

第五章 數值例題測試

由文獻蒐集到的數個平面與空間桁架案例與兩個自創案例，用來測試新方法的可行性。本文會在各案例完成最佳化設計後，以圖說明其收斂過程，並且將節點位移及桿件應力分別以表格方式呈現，以說明最佳斷面滿足設計的限制條件。最後再將設計出之最佳斷面與其相對的重量，藉由表格與先前研究或參考模型之結果做比較。

另外也將在各案例設計後，特地以等分點切割搜尋範圍分別求出其相對的搜尋結果，利用一條曲線同時經過各搜尋點(α)與其相對的設計結果(weight)，藉由曲線的趨勢來觀察兩者的關係。

以下為本章測試的數值案例所列：

1. 平面 10 根桿件桁架(文獻案例，單載，情況 1)。
2. 平面 10 根桿件桁架(文獻案例，單載，情況 2)。
3. 平面 17 根桿件桁架(文獻案例，單載)。
4. 空間 72 根桿件桁架(文獻案例，單載)。
5. 空間 72 根桿件桁架(文獻案例，多載，情況 1)。
6. 空間 72 根桿件桁架(文獻案例，多載，情況 2)。
7. 空間 22 根桿件桁架(文獻案例，多載)。
8. 空間 22 根桿件桁架(自創案例，單載)。
9. 空間 25 根桿件桁架(自創案例，單載)。

5.1 例一：平面 10 根桿件桁架(單載，情況一)

如圖 5.1.1 所示，為一平面 10 根桿件懸臂桁架。先前有一些研究已對此案例做過最佳化設計，如：Venkayya[15]，Gellatly and Berke[16]，Schmit and Farshi[18]，Rizzi[20]，Lee, K.S and Geen [21]，而本文也採用此案例作為第一個測試並詳細說明計算過程。其材料密度為 0.11lb/in^3 ，彈性係數 $E=10000$ ksi，桿件容許應力為 ± 25 ksi，各節點容許位移為 ± 2 in(水平與垂直方向)，受力情形為節點 2 與節點 4 各受一 100 kips 向下垂直力。

首先將斷面皆設為 1in^2 進行 FSD 設計，表 5.1.1 為 FSD 經 40 次迭代收斂後結果，由於 FSD 最終收斂結果會出現極小值之斷面，為了使結構分析過程中避免分母為零(Divide by zero)的錯誤發生，故將極小值以 10^{-4} 代替。因此 $A_{F,i}$ 分別為 8.0000, 0.0001, 8.0000, 4.0000, 0.0001, 0.0001, 5.6569, 5.6569, 5.6569, 0.0001。表 5.1.2 與表 5.1.3 分別為 A_F 斷面經結構分析後節點位移與桿件應力，由表 5.1.3 可知，除了極小斷面桿件 2、5、6、10 外，其餘桿件皆可以達到其容許應力 25 ksi。由表 5.1.2 得知最大位移發生在節點 2，且最大位移量 Δ_F 約為 7.2 in 往下，因此將節點 2 設為控制點進行啟發式最佳化設計。

選定控制點後，先以 α 為 1 等倍放大 $A_{F,i}$ 當作啟發式修正的初始斷面 $A^{(0)}$ ，依公式(4-2)建立所需資料，包括桿件的長度(L)、面積(A)、實際外力所受的桿件力(S)、單位力施在控制點上之桿件力(u)，並算出各桿件的對於節點 2 所造成的部分位移量 Δ_i 與本身重量 W_i 。依式(4-7)計算修正敏感度 I_i ，其中 $A_{F,i}$ 趨近於零之桿件，包括桿件 2、5、6、10 表示不對其進行修改，所以將其值設成零。 I_i 值求得後便可依式(4-8)建立等式 $\Delta'(K)=\Delta_{\text{allow}}$ ，經計算後得 K 值為 2108.1。將 K 值代入式(4-9)獲得一次修正後斷面 $A_i^{(1)}$ ，分別為 30.1195, 0.1000, 22.0376, 15.0598, 0.1000, 0.1000, 5.6603, 21.2972, 21.2978, 0.1000。將 $A^{(1)}$ 經結構矩陣分析後，得節點 2 實際位移量 Δ_{real} 為 2.0245 向下，利用公式(4-10)做二次修正後，得 $A_i^{(2)}$ 分別為 30.4885, 0.1012, 22.3076, 15.2443, 0.1012, 0.1012, 5.7296, 21.5581, 21.5587, 0.1012，其相對的重量為 4952.39 lb，此時便完成第一次搜尋過程。上述斷面修正過程可以參考表 5.1.4。

