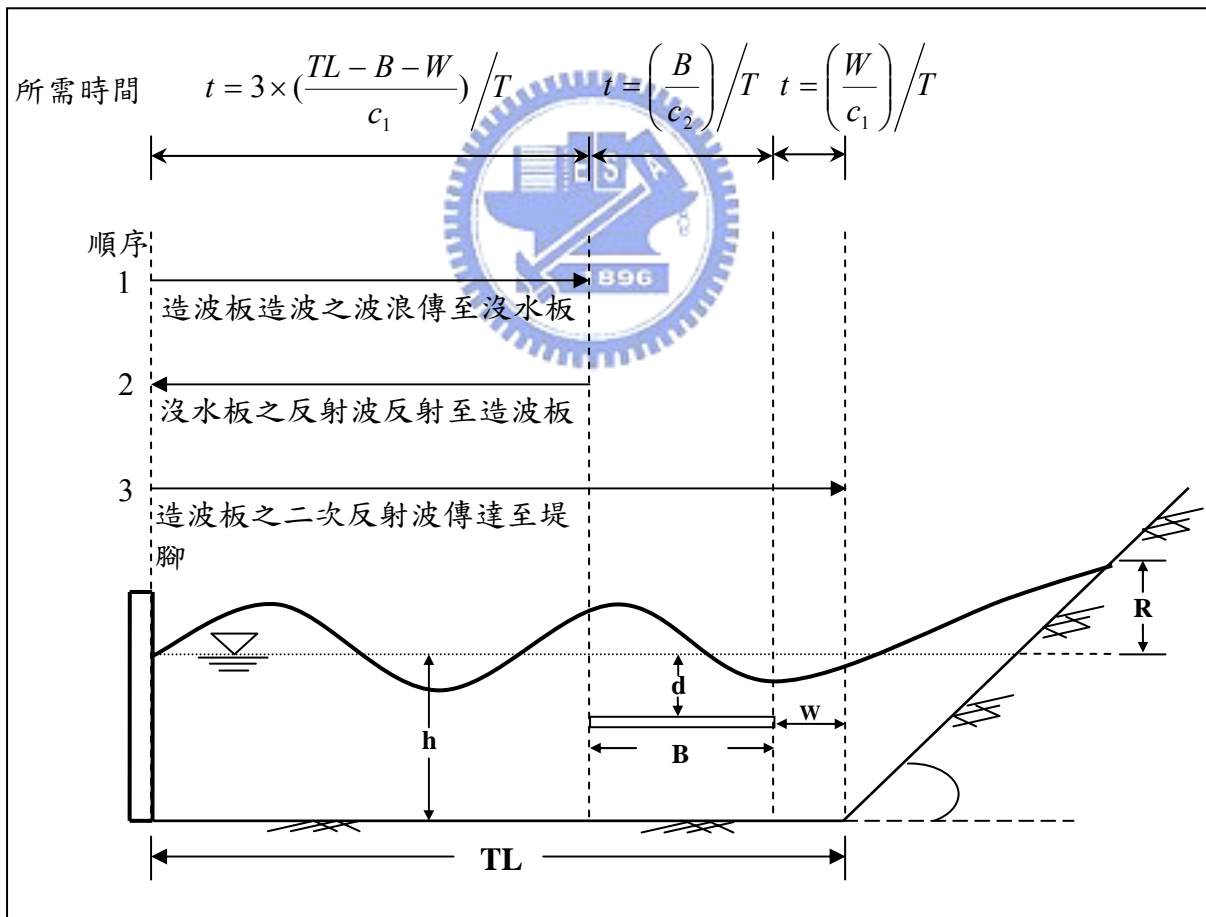


圖 4-4.2 造波板二次反射波時間計算

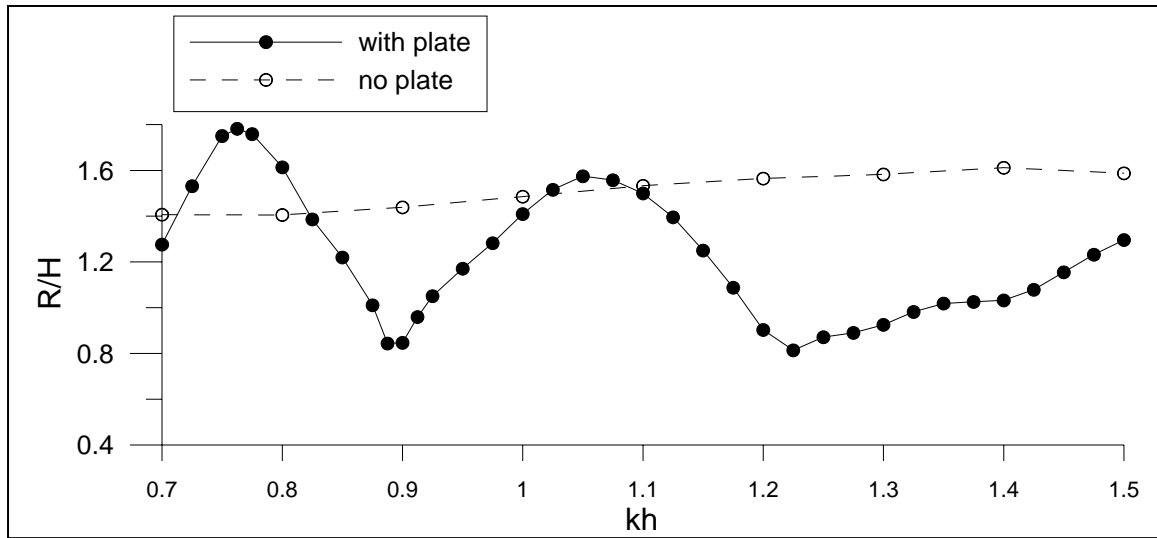


圖 4-4.3 非線性波之相對溯上高度與相對水深(kh)關係圖
($H/L=0.015$ $W=2L$ $kh=0.7\sim 1.5$)

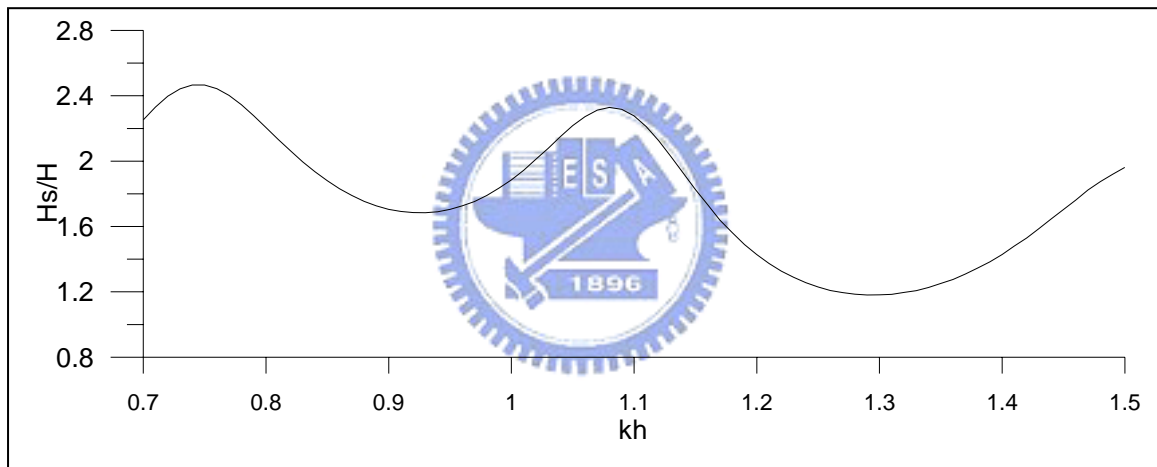


圖 4-4.4 線性波通過沒水板之駐波高度與相對水深(kh)關係圖
($H/L=0.015$ $W=2L$ $kh=0.7\sim 1.5$)

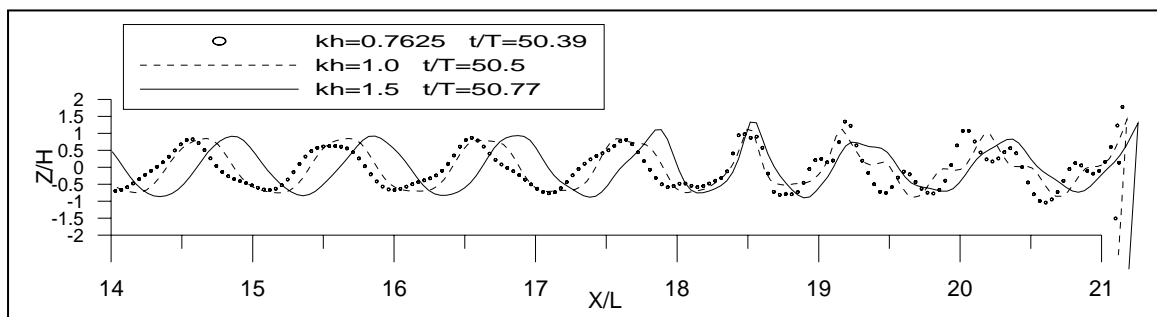
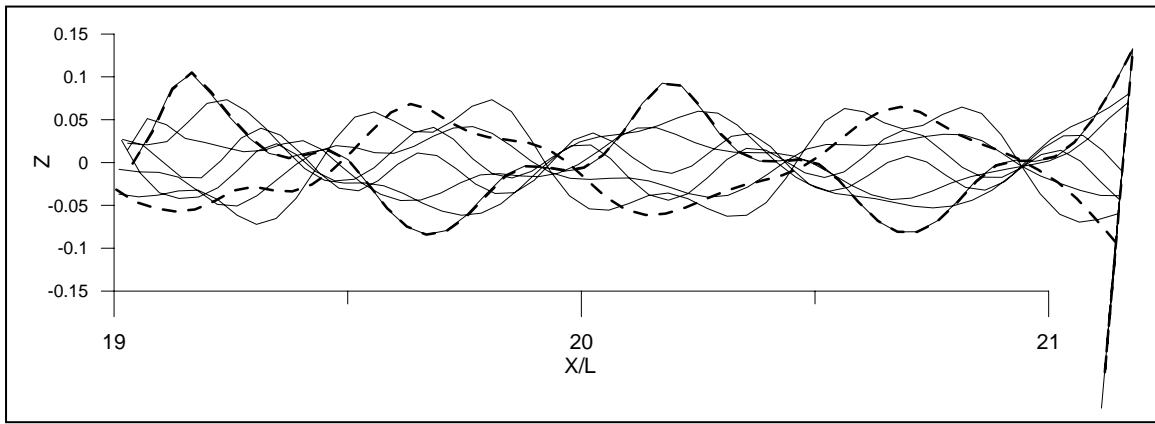
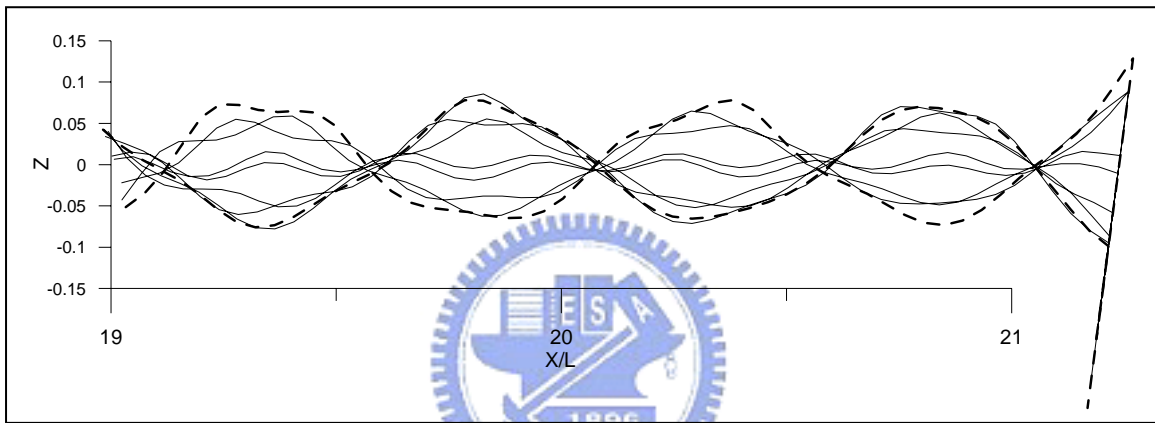


