

國立交通大學

電信工程研究所

碩士論文

基於量化為單一位元之感測器觀測資料
實行具通道感知之分散式最大似然估計

Channel-Aware Distributed Maximum-Likelihood
Estimation Based on One-bit Quantized Sensor
Measurements

研究生：陳鈺澄

指導教授：吳卓諭

中華民國 102 年 7 月 25 日

基於量化為單一位元之感測器觀測資料
實行具通道感知之分散式最大似然估計

Channel-Aware Distributed Maximum-Likelihood Estimation Based
on One-bit Quantized Sensor Measurements

研究生：陳鈺澄

Student: Yu-Cheng Chen

指導教授：吳卓諭 博士

Advisor: Dr. Jwo-Yuh Wu

國立交通大學

電信工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Communication Engineering
Department of Electrical Engineering and Computer Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Master Degree of Science
in

Communications Engineering

July 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 102 年 7 月

基於量化為單一位元之感測器觀測資料 實行具通道感知之分散式最大似然估計

學生：陳鈺澄

指導教授：吳卓諭 博士

國立交通大學電信工程研究所碩士班

摘要

無線感測網路系統為近年來十分熱門的無線通訊技術，該系統是由偵測對象、感測器裝置以及處理中心三部分所組成。本篇論文中，實際考慮受雜訊干擾之目標信號偵測，而為了節省傳輸頻寬及減少訊息傳輸時之能量消耗，每個感測器將其觀測資料量化為單一位元後，再傳送至處理中心。在過去相關文獻中，其假定的局部感測環境為各個區域的感測器所受到環境雜訊干擾之功率皆相同，但實際情況中，即便各個感測節點分佈的位置再接近，環境的雜訊功率仍然有所差異，因此，我們針對此點，進一步地考慮各個感測器所接收之環境雜訊功率皆相異。本篇論文中，感測器與處理中心間之傳輸通道為非理想通道，由於無線通訊的特性，更明確地設定通道為瑞利衰落通道。處理中心彙整感測器所傳送之觀測資料後，根據這些資訊，採用分散式最大似然估計法作為處理訊號之準則，判斷感測器所偵測之目標信號為何。而為了能使估計結果更加精準，我們藉由設計量化閾值來嘗試最小化估計誤差。在本篇論文中，模擬結果證實此組量化閾值確實使估計結果更為準確。

關鍵詞：分散式估計、瑞利衰落通道、最大似然估計、無線感測網路

Channel-Aware Distributed Maximum-Likelihood Estimation Based on One-bit Quantized Sensor Measurements

Student: Yu-Cheng Chen

Advisor: Dr. Jwo-Yuh Wu

Institute of Communications Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

In this thesis, we study the problem of distributed estimation of an unknown deterministic parameter via wireless sensor networks (WSNs) in a noisy environment. While most recent works focused on a homogeneous sensing field, we consider the general inhomogeneous case. To conserve the bandwidth resource, each sensor observation is quantized into a one-bit message, which is then transmitted to the fusion center (FC). In our study, the communication links between sensors and the FC are imperfect and modeled as i.i.d. Rayleigh fading channels. Based on one-bit quantized observations transmitted from local sensors, the maximum-likelihood (ML) fusion rule is adopted at the FC for parameter estimation. The Cramér–Rao Lower Bound (CRLB) is derived in a closed-form. We then study the optimal local quantization threshold design via CRLB minimization. Computer simulations are used to illustrate the performance of the proposed scheme.

Index Terms: Distributed estimation, quantization, Rayleigh fading channels, maximum-likelihood estimation (MLE), Cramér–Rao Lower Bound (CRLB), wireless sensor networks (WSNs)

誌謝

本篇論文得以順利完成，首先由衷感謝我的指導教授吳卓諭老師。在這兩年的研究所生活，除了做研究和專業科目上的學習，最大的收穫，莫過於從老師身上學習到凡事實事求是的態度，以及對於探索新的研究領域該有的學習精神。真的十分感謝吳卓諭老師，若不是老師這兩年的教導，我想，我的研生活無法過得如此的充實和收穫滿載。

另外，也要感謝實驗室的學長姐、同學和學弟妹們，讓我這兩年的研生活多了許多歡樂。還有感謝我的朋友和同學們，在交大六年的時光，因為有你們，讓我的生活充滿笑聲，在我低潮的時候，傾聽著我的煩惱，彼此互相鼓勵支持。

最後，最感謝的是我的家人，你們一直以來都是我最大的精神支柱，因為有你們，因為有你們的支持，我才能如此無後顧之憂的專注於學習。

謹以此篇論文

獻給我最親愛的家人、朋友、同學們



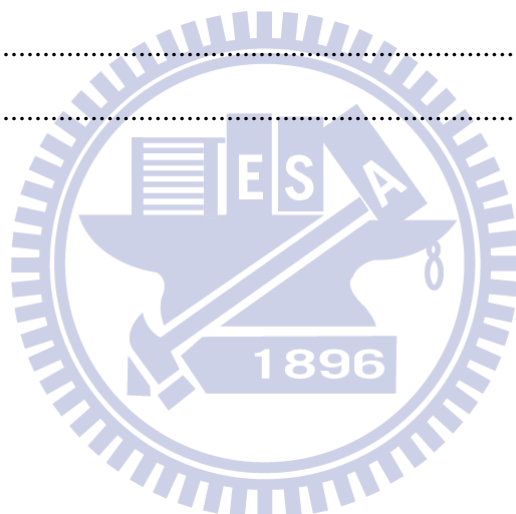
陳鈺澄 謹誌

中華民國一百零二年七月

目錄

摘要	i
Abstract	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vii
中英對照表	viii
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 相關文獻探討	1
1.3 論文架構	2
第二章 無線感測網路之系統模型	3
2.1 系統簡介	3
2.2 系統模型	3
2.2.1 觀測資料之量化與傳輸	3
2.2.2 解碼錯誤率	4
第三章 未知參數之估計法則	6
3.1 分散式最大似然估計法	6
3.1.1 牛頓法分析	6
3.2 Cramér–Rao Lower Bound (CRLB)	7
3.3 同質感測環境下之估計分析	8
3.3.1 環境設定.....	8
3.3.2 估計法比較	9
3.4 BPSK 調變訊號之估計分析	9
3.4.1 系統模型設定	9

3.5 模擬結果	11
第四章 感測器之量化閾值設計	18
4.1 設計準則	18
4.2 最佳化模型	18
4.3 模擬結果	19
第五章 結論	27
參考文獻	28
附錄一 (2.5)式證明	30
附錄二 (3.19)式證明	32
附錄三 定理 3.2 證明	34
附錄四 推論 3.3 證明	37
附錄五 定理 3.4 證明	38



表目錄

表 1	模擬參數設定-3.1.1	11
表 2	模擬參數設定-3.3.2	13
表 3	模擬參數設定-3.4	15
表 4	模擬參數設定-4.2	19



圖目錄

圖 1	分散式無線感測網路系統模型示意圖	5
圖 2	θ 對應之對數似然函數值	11
圖 3	牛頓法疊代過程對應對數似然函數之值	12
圖 4	最大似然估計法之演算法比較	13
圖 5	已知與未知通道增益之標準化均方誤差比較圖	14
圖 6	OOK 與 BPSK 之解碼錯誤率比較圖	15
圖 7	同質感測環境下之 OOK 與 BPSK 標準化均方誤差比較圖	16
圖 8	異質感測環境下之 OOK 與 BPSK 標準化均方誤差比較圖	17
圖 9	Weighted CRLB 之趨勢圖 - 通道信雜比為-10 (dB)	19
圖 10	Weighted CRLB 之趨勢圖 - 通道信雜比為 10 (dB)	20
圖 11	Weighted CRLB 與 NMSE 之趨勢圖 - 通道信雜比為-10 (dB)	21
圖 12	Weighted CRLB 與 NMSE 之趨勢圖 - 通道信雜比為 10 (dB)	22
圖 13	Weighted CRLB 與 NMSE 之趨勢圖 - 通道信雜比為 25 (dB)	23
圖 14	Weighted Fisher Information 之趨勢圖 - 通道信雜比為 10 (dB)	24
圖 15	不同量化閾值之 NMSE 比較圖	25
圖 16	檢驗是否為無偏性估計	26

中英對照表

ㄣ

標準化均方誤差	(Normalized Mean Square Error, NMSE)
變異數	(Variance)
柏努利分布	(Bernoulli Distribution)
包絡線	(Envelope)

ㄨ

頻寬	(Bandwidth)
平均值估計法	(Mean Estimator)
平緩衰落通道	(Flat Fading Channel)

ㄘ

非隨機的	(Deterministic)
非直視路徑	(Non-Line-of-Sight, NLOS)
複數通道增益	(Complex Channel Gain)
分散式的	(Distributed)

ㄨ

疊代法	(Iteration)
多重路徑	(Multi-path)
對數	(Logrithm)
單一位元	(One-bit)