將 $\alpha=1$ 時之修改後斷面代入結構矩陣分析，發現桿件 5 應力為 -36.1 ksi 且節點 1 也超過容許位移，因此需將 α 放大再次搜尋，由 $\Delta_F=7.2$ 可知放大的上限為 Δ_F 除上 Δ_{allow} 即 3.6 。表 5.1.5 特地列出 α 為 3.6 時的搜尋結果，由表可以發現放大後斷面 $A_i^{(0)}$ 剛好使控制點位移為 Δ_{allow} ，進行修正時得到 K 值為零，表示斷面不做啟發式修正，這也說明為何搜尋上限為 Δ_F 除上 Δ_{allow} 。

第二次搜尋取 α 為 $(1+3.6)/2=2.3$ ，將其修正後斷面 $A_i^{(2)}$ 代入結構矩陣分析，其容許位移與容許應力皆滿足，此時的重量為 5289.98 lb，因此下次搜尋可以縮小 α 值。第三次取 $\alpha=(2.3+1)/2=1.65$ ，其修正後斷面 $A_i^{(2)}$ 以結構分析後皆滿足限制條件，且重量為 5108.80 lb，小於 α 為 2.3 時之重量，因此可再縮小 α 。第四次搜尋取 $\alpha=(1.65+1)/2=1.325$ ，其搜尋後結果發現節點 1 位移為 2.0374 in 超過容許位移 2 in，因此需放大 α 值進行下一次的搜尋。

經由上述過程不斷地搜尋，設其停止條件為前後 α 值相差小於 10^{-3} ，經 13 次搜尋後可獲得一收斂 α 值約為 1.540186 ，修正後斷面 $A^{(2)}$ 分別為 30.0772 ， 0.1006 ， 23.0031 ， 15.0386 ， 0.1006 ， 0.1006 ， 8.7638 ， 21.2673 ， 21.2678 ， 0.1001 (in^2)，相對的重量為 5079.97 lb。第 2 次至第 13 次完整搜尋過程可以參考表 5.1.6~表 5.1.17。表 5.1.18 列出 13 次搜尋中 α 值與其相對的重量，表中第八次搜尋結果為 5081.94 lb 且為可行設計，其值已與最終的 5079.97 lb 非常相近。其收斂過程如圖 5.1.2 所示，圖中三角點代表非可行設計，圓黑點代表可行設計，由圖可發現搜尋很快就達到收斂。

圖 5.1.3 為搜尋空間，圖中的曲線為搜尋範圍中以 0.1 為等分，取 α 離散點而分別求出設計結果後所描繪的曲線，虛線為 $\alpha=1.540186$ 之垂直線，其代表意義為可行與非可行設計界線，虛線往右為可行設計，往左則為不可行設計。而搜尋點就是在曲線上移動，藉由搜尋結果是否為可行設計來判斷 α 的修改方向，而慢慢收斂至曲線與虛線的交點

將最終設計斷面經結構分析後，其節點位移(表 5.1.19)最大量為 2.000 in 剛好為容許位移；桿件應力(表 5.1.20)最大量為 -19.957 ksi 也小於容許應力 25 ksi。表 5.1.21 為與先前研究所設計的最佳化斷面做比較，其中與最輕重量

5057.88 lb[21]相差約為 4%。

5.2 例二：平面 10 根桿件桁架(單載，情況二)