圖 4-4.5 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖
($H/L=0.015$ $W=2L$ $kh=0.7625, 1.0, 1.5$)



(a) $kh=1.0$



(b) $kh=1.5$

圖 4-4.6 沒水板與堤面間之駐波剖面圖

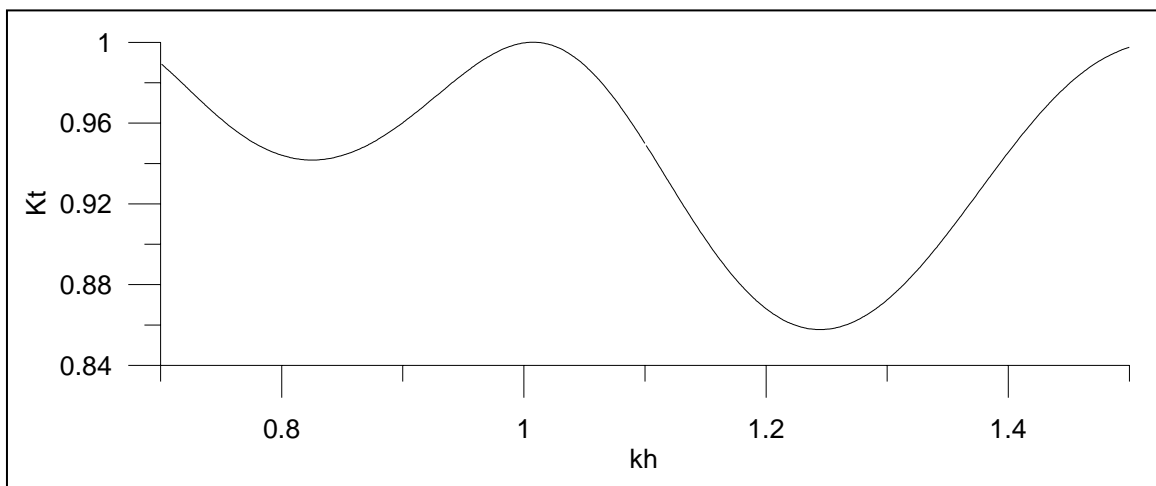


圖 4-4.7 線性波通過沒水板之透射率與相對水深(kh)關係圖
($B=5.0h$ $d=0.3h$)

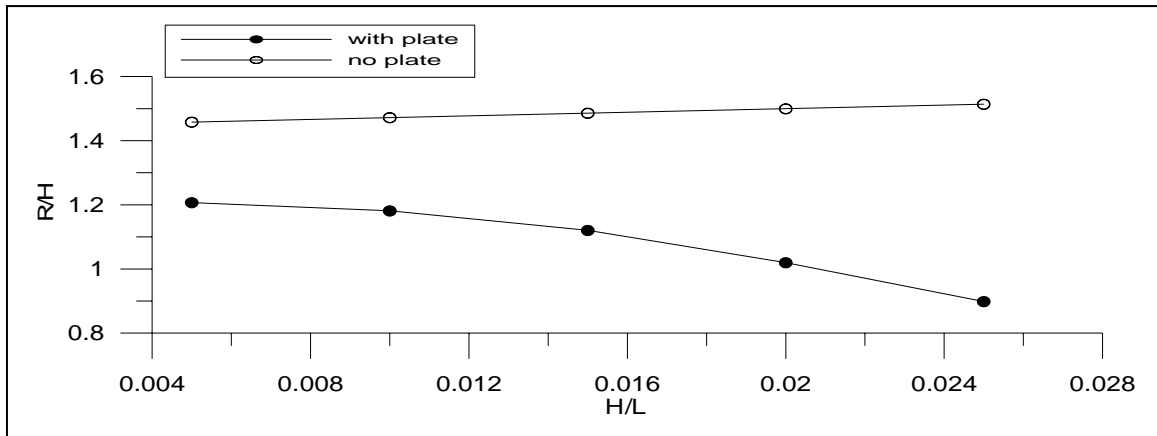


圖 4-4.8 非線性波之相對溯上高度與尖銳度(H/L)關係圖
($W=4L$ $H/L=0.005\sim 0.025$)

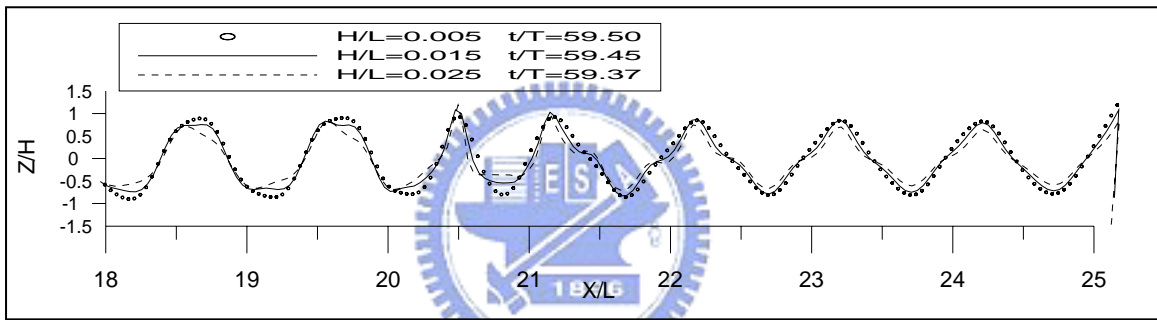


圖 4-4.9 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖
($W=4L$ $H/L=0.005, 0.015, 0.025$)

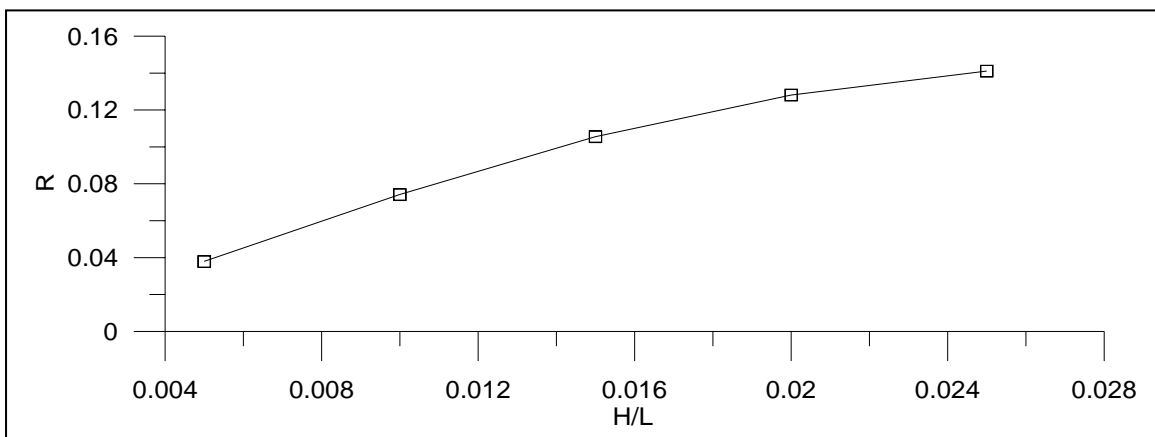


圖 4-4.10 非線性波通過沒水板之溯上高度與尖銳度(H/L)關係圖
($W=4L$ $H/L=0.005\sim 0.025$)

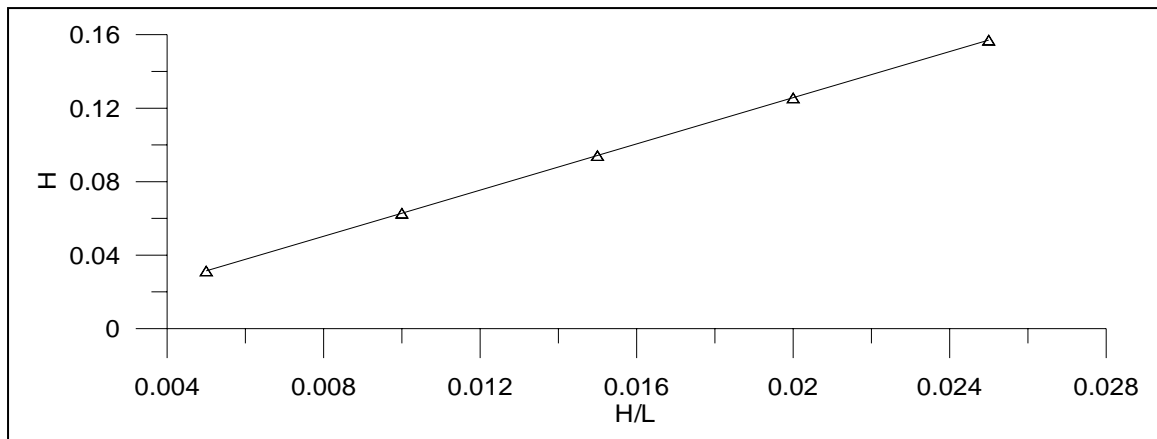


圖 4-4.11 非線性波之入射波高與尖銳度(H/L)關係圖
($W=4L$ $H/L=0.005\sim 0.025$)