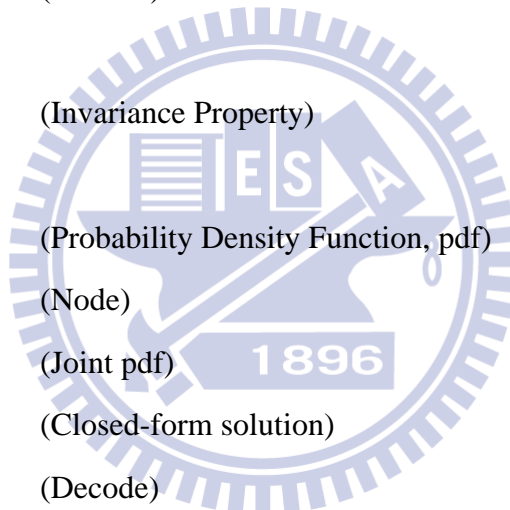
ㄨ

凸函數	(Convex Function)
通道	(Channel)
通斷鍵控	(On/Off Keying, OOK)
通道信噪比	(Channel SNR)
同質感測環境	(Homogeneous Sensing Environment)
同步	(Synchronization)

ㄣ

牛頓法	(Newton's Method)
-----	-------------------

能量	(Energy)
ㄉ	
量化	(Quantize)
量化器	(Quantizer)
量化閾值	(Quantization Threshold)
《	
估計	(Estimate)
觀測資料	(Observation)
功率	(Power)
高斯	(Gaussian)
感測器	(Sensors)
厂	
恆等性	(Invariance Property)
ㄐ	
機率密度函數	(Probability Density Function, pdf)
節點	(Node)
結合機率密度函數	(Joint pdf)
解析解	(Closed-form solution)
解碼	(Decode)
解調	(Demodulation)
解碼錯誤率	(Decoding Error Probability)
漸進的	(Asymptotic)
均方誤差	(Mean Square Error, MSE)
《	
權重函數	(Weighting Function)
丅	
辛普森法則	(Simpson's Rule)
信號估計法	(Sign Estimator, SE)
協調性接收	(Coherent Reception)



相位	(Phase)
彳	
處理中心	(Fusion Center, FC)
尸	
事前機率	(Prior Probability)
衰落	(Fading)
瞬間通道狀態資訊	(Instantaneous Channel State Information, Instantaneous CSI)
回	
瑞利分布	(Rayleigh Distribution)
卍	
最大似然估計法	(Maximum-likelihood Estimation, MLE)
卩	
次佳的	(Sub-optimal)
參數	(Parameter)
厶	
似然函數	(Likelihood Function)
一	
異質感測環境	(Inhomogeneous Sensing Environment)
有效區域	(Effective Range)
乂	
無偏性	(Unbiased)
無線感測網路	(Wireless Sensor Networks, WSN)
么	
凹函數	(Concave Function)
儿	
二進制	(Binary)
二階段估計法	(Two-stage Estimator)
二位元相位偏移調變	(Binary Phase Shift Keying, BPSK)

第一章 緒論

1.1 研究背景

近年來，由於無線感測網路 (Wireless Sensor Networks, WSNs) 多樣化的應用，使無線感測網路系統逐漸成為熱門的研究議題。在無線感測網路系統的應用上，已從最初的軍事用途，普及到日常生活中，像是地理探索、溫度偵測、個人健康管理、農業用途等等 [1]。

分散式無線感測網路 (Distributed WSNs) 主要由眾多感測器 (Sensor) 及一處理中心 (Fusion Center, FC) 所組成，這些感測器具有感知及無線通訊的功能，以偵測環境變化，例如溫度、濕度等，將感測器裝置散佈於欲偵測的環境，蒐集環境中各種資訊後，再以無線傳輸的方式將資料傳送至處理中心，交由處理中心整合分析這些資料，讓使用者可藉由無線感測網路系統蒐集所需的資訊。

一般而言，無線感測網路系統可能是監控大範圍，甚至是惡劣難以維護網路系統的環境，例如過去在軍事用途中，將微小的感測器裝置大量的撒在敵方領域，以進行監控竊聽資訊，因此，感測器是以體積小、成本低的特點進行設計。感測器通常是由內建電池驅動，隨著現今電池技術的成熟，小體積與低成本的感測器已十分普及，不過由於電池能量是有限的，當能量消耗完畢後，該感測器可能即被棄置不用，不再進行更換電池的動作，因此，如何透過其他層面的改進，使感測器的在相同能量的條件下，壽命盡可能的延長，以減少資源浪費，是個十分重要的議題。除了感測器內建電池能量有限之外，另一個無線感測網路系統固有的條件限制為訊號傳輸頻寬，考慮到頻寬資源有限且昂貴，因此，如何降低傳輸頻寬的使用，依然能達到不錯的效能，亦為現今重要的研究方向。

1.2 相關文獻探討

由於感測器內建電池能量有限以及訊號傳輸頻寬上的限制，主要針對能量以及頻寬限制的問題而開發的分散式估計法 (Distributed Estimation) [2]-[13]，成為目前無線感測網路系統重要的應用之一，而本篇論文亦考慮分散式無線感測網路系統，以減少能量和頻寬的浪費。

感測器主要運作單元可分為感知、處理、傳輸這三個部分，但最主要消耗能量的部分為傳輸單元 [1]，因此，感測器若將所觀測之資料量化為最小的傳輸訊號位元後再行傳送，可使感測器傳輸訊號所消耗之能量降到最低，延長感測器及整體無線感測網路的壽命。考慮傳輸頻寬的限制，[2]-[9] 及 [13] 使用單一位元量化器 (One-bit Quantizer)，將觀測資料 (Observation) 量化為單一位元再傳送，以符合最嚴格的頻寬限制。因此，傳輸單一位元之訊息，不僅減少能量之消耗，亦同時滿足了最大傳輸頻寬限制的情況。

當感測器在感知環境變化時，所收到的目標信號往往會受到環境的雜訊干擾。[2]-[10] 所考慮的環境中，所有的分散式感測器皆置放於相同干擾強度的區域，亦或是相較於所有感測器與目標信號的距離，感測器之間更加靠近，因此，感測器在偵測目標信號時，受到雜訊干擾的功率 (Power) 皆相同。但其實在實際情況中，即使將所有感測器密集散佈在同一個區域，其所受之干擾強度仍有所異 [11][12]。

因為傳輸頻寬上的限制，感測器需先量化觀測資料後，再將訊息傳送至處理中心，以估計目標信號，而處理中心採用的估計法之複雜程度，會受感測器與處理中心之間的

通道模型的影響。在 [2][13] 中，假定理想的傳輸通道，亦及無通道衰落 (Channel Fading) 或通道雜訊，因此，其所考慮之最大似然估計法 (Maximum-Likelihood Estimation, MLE) 可以有明確的表示形式。若進一步考慮考慮高斯雜訊 (Gaussian Noise) 通道 [3]，雖然最大似然估計法可求得解析解 (Closed-form Solution) 的形式，不過需要藉助數值方法才得以估計出目標信號；若考慮 [3] 提出之次佳 (Sub-optimal) 估計法，如二階段估計法 (Two-Stage Estimator)、平均值估計法 (Mean Estimator)，雖然此兩種估計法的均方誤差 (Mean Square Error, MSE) 比最大似然估計法之均方誤差大，不過求解速度較快，且有明確的估計方式。在無線感測網路系統中，最常被使用的通道模型為瑞利衰落通道 (Rayleigh Fading Channel) [4]-[7][9][10]，假定處理中心只知通道的統計特性的情況下 [4][9]，根據此設定考慮其最大似然估計法 [4]，並分析其效能；若處理中心已知瞬間通道狀態資訊 (Instantaneous Channel State Information, Instantaneous CSI) [5]-[7][9][10]，[5] 比較了最大似然估計法以及其所提出之次佳估計法，分別為平均值估計法 (Mean Estimator, ME) 和信號估計法 (Sign Estimator, SE) 之複雜度以及均方誤差的大小，說明了最大似然估計法及次佳估計法個別的優缺點。

由於，處理中心是根據感測器傳送量化後的觀測資料，估計未知目標信號，因此，量化閾值 (Quantization Threshold) 的選擇會影響到處理中心估計的準確度。若欲使估計誤差更小，方法之一為選擇適當的量化閾值，以提高目標信號與量化後的訊息之間的相關性 [2]，[2][5][7] 分別提出量化閾值的選擇方式。直接的做法是求出使均方誤差最小的量化閾值，但無論是分析估計法之變異數 [5]，抑或是考慮所有無偏性 (Unbiased) 估計法之均方誤差下界 Cramér-Rao lower bound (CRLB) [2]，其最佳化模型皆與未知的目標信號有關，無法直接使用。[5] 透過選擇適合的初始值，利用的疊代的方式求出最佳量化閾值，在 [2] 中，為引進目標信號的事前機率 (Prior Probability)，以最小化加權後之 CRLB 為準則，選擇量化閾值。

