第四章 啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計

前言

桁架斷面尺寸最佳化設計中,應力限制的滿足與位移限制的滿足往往是互相抵觸的，例如當各桿件的應力盡量達其容許應力時，則位移限制可能就無法滿足;相反的當設計滿足位移限制要求時,則桿件有可能因為斷面大而不能發揮其最大的作用,因此如何在最佳化過程中,利用上述兩限制其中一者來當控制是非常重要的。

雖然傳統的數學最佳化方法與遺傳演算法都可以同時滿足位移限制與應力限制以達最佳化設計,但是以梯度理論為基礎的傳統數學最佳化而言，會因為搜尋的起始點而影響最終的收斂結果是否可以落在全域的最佳解;而遺傳演算法雖然可以找的全域的最佳解,但是往往因為搜尋變數的增加,而需要花費大量的電腦記憶體與電腦計算。基於以上的原因,本論文提出一個新方法，在不需要梯度資訊與大量計算下可以快速的完成桁架斷面尺寸最佳化的設計。

本論文的方法是將位移限制當作控制。搜尋時,在每次初始斷面為了滿足位移限制而做最佳修改後,判斷修改後結果是否也能同時滿足應力限制,如果不能則考慮放大初始斷面,重新一次修改、判斷;相反的,如果搜尋結果滿足兩限制,則考慮縮小初始斷面重新一次修改、判斷。

然而搜尋過程中初始斷面及滿足位移的修正方法是非常重要的,從文獻回顧裡可知,利用 FSD 迭代後的收斂斷面可使各桿件盡量達其本身的容許應力,使各桿件發揮最大的作用以達最佳設計。因此本論文方法則將 FSD 收斂後斷面，藉由等倍縮放當作初始斷面,再經啟發式公式的修正初始斷面以滿足位移限制,其中啟發式斷面修正公式是基於結構學中的單位載重法(Unit load method)所導出，用來對初始斷面做適當的修正以滿足位移限制。

在以下幾節裡,將說明啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計中啟發式公式是如何推導的，與新方法的設計流程。

4.1 FSD 設計原理(僅滿足應力限制)

FSD 設計原理主要是利用應力比的趨近，使構件的應力儘量趨近於本身所能承受之容許應力，應而使構件均能發揮最大作用以達最佳化設計目標。FSD 方法應用在桁架斷面設計時，為使每根桿件在一定的外力作用下，所產生的應力均能達到其本身容許應力強度，因此當桿件所受應力小於本身所容許之應力時，表示原斷面過大，此時可考慮將原斷面縮小；反之，當桿件所受應力大於本身所容許之應力時，表示原斷面過小，此時可考慮將原斷面放大。

桁架之滿載應力法的斷面修正公示如下：

$$A_{F,i} = A_i \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i,allow}} \right)^{\gamma} \qquad (4\text{-}1)$$

其中：

$A_{F,i}$ ：第 i 根桿件經修正後面積。

A_i ：第 i 根桿件原斷面。

σ_i ：第 i 根桿件所受應力。

$\sigma_{i,allow}$ ：第 i 根桿件之容許應力。

γ ：鬆弛係數，介於 0～1。(本文採 1)。

由於 FSD 設計主要是讓桁架結構的桿件在不超過容許應力下可以發揮最大的作用，因此設計出來的斷面尺寸雖然可以滿足結構設計的容許應力限制但是並不能滿足容許位移限制。

4.2 啟發式斷面修正(僅滿足位移限制)

本文所提出的啟發式斷面修正方法是基於結構學的單位載重法發展而來，將初始斷面經由啟發式修正，使得修改後斷面滿足控制點位移限制要求。單位載重法為計算特定節點位移之方法，其公式如下：

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i u_i L_i}{E_i A_i^{(0)}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i = \sum \Delta^{+} + \sum \Delta^{-} \qquad (4\text{-}2)$$

其中：

Δ ：特定點之位移。

S_i ：實際載重所造成的第 i 桿件內力。

u_i ：作用在特定點上之單位力所造成的第 i 桿件內力。

L_i ：第 i 根桿件之長度。

E_i ：第 i 根桿件之楊氏係數。

$A_i^{(0)}$ ：第 i 根桿件之初始面積。

Δ_i ：第 i 根桿件所造成的部分位移量。

Δ_i^+ ：與特定點位移同方向之位移分量。

Δ_i^- ：與特定點位移反方向之位移分量。

由式(4-2)可知，當特定點位移過大，則可以放大初始斷面 $A_i^{(0)}$ 使得位移減小，其中與特定點位移反方向之分量 Δ_i^- 有助於減少特定點位移，因此造成反方向位移分量之 $A_i^{(0)}$ 則不考慮放大其斷面，故啟發式修正如下：

$$A_i^{(1)} = \begin{cases} A_i^{(0)} & \text{if } \Delta_i \le 0 \\ A_i^{(0)}\left(1 + K\dfrac{\Delta_i}{W_i}\right)^{0.5} & \text{else} \end{cases} \qquad (4\text{-}3)$$