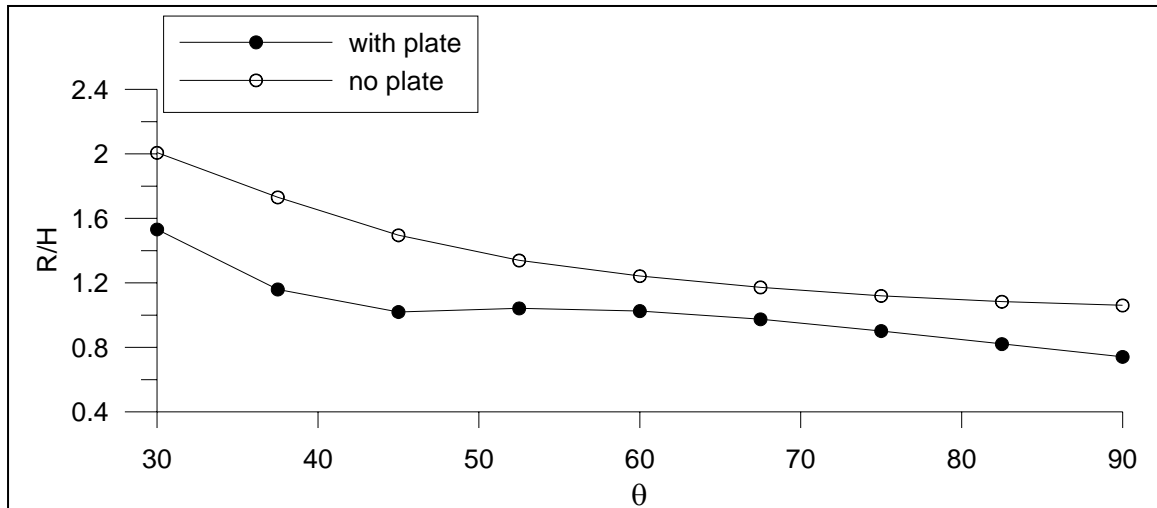


圖 4-4.12 非線性波之相對溯上高度與堤面角度(θ)關係圖
($H/L=0.02$ $W=4L$ $\theta=30^\circ\sim 90^\circ$)

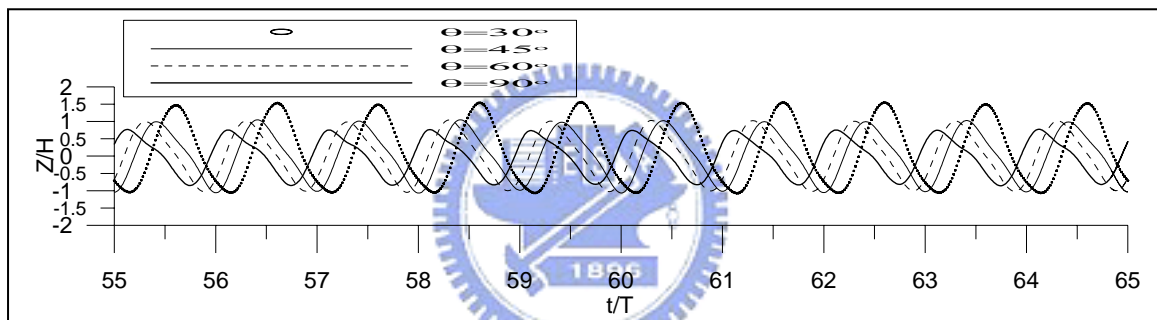


圖 4-4.13 非線性波通過沒水板狀況下在堤面上水位時序圖
($H/L=0.02$ $W=4L$ $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$)

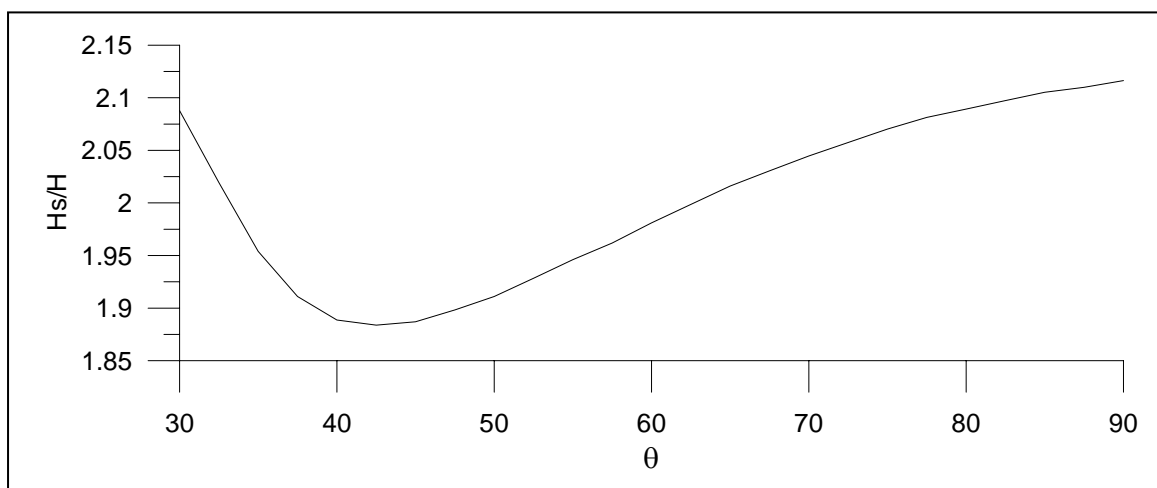


圖 4-4.14 線性波通過沒水板產生駐波波高與堤面角度(θ)關係圖
($W=4L$ $\theta=30^\circ\sim 90^\circ$)

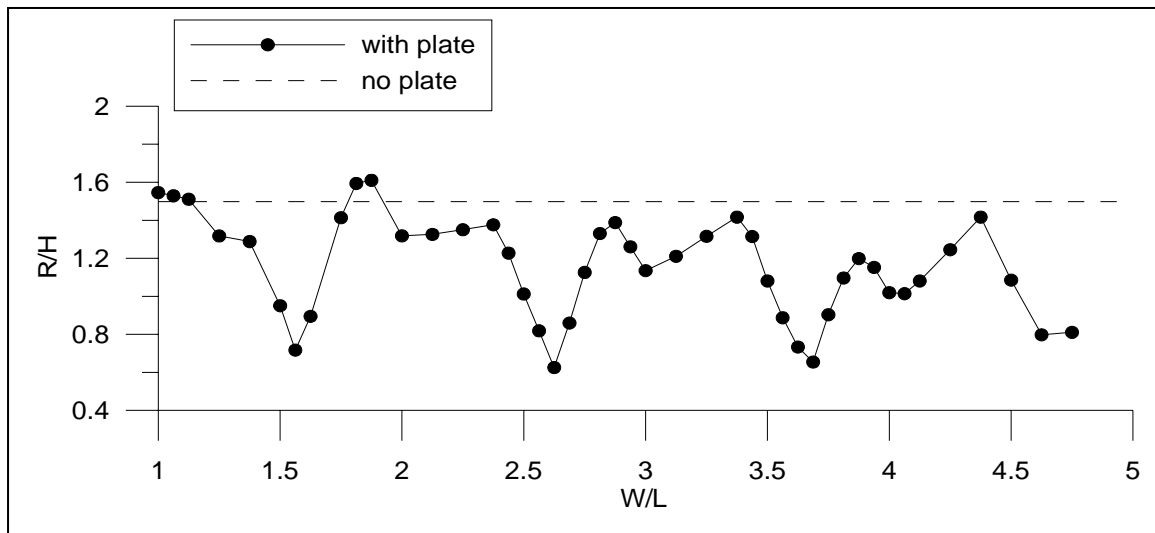


圖 4-4.15 非線性波之相對溯上高度與沒水板離堤腳距離(W)關係圖
($H/L=0.02$ $W=1L\sim 4L$)

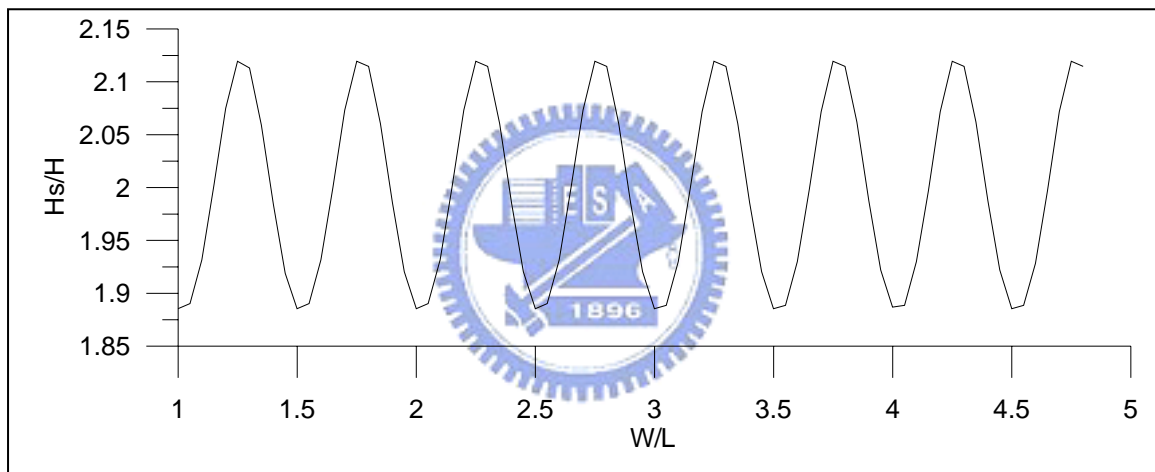


圖 4-4.16 線性波通過沒水板產生駐波高與沒水板離堤腳距離(W)關係圖
($W=1L\sim 4L$)