在本篇論文所考慮的無線感測環境，感測器彼此之間並無訊息交換，而針對有效感測器所散佈的區域，相較於過去文獻 [2]-[10]，我們考慮較實際的情況，即每個感測器在感知目標信號時，所受到環境雜訊干擾的功率皆不同。為了節省能量及傳輸頻寬，感測器需先將觀測資料量化為單一位元之後再傳送到處理中心，每個感測器到處理中心之間的通道假設為瑞利平緩衰落通道 (Rayleigh Flat Fading Channel)，在一次訊息傳送途中，通道增益並不會改變，且假定處理中心已知瞬間通道狀態資訊。根據以上的環境設定，我們將使用最佳估計法，也就是最大似然估計法，作為處理中心的估計法則，並推導 CRLB 以評估最大似然估計法的效能。而為了使估計結果更加準確，我們將藉由最小化加權後的 CRLB，求出最合適的量化閾值，以增進估計法之效能。

1.3 論文架構

本篇論文結構如下，第二章是制定分散式無線感測網路之系統模型，並定義各系統參數，第三章為根據此論文所考慮的環境，提出對未知參數之估計方法，並評估該估計法之性能，而第四章的部分，為探討選擇最佳的量化閾值的方式以及結果。最後，在第五章總結此篇論文之研究成果。

第二章 無線感測網路之系統模型

本章節首先在第一節的部分，簡單說明無線感測網路系統的運作方式，第二節將詳細說明，在所考慮的無線感測網路系統中，各項系統參數的表示方式以及相關推導結果。

2.1 系統簡介

無線感測網路系統 (Wireless Sensor Networks, WSNs)，是由大量分散在空間各處的節點 (Nodes) 裝置所組成的一種無線通訊網路，利用節點配置的感測器 (Sensors) 監控不同位置的環境狀況，由於通訊技術、電池製作技術等各種技術的改良，一個小小的感測器，就可以具有感測、無線通訊和資訊處理的能力。

在感測器偵測到環境的目標信號後，就開始處理接收到的訊息，並將處理後的資料，以無線傳輸的方式送到處理中心 (Fusion Center, FC)。最後，處理中心便匯集這些感測器所傳送的資料，進一步的去整合分析所需要的資訊。

2.2 系統模型

系統模型圖見 p.5 圖 1

2.2.1 觀測資料之量化與傳輸

在我們討論的無線感測網路系統中，假設總共有 N 個有效的感測器 (Active Sensors) 散佈在各個需要監控的環境中，本篇論文考慮的是異質感測環境 (Inhomogeneous Sensing Environment)，意指每個感測器所接收到的環境雜訊功率 (Noise Power) 都是不同的。而感測器所要感知的目標信號可以是光、溫度、濕度等等，在此，將該目標信號表示為一個未知的非隨機性參數 (Unknown Deterministic Parameter) $\theta \in [a, b]$ 。每個感測器所接收到的資料可表示為

$$x_i \triangleq \theta + n_i, 1 \leq i \leq N \quad (2.1)$$

$n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ ，是一個平均值為 0，變異數為 σ_i^2 的高斯分布 (Gaussian Distribution) 雜訊，其機率密度函數 (Probability Density Function, pdf) 為 $p_i(t) = (\sqrt{2\pi}\sigma_i)^{-1} \exp[-t^2/2\sigma_i^2]$ 。

在一般的無線通訊網路系統中，對於傳輸頻寬都有一定的限制，所以必須先量化 (Quantize) 感測器所接收的資料之後，才能傳送到處理中心。在本篇論文中，我們考慮的是最小傳輸頻寬，也就是感測器接收的資料 x_i 都是量化為單一位元 (One-Bit)，量化結果 b_i 可以表示為 [2]

$$b_i \triangleq \mathbf{1}\{(\tau_i, \infty)\} \quad (2.2)$$

其中 τ_i 為第 i 個感測器的量化閾值 (Quantization Threshold)，當 $x_i \in (\tau_i, \infty)$ 時 $\mathbf{1}\{(\tau_i, \infty)\} = 1$ ，反之 $\mathbf{1}\{(\tau_i, \infty)\} = 0$ 。

由於 b_i 是柏努利分布 (Bernoulli Distribution) 的隨機變數，其參數定義為

$$q_i(\theta) \triangleq \Pr\{b_i = 1\} = Q((\tau_i - \theta)/\sigma_i), 1 \leq i \leq N \quad (2.3)$$

其中， $Q(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_t^\infty \exp[-u^2/2] du$ 為 Q-function。

在無線通訊網路中，通常考慮非直視路徑 (Non-Line-of-Sight, NLOS) 的情況，由於無線傳輸時，訊號可能會被障礙物阻擋，而分割成兩個以上的訊號，產生多重路徑 (Multi-path) 的現象，且若通道的衰落速度十分緩慢，感測器在傳送一次訊息的期間，通道增益並不會改變，因此，我們將感測器與處理中心之間的通道設定為瑞利平緩衰落通道 (Rayleigh Flat Fading Channels)。則處理中心所收到的訊號可以表示為

$$y_i = h_i b_i + v_i, 1 \leq i \leq N \quad (2.4)$$

(2.4) 式中的 h_i 定義為複數通道增益 (Complex Channel Gain) 的包絡線 (Envelope)，且為瑞利分布 (Rayleigh Distribution) 的隨機變數。而 $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ 是平均值為 0，變異數為 σ_v^2 的高斯分布雜訊。

2.2.2 解碼錯誤率

從感測器傳送訊息到處理中心的過程中，由於經過非理想通道後會有失真的現象，因此，在處理中心進一步的整合分析目標信號之前，需先估計原本感測器最可能傳送的訊息為何，也就是做解碼的 (Decode) 動作。將解碼的結果定為 $\hat{b}_i \in \{0, 1\}$ ，則解碼錯誤率 (Decoding Error Probability) 可表示為

$$e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) \triangleq (1 - q_i(\theta))Q\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + q_i(\theta)Q\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) \quad (2.5)$$

其中 $\alpha_i \triangleq \frac{h_i}{2\sigma_v}$ 。由於 \hat{b}_i 也是柏努利分布的隨機變數，其參數可表示為

$$\tilde{q}_i(\theta) = q_i(\theta)(1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)) + (1 - q_i(\theta))e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) \quad (2.6)$$

最後，處理中心便匯集所有解碼後的資料 \hat{b}_i ，並根據這一筆資料估計去目標信號 θ 。

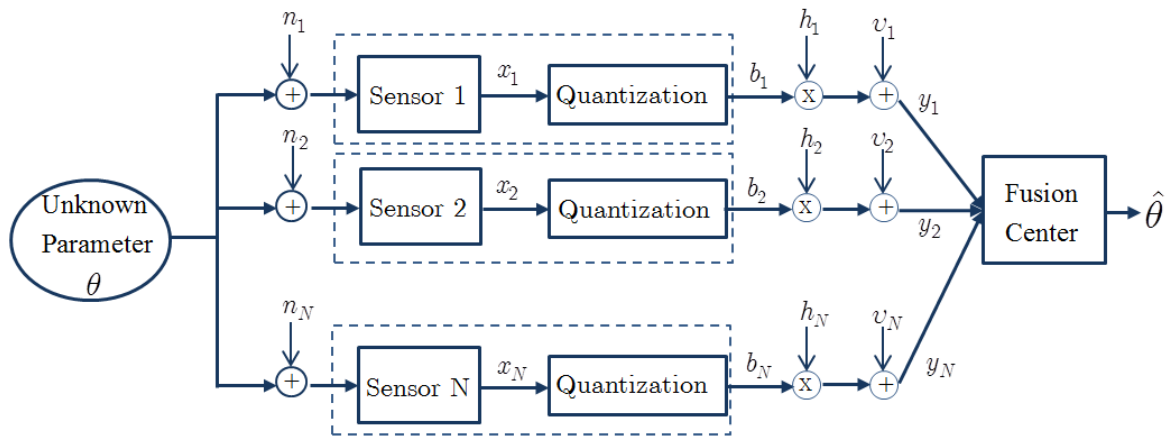


圖 1 分散式無線感測網路系統模型示意圖

第三章 未知參數之估計法則

接下來，本章節主要討論的是，處理中心採用最大似然估計法來估計未知參數，並針對該估計法，提出一準則以評估其性能。在第三小節的部分，將探討簡化此論文考慮之環境設定下，我們所提出之估計法與其他相關文獻比較的結果。最後一個小節為更改最初系統考慮之傳輸訊號類型，與原先所考慮之傳輸訊號之比較。

3.1 分散式最大似然估計法

此篇所考慮之分散式估計，是由眾多感測器，感測共同的目標信號，並假定該目標信號為未知非隨機 (Deterministic) 參數，之後再交由處理中心彙整資料與估計該信號。一般而言，欲估計非隨機參數時，最常被採用的方式為最大似然估計法 (Maximum-likelihood Estimation, MLE)。而最大似然估計法的特性之一是，在資料樣本數夠大時，其均方誤差 (Mean Square Error) 會漸進於最小均方誤差 [15]。