其中 K 為一正實數。由上式可知，當桿件斷面經由式(4-2)計算出對特定點的位移量 Δ_i，如果為零或負值則不給予放大修正，且由(4-3)式可知，斷面的修正並非一常數，而是依桿件斷面對於特定點位移的敏感度 Δ_i / W_i 進行修改。

經(4-3)修正後之斷面可以粗略的以公式(4-2)計算其特定點位移，如下：

$$\Delta_i'(K) = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i u_i L_i}{E_i A_i^{(1)}} \qquad (4\text{-}4)$$

K 雖為未知數，但可以透過 $\Delta'(K)$ 等於 Δ_{allow} 條件而求得，再將求得 K 值代入式(4-3)即可獲得修正後斷面 $A_i^{(1)}$。由於修正後斷面經由式(4-4)所算出的特定點位移 Δ' 並非精確值，為了使修正後斷面的特定點位移等於 Δ_{allow}，(4-3)的結果需進行二次修正，第二次斷面修正如下：

$$A_i^{(2)} = A_i^{(1)} \cdot \frac{\Delta_{real}}{\Delta_{allow}} \qquad (4\text{-}5)$$

其中Δ_{real}為一次修正後斷面$A_i^{(1)}$經結構分析後之特定點位移，經由與Δ_{allow}之比例修正後，便可使特定點位移剛好等於Δ_{allow}。

4.3 結合FSD與啟發式斷面修正

滿載應力法設計只能滿足應力限制要求，而啟發式斷面修正法的設計結果亦只能滿足容許位移限制。因此為了使設計斷面可以同時滿足應力與位移限制要求，本研究提出以一正實數α，藉由α縮放FSD收斂後斷面來當作初始斷面，再經啟發式修正，使得最終設計斷面可以同時滿足應力與位移限制，其方法如以下五步驟：

1. 利用滿載應力法獲得滿足容許應力之面積$A_{F,i}$，經由結構分析後得最大位移Δ_F與其相對的節點位置，並將其位置當作控制點。

2. 藉由α值等倍縮放$A_{F,i}$當作啟發式修正之初始斷面，如下：

$$A_i^{(0)} = \alpha \times A_{F,i} \tag{4-6}$$

3. 依單位載重法式(4-2)建立所須要的資料，如：桿件面積(A)即$A_i^{(0)}$、桿件長度(L)、受外力後之桿件力(S)、單位力施在控制點所造成的桿件力(u)。建立好以上資料後，利用啟發式斷面修正，如下：

   定義斷面修正敏感度I_i：

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \left(\Delta_i \le 0 \quad \text{or} \quad A_{F,i} \cong 0\right) \\ \dfrac{\Delta_i}{W_i} & \text{else} \end{cases} \tag{4-7}$$

   令$$\Delta_i^{'}(K) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_i}{\left(1+KI_i\right)^{0.5}} = \Delta_{allow} \tag{4-8}$$

   計算出K值後代入下式完成一次修正。

$$A_i^{(1)} = \begin{cases} A_{min} & \text{if} \quad A_i^{(0)} \cdot \left(1+KI_i\right)^{0.5} \le A_{min} \\ A_i^{(0)} \cdot \left(1+KI_i\right)^{0.5} & \text{else} \end{cases} \tag{4-9}$$

將 $A_i^{(1)}$ 經結構分析並獲得控制點真實位移量 Δ_{real}，再經下式完成二次修正

$$A_i^{(2)} = \begin{cases} A_{min} & \text{if} \quad A_i^{(1)} \cdot \dfrac{\Delta_{real}}{\Delta_{allow}} \le A_{min} \\ A_i^{(1)} \cdot \dfrac{\Delta_{real}}{\Delta_{allow}} & \text{else} \end{cases} \tag{4-10}$$

其中 A_{min} 為設計之最小斷面積。

4. 更新 α 值，其修改原則為：$A_i^{(2)}$ 經結構分析後，當結果為可行設計時，則縮小 α 值；相反的當結果為不可行設計時，則放大 α 值。其縮放範圍為 $0 \sim \Delta_F / \Delta_{allow}$ 。

5. 藉由 α 變數之修改，重複步驟 2～4 直到收斂。

圖 4.1 為啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計流程圖。如圖，在設計時首先以 α 為 1 進行第一次搜尋，等倍放大 $A_{F,i}$ 為初始斷面 $A_i^{(0)}$ 後，以啟發式公式(4-7～10)修正，將修正後面積 $A_i^{(2)}$ 經結構分析判斷是否滿足容許應力與容許位移要求，如果兩限制皆滿足則縮小 α 值進行下一次的搜尋；反之，如果不滿足兩限制則放大 α 值進行下一次的搜尋。α 值的縮放是以類似二分法的觀念將區間不斷的取一半縮小，而搜尋停止的條件為前後兩次的 α 值小於一容忍值，本文採 10^{-3}。