此例題與例題一只有受力情形不一樣，其受力情形為節點 1 與節點 3 各受一 50 kips 的向上垂直力，節點 2 與節點 4 各受一 150 kips 的向下垂直力。首先經 FSD 迭代 30 次後，得 $A_{F,i}$ 斷面分別為 6.0000, 0.0001, 10.0000, 4.0000, 0.0001, 2.0000, 8.4853, 2.8284, 5.6569, 0.0001 (in^2)。經 14 次搜尋後，前後兩 α 值相差為 0.0003 已比 10^{-3} 小故停止搜尋。表 5.2.1 為搜尋過程中 α 值與其相對的重量，可由表看出搜尋時 α 修改的方向，第一次搜尋後為非可行設計，因此放大 α 值進行第二次搜尋；第二次搜尋後結果為可行設計，所以縮小 α 值進行第三次搜尋。如此，藉由 α 值不斷修正進行搜尋，最終收斂的 α 值為 1.468140，修正後斷面分別為 23.710, 0.102, 24.990, 14.011, 0.102, 2.986, 12.668, 13.359, 19.815, 0.102 (in^2)，相對的重量為 4711.521lb。圖 5.2.1 為搜尋收斂過程，由圖可看出，差不多在第七次搜尋就已經快接近收斂的最終重量。圖 5.2.2 為搜尋空間，由圖可看出其曲線與案例一搜尋空間中的曲線類似，當 α 大於 1 時，設計重量皆有隨著 α 值增加而往上的趨勢。而最佳斷面經結構矩陣分析後結果如表 5.2.2 與表 5.2.3 所示，其節點位移皆小於 2 in，桿件應力也皆小於 25 ksi。表 5.2.4 為與先前研究所設計的最佳化斷面做比較，其中與最輕的重量 4668.81 lb 相差約為 9%。

5.3 例三：平面 17 根桿件桁架(單載)

如圖 3.6 所示，為一平面 17 根桿件桁架，共有 9 各節點。先前研究如：Adeli and Kumar[10]、K. S and Geen [21]與 Khot and Berke[23]皆對此結構都作過最佳化設計。其材料密度為 0.268 lb/in^3 ，彈性係數 $E=30000 \text{ ksi}$ ，桿件容許應力為 $\pm 50 \text{ ksi}$ ，各節點容許位移為 $\pm 2 \text{ in}$ (水平與垂直方向)，受力情形為節點 9 受一 100 kips 的向下垂直力。FSD 迭代 58 次後，得收斂斷面 $A_{F,i}$ 分別為 8.0000, 0.0001, 6.0000, 0.0001, 4.0000, 2.8284, 6.0000, 0.0001, 4.0000, 0.0001,

2.0000, 0.0001, 2.8284, 2.0000, 2.8284, 0.0001, 2.8284 (in²)。經啟發式搜尋 11 次後，前後兩次之 α 值相差為 0.000977 已小於 10^{-3} ，最終 α 值為 0.000977，最佳斷面分別為 15.937, 0.100, 11.953, 0.100, 7.969, 5.635, 11.953, 0.100, 7.969, 0.100, 3.984, 0.100, 5.635, 3.984, 5.635, 0.100, 5.635 (in²)，其相對的重量為 2582.171lb，與文獻[21]最輕重量 2580.811lb 相差約 0.5%。

由收斂過程圖 5.3.1 可知，每次搜尋結果都在 2582.04 lb 到 2582.20 lb 之間跳動，或由搜尋空間圖 5.3.2 亦可以發現，不管 α 值為多少其重量結果幾乎皆一樣。此特殊情況的原因為每根桿件經由式(4-7)計算修正敏感度時，如表 5.3.5 所示，其 I_i 值除了零值外皆一樣，所以 I 值在每次修正時就如一個常數。由等式(4-8)可知如果 I 值為常數可以將式修改為如下：

$$\Delta_i'(K) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i}{(1 + KI_i)^{0.5}} = \frac{1}{(1 + KI)^{0.5}} \sum_{i=1}^N \Delta_i = \Delta_{\text{allow}} \quad (5-1)$$

