

第三章 參考模型

遺傳演算法為近十年來最廣泛被應用在桁架斷面尺寸最佳化設計之技術，其優點在第二章文獻回顧已簡述過，因此本章不多做介紹。而本論文研究也將採用遺傳演算法作為新方法的參考模型(Reference model)，藉由此章節簡略說明參考模型中結構分析程式與遺傳演算法模組的建立。

3.1 二維桁架分析

二維桁架直接勁度法簡述如下：

由材料力學觀念可知，桿件內力與位移關係如下：

$$\{Q\} = [k]\{\delta\}, \text{ 即 } \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (3-1)$$

其中：

$Q_1 \sim Q_4$ ：區域座標下，桿件內力。

$\delta_1 \sim \delta_4$ ：區域座標下，節點位移。

由圖 3.1 可推得區域座標下桿件內力與整體座標下桿件內力關係如下：

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

同理整體座標下桿件內力與區域座標下桿件內力如下：

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

定義座標轉換矩陣 $[T]$ 為下：

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

由式(3-2)及(3-3)推得：

$$[T]^T = [T]^{-1} \quad (3-5)$$

而由圖 3.1 亦可得知區域座標下節點位移與整體座標下節點位移關係如下：

$$\{\delta\} = [T]\{v\} \quad (3-6)$$

由式(3-1)及(3-2)可得

$$\{Q\} = [k]\{\delta\} = [T]\{F\} \quad (3-7)$$

將式(3-6)代入(3-7)式，得

$$[k][T]\{v\} = [T]\{F\} \quad (3-8)$$

(3-8)式兩邊乘上 $[T]^{-1}$ ，即：

$$\{F\} = [T]^{-1}[k][T]\{v\} = [T]^{-1}[k][T]\{v\} = [K]\{v\} \quad (3-9)$$

其中整體勁度矩陣 $[K]$ 詳細內容如下：

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

將(3-9)式等號兩邊乘上 $[K]^{-1}$ ，便可節點位移得，即：

$$\{v\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (3-11)$$

將(3-9)式代入(3-7)式，可得桿件之內力，即：

$$\{Q\} = [T][K]\{v\} \quad (3-12)$$

3.2 三維桁架分析

三維桁架的直接勁度法觀念與二維桁架最主要差別在於節點自由度有 3，如圖 3.2 所示。由圖 3.2 可推得區域座標下桿件內力與整體座標下桿件內力關係如下：

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

定義座標轉換矩陣 [T]：

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

其餘過程與二維桁架分析類似，其中式(3-10)之三維整體勁度矩陣 [K] 如下：

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2\theta_x & C\theta_x C\theta_y & C\theta_x C\theta_z & -C^2\theta_x & -C\theta_x C\theta_y & -C\theta_x C\theta_z \\ C\theta_x C\theta_y & C^2\theta_y & C\theta_y C\theta_z & -C\theta_x C\theta_y & -C^2\theta_y & -C\theta_y C\theta_z \\ C\theta_x C\theta_z & C\theta_y C\theta_z & C^2\theta_z & -C\theta_x C\theta_z & -C\theta_y C\theta_z & -C^2\theta_z \\ -C^2\theta_x & -C\theta_x C\theta_y & -C\theta_x C\theta_z & C^2\theta_x & C\theta_x C\theta_y & C\theta_x C\theta_z \\ -C\theta_x C\theta_y & -C^2\theta_y & -C\theta_y C\theta_z & C\theta_x C\theta_y & C^2\theta_y & C\theta_y C\theta_z \\ -C\theta_x C\theta_z & -C\theta_y C\theta_z & -C^2\theta_z & C\theta_x C\theta_z & C\theta_y C\theta_z & C^2\theta_z \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

3.3 遺傳演算法參考模型的建立

由於本文建立參考模型主要為做比較，並非針對遺傳演算法做深入探討，因此採用的為簡單型遺傳演算法 (Simple Genetic Algorithms) 簡稱為 SGA，此為遺傳演算法最先提出模擬自然界演化架構。本文所使用的遺傳演算法模組是外掛於數學運算軟體 MATLAB 上，由 Jeff Joines 所撰寫，該程式被設計來求問題之最大值；而桁架結構分析程式是利用 C++ 程式語言撰寫。為了使整個遺傳演算法桁架最佳化設計執行時可以流暢，因此學生利用 MATLAB 軟體提供的

API(Application Program interface)來與 C++ 程式做溝通[14]，其方法主要是將 C++ 語言所撰寫的程式經由 MATLAB 軟體編譯、製作成動態連結檔(.dll)，使 MATLAB 執行時可以呼叫使用。以下為遺傳演算法作桁架斷面尺寸最佳化設計中適應度函數的建立與演化過程所利用的方法簡述：

3.3.1 適應度函數的建立

由於大部分的結構最佳化問題均屬於有限制條件的最佳化問題，因此在遺傳演算法中，需將限制函數與目標函數結合成為一個無限制的最佳化問題，也就是適應度函數的建立，而本文則採用外懲罰函數(exterior penalty function)方法將限制函數併入目標函數，其方法如下：