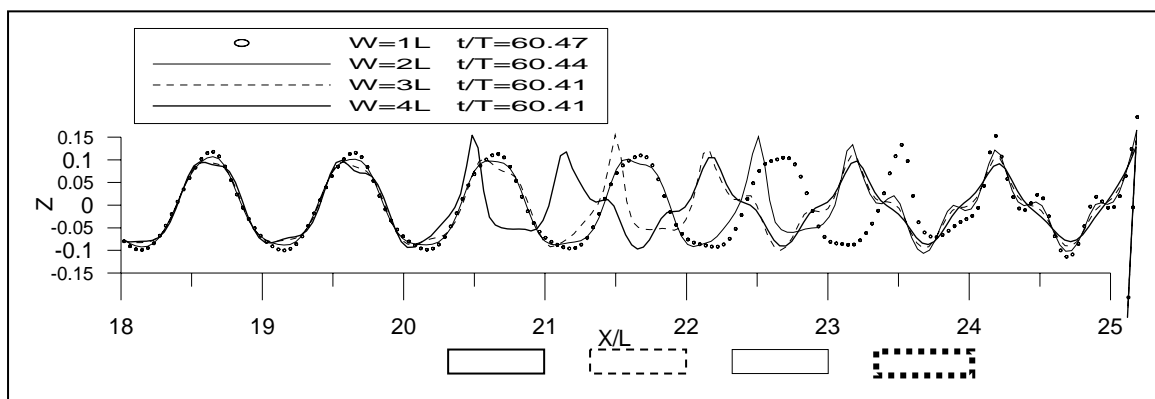


圖 4-4.17 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖
($H/L=0.02$ $W=1L、2L、3L、4L$)

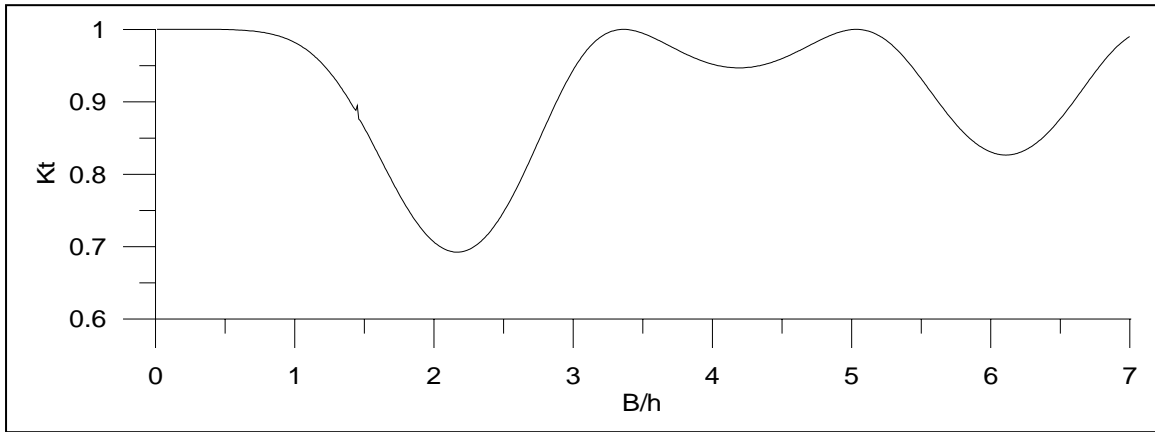


圖 4-4.18 線性波通過沒水板之透射率與沒水板長度(B)關係圖
($B=0h\sim 7h$)

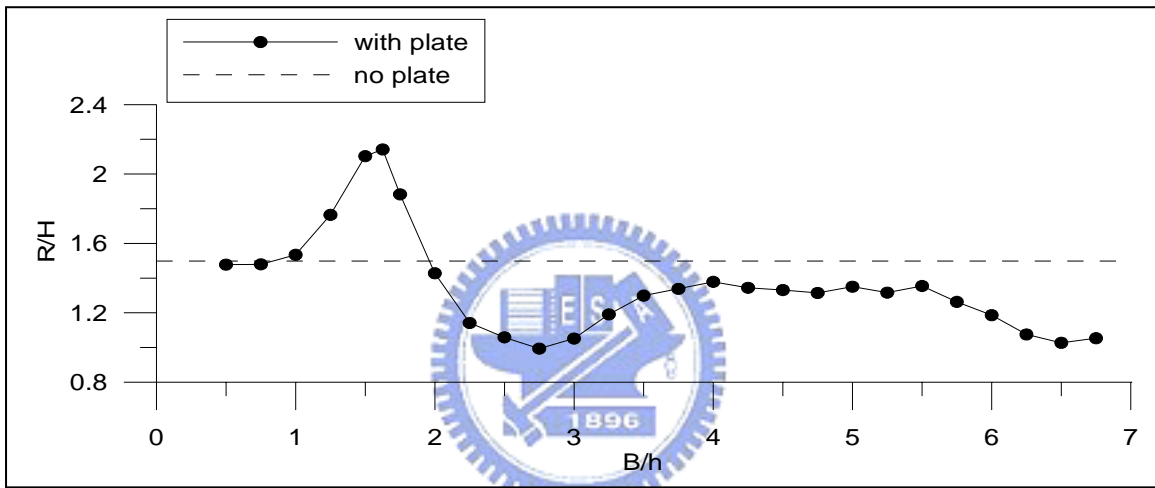


圖 4-4.19 非線性波之相對溯上高度與沒水板長度(B)關係圖
($H/L=0.02$ $W=2L$ $B=0.5h\sim 6.75h$)

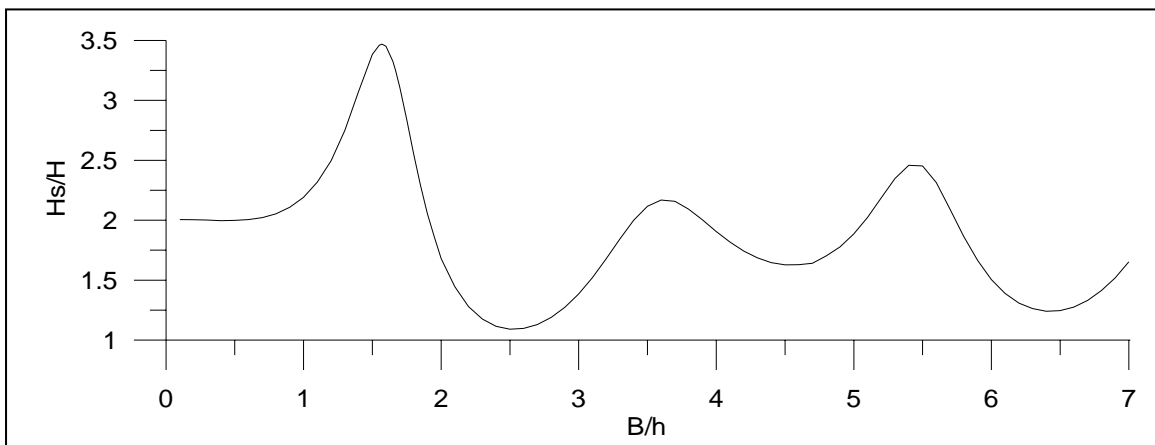


圖 4-4.20 線性波之駐波波高與沒水板長(B)關係圖
($W=2L$ $B=0.5h\sim 7h$)

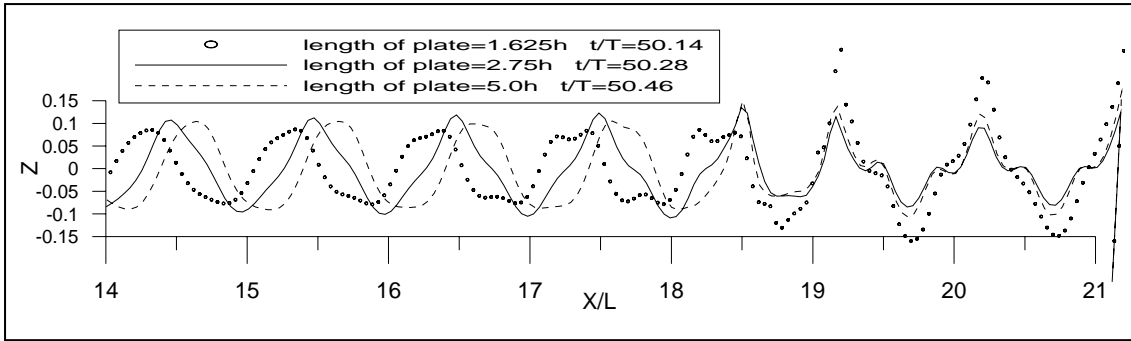


圖 4-4.21 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖
($H/L=0.02$ $W=2L$ $B=1.625h, 2.75h, 5h$)

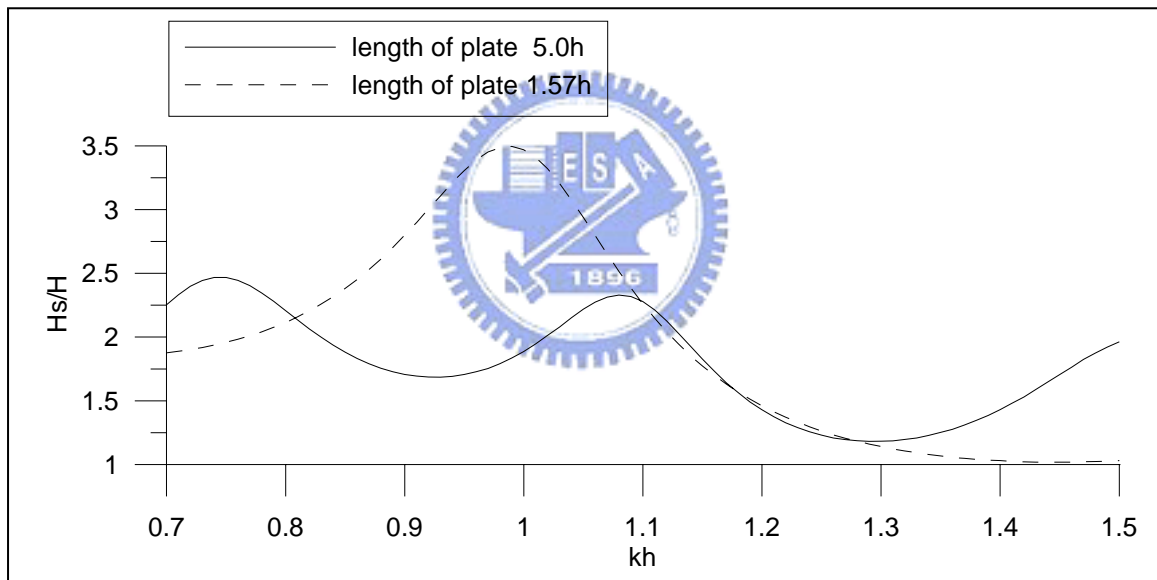


圖 4-4.22 線性波通過不同沒水板長產生駐波波高與 kh 關係圖
($W=2L$ $B=1.57h, 5h$ $kh=0.7\sim 1.5$)