處理中心彙整所有解碼後的資料，便根據這些資料估計未知的目標信號。而未知參數 θ 對於解碼後的 \hat{b}_i 之似然函數 (Likelihood Function) 可表為

$$P(\hat{b}_i | \theta) = \tilde{q}_i(\theta)^{\hat{b}_i} (1 - \tilde{q}_i(\theta))^{1 - \hat{b}_i} \quad (3.1)$$

而結合機率密度函數 (Joint Probability Density Function, Joint pdf) 為

$$P(\hat{\mathbf{b}} | \theta) = \prod_{i=1}^N (\tilde{q}_i(\theta))^{\hat{b}_i} (1 - \tilde{q}_i(\theta))^{1 - \hat{b}_i} \quad (3.2)$$

對結合機率密度函數取對數函數後，可得 θ 的 log-likelihood function

$$\begin{aligned} L_o(\theta, \tau, \alpha) &\triangleq \sum_{i=1}^N \hat{b}_i \ln(\tilde{q}_i(\theta)) + \sum_{i=1}^N (1 - \hat{b}_i) \ln(1 - \tilde{q}_i(\theta)) \\ &= \sum_{i=1}^N \hat{b}_i \ln[q_i(\theta)(1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)) + (1 - q_i(\theta))e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (1 - \hat{b}_i) \ln[1 - q_i(\theta)(1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)) - (1 - q_i(\theta))e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中， $\tau \triangleq \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ ， $\alpha \triangleq \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$

則未知目標信號 θ 的最大似然估計法可表示為

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta} \{L_o(\theta, \tau, \alpha)\} \quad (3.4)$$

3.1.1 牛頓法分析

在實際的系統中，除非考慮某些特殊條件，否則是無法直接由最大似然估計法求得 θ 的解析解 (Closed-form Solution)。此篇提出的最大似然估計 (3.4) 因所考慮的環境較為複雜，無法推得估計未知參數之解析解。因此，我們訴諸於數值方法中的牛頓法 (Newton's Method)。

牛頓法是利用疊代 (Iteration) 的方式去逼近方程式的解，最大似然估計法為找出 θ

的似然函數之最大值，也就是求得使 $L_o(\theta, \tau, \alpha)$ 之一階微分為 0 的解，因此牛頓法可表示為以下的式子

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \hat{\theta}^{(i)} - \dot{L}_o(\hat{\theta}^{(i)}, \tau, \alpha) / \ddot{L}_o(\hat{\theta}^{(i)}, \tau, \alpha) \quad (3.5)$$

其中， $\dot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)$ 和 $\ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)$ 分別為 $L_o(\theta, \tau, \alpha)$ 的一階和二階微分。

透過選擇適當的初始值 $\theta^{(0)}$ 後，代入 (3.5)，求得 $\theta^{(1)}$ ，再將 $\theta^{(1)}$ 帶入原式求得 $\theta^{(2)}$ ，以此類推，如此反覆代入，理論上而言，所求得的值將會逐漸接近最大似然估計法的解 $\hat{\theta}_{MLE}$ 。然而，為保證牛頓法能如預期收斂到 $\hat{\theta}_{MLE}$ ，必須先分析 $L_o(\theta, \tau, \alpha)$ 對於 θ 是否為對數凹函數 (Log-concave Function)，以證明該函數之最大值的確存在，通常以二階微分之正負來判斷該函數為凹函數 (Concave Function) 或凸函數 (Convex Function)。我們也著手去分析此對數似然函數 $L_o(\theta, \tau, \alpha)$ 的特性，但最後無法透過二階微分的結果來判斷是否為凹函數。因此，此處利用模擬的方式檢驗牛頓法之可靠度。

模擬結果見 3.5 節

3.2 Cramér–Rao Lower Bound (CRLB)

若要評估一個估計法的性能優劣，通常以估計法之變異數 (Variance of Estimator) 作為一判斷準則。此篇所考慮的最大似然估計法，雖然無法明確表示出欲估計參數之解析解形式，以分析估計量之變異數，但由於此最大似然估計法具有不偏性 (Unbiased)，及其均方誤差漸進 (Asymptotic) 於 Cramér–Rao lower bound (CRLB) 的特性，其中，漸進性是指在有效感測器 N 的數量夠多，亦即處理中心所收到的訊息樣本數夠大時，最大似然估計法的估計量變異數會趨近 CRLB，因此，可將 CRLB 視為最大似然估計之估計量變異數的下界。根據此篇考慮的環境設定所得的 CRLB 如以下定理所示

[定理 3.2]:

任何無偏差估計法 (Unbiased Estimator) $\hat{\theta}$ 必符合

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq B_o(\theta, \tau, \alpha) \quad (3.6)$$

$B_o(\theta, \tau, \alpha)$ 為 Cramér–Rao lower bound (CRLB)，可進一步表示為 $B_o(\theta, \tau, \alpha) = \{I_o(\theta, \tau, \alpha)\}^{-1}$ ，其中， $I_o(\theta, \tau, \alpha)$ 為 Fisher Information (FIM)。

根據我們所考慮的環境，FIM 的推導結果為

$$\begin{aligned} I_o(\theta, \tau, \alpha) &= -E[\ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) (G(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2}{q_i(\theta) (1 - q_i(\theta)) + e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)) (1 - 2q_i(\theta))^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中， $G(\theta, \tau_i, \alpha_i) = Q\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) - Q\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) +$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{1}{2\alpha_i} \left[\left(\frac{1}{1 - q_i(\theta)}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)^2\right] - \frac{1}{q_i(\theta)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)^2\right] \right] \quad (3.8)$$

[證明]：見附錄三。

□

3.3 同質感測環境下之估計分析

如同第二章所提到的，本篇論文所考慮的監控環境設定是異質感測環境 (Inhomogeneous Sensing Environment)，也就是每個感測器受到雜訊干擾的功率都是不同的。這個小節要討論的是，將我們的系統模型簡化為同質感測環境 (Homogeneous Sensing Environment) 時，與其他相關文獻比較的結果。

3.3.1 環境設定

基本上同質感測環境，可視異質感測環境下之特殊情況，同質感測環境為考慮每個感測器受到雜訊干擾的功率都相同，可表示為

$$\sigma_i = \sigma, \tau_i = \tau, \text{ for all } 1 \leq i \leq N \quad (3.9)$$

[推論 3.3]：

在同質感測環境下 (3.9)，若再將感測器與處理中心之間的傳輸通道簡化為理想通道，也就是

$$h_i = 1, \text{ for all } 1 \leq i \leq N \quad (3.10)$$

$$\sigma_v = 0 \quad (3.11)$$

則定理 3.2 可以簡化為 [2, p.p.1132] 的結果

$$I(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^N \frac{p^2(\tau - \theta)}{q(\theta)[1 - q(\theta)]} \quad (3.12)$$

[證明]：見附錄四。

□

3.3.2 估計法比較

在過去的相關文獻中，由於考慮同質感測環境，以及利用最大似然估計法之恆等性 (Invariance Property)，對於 θ 之最大似然估計法，可表為 [2], [4]

$$\hat{\theta}_{MLE} = \tau - Q^{-1}(\hat{q}), \quad q \triangleq q(\theta) \quad (3.13)$$

其中， $Q^{-1}(t)$ 為 Q function 之反函數， \hat{q} 為柏努利參數 $q(\theta) \triangleq \Pr\{b_i = 1\}$ 之估計值，估計準則為

$$\hat{q} = \arg \max_{q \in (0,1)} L_o(\theta, \tau, \alpha) \quad (3.14)$$

針對我們的系統模型，將其簡化為同質感測環境的條件下，最大似然估計法可以有兩種求解的方式，其一是同考慮異質感測環境時的方式，直接使用牛頓法估計未知參數 θ ，其二如同文獻所示，先估計柏努利參數後 $q(\theta)$ ，再估計未知參數。

關於此兩種估計法之比較，將於 3.5 節的模擬結果做說明。

3.4 BPSK 調變訊號之估計分析

此篇所考慮的系統模型，是將觀測資料量化為單一位元中的二進制(Binary) 資料再做傳送，此類傳輸訊號亦稱為通斷鍵控 (ON/OFF keying, OOK) 調變訊號，因為可不需考慮相位的問題，通斷鍵控可視為二位元相位偏移調變 (Binary Phase Shift Keying, BPSK) 的特殊例子 [4]。在這個小節，我們將額外討論使用二位元相位偏移調變作為傳送訊號的系統。

3.4.1 系統模型設定

首先，將量化器輸出的訊號 b_i 經過二位元相位偏移調變後，感測器傳輸到處理中心的資料可表示為

$$m_i = 2b_i - 1 \quad (3.15)$$

假設處理中心使用協調性接收端 (Coherent Reception)，因此相位 (Phase) 雜訊可透過同步 (Synchronization) 消除 [5]。則處理中心所接受的訊號為 [4]

$$s_i = h_i m_i + v_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.16)$$

h_i 定義為複數通道增益的包絡線，且為瑞利分布的隨機變數。而 $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ 是平均值為 0，變異數為 σ_v^2 的高斯分布雜訊。