將上式整理後可以得斷面修改的倍數如下：

$$(1 + KI)^{0.5} = \frac{\sum \Delta_i}{\Delta_{\text{allow}}} \quad (5-2)$$

將式(5-2)代入式(4-9)：

$$A_i^{(1)} = \begin{cases} A_{\min} & \text{if } A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} \leq A_{\min} \\ A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} = A_i^{(0)} \cdot \frac{\sum \Delta_i}{\Delta_{\text{allow}}} & \text{else} \end{cases} \quad (5-3)$$

如果將 FSD 設計出之斷面 A_F 縮放 α 倍，則上式如下：

$$A_i^{(1)} = \begin{cases} A_{\min} & \text{if } A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} \leq A_{\min} \\ \alpha \cdot A_F \cdot \frac{\alpha}{\Delta_{\text{allow}}} = A_F \cdot \frac{\Delta_F}{\Delta_{\text{allow}}} & \text{else} \end{cases} \quad (5-4)$$

由上式可知，在 I 值除了零以外皆一樣的情況下，不管 α 值為何，經修改後其斷面皆一樣，所以重量亦為相同。此情況與 FUD 設計類似，依最大位移與容許位

移之比例放大各面積，其主要不同處為放大過程中，啟發式方法只選擇對控制點位移敏感度高的桿件斷面做放大而並非全部。

因此只要在修正時，發現各桿件的修正敏感度除了零值外皆一樣或彼此相近時，則搜尋中 α 值是無意義的，因此只需要做 α 為 1 時的修正便可完成設計。如表 5.3.5 所示， α 為 1 時的修正後斷面即可以為最終的設計斷面，其重量為 2582.09 lb。

5.4 例四：空間 72 根桿件桁架(單載)

空間 72 根桿件桁架，如圖 5.4.1 所示，此結構已被很多桁架斷面最佳化設計研究所採用，包括 Venkayya[15]，Gellatly and Berke[16]，Schmit and Farshi[18]，Schmit and Miura[19]，Khan and Willmert[22]，Adeli and Kamal[24]，Adeli and Park[25]，葉建祿[26]…等。結構節點標號如圖 5.4.2，共 20 個節點，表 5.4.3 為桿件的起始節點編號與末端節點編號。斷面分成 16 組設計斷面，如表 5.4.1 所示。結構的材料密度為 0.1 lb/in^3 ，彈性係數為 10000 ksi，位移限制為各節點位移不可超過 0.25 in(x與y方向)，容許應力為 25 ksi，受力情形為節點 17 在x與y方向各受 5 kips與在z方向受-5 kips，以上設計條件可參考表 5.4.2。此例題屬於 4.4.1 小節所提到的設計斷面分組情形，因此藉由此例題實際說明如何讓同組斷面可以一致修正。

首先一樣是先進行FSD設計，其中須注意的是迭代過程中，以同組桿件斷面為單一修正，也就是修正的為 16 組斷面而不再是 72 根桿件斷面。在每次迭代過程中，同組裡每根桿件經應力比修正後，其最大面積者為控制，當做該組修正後斷面。經FSD迭代 21 次後，得 16 組收斂斷面 $A_{F,j}$ ，分別為 0.2923, 0.0709, 0.0001, 0.0001, 0.2130, 0.0709, 0.0001, 0.0001, 0.1177, 0.0709, 0.0001, 0.0106, 0.1291, 0.0793, 0.0687, 0.0853 (in^2)。將 72 根桿件斷面分別依所屬的組別面積分配後，經結構分析後得最大位移量為 1.7839 in，且發生在節點 17，因此將節點 17 設為控制點。

選定好控制點後便可進行啟發式搜尋，先以 α 為 1 將 $A_{F,j}$ 斷面等倍放大當作

初始斷面 $A_j^{(0)}$ ，建立好式(4-2)所須資料後便可進行啟發式斷面修正。如表 5.4.4 所示，將每組對於控制點的總位移量 Δ_j 與每組裡桿件的總重 W_j 分別計算出，依式(4-11)計算斷面修正敏感度 I_j ，然後建立(4-12)等式並計算出 K 值為 1278.04，代入式(4-13)獲得一次修正斷面 $A_j^{(1)}$ 。將修正後斷面經結構分析計算後，得控制點位移量為 0.2494 in，再經式(4-14)依控制點位移量與容許位移之比例，做二次修正後得斷面 $A_j^{(2)}$ 便完成一次搜尋。由表 5.4.4 可知，修正過程中每一步驟皆是以組為單位進行計算，如此才可以符合設計斷面分組的要求。接下來就如一般搜尋過程，藉由 α 不斷的更新使斷面同時滿足位移限制與應力限制。