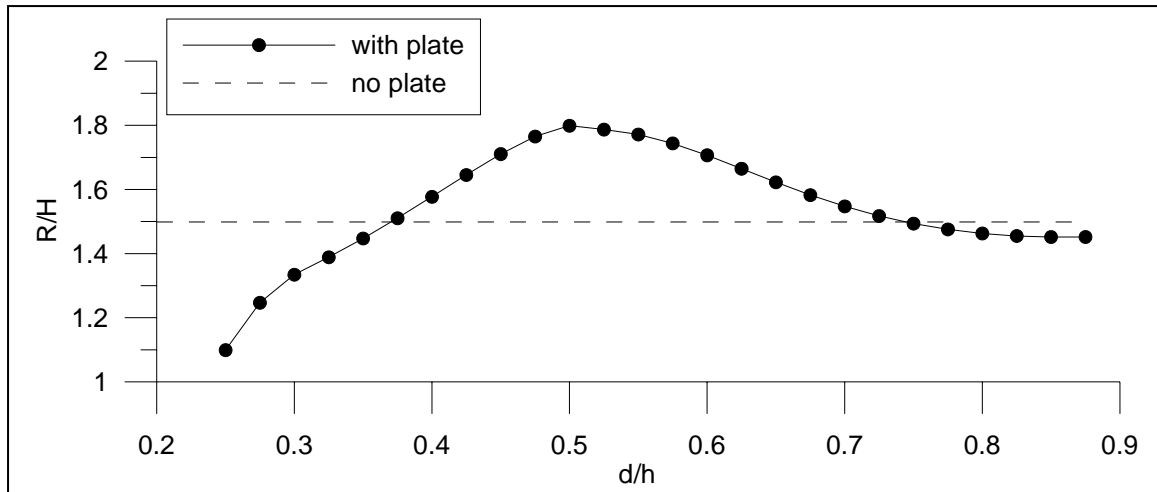


圖 4-4.23 非線性波之相對溯上高度與沒水板深度(d)之關係圖
($H/L=0.02$ $W=2L$ $d=0.25h\sim 0.875h$)

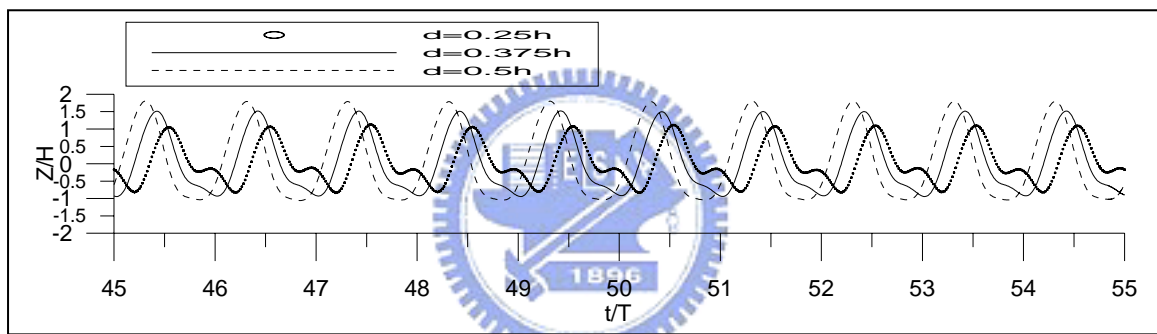


圖 4-4.24 非線性波通過沒水板狀況下在堤面上水位時序圖
($H/L=0.02$ $W=2L$ $d=0.25h, 0.375h, 0.5h$)

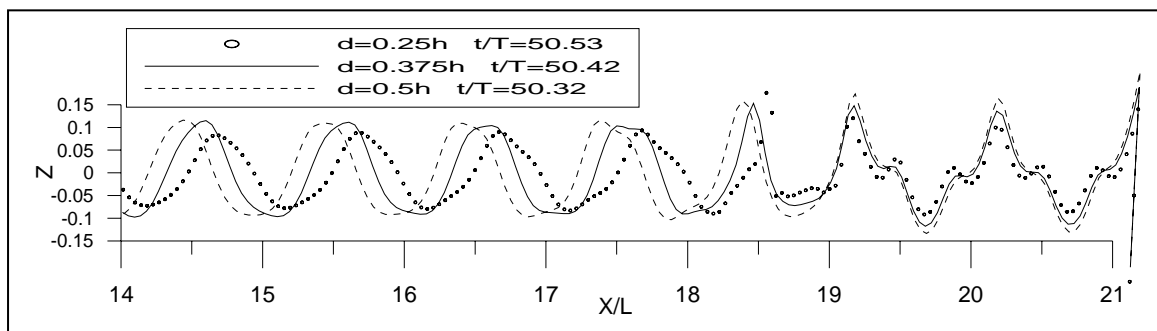


圖 4-4.25 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖
($H/L=0.02$ $W=2L$ $d=0.25h, 0.375h, 0.5h$)

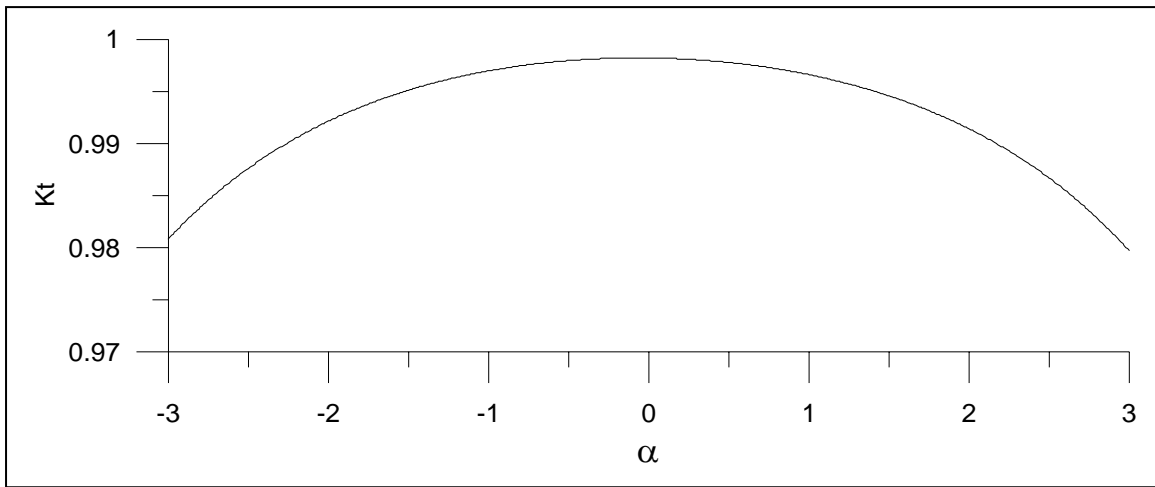


圖 4-4.26 線性波通過沒水板之透射率與沒水板之傾角(α)關係圖
($\alpha = -3^\circ \sim 3^\circ$)

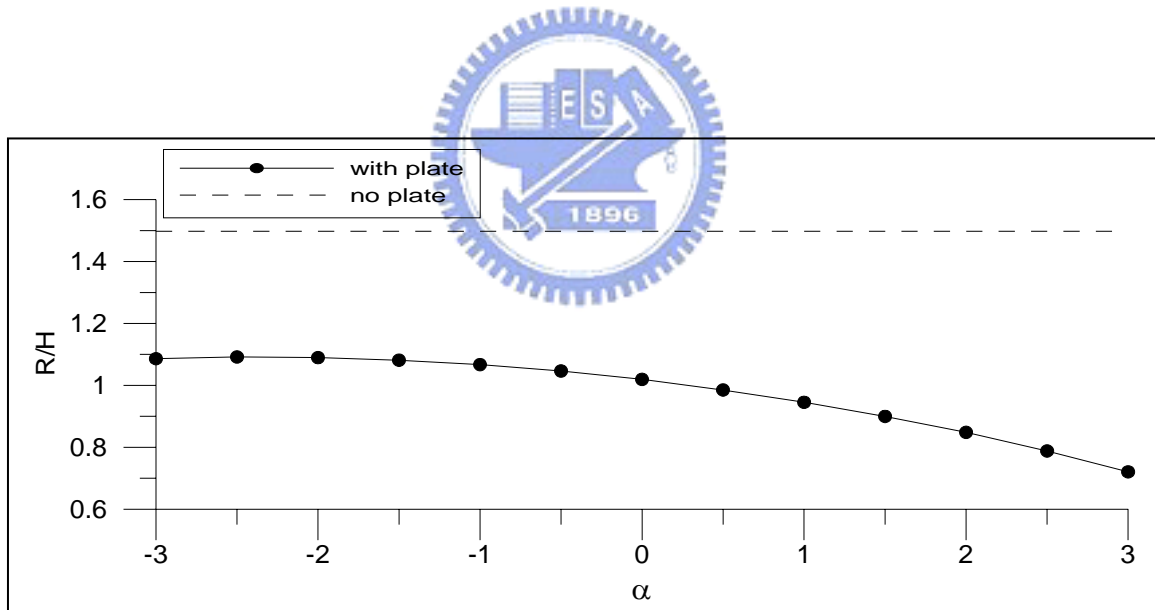


圖 4-4.27 非線性波之相對溯上高度與沒水板之傾角(α)關係圖
($H/L=0.02$ $W=4L$ $\alpha = -3^\circ \sim 3^\circ$)

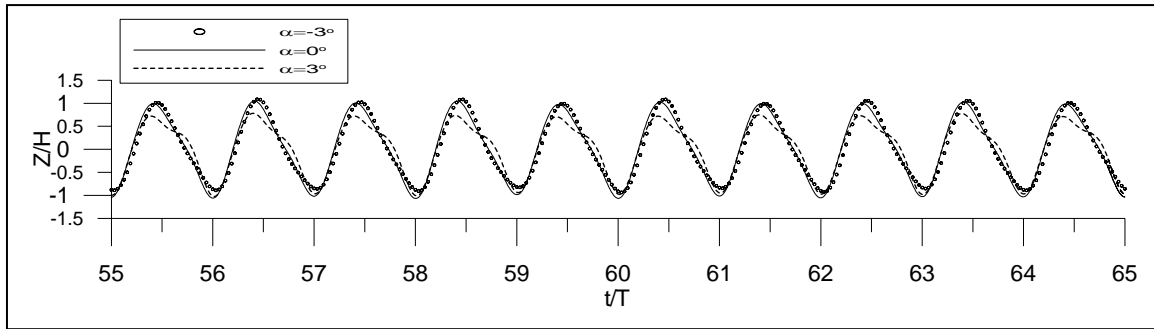


圖 4-4.28 通過沒水板的狀況下波浪在堤面上水位時序圖
 ($H/L=0.02$ $W=4L$ $\alpha = -3^\circ, 0^\circ, 3^\circ$)