由於 b_i 為柏努利分布的隨機變數，則 m_i 的參數可表示為

$$\Pr\{m_i = +1\} = \Pr\{b_i = 1\} = q_i(\theta) \quad (3.17)$$

$$\Pr\{m_i = -1\} = \Pr\{b_i = 0\} = 1 - q_i(\theta) \quad (3.18)$$

處理中心收到資料後，同樣先對接收到的訊號解碼，得到 $\hat{m}_i \in \{-1, +1\}$ ，則解碼的錯誤率為

$$e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \triangleq (1 - q_i(\theta))Q\left(2\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + q_i(\theta)Q\left(2\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) \quad (3.19)$$

而 \hat{m}_i 的參數為 $\bar{q}_i(\theta) \triangleq \Pr\{\hat{m}_i = +1\}$

$$\bar{q}_i(\theta) = q_i(\theta)(1 - e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)) + (1 - q_i(\theta))e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \quad (3.20)$$

結合機率密度函數為

$$P(\hat{\mathbf{m}}_i | \theta) = \prod_{i=1}^N (\bar{q}_i(\theta))^{\frac{1+\hat{m}_i}{2}} (1 - \bar{q}_i(\theta))^{\frac{1-\hat{m}_i}{2}} \quad (3.21)$$

對結合機率密度函數取對數函數後，可得 log-likelihood function

$$L_b(\theta, \tau, \alpha) \triangleq \sum_{i=1}^N \frac{1 + \hat{m}_i}{2} \ln(\bar{q}_i(\theta)) + \frac{1 - \hat{m}_i}{2} \ln(1 - \bar{q}_i(\theta)) \quad (3.22)$$

[定理 3.4]:

考慮二位元相位偏移調變作為傳輸訊號，則任何無偏差估計量 $\hat{\theta}$ 必符合

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq B_b(\theta, \tau, \alpha) \quad (3.23)$$

CRLB $B_b(\theta, \tau, \alpha) \triangleq \{I_b(\theta, \tau, \alpha)\}^{-1}$ ，而 FIM $I_b(\theta, \tau, \alpha) \triangleq -E[\ddot{L}_b(\theta, \tau, \alpha)]$ 。根據此節所考慮的環境，FIM 的推導結果為

$$\begin{aligned} I_b(\theta, \tau, \alpha) &= -E[\ddot{L}_b(\theta, \tau, \alpha)] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) \left(\tilde{G}(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \right)^2}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta)) + e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i))(1 - 2q_i(\theta))^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \text{其中，} \tilde{G}(\theta, \tau_i, \alpha_i) &= Q\left(2\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) - Q\left(2\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + \\ &\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{2\alpha_i} \left[\left(\frac{1}{1 - q_i(\theta)} \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(2\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \right)^2\right) - \frac{1}{q_i(\theta)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(2\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \right)^2\right) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

[證明]: 見附錄五。

□

3.5 模擬結果

以下為 3.1.1 節之模擬參數設定

模擬參數	設定值
有效感測器數目 N	100
偵測目標信號 θ	0.8
量化閾值與感測環境雜訊功率之比值 τ_i/σ_i	-0.7
牛頓法之容忍誤差參數 δ	0.001

表 1 模擬參數設定-3.1.1

圖 2 是設定 τ_i/σ_i 為 -0.7 下之 θ 的對應對數似然函數，代入不同的 θ 值所得到的函數值。另外，由此圖可發現對數似然函數對於未知參數 θ 既非凸函數，也非凹函數。

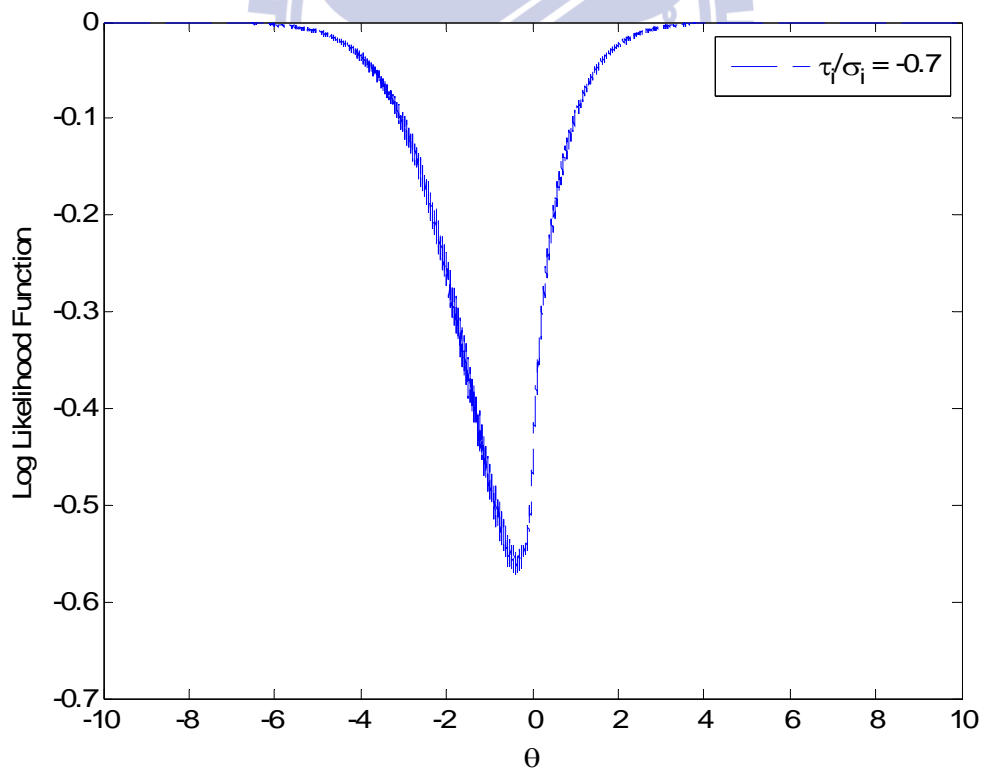


圖 2 θ 對應之對數似然函數值

圖 3 橫軸是牛頓法疊代的次數，橫軸為對應的對數似然函數值。此圖是先依序將牛頓法疊代所得到的 θ 值記錄下來，再對照圖 2 找到每個 θ 值對應的對數似然函數值，便可描繪出每次疊代所對應的對數似然函數值，如下圖所示

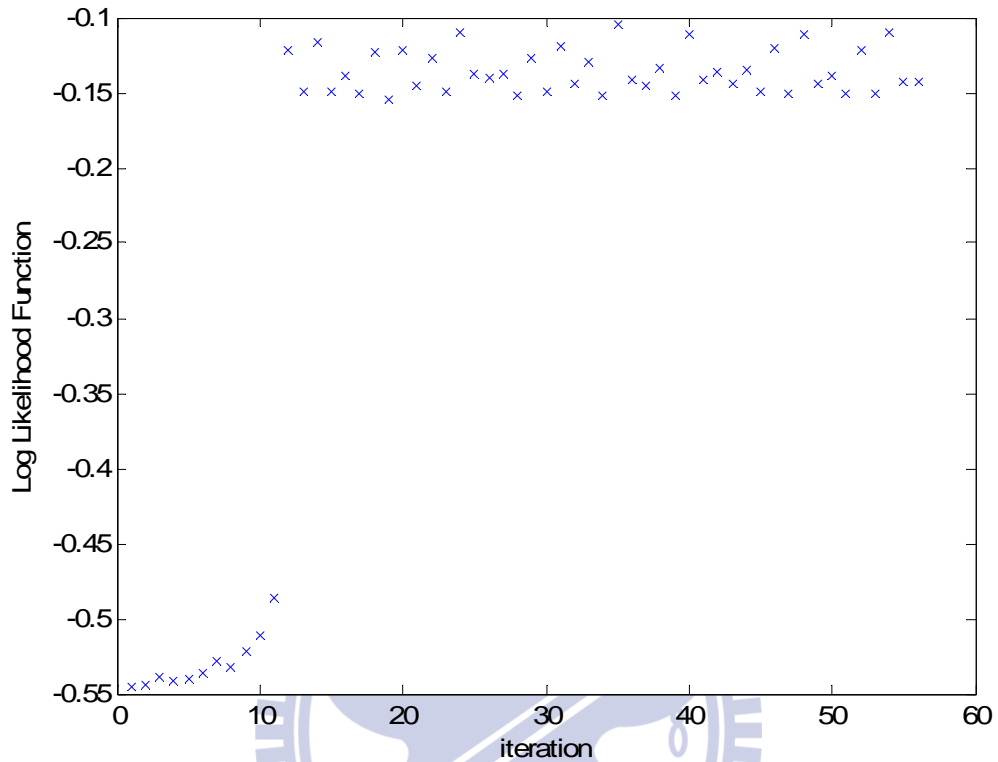


圖 3 牛頓法疊代過程對應對數似然函數之值

對照圖 2，可以觀察到 θ 為 0.8 時，對應到的對數似然函數值約在 -0.15 左右，而圖 3 在第 12 次疊代後便一直在 -0.15 附近震盪，因此，透過牛頓法的確可以找到相當不錯的解。