第一次搜尋結果，發現修正後斷面可以同時滿足兩限制且重量為 375.90 lb，所以取 α 為 0.5 進行第二次搜尋。第二次搜尋後亦發現斷面皆滿足兩限制要求且重量為 372.50 lb，因此再取 α 為 0.25 進行第三次搜尋。第三次搜尋後發現斷面一樣可以同時滿足兩限制且重量為 378.42 lb。由以上三次搜尋發現，設計結果皆無非可行設計且三次重量也都不一樣，此情況表示每次搜尋的結果皆為可行設計，所以搜尋中不會出現可行與非可行設計的界線。因此搜尋就是要在所有設計結果中找尋重量最輕者，而本論文採用黃金切割搜尋法(Golden section search)在搜尋範圍內尋找最輕的重量。

利用黃金切割搜尋法，設其停止條件為 α 搜尋範圍小於 10^{-2} ，經 11 次搜尋後得到 α 為 0.773982，斷面分別為 1.829, 0.500, 0.100, 0.100, 1.249, 0.500, 0.100, 0.100, 0.499, 0.501, 0.100, 0.100, 0.100, 0.506, 0.451, 0.596 (in²)，相對的重量為 370.12 lb，其重量比文獻[26]利用遺傳演算法所設計出的 379 lb 還要輕。

黃金切割搜尋過程可以參考表 5.4.5，其收斂過程如圖 5.4.3 所示。圖 5.4.4 為搜尋空間，圖中曲線上的每個點都是可行設計，且由圖可知最輕重量發生在 α 值為 0~1 的範圍內。表 5.4.6 與表 5.4.7 為最佳斷面經結構分析後節點位移與桿件應力結果，由表可知，設計出的最佳斷面經結構分析後，皆滿足限制條件。

5.5 例五：空間 72 根桿件桁架(多載，情況一)

此例題與例題四只有受力情形不同，其餘設計條件皆一樣。其受力情形如表 5.5.1 所示，為多重載重情形。在 4.4.2 小節提到，新方法對於多載情況下並不適用，但是多重載重中如果有一載重可以控制最大位移的發生，則本文方法還是可以使用，因此本文也嘗試對多載情況下的桁架做最佳化設計。

首先進行FSD設計，設計中除了考慮斷面分組外，在每次迭代過程亦須同時考慮各種載重情形，經 22 次迭代後的收斂斷面 $A_{F,j}$ ，分別為 0.2968, 0.0716, 0.0001, 0.0001, 0.2162, 0.0716, 0.0001, 0.0001, 0.2005, 0.0716, 0.0001, 0.0030, 0.1986, 0.0740, 0.0693, 0.0913 (in^2)。將 $A_{F,j}$ 分別受載重一與載重二下，經結構分析得節點位移如表 5.5.2 與表 5.5.3 所列，由兩表可發現最大位移發生在節點 17 且為載重一情況下，因此將載重一視為控制載重且控制點為節點 17。選定好控制載重與控制點後，接下來的啟發式斷面修正就如例題四所描述的分組修正過程一樣，其不同處在於計算斷面修正敏感度時，用來判斷是否為零的 $A_{F,j}$ 條件，需改用成控制載重作用下經FSD設計出的斷面 $A_{F,j}^{CL}$ ，其斷面與例題四的 $A_{F,j}$ 一樣，分別為 0.2923, 0.0709, 0.0001, 0.0001, 0.2130, 0.0709, 0.0001, 0.0001, 0.1177, 0.0709, 0.0001, 0.0106, 0.1291, 0.0793, 0.0687, 0.0853。由 $A_{F,j}^{CL}$ 可知第 3、4、7、8、11 組斷面的修正敏感度 I_j 需設成零表示不修正，如表 5.5.4 虛線框所示，而實線框因為其 Δ_j 為負值，因此亦為零。計算出 I_j 值後便可建立等式(4-12)並計算出K值，再經由(4-13)與式(4-14)兩式修正後即完成一次搜尋。