圖 4.2 為一假想的搜尋過程圖，用以說明 α 值縮放的方法。假設其搜尋上限為 α=4.0，可行設計與非可行設計界線為 α=1.5。首先由 α=1.0 進行第一次搜尋，結果為非可行設計，因此放大 α 值，取 $\alpha = (1+4)/2 = 2.5$ 進行第二次搜尋。第二次搜尋之後，發現結果為可行設計則縮小 α 值，取 $\alpha = (1+2.5)/2 = 1.75$ 進行第三次搜尋。第三次搜尋結果為可行設計，因此可再縮小 α 值，取 $\alpha = (1+1.75)/2 = 1.375$ 進行第四次搜尋。第四次搜尋結果為非可行設計，因此需放大 α 值，故取 $\alpha = (1.375+1.75)/2 = 1.5625$ 進行第五次搜尋，搜尋後結果為可行設計。如以上所描述的搜尋過程，藉由不斷的修改 α 值，直到前後兩次搜尋的 α 值相差小於一容忍值而停止。利用上述搜尋方法，則收斂停止後的 α 值會趨近於可行設計與非可行設計界線，即完成啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計。

4.4 啟發式設計時之考量

4.4.1 設計斷面分組情況下

對於大型桁架，其桿件斷面常常藉由分組以方便設計，故在 FSD 設計時應以組為單位，迭代修正過程中，每次修正應以組裡每根桿件面積經應力比調整後，其最大斷面積當控制做為該組修正後面積。而在啟發式修正時，為了讓同一組的桿件斷面可一致修正，因此修正是以組為單一修正而不再是單根桿件，所以公式(4-7)需作修正，如下：

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{if } \left(\Delta_j \le 0 \;\; \text{or}\; A_{F,j} \cong 0\right) \\ \dfrac{\Delta_j}{W_j} = \dfrac{\sum \Delta_{ji}}{\sum W_{ji}} & \text{else} \end{cases} \tag{4-11}$$

其中：

I_j ：第 j 組斷面修正敏感度。

Δ_j ：第 j 組設計斷面之所有桿件，由式(4-2)計算出對於控制點的位移。

$A_{F,j}$ ：第 j 組經由 FSD 設計出之斷面

W_j ：第 j 組設計斷面之所有桿件總重量。

Δ_{ji} ：第 j 組設計斷面之單根桿件，由式(4-2)計算出對於控制點的位移。

W_{ji} ：第 j 組設計斷面之單根桿件重量。

而式(4-8)～(4-10)分別修改成式(4-12)～(4-14)，如下：

$$\Delta_j'(K) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta_j}{\left(1 + KI_j\right)^{0.5}} = \Delta_{allow} \tag{4-12}$$

$$A_j^{(1)} = \begin{cases} A_{min} & \text{if } \;\; A_j^{(0)} \cdot \left(1 + KI_j\right)^{0.5} \le A_{min} \\ A_j^{(0)} \cdot \left(1 + KI_j\right)^{0.5} & \text{else} \end{cases} \tag{4-13}$$

$$A_j^{(2)} = \begin{cases} A_{min} & \text{if } \;\; A_j^{(1)} \cdot \dfrac{\Delta_{real}}{\Delta_{allow}} \le A_{min} \\ A_j^{(1)} \cdot \dfrac{\Delta_{real}}{\Delta_{allow}} & \text{else} \end{cases} \tag{4-14}$$

由式(4-12)～(4-14)可知，斷面修正皆是以組為單位，因此同組之桿件面積才可一致做修正，如此才符合設計斷面分組的要求。

4.4.2 多組合載重情況下

本論文的啟發式公式修正主要是針對單載情況下,將產生最大位移量的節點當作控制點,因此只要控制點可以滿足容許位移限制,則其餘節點亦可以同時滿足。而在多組合載情況下,啟發式修正雖然可以滿足某一載重下的位移限制,但對於其餘載重情況下可能無法同時滿足。

但是對於特殊情況,如多載中有某一載重相對於其它載重明顯的控制最大位移量的發生,則只要滿足控制載重下的位移限制,則其餘載重亦可同時滿足。因此本文也嘗試利用新方法對多重載重下的桁架做最佳化設計。其方法主要為將多載情況簡化成單載情況下設計。其主要修改的部分如下:

1. **FSD 之滿足應力限制面積**

   由於桁架受多載作用因此 FSD 過程中應同時考慮各種載重而進行迭代,則迭代收斂後的最終斷面 A_F 才可同時滿足多重載重下的應力限制要求。

2. **最大位移量 Δ_F 與控制點位置**

   最大位移量是由 A_F 面積分別受各種載重下,分別經結構矩陣分析後所得到的最大位移者為大位移量 Δ_F,而其相對的位置即是控制點的選擇。

3. **啟發式修正時以單載簡化多載**

   選擇造成最大位移量之載重為控制載重,使多載的斷面修正以單載進行,因此設計過程就如 4.3 節所描述的一樣,其中須注意的是式(4-7)用來判斷修正敏感度是否為零的條件 $A_{F,i}$,是以單純受控制載重經 FSD 設計出來的面積。其理由為判斷修正敏感度是否為零所用的條件 $A_{F,i}$ 是在特定外力作用下,所以在此須是控制載重下,而不是同時考慮各種載重下 FSD 設計出之斷面,其修改如下:

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \left(\Delta_i \le 0 \quad \text{or} \quad A_{F,i}^{CL} \cong 0\right) \\ \dfrac{\Delta_i}{W_i} & \text{else} \end{cases} \tag{4-15}$$

其中 $A_{F,i}^{CL}$ 為控制載重下經 FSD 設計出之斷面。

4.5 啟發式桁架斷面尺寸最佳化之補充

本節主要為補充說明啟發式修正公式中等倍縮放斷面的力學行為,與設計過程中α值搜尋的上限是如何界定的。

4.5.1 桿件斷面等倍縮放對桁架結構之影響

一桁架結構系統其力與位移方程式可表示如下：

$$\{P\}=[S]\{d\} \tag{4-16}$$

其中$[S]$為考慮可動點之結構整體勁度矩陣。考慮將結構各桿件放大α倍，由式(3-10)或(3-15)可知桿件勁度矩陣與其斷面A成正比,因此放大後桿件整體勁度矩陣與結構整體勁度矩陣如下：

$$[K^{'}]=\alpha[K] \tag{4-17}$$

$$[S^{'}]=\alpha[S] \tag{4-18}$$

則放大後結構系統力與位移方程式如下：

$$\{P\}=[S^{'}]\{d^{'}\}=\alpha[S]\{d^{'}\} \tag{4-19}$$

比較式(4-1)與(4-4)，當桁架結構受固定外力下將各桿件斷面放大α倍，其新位移與原位移之關係如下：

$$\{d^{'}\}=\frac{\{d\}}{\alpha} \tag{4-20}$$

可知將結構各桿件斷面放大α倍，則位移縮小α倍。以單根桿件來看，其整體位移亦縮小α倍，如下：

$$\{v^{'}\}=\frac{\{v\}}{\alpha} \tag{4-21}$$

將式(4-2)與(4-6)代入式(3-12)，如下：

$$\{Q^{'}\}=[T][K^{'}]\{v^{'}\}=[T]\alpha[K]\frac{\{v\}}{\alpha}=[T][K]\{v\}=\{Q\} \tag{4-22}$$

由上式可知將結構各桿件斷面放大α倍，則各桿件內力不變。

因此啟發式修正公式(4-5)是基於等倍放大或縮小各桿件面積後，可使各節點位移等倍縮小或放大其位移量。將一次修正後面積$A_i^{(1)}$，依控制點位移$\Delta^{'}$與容許位移Δ_{allow}的比例等倍放大為$A_i^{(2)}$，如此便可使$A_i^{(2)}$面積經結構分析後，剛好讓

控制點位移量為Δ_{allow}。

而在設計過程中，每次搜尋時等倍放大斷面$A_{F,i}$當作初始斷面$A_i^{(0)}$，由式(4-22)可知等倍放大各桿件面積則桿件內力不變，因此在計算式(4-2)Δ_i位移時，可以不必將初始斷面$A_i^{(0)}$（式 4-6）丟入結構分析計算桿件內力 S 與 u，而以$A_{F,i}$經結構分析後的 S 與 u 重複利用即可。

4.5.2 α搜尋範圍之上限

為了使滿載應力法設計後斷面，經結構分析所產生的最大位移Δ_F剛好滿足容許位移Δ_{allow}，由式(4-20)得知，可以將$A_{F,i}$等倍放大Δ_F/Δ_{allow}，則斷面可剛好滿足容許位移限制，而此時的設計方法恰是所謂的 FUD(Fully Utilized Design)[3]。文獻[4]指出，此方法設計出之斷面雖然能同時滿足位移與應力限制，但是卻太過於不經濟。且由等式(4-8)可知，初始斷面$A_i^{(0)}$經式(4-2)計算後，如果Δ剛好為Δ_{allow}，則由等式求得的 K 將為零，因此代入式(4-7)後斷面將不做任何修正，因此才將α搜尋範圍的上限設為Δ_F/Δ_{allow}。