此次模擬最後求得的 $\hat{\theta}$ 為 0.7351739，因此標準化之均方誤差 (Normalized Mean Square Error, NMSE) 為 0.0066。

以下為 3.3.2 節之模擬參數設定

模擬參數	設定值
通道信雜比(dB)	10
偵測目標信號 θ	1
量化閾值與感測環境雜訊功率之比值 τ/σ	1.2
牛頓法之容忍誤差參數 δ	0.001

表 2 模擬參數設定-3.3.2

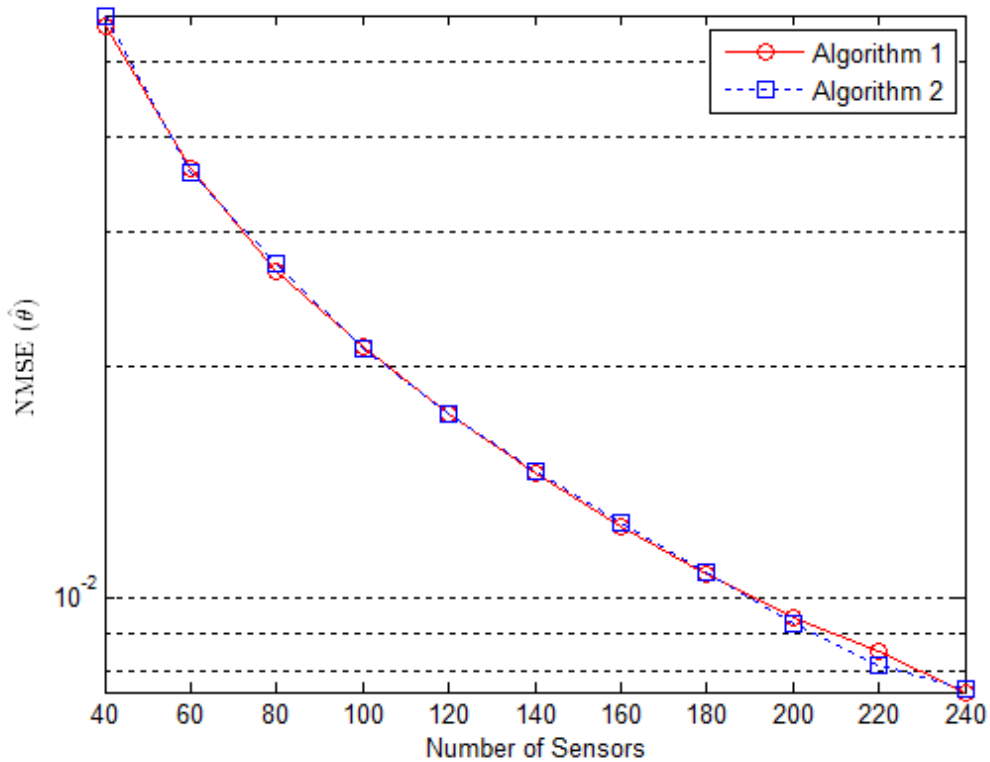


圖 4 最大似然估計法之演算法比較

Algorithm 1 為直接使用牛頓法估計未知目標信號 θ ，Algorithm 2 為 (3.13)先估計柏努利參數，再估計 θ 。橫軸為有效感測器的數目，縱軸為標準化均方誤差，由上圖可發現，此兩種演算方式得到的結果是相同的。

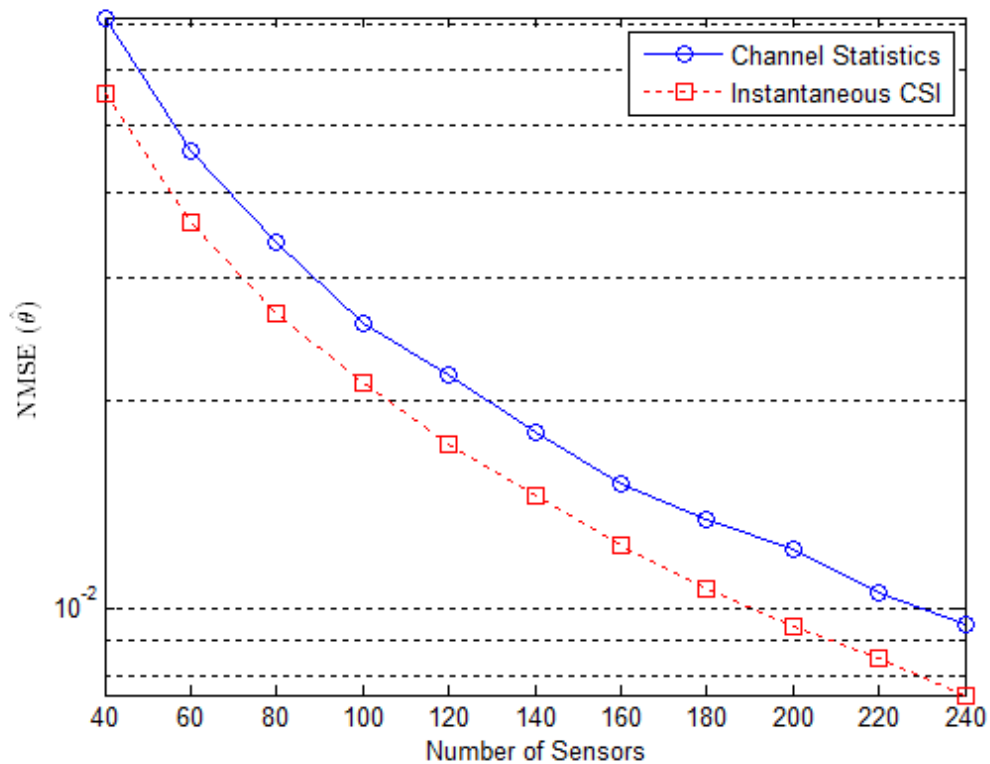


圖 5 已知與未知通道增益之標準化均方誤差比較圖

在圖 5 中，“Channel Statistics”是考慮處理中心只知通道統計特性的情況 [4]，“Instantaneous CSI”為處理中心已知通道增益，此圖說明了在已知通道增益的情況下，其均方誤差確實比只知統計特性的情況小。

以下為 3.4 節之模擬參數設定

模擬參數	設定值
通道信雜比(dB)	10
偵測目標信號 θ	1
量化閾值與感測環境雜訊功率之比值 τ_i/σ_i	1.2 (圖 7)
	-2.2 (圖 8)
牛頓法之容忍誤差參數 δ	0.001

表 3 模擬參數設定-3.4

首先，圖 6 為比較在相同的通道信噪比 (Channel SNR) 的條件下，解碼的錯誤率。由於由通斷鍵控調變之訊號為二進制，如此一來，若傳送訊號為 0 時，可能會發生處理中心誤判為沒有傳送訊號的情況，而二位元相位偏移調變之訊號為 -1 和 1，相較之下誤判的機率較小。因此理論上而言，二位元相位偏移調變的解碼錯誤率較低。於此圖可發現的確使用二位元相位偏移調變訊號之解碼錯誤率比使用通斷鍵控的訊號低。

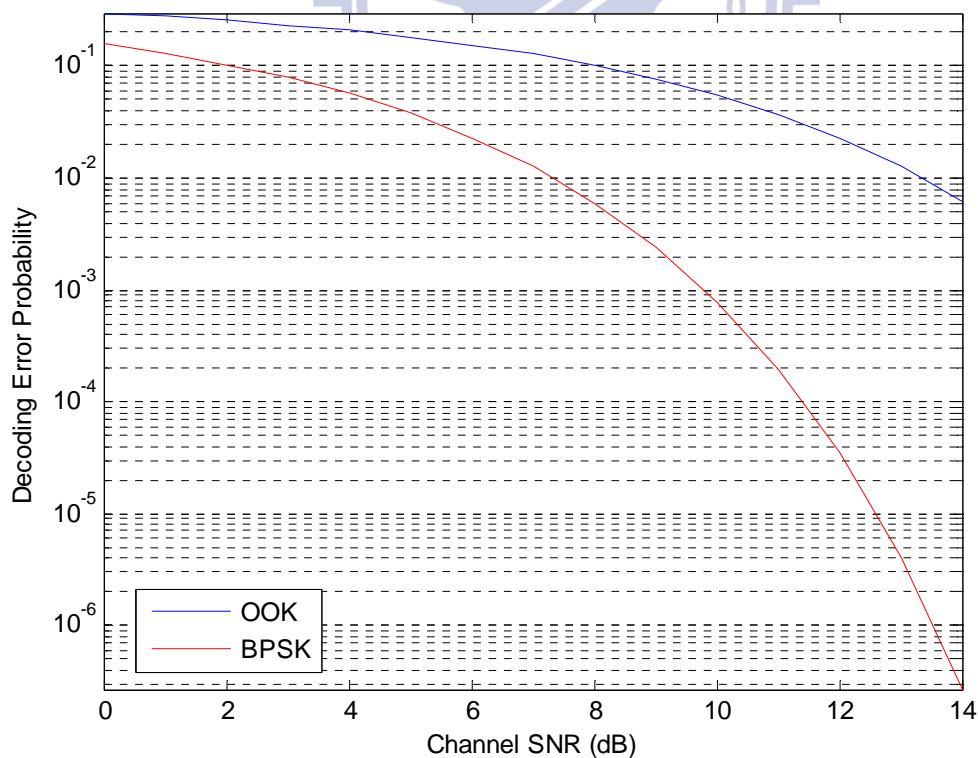


圖 6 OOK 與 BPSK 之解碼錯誤率比較圖

圖 7 與圖 8 均為比較使用通斷鍵控調變訊號與使用二位元相位偏移調變訊號的標準化均方誤差之差異，橫軸為有效感測器的數目，縱軸為標準化均方誤差，圖 7 是考慮同質感測環境，而圖 8 是考慮異質感測環境下之結果。由圖可觀察到標準化均方誤差皆會隨著感測器數目的增加而下降