經過 13 次搜尋後，如表 5.5.5 所列，前後兩次的 α 值相差為 0.000244 已比 10^{-3} 小，最終 α 值為 0.798584，修正後斷面分別為 1.872, 0.512, 0.100, 0.100, 1.271, 0.512, 0.100, 0.100, 0.531, 0.512, 0.100, 0.100, 0.158, 0.5130, 0.465, 0.640，相對的重量為 380.326 lb。其收斂情形可參考圖 5.5.1，圖 5.5.2 為搜尋空間，實線與虛線的交點即為最佳解。表 5.5.6 與表 5.5.7 分別為最佳斷面受載重一與載重二下，經結構分析後的節點位移與桿件應力，由表可以得知，

最佳斷面在雙載重作用下，容許位移與容許應力皆可以滿足。表 5.5.8 列出先前研究所設計出的最佳斷面與重量，其中本研究所設計出的重量與最輕重量相差約為 3%。

5.6 例六：空間 72 根桿件桁架(多載，情況二)

此例與例五只有設計最小斷面是不一樣，其設計最小斷面要求為 0.01 in^2 。經過 11 次搜尋後，前後兩次的 α 值相差為 0.000977 已比 10^{-3} 小故停止搜尋。最終可行設計發生在第八次，其 α 值為 0.897461，斷面分別為 1.902, 0.520, 0.010, 0.010, 1.293, 0.520, 0.010, 0.010, 0.545, 0.520, 0.010, 0.017, 0.179, 0.522, 0.472, 0.650 (in^2)，相對的重量為 364.93 lb。搜尋過程中 α 值與其相對重量可參考表 5.6.1，圖 5.6.2 為收斂情形，由圖可知收斂的最終結果並非可行設計，因此取第八次搜尋結果當為此案例的最終設計。圖 5.6.1 為搜尋空間，實線與虛線的交點即為最佳解。

表 5.6.2 與表 5.6.3 為最終設計斷面分別受載重一與載重二下，經結構分析後的節點為移與桿件應力，由表可知最佳斷面確實滿足雙載重作用下的容許位移與容許應力要求。表 5.6.4 列出先前研究所設計出的最佳斷面與重量，其中本文研究與最輕重量 364.33 lb 相差約為 2%。

5.7 例七：空間 22 根桿件桁架(多載)

空間 22 根桿件如圖 5.7.1 所示，除了支承點 5、6、7、8 外，每個節點皆以桿件與其餘節點相連，其桿件連結情形可以參考表 5.7.1。結構彈性係數為 10000 ksi，密度為 0.1 lb/in^3 。設計斷面如表 5.7.2 共分成七組，桿件的應力限制亦分成七組(參考表 5.7.3)，位移限制為各節點 x、y、z 方向皆不可超過 2in，受力情形為表 5.7.4 三種載重同時考慮，而設計的最小斷面積為 0.1 in^2 。

經啟發式搜尋 11 次後，最後兩次 α 值相差為 0.000917，已比 10^{-3} 小故停止搜尋，其最終 α 值為 1.000059，最佳斷面尺寸分別為 2.5794, 1.3009, 0.2777，

0.5520, 2.8203, 2.1913, 1.9171 (in²), 相對重量為 1026.31b。搜尋過程中 α 值與其相對重量請參考表 5.7.5。圖 5.7.2 為收斂過程，由圖可知第六次搜尋結果已與最終結果很相近。

最終設計斷面分別受三載重下，經結構分析後，節點位移(表 5.7.6)皆未超過 2 in 且桿件應力(表 5.7.7)也都未超過容許應力。表 5.7.8 為與先前研究所設計出的最佳斷面最比較，其中與最輕重量 1022.23 相差約 4%。

5.8 例八：空間 22 根桿件桁架(單載)