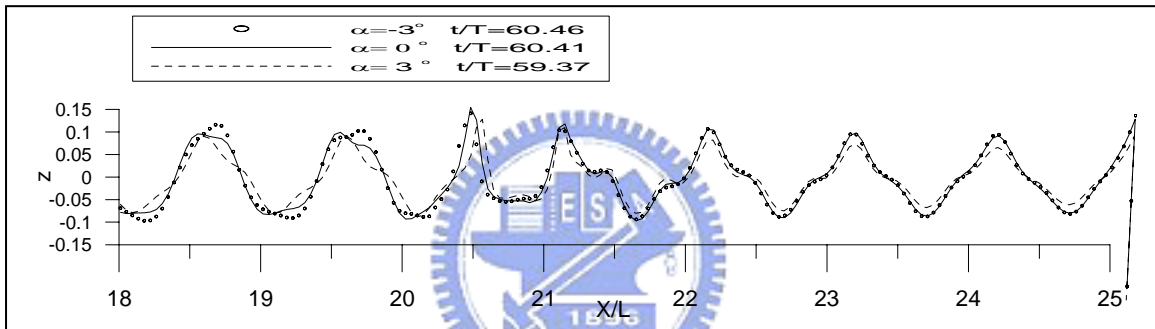


圖 4-4.29 非線性波通過沒水板狀況下達溯上高度時刻之剖面比較圖
 ($H/L=0.02$ $W=4L$ $\alpha = -3^\circ, 0^\circ, 3^\circ$)

表 4-1 非線性波之相對溯上高度與相對水深(kh)關係數據表

水槽水深(h)=1m 波浪尖銳度(H/L)=0.015 堤面角度(θ)=45° 沒水板離堤腳距離(W)=2L 沒水板長(B)=5h 沒水板沒水深(d)=0.3h 沒水板傾角(α)=0°	相對水深(kh)	相對溯上高度(R/H)
	0.7	1.2757
	0.725	1.5312
	0.75	1.7501
	0.7625	1.7814
	0.775	1.7585
	0.8	1.6135
	0.825	1.3857
	0.85	1.2193
	0.875	1.0102
	0.8875	0.8429
	0.9	0.8459
	0.9125	0.9588
	0.925	1.0501
	0.95	1.1702
	0.975	1.2817
	1	1.4092
	1.025	1.5152
	1.05	1.5744
	1.075	1.5572
	1.1	1.4993
	1.125	1.3949
	1.15	1.2495
	1.175	1.0871
	1.2	0.9022
	1.225	0.8131
	1.25	0.8705
	1.275	0.8894
	1.3	0.9246
	1.325	0.981
	1.35	1.0177
	1.375	1.0248
	1.4	1.0314
	1.425	1.078
	1.45	1.1544
	1.475	1.2313
	1.5	1.2956

表 4-2 非線性波之相對溯上高度與尖銳度(H/L)關係數據表

水槽水深(h)=1m	波浪尖銳度(H/L)	相對溯上高度(R/H)
相對水深(kh)=1	0.005	1.2066
堤面角度(θ)=45°	0.01	1.1809
沒水板離堤腳距離(W)=4L	0.015	1.1199
沒水板長(B)=5h	0.02	1.0193
沒水板沒水深(d)=0.3h	0.025	0.8981
沒水板傾角(α)=0°		

表 4-3 非線性波之相對溯上高度與堤面角度(θ)關係數據表

水槽水深(h)=1m	堤面角度(θ)	相對溯上高度(R/H)
相對水深(kh)=1	30°	1.5315
波浪尖銳度(H/L)=0.02	37.5°	1.1591
沒水板離堤腳距離(W)=4L	45°	1.0193
沒水板長(B)=5h	52.5°	1.0417
沒水板沒水深(d)=0.3h	60°	1.025
沒水板傾角(α)=0°	67.5°	0.9741
	75°	0.9013
	82.5°	0.8206
	90°	0.7412

表 4-4 非線性波之相對溯上高度與沒水板離堤腳距離(W)關係數據表

水槽水深(h)=1m 相對水深(kh)=1 波浪尖銳度(H/L)=0.02 堤面角度(θ)=45° 沒水板長(B)=5h 沒水板沒水深(d)=0.3h 沒水板傾角(α)=0°	沒水板離堤腳距離(W)	相對溯上高度(R/H)
	1L	1.5456
	1.0625L	1.5288
	1.125L	1.5105
	1.25L	1.3174
	1.375L	1.2881
	1.5L	0.9506
	1.5625L	0.717
	1.625L	0.8947
	1.75L	1.4133
	1.8125L	1.5937
	1.875L	1.6101
	2L	1.3178
	2.125L	1.3257
	2.25L	1.3501
	2.375L	1.3761
	2.4375L	1.2272
	2.5L	1.0121
	2.5625L	0.8184
	2.625L	0.6252
	2.6875L	0.8594
	2.75L	1.1256
	2.8125L	1.3302
	2.875L	1.3879
	2.9375L	1.2604
	3L	1.135
	3.125L	1.2105
	3.25L	1.3154
	3.375L	1.4165
	3.4375L	1.3144
	3.5L	1.0807
	3.5625L	0.8871
	3.625L	0.7332
	3.6875L	0.6542
	3.75L	0.9031

(續)表 4-4 非線性波之相對溯上高度與沒水板離堤腳距離(W)關係數據表

水槽水深(h)=1m 相對水深(kh)=1 波浪尖銳度(H/L)=0.02 堤面角度(θ)=45° 沒水板長(B)=5h 沒水板沒水深(d)=0.3h 沒水板傾角(α)=0°	沒水板離堤腳距離(W)	相對溯上高度(R/H)
	3.8125L	1.0965
	3.875L	1.1985
	3.9375L	1.152
	4L	1.0193
	4.0625L	1.0138
	4.125L	1.0807
	4.25L	1.2451
	4.375L	1.4166
	4.5L	1.0852
	4.625L	0.7974
	4.75L	0.8103



表 4-5 非線性波之相對溯上高度與沒水板長度(B)關係數據表

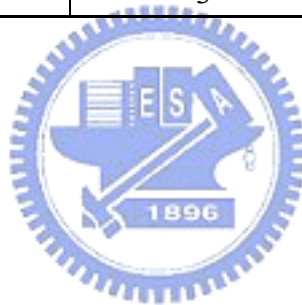
水槽水深(h)=1m 相對水深(kh)=1 波浪尖銳度(H/L)=0.02 堤面角度(θ)=45° 沒水板離堤腳距離(W)=2L 沒水板沒水深(d)=0.3h 沒水板傾角(α)=0°	沒水板長(B)	相對溯上高度(R/H)
	0.5h	1.4776
	0.75h	1.4796
	1h	1.5344
	1.25h	1.7645
	1.5h	2.1028
	1.625h	2.1416
	1.75h	1.8829
	2h	1.4279
	2.25h	1.1414
	2.5h	1.0586
	2.75h	0.9937
	3h	1.0517
	3.25h	1.1909
	3.5h	1.2991
	3.75h	1.3381
	4h	1.3787
	4.25h	1.3443
	4.5h	1.3313
	4.75h	1.3144
	5h	1.3505
	5.25h	1.3164
	5.5h	1.3547
	5.75h	1.2631
	6h	1.1864
	6.25h	1.0753
	6.5h	1.0272
	6.75h	1.0535

表 4-6 非線性波之相對溯上高度與沒水板深度(d)關係數據表

水槽水深(h)=1m 相對水深(kh)=1 波浪尖銳度(H/L)=0.02 堤面角度(θ)=45° 沒水板離堤腳距離(W)=2L 沒水板長(B)=5h 沒水板傾角(α)=0°	沒水板沒水深(d)	相對溯上高度(R/H)
	0.25h	1.0988
	0.275h	1.2465
	0.3h	1.3505
	0.325h	1.3886
	0.35h	1.4468
	0.375h	1.51
	0.4h	1.5769
	0.425h	1.6451
	0.45h	1.7102
	0.475h	1.7648
	0.5h	1.7985
	0.525h	1.7865
	0.55h	1.7711
	0.575h	1.7434
	0.6h	1.7065
	0.625h	1.6647
	0.65h	1.6223
	0.675h	1.5823
	0.7h	1.5471
	0.725h	1.5169
	0.75h	1.4932
	0.775h	1.4752
	0.8h	1.4625
	0.825h	1.4546
	0.85h	1.4514
	0.875h	1.4515

表 4-7 非線性波之相對溯上高度與沒水板傾角(α)關係數據表

水槽水深(h)=1m 相對水深(kh)=1 波浪尖銳度(H/L)=0.02 堤面角度(θ)=45° 沒水板離堤腳距離(W)=4L 沒水板長(B)=5h 沒水板沒水深(d)=0.3h	沒水板傾角(α)	相對溯上高度(R/H)
	-3°	1.0861
	-2.5°	1.0918
	-2°	1.0896
	-1.5°	1.0812
	-1°	1.067
	-0.5°	1.0465
	0°	1.0193
	0.5°	0.9852
	1°	0.9453
	1.5°	0.8997
	2°	0.8483
	2.5°	0.7881
	3°	0.7206



附錄 A 二階自由波之關係式

由於 Stokes 波並不包含自由波，造波板之位移需加上 $\frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi)$ 項，消除造波板所產生的二階自由波，以確保造 Stokes 波之精確度。 s_f 為消除二階自由波所需之衝程， φ 為一階 Stokes 波與二階自由波之相位差，其關係式表示如下：

$$\Phi_2^f = \frac{1}{2} \left[B_p \cosh \beta_p (h+z) e^{i\beta_p x} + \sum_{j=1}^{\infty} B_s(j) \cos \beta_s(j) (h+z) e^{-\beta_s(j)x} \right] e^{-i2\omega t} \quad (\text{A-1})$$

$$\eta_2^f = \frac{\Phi_2^f}{g} = -i \frac{\omega}{g} B_p \cosh \beta_p h \cdot e^{i(\beta_p x - 2\omega t)} - \frac{i\omega}{g} \sum_{j=1}^{\infty} B_s(j) \cos \beta_s(j) h \cdot e^{-\beta_s(j)x} e^{-i2\omega t} \quad (\text{A-2})$$

Φ_2^f 為複數，實數部份為 $R_e(\Phi)$ ，虛數部份為 $I_m(\Phi)$ ，一階 Stokes 波與二階自由波之相位差 φ 為：

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_m(\Phi)}{R_e(\Phi)} \quad (\text{A-3})$$

消除二階自由波所需造波板之衝程為：

$$s_f = 2 \left| \eta_2^f \right| \frac{\sinh(2\beta_p h) + 2\beta_p h}{2(\cosh 2\beta_p h - 1)} \quad (\text{A-4})$$