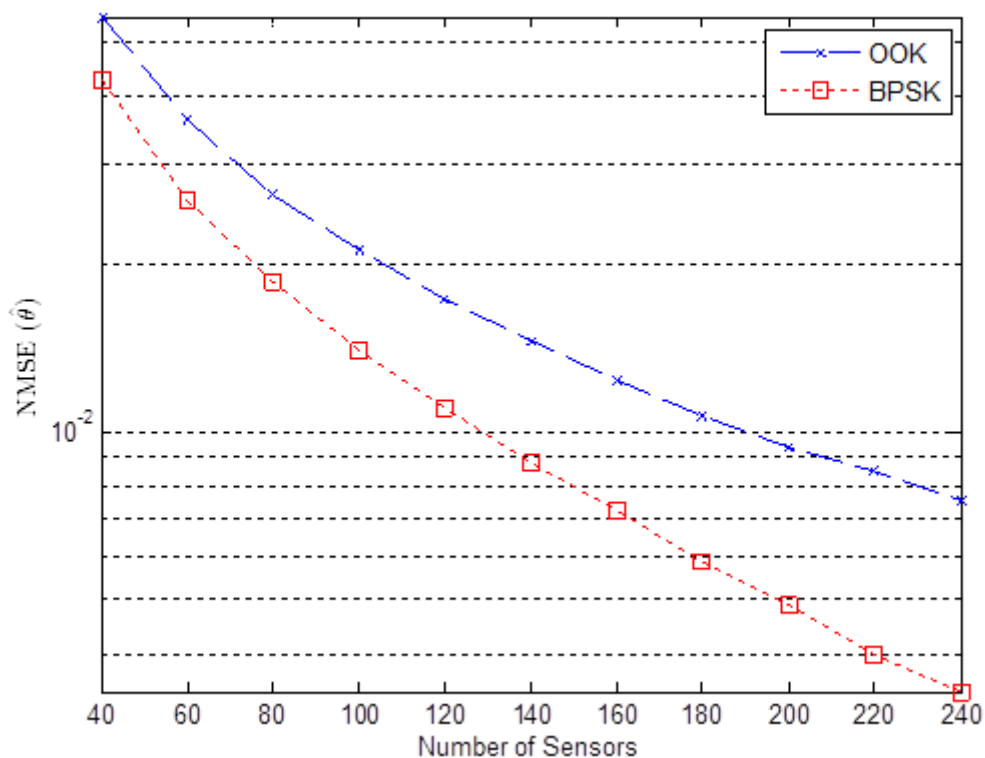


圖 7 同質感測環境下之 OOK 與 BPSK 標準化均方誤差比較圖

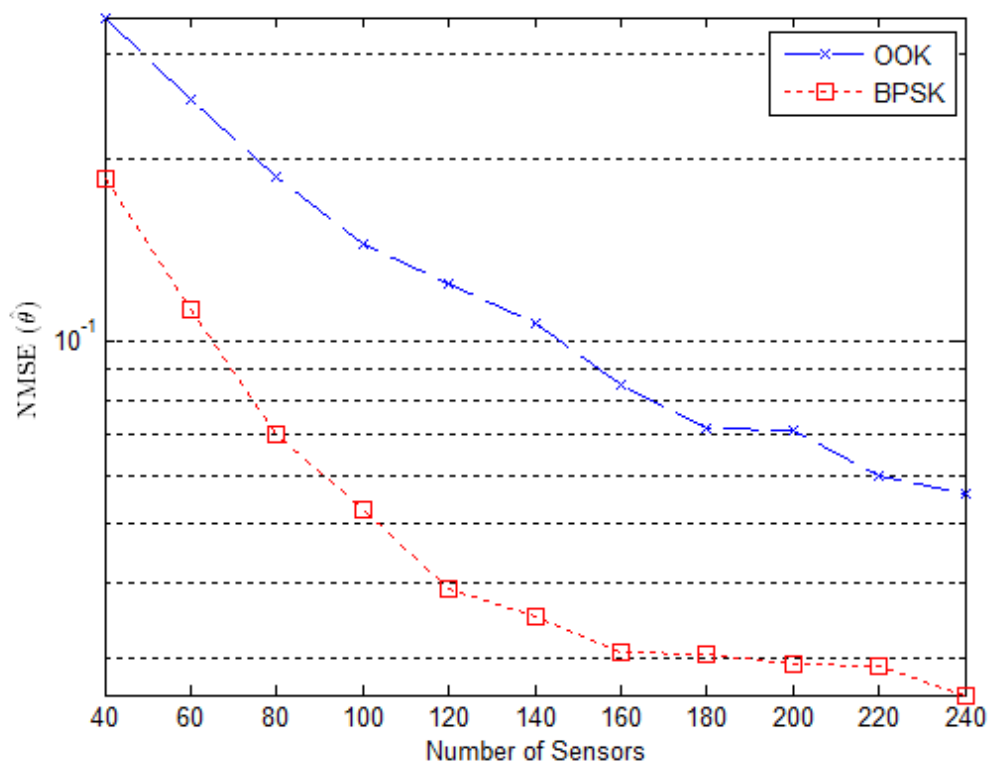


圖 8 異質感測環境下之 OOK 與 BPSK 標準化均方誤差比較圖

雖然傳送二位元相位偏移調變的訊號，最後處理中心的估計誤差較小，但傳送通斷鍵控調變的訊號可使感測器消耗最少的能量 [4][9]，使得整體無線感測網路的壽命得以延長，因此兩者各有優劣。

第四章 感測器之量化閾值設計

感測器將受雜訊干擾之目標訊號 θ 量化為單一位元後，傳送到處理中心，由處理中心整合所有資訊後，根據這些資訊估計目標信號 θ ，因此，量化閾值 (Quantization Threshold) 的選擇，會影響目標信號的估計結果，而為了讓處理中心能夠更加精確的估計，使均方誤差能達到最小，此章節主要討論如何選擇量化閾值，並且由模擬結果說明被選出之量化閾值，相較於其他量化閾值，的確可達到較小的均方誤差。

4.1 設計準則

若欲使估計的誤差最小，一般為設計量化閾值 [2][5][7]，使估計法之變異數最小。由於此篇所提出之最大似然估計法，並無解析解的表示法，因此，無法透過分析變異數的方式，求得適合的量化閾值。但最大似然估計法的特性之一，便是其變異數會漸進於 Cramér-Rao lower bound (CRLB)，因 CRLB 為無偏性估計法之均方誤差的下界。所以，若找出能使 CRLB 達到最小值之量化閾值，則該量化閾值應也能使均方誤差最小。

4.2 最佳化模型

由定理 3.2 可發現，CRLB 和欲估計的未知參數 θ 有關，若直接以 CRLB 來選擇使其達到最小值之量化閾值，會造成量化閾值的選擇會因 θ 的不同而有所改變，則量化器必須先知道 θ 才能得到量化閾值，但此情形是不合理的，且應避免發生。

解決的方式是，在此處引進未知參數 θ 的事前機率 (Prior Probability) [2]，例如在估計氣溫時，處理中心已經知道在台灣平地的氣溫大約是落在 0~40 度之間，而最有可能的溫度介於 20~35 度之間，年均溫約為 23 度左右，而處理中心可依據這些資訊，得到對於未知參數的統計特性。因此，若對原本的 CRLB 引進對 θ 的信賴 (Confidence) 程度，即可得到加權後之 CRLB (Weighted CRLB, WCRLB)，可表示為

$$C_W(\tau, \alpha) \triangleq \int B_o(\theta, \tau, \alpha) W(\theta) d\theta \quad (4.1)$$