此案例與案例七主要差別為受力情形為單載(參考 5.7.4 載重一)，其餘設計條件與限制皆相同。搜尋過程中，由於 α 在 1、0.5 與 0.25 時皆為可行設計，此情況與例題四一樣，表示每次搜尋結果皆為可行設計，所以採用黃金切割搜尋在所有可行設計中找尋最輕重量。經過 11 次黃金切割搜尋後，得 α 為 0.944272，斷面尺寸分別為 4.043, 1.258, 0.100, 0.100, 4.213, 0.100, 0.100 (in²)，相對的重量為 861.72 lb。黃金切割搜尋過程可以參考表 5.8.1。

收斂過程如圖 5.8.1 所示，由圖可知在第五次已經找到最終解了。將最終設計斷面經結構分析後，節點位移(表 5.8.3)最大為 1.9994 in，滿足容許位移 2in，且桿件應力(表 5.8.4)也皆滿足應力限制。

利用參考模型設計，表 5.8.3 為系統參數的設定，變數共有七個，範圍為 0.1in²~4.3in²。經 2000 次演算後，獲得收斂的最佳斷面尺寸分別為 4.049, 1.207, 0.100, 0.100, 4.207, 0.100, 0.109 (in²)，其相對的重量為 861.821b。圖 5.8.3 為收斂情形，圖中黑點表示演化至 1408 代時重量以不再降下了。

圖 5.8.4 為設計斷面比較，由圖可以發現兩者設計出之斷面尺寸非常接近，其中第 3、4、6、7 組斷面皆幾乎以最小斷面設計，而在重量方面兩者也非常相近。比較兩者搜尋次數，啟發式設計方法一共搜尋 11 次，與參考模型的 1408 次相比起來有效率多了。

5.9 例九：空間 25 根桿件桁架(單載)

空間 25 根桿件如圖 5.9.1 所示，共有 10 個節點，桿件與節點關係可參考表 5.9.1。斷面為分組設計，如表 5.9.2 共分為 8 組，材料密度為 $0.11\text{lb}/\text{in}^3$ ，彈性係數為 10000 ksi，各節點位移限制為 0.35in，容許應力為 40 ksi，受力情形如表 5.9.3 所示。

經 11 次啟發式搜尋後，前後兩次搜尋的 α 值已相差小於 10^{-3} ，最終 α 為 0.000977，斷面分別為 0.100，0.357，3.399，0.100，1.892，0.779，0.100，3.975 (in^2)，相對的重量為 470.371b。最終設計斷面經結構分析後，節點位移(表 5.9.5)最大為 0.3500 in，發生在節點 1；桿件應力(表 5.9.6)也皆未超過容許應力 40 ksi。表 5.9.4 為搜尋過程中 α 與其相對重量，由表可以發現 11 次搜尋中重量幾乎一樣，且由圖 5.9.2 搜尋空間亦可發現，設計結果曲線幾乎為一直線。此原因如例題三所提到，當各桿件的修正敏感度，除了零以外的值相當接近時，則搜尋過程中 α 是無意義的，因此只需要做一次搜尋即可完成設計。

利用參考模型設計，表 5.9.7 為系統參數設定，變數共有 8 個，其範圍為 $0.1\text{in}^2 \sim 4\text{in}^2$ ，停止條件為演化 1000 代。圖 5.9.2 為演化收斂過程，圖中黑點表示在第 577 次已達最小重量而不再往下降，最終收斂斷面尺寸分別為 0.100，0.108，3.698，0.100，2.128，0.764，0.219，3.743 (in^2)，其相對的重量為 468.761b。

圖 5.9.3 為兩方法設計出的斷面比較，由圖可以發現兩者在斷面設計趨勢上是一樣的，在第 1，3，4，7 組斷面皆是以很小面積設計，而在第 3 與第 8 組都以較大的面積設計。搜尋次數方面，啟發式方法只用了 11 次便可完成，而遺傳演算法卻需要 577 次的搜尋。