可由以下分散關係式計算得 β_p 與 $\beta_s(n)$ ：

$$(2\omega)^2 = g\beta_p \tanh \beta_p h \quad (\text{A-5})$$

$$(2\omega)^2 = -g\beta_s(n) \tan \beta_s(n) h \quad (\text{A-6})$$

以下為 Φ_2^f 及 η_2^f 式中各項係數：

$$B_p = \frac{i}{\beta_p} \frac{s_0 R}{2} \frac{Q_1}{Q_l} - \frac{1}{\beta_p} \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{Q_3(n)}{Q_l} - \frac{i}{\beta_p} 4k_p B_1 \frac{Q_5}{Q_l}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_2(n, m) [k_s(n) + k_s(m)] \frac{Q_6(n, m)}{Q_I} \\
& - \frac{1}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{Q_7(n)}{Q_I} \\
& - \frac{i}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{Q_8(n)}{Q_I} \\
B_s(j) = & \frac{s_0 R}{2} \frac{1}{\beta_s(j)} \frac{W_1(j) + W_2(j)}{W_I(j)} + \frac{i}{\beta_s(j)} \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{W_3(j, n) + W_4(j, n)}{W_I(j)} \\
& - \frac{4k_p B_1}{\beta_s(j)} \frac{W_5(j)}{W_I(j)} - \frac{2i}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_2(n, m) [k_s(n) + k_s(m)] \frac{W_6(j, n, m)}{W_I(j)} \\
& + \frac{i}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{W_7(j, n)}{W_I(j)} \\
& - \frac{1}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{W_8(j, n)}{W_I(j)}
\end{aligned}$$

$$Q_I = \int_{-h}^0 \cosh^2 \beta_p(h+z) dz$$

$$Q_1 = k_p h \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) \cdot \cosh \beta_p(h+z) dz$$

$$Q_3(n) = \int_{-h}^0 k_s(n) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p(h+z) dz$$

$$Q_5 = \int_{-h}^0 \cosh 2k_p(h+z) \cdot \cosh \beta_p(h+z) dz$$

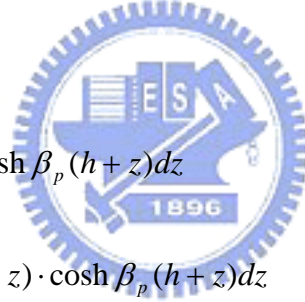
$$Q_6(n, m) = \int_{-h}^0 \cos[k_s(n) + k_s(m)](h+z) \cdot \cosh \beta_p(h+z) dz$$

$$Q_7(n) = \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p(h+z) dz$$

$$Q_8(n) = \int_{-h}^0 \sinh k_p(h+z) \sin k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p(h+z) dz$$

$$W_1(j) = \int_{-h}^0 \cos^2 \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_1(j) = k_p \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$



$$W_3(j, n) = \int_{-h}^0 k_s(n) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_5(j) = \int_{-h}^0 \cosh 2k_p(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_6(j, n, m) = \int_{-h}^0 \cos[k_s(n) + k_s(m)](h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_7(j, n) = \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) \cdot \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_8(j, n) = \int_{-h}^0 \sinh k_p(h+z) \cdot \sin k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$P_1(n) = g[k_p + ik_s(n)] [\sinh k_p h \cdot \cos k_s(n)h + i \cosh k_p h \cdot \sin k_s(n)h] \\ - 4\omega^2 [\cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h + i \sinh k_p h \cdot \sin k_s(n)h]$$

$$P_2(n) = \frac{k_s(n)}{k_p} \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h - \frac{k_p}{k_s(n)} \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h \\ - 6 \sinh k_p h \cdot \sin k_s(n)h - 4i \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h$$

$$T = \frac{\frac{\omega s_0}{2h} \int_{-h}^0 (h+z) \cos k_s(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_s(h+z) dz}$$

$$R = \frac{\frac{\omega s_0}{2} \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k_p(h+z) dz}$$

$$B_1 = \frac{3R^2}{8\omega \sinh^2 k_p h}$$

$$B_2(n, m) =$$

$$\frac{\omega T_n T_m \left[\frac{k_s(m)}{k_s(n)} \cos k_s(n)h \cdot \cos k_s(m)h + 2 \cos k_s(n)h \cdot \cos k_s(m)h + 3 \sin k_s(n)h \cdot \sin k_s(m)h \right]}{2 \{ g[k_s(n) + k_s(m)] \sin[k_s(n) + k_s(m)]h + 4\omega^2 \cos[k_s(n) + k_s(m)]h \}}$$



附錄 B 曲線近似法(Cubic Spline)

在本文中，自由水面的波形角度及其他參數在切線方向的微分，皆是藉由 cubic spline 的方法來計算求得。Cubic spline 主要是以三次多項式的方式來將一系列之數據點連接起來，透過其計算將可以得到數據點的切線斜率及其曲率。以下簡單的說明這個模式方法：

若一曲線經過一系列之數據點 (s_i, F_i) ，則可將 F 表示為

$$F = F(s) \tag{B-1}$$

s 為曲線參數，此參數必須選擇一嚴格參數，即：

$$s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$$

在本文對於自由水面移動的問題中，選擇曲線的弧長來當作曲線參數，其值為：

$$s_0 = 0; \quad s_i = s_{i-1} + d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{B-2}$$

$$d_i = \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2} \quad (i = 0, \dots, n-1) \tag{B-3}$$

其中

$$\delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad \delta z_i = z_{i+1} - z_i$$

$(x_i, z_i)(i = 0, 1, \dots, n)$ 為自由水面邊界點的座標值。

假設總共有 $n+1$ 個數據點，則會有 n 條小曲線存在。第 i 條小曲線，其會在 (x_i, z_i) 與 (x_{i+1}, z_{i+1}) 之間，可令其曲線方程式為

$$F(s) = a_i(s - s_i)^3 + b_i(s - s_i)^2 + c_i(s - s_i) + d_i \tag{B-4}$$

因為曲線必須經過數據點，所以

$$F_i = d_i \tag{B-5}$$

$$F_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (\text{B-6})$$

其中 $F_i = F(s_i)$, $h_i = (s_{i+1} - s_i)$ 為第 i 段曲線之弧長。而對 s 的一次及二次微分可表示成

$$F'(s) = 3a_i(s - s_i)^2 + 2b_i(s - s_i) + c_i \quad (\text{B-7})$$

$$F''(s) = 6a_i(s - s_i) + 2b_i \quad (\text{B-8})$$

現在再設定一個新參數 S_i , 令 $S_i = F''$, 故在點 (x_i, z_i) 及點 (x_{i+1}, z_{i+1}) 之曲率為

$$S_i = 2b_{ii} \quad \text{及} \quad S_{i+1} = 6a_i h_i + 2b_i \quad (\text{B-9})$$

由上式可得到

$$b_i = \frac{S_i}{2} \quad \text{及} \quad a_i = \frac{(S_{i+1} - S_i)}{6h_i} \quad (\text{B-10})$$

在此已可得到 a_i 、 b_i 、 d_i , 將已求得 a_i 、 b_i 、 d_i 代入(B-4)式, 可以解得

$$c_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \quad (\text{B-11})$$

現在已經可以把 a_i 、 b_i 、 c_i 、 d_i 的值用 S_i 、 h_i 、 F_i 來表示, 其中只剩下 S_i 的值是未知數。解 S_i 的值需配合"相鄰曲線間的斜率必須連續"這個條件, 所以 $F'_i(s_i) = F'_{i-1}(s_i)$ 。算式如下

$$F'_i(s_i) = 3a_i(s_i - s_i) + 2b_i(s_i - s_i) + c_i = c_i$$

$$\begin{aligned} F'_{i-1}(s_i) &= 3a_{i-1}(s_i - s_{i-1}) + 2b_{i-1}(s_i - s_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} \end{aligned}$$

把 a_i, b_i, c_i, d_i 的值用前面解出來的結果代入, 會得到下面的式子:

$$F'_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h_i} \\
&\quad - \frac{2h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6}
\end{aligned} \tag{B-12}$$

再將上式簡化成可得

$$\begin{aligned}
&h_{i-1}S_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i)S_i + h_iS_{i+1} \\
&= 6\left(\frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{F_i - F_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = 6(f[s_i, s_{i+1}] - f[s_{i-1}, s_i])
\end{aligned} \tag{B-13}$$

其中 $f[s_i, s_{i+1}]$ 指 $f(s_i) \sim f(s_{i+1})$ 間的平均值， $f[s_{i-1}, s_i]$ 指 $f(s_{i-1}) \sim f(s_i)$ 間的平均值。

(B-13)在 $n+1$ 的點中只適合 $i=1$ 到 $i=n-1$ 的點來用，所以在 $n+1$ 個未知數 S_i 中，只可得到 $n-1$ 個方程式，因此還需要兩個方程式。若可利用任何的內插方法來得到在始末點的切線斜率，即 $F'(s_0) = A$ 和 $F'(s_n) = B$ ，則可得到另外兩個方程式，在本文中使用 Lagrangian polynomial 來估算起末端斜率，求得之後可由(B-11)得到

在起始端滿足

$$2h_0S_0 + h_1S_1 = 6(f[s_0, s_1] - A) \tag{B-14}$$

在最末端滿足

$$h_{n-1}S_{n-1} + 2h_nS_n = 6(B - f[s_{n-1}, s_n]) \tag{B-15}$$

最後再將對 S_0, S_1, \dots, S_n 之所有方程式(B-13)、(B-14)、(B-15)寫成矩陣程式，可得

附錄 C 轉角處的合適條件

在某些例子裡，轉角處(coner points)的 Φ 及 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (或是 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial n}$)之間的幾何關係(合適條件)是可以知道的。且它們必須隨著時間而自動滿足數值解，否則隨著計算時間的增加，可能會因為誤差的累積造成對數值結果的不確定性。因此必須藉由在每個時刻裡，確定其確切的關係來減少整個誤差。在以下的敘述中，雖然是提出來用在 $(\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \frac{\partial\Phi}{\partial n})$ ，然而其亦可適用在 $(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial s}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial n})$ 。