其中， $W(\theta)$ 為 θ 的事前機率，亦為 CRLB 之權重函數 (Weighting Function)， $\tau \triangleq \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ ， $\alpha \triangleq \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ 。由於無法直接計算 WCRLB，因此訴諸於數值方法中的辛普森法則 (Simpson's Rule) [14] 求解 WCRLB。

量化器輸出 b_i 之柏努利參數 $q_i(\theta) = Q((\tau_i - \theta)/\sigma_i)$ 介於 0 和 1 之間，若任意選擇量化閾值而使得 $q_i(\theta)$ 超出其有效區域 (Effective Range) [5]，則處理中心很難透過 b_i 有效的估計未知目標信號 θ 。因此我們定義 $\gamma_i = \tau_i/\sigma_i$ ，保證在選擇量化閾值時，不致於太過偏離有效區域。則量化閾值的最佳化模型可表示為

$$\gamma_{opt} = \arg \min_{\gamma} C_W(\tau, \alpha) \quad (4.2)$$

其中， $\gamma \triangleq \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ 。

4.3 節將使用此模型，透過模擬選擇出適合的量化閾值。

4.3 模擬結果

模擬參數	設定值
有效感測器數目 N	100
偵測目標信號 θ 範圍	$\theta \in [-5, 5]$
權重函數 $W(\theta)$	Uniform Distributed

表 4 模擬參數設定-4.2

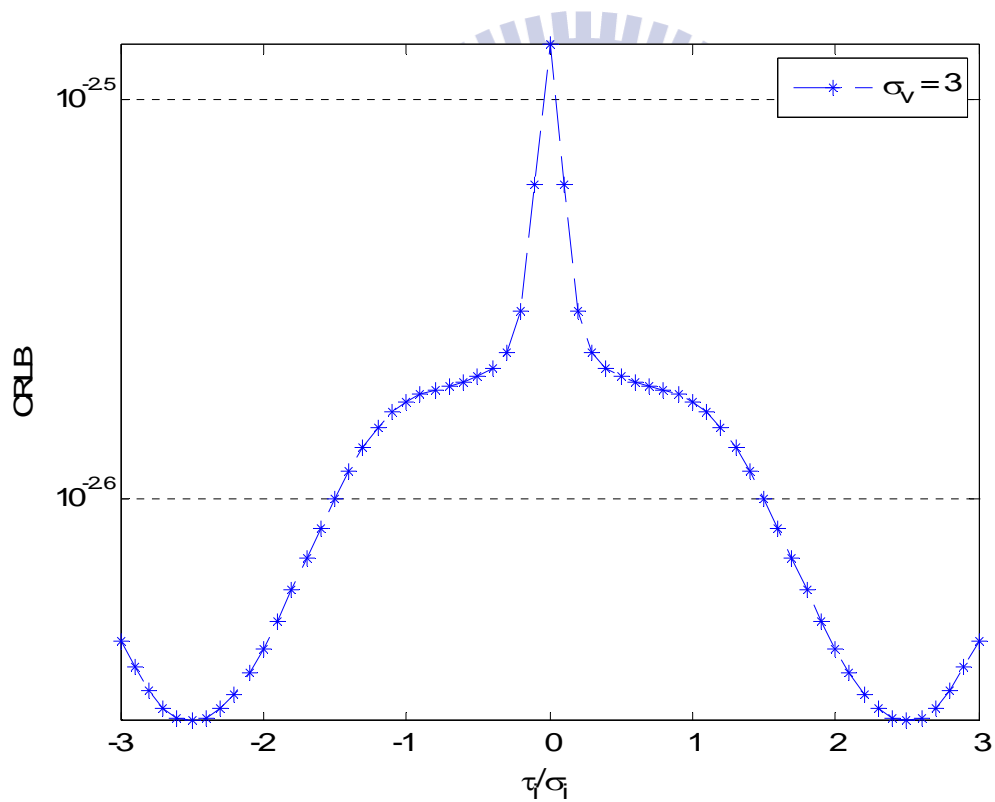


圖 9 Weighted CRLB 之趨勢圖 - 通道信雜比為-10 (dB)

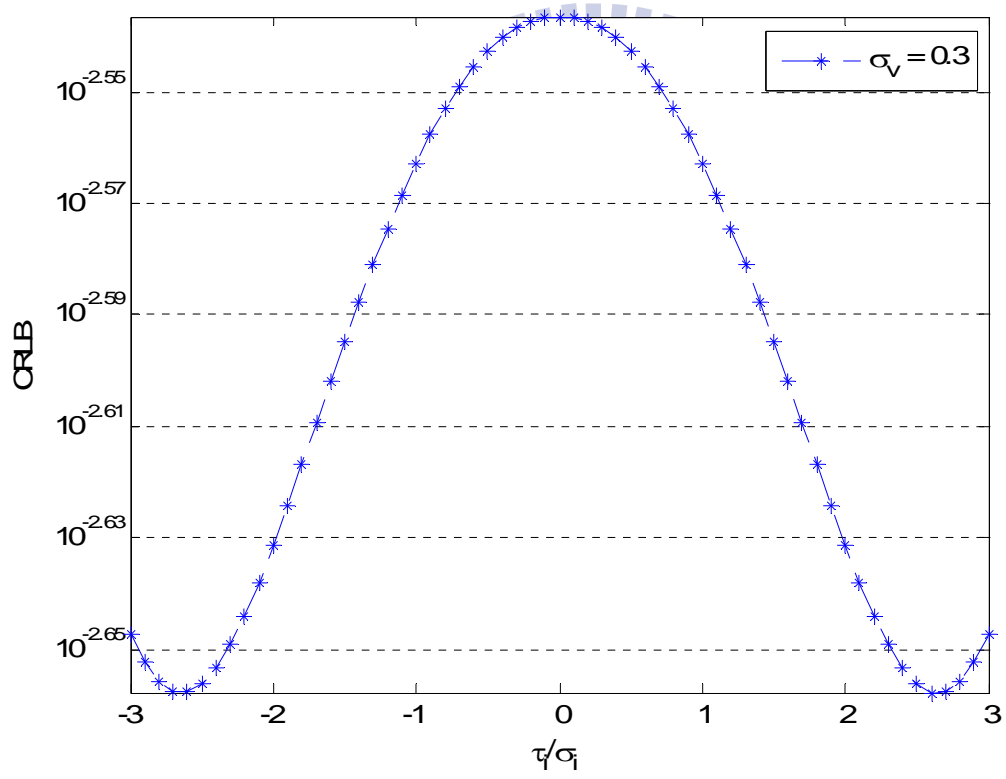


圖 10 Weighted CRLB 之趨勢圖 - 通道信雜比為 10 (dB)

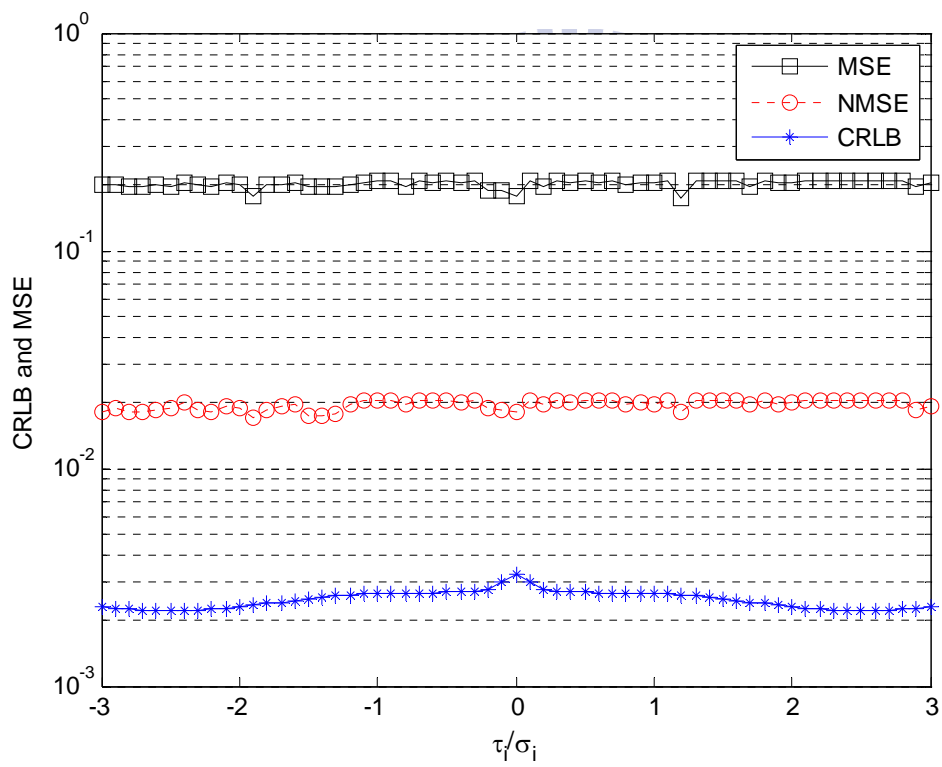


圖 11 Weighted CRLB 與 NMSE 之趨勢圖 - 通道信雜比為-10 (dB)