將(2-2)及(2-3)式正規化(normalization)，改寫如下：

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{allow}} - 1 \leq 0 \quad i = 1 \text{ to } m \quad (3-16)$$

$$\frac{\delta_j}{\delta_{allow}} - 1 \leq 0 \quad j = 1 \text{ to } n \quad (3-17)$$



定義：

$$g_i(x) = \frac{\sigma_i}{\sigma_{allow}} - 1 \quad \text{for } i = 1 \text{ to } m \quad (3-18)$$

$$h_j(x) = \frac{\delta_j}{\delta_{allow}} - 1 \quad \text{for } j = 1 \text{ to } n \quad (3-19)$$

由上面兩式，當 $g_i(x) > 0$ 時，表示桿件所受應力大於容許應力；同理當 $d_j(x) > 0$ 時，表示節點位移大於容許位移。在此定義三個名詞，分別為桿件之違反限制常數 c_i 、節點位移之違反限制常數 d_j 及總違反限制常數 C ：

$$c_i = \begin{cases} g_i & \text{when } g_i \geq 0 \\ 0 & \text{when } g_i < 0 \end{cases} \quad \text{for } i = 1 \text{ to } m \quad (3-20)$$

$$d_j = \begin{cases} d_j & \text{when } d_j \geq 0 \\ 0 & \text{when } d_j < 0 \end{cases} \quad \text{for } j = 1 \text{ to } n \quad (3-21)$$

$$C = \sum_i^m c_i + \sum_j^n d_j \quad (3-22)$$

由(3-22)式可知，當 $C=0$ 時，表示設計沒有違反任何限制，為一可行的設計，當 $C \neq 0$ 時，表示設計有為違反某些限制，為一不可行設計， C 愈大表示違反限制的程度愈嚴重。因此對於違反限制的設計，必須加以懲罰以排除不可行設計。所以目標函數需加以修正為式(3-23)式：

$$\phi(x) = f(x)(1 + \psi C^\beta) \quad (3-23)$$

其中：

ψ ：懲罰因子。

β ：違反限制常數指數因子。

由(3-23)式知，個體之修正後目標函數愈大，其適應度應愈小；個體之修正後目標函數愈小，其適應度應愈大。所以桁架最佳化設計的適應度函數可以下式表示：

$$F(x) = \text{Max} - \phi(x) \quad (3-24)$$

其中：

Max：預設的個體族群最大適應值。



3.3.2 遺傳演算法過程之方法

1. 編碼方式 - 實數型編碼方式。
2. 選擇與複製 - 輪盤式選擇(Roulette wheel selection)。
3. 交配 - 實數型式算術交配(Arithmetic crossover)。
4. 突變 - 選定了個體那一個位置要做突變後，以擲亂數之方式產生 $[\min, \max]$ 之間一實數，然後取代其位置之原值。
5. 終止條件 - 世代數決定。

圖 3.3 為利用 SGA 作桁架結構斷面最佳化之流程圖。先以隨機產生第一代個體族群，將個體即桿件斷面積送至結構分析並計算個體適應度，經由不斷的複製、交配、突變演化後，直到達預設的世代數而停止。

3.4 參考模型的測試

3.4.1 遺傳演算法模組測試

適應度函數：

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4 \quad (3-25)$$

利用六駝峰函數(Six-Hump Camelback Function)[21]如圖 3.4，測試本文的遺傳演算法模組是否可以找到全域最佳解。由圖可知此函數具有六個局部最佳解，是常見被用來測試最佳化搜尋方法的問題。其全域最佳解為-1.0136， x_1 、 x_2 之值分別為[-0.0898, 0.7126]。

設定族群數為 20 個， x_1 變數範圍為-2~2， x_2 變數範圍為-3~3，突變率為 0.08，停止條件為演化世代達 200，以上可參考表 3.1。演算結果 x_1 、 x_2 之值分別為[-0.0898506, 0.7126868]，全域最佳解為 1.031628。由測試結果可知，遺傳演算法模組是可行的，其搜尋收斂過程如圖 3.5。

3.4.2 參考模型測試

測試平面 17 根桿件桁架(如圖 3.6)最佳化設計，其材料密度為 0.268 lb/in³，彈性係數為E=30000 ksi，桿件容許應力為±50 ksi，各節點容許位移為±2 in(水平與垂直方向)，受力情形為節點 9 受一 100 kips向下垂直力。遺傳演算法之適應度函數建立方法如 3.2 節所述，設計變數共 17 個，其變數範圍為 0.1 至 2，其餘參數設定可參考表 3.3。經 1000 次演算後，收斂情形如圖 3.7 所示，約在 888 次可以得到一收斂的最輕重量 2583.601b，而得到的 17 根桿件最佳斷面分別為 16.296, 0.137, 12.306, 0.100, 8.086, 5.579, 11.828, 0.100, 7.973, 0.100, 4.162, 0.100, 5.668, 4.105, 5.253, 0.114, 5.314 (in²)，其重量與文獻[21]之最輕重量 2580.81 相差約千分之一。由設計結果可知參考模型是可行的。