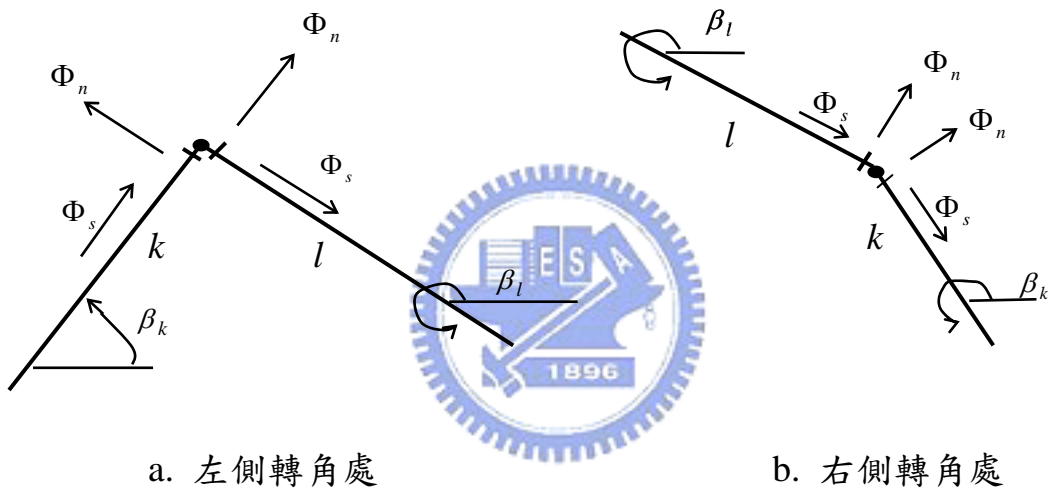


圖 C-1 轉角處合適條件

當部分邊界的速度勢為已知時，則 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 亦可被計算求得，如圖 C-1 假如自由水面與固體邊界交接點在第 k - l 段元素之間，當速度勢及 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 求得之後，因為在轉角點兩側的速度向量會相等，所以

$$u = (\Phi_s)_l \cos \beta_l - (\Phi_n)_l \sin \beta_l = (\Phi_s)_k \cos \beta_k - (\Phi_n)_k \sin \beta_k \quad (C-1)$$

$$w = (\Phi_s)_l \sin \beta_l + (\Phi_n)_l \cos \beta_l = (\Phi_s)_k \sin \beta_k + (\Phi_n)_k \cos \beta_k \quad (C-2)$$

或寫成

$$(\Phi_s)_l \cos \beta_l - (\Phi_s)_k \cos \beta_k = (\Phi_n)_l \sin \beta_l - (\Phi_n)_k \sin \beta_k \quad (a)$$

$$(\Phi_s)_l \sin \beta_l - (\Phi_s)_k \sin \beta_k = (\Phi_n)_k \cos \beta_k - (\Phi_n)_l \cos \beta_l \quad (b)$$

將 (b) $\times \cos \beta_k - (a) \times \sin \beta_k$ 可得

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \csc(\beta_l - \beta_k) - \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot(\beta_l - \beta_k) \quad (C-3)$$

在本文中，在造波板與自由水面的交接點， β_k 不會改變，且其值 $\beta_k = \frac{\pi}{2}$ ，因此可得

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \tan \beta_l - \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \csc \beta_l \quad (C-4)$$

如圖 C-2 在水槽末端為一堤面與水平面成一夾角 θ (當右邊界為幅射邊界時 $\theta = \frac{\pi}{2}$)，可得知 $\beta_k = \pi + \theta$ 及 $\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = 0$ ，所以

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot(\beta_k - \beta_l) = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot(\pi + \theta - \beta_l) \quad (C-5)$$

Grill et al.(1990)將應用此條件在數值計算中，並指出其可以有效地降低每個時刻由於數值誤差所造成的不確定性。

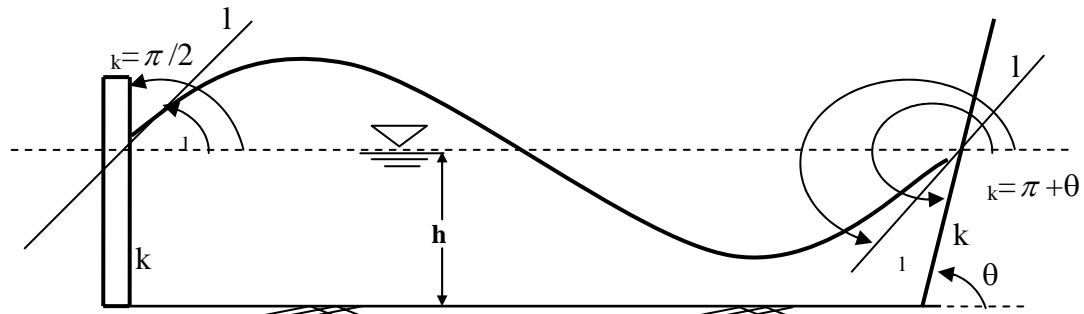


圖 C-2 轉角處示意圖

附錄 D 平滑技巧(Smoothing Technique)

幾乎所有的計算中，波形經過一長時間的模擬後，會出現”鋸齒狀”，水面點可能會在平滑曲線的上方或是下方，造成此種不穩定狀態的原因是未知的。經過測試後，顯示出一旦模擬開始，形成不穩定狀態的機率並不會隨著模擬時間而增加，所以其原因不是單純的是由誤差累積所引起的。在實際的狀態中，水的黏滯性可以減低此不穩定的狀態，然而本文中已忽略了黏滯性，故需作適當的處理。

而為了延續長時間穩定的模擬環境，本文將以下述的平滑技巧有效地來除去”鋸齒狀”帶來的不穩定性。即採用 Longuet-Higgins 和 Cokelet(1976)所提出的 5 點平滑公式，其為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{16}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{D-1})$$

經過測試後，本文在每經過 32 個時間間隔後，利用此公式來修正下一個時刻的 ξ 、 ζ 及 Φ ，然而其無法使用在自由水面與固體邊界交接處的上一點或下一點，因此本文使用 Sugino 及 Tosaka(1990)所提出的模擬公式，在上一點為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{17}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1}) \quad (\text{D-2})$$

在下一點為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{17}(4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{D-3})$$

套用上述的這些公式，就可以去除鋸齒狀而達到平滑，進而增加模擬環境的穩定性。

附錄 E 模式中質量的定義與推算

由於考慮水槽內的流體為均質不可壓縮流，其流體的密度 ρ 為定值。水槽內的總體積為 V ，總質量即為 $M = \rho V$ 。

當水槽在初始時，整個水槽處於靜止的狀況，其總質量 $M = hw$ ， h 為水深， w 為水槽總長度，如圖 E-1 所示。

當水槽開始造波時，其水槽內的體積 V^* 推算以水面上的 $n+1$ 個節點將水槽分割成 n 個梯形面積 $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_n$ ，水槽之總質量 $M^* = \rho V^* = \rho(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n)$ ，如圖 E-2 所示。

其中， $A_1 = [(y_1 + h) + (y_2 + h)](x_2 - x_1) / 2$

$$A_2 = [(y_2 + h) + (y_3 + h)](x_3 - x_2) / 2$$

⋮

$$A_n = [(y_{n+1} + h) + (y_n + h)](x_{n+1} - x_n) / 2$$

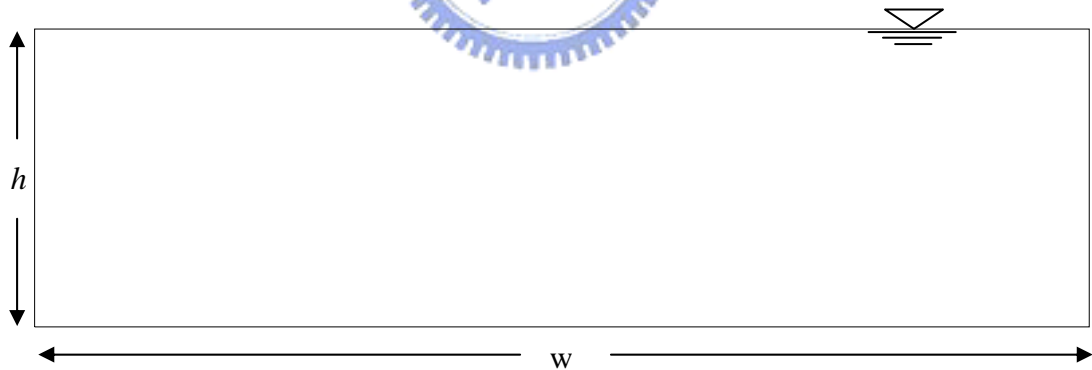


圖 E-1 初始水槽之剖面圖(靜止狀態)

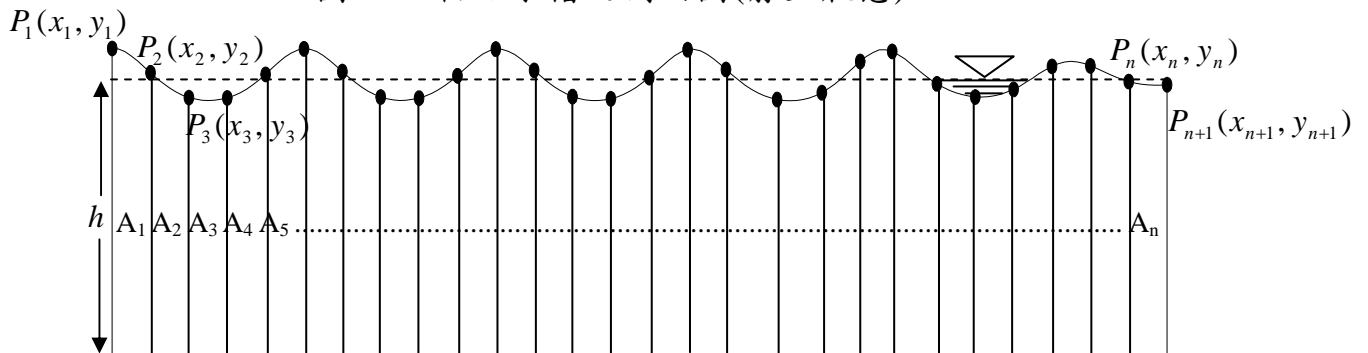


圖 E-2 達穩定水槽之剖面圖

附錄 F 模式中能量的定義與推算

水槽內的總能量(Total Energy)即總動能(Total Kinetic Energy)與總位能(Total Potential Energy)的和，其總動能及總位能的推算分別如下：

總動能為 $\frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$ ，即計算水槽內所有水粒子的動能。總動能可以簡化成 $\frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$ (即僅由邊界上物理量來計算)，其推導如下：

$$\text{由 Green's 定理 } \iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy)$$

$$\text{令 } F_1 = -\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad F_2 = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (\text{其中 } \nabla^2 \Phi = 0) \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) &= \oint_{\Gamma} \left(F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left(-\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left[\Phi \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) \right] ds \end{aligned}$$

$$= \oint_{\Gamma} \left[\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j \right) \right] ds$$

$$= \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

因此，總動能 = $\frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$

總位能 = $\frac{1}{2} \rho g \int_{free\ surface} \eta^2(x,t) dx$ ，即以平均水位為基準，波動時波浪所增加的總位能，其中 $\eta(x,t)$ 表波動時之水位。