5.10 討論

5.10.1 搜尋過程討論

由以上九個案例設計可知，原本多變數的設計問題經本文方法被轉化成單一變數的搜尋，且皆可以在少量的搜尋次數完成設計。而從各案例搜尋空間中的設計曲線可發現，在 α 值為 1 至搜尋上限範圍內，設計重量會隨 α 值的變大而增加。除此之外，設計曲線在一般情況下會有一凹曲段，且發生在 α 值為 0 至 1 範圍內。

綜合以上案例，其搜尋過程大致可以分為兩種類型：

1. 搜尋過程中會出現可行設計與非可行設計界線。如案例 1、案例 2、案例 5、案例 6 與案例 7，此為最常見的搜尋情況，每次搜尋時可以藉由結果是否為可行設計來判斷 α 值的搜尋方向，直到前後兩搜尋的 α 值相差小於一容忍值而停止搜尋。
2. 搜尋過程中，如果 α 值在 1，0.5 與 0.25 時皆為可行設計，則搜尋過程中可能不會出現可行設計與非可行設計之界線，即表示每次搜尋的結果皆為可行設計，遇此情形則採用黃金切割搜尋，在所有可行設計中找到最輕重量者。此類情形如案例 4 與案例 8。

其中特例情形如案例 3 與案例 9，啟發式斷面修正時，如果每根或每組斷面修正敏感度幾乎一樣時，則搜尋中的 α 值便失去意義，因此只需要做一次搜尋即可。

5.10.2 設計時所需搜尋次數與結構分析次數之討論

如表 5.10.1 所列，以上九個案例設計皆可以在不到 15 次的搜尋找到近似最佳的斷面設計，相對於遺傳演算法，需要上百次甚至上萬次的搜尋是非常有效率的。其中案例 3 與案例 9 雖然做了 11 次的搜尋，但是如果在第一次搜尋時事先發現其特殊狀況，其實只需要一次就可以完成設計。

其實不管利用何種最佳化設計方法，過程中大部分的時間皆花費在結構分析計算上。而本文最佳化方法花費在結構分析上主要有兩部分：一是在 FSD 設計時需要進行結構分析計算，一般在 60 次內皆可以達收斂；二是在每次搜尋過程中，斷面做二次修正時需先經結構分析後，得控制點位移才可依比例做調整，因此每次搜尋需 1 次的結構分析計算。以案例一而言，FSD 迭代 40 次需 40 次結構分析計算，而搜尋過程如表 5.1.18 所示，共 13 次因此需要 13 次結構分析計算，所以案例整個設計下來共需要 $(40+13)=53$ 次的結構分析計算。

至於多載情況下，在 FSD 階段所做的結構分析次數為迭代次數乘於載重數量，外加控制載重 FSD 迭代的次數，而搜尋時每次需經 1 次結構分析。以案例五而言，雙載重情況下的 FSD，結構分析次數為迭代次數的兩倍，因此需要 $(30*2)=60$ 次，外加控制載重下的 FSD 需 20 次，而搜尋 13 次需要 13 次結構分析，所以總共花費 93 次結構分析計算。表 5.10.2 為本文九個案例設計所需的結構分析次數，其中以案例 7 的 156 次為最多，其餘皆在 100 次內。

與參考模型比較，例題八設計時每代族群數為 50，演化世代為 2000，則所需的結構分析次數為每代族群數與演化世代的乘積，共需要十萬次的結構分析計算，與利用本文方法設計相較，足足大了約 $(100000/68)=1470$ 倍。可知利用新方法設計時，花費在結構分析計算上是很少量的。

5.10.3 設計結果比較

表 5.10.3 為本文九個案例利用新方法設計後的重量比較表，其中案例 1、2、3、5、6、7 與文獻[21]蒐集到的最輕重量做比較，案例 4 與文獻[26]做比較，案例 8 與 9 則與本文參考模型做比較。

由表 5.10.3 可看出，本論文方法設計出來的桁架重量皆與文獻或參考模型相差不到 1%，且案例四設計出來的重量還比文獻[26]利用遺傳演算法所設計出的重量輕。由此可知，雖然以啟發式最佳化方法設計出的結果並非最佳，但是與最佳設計已非常相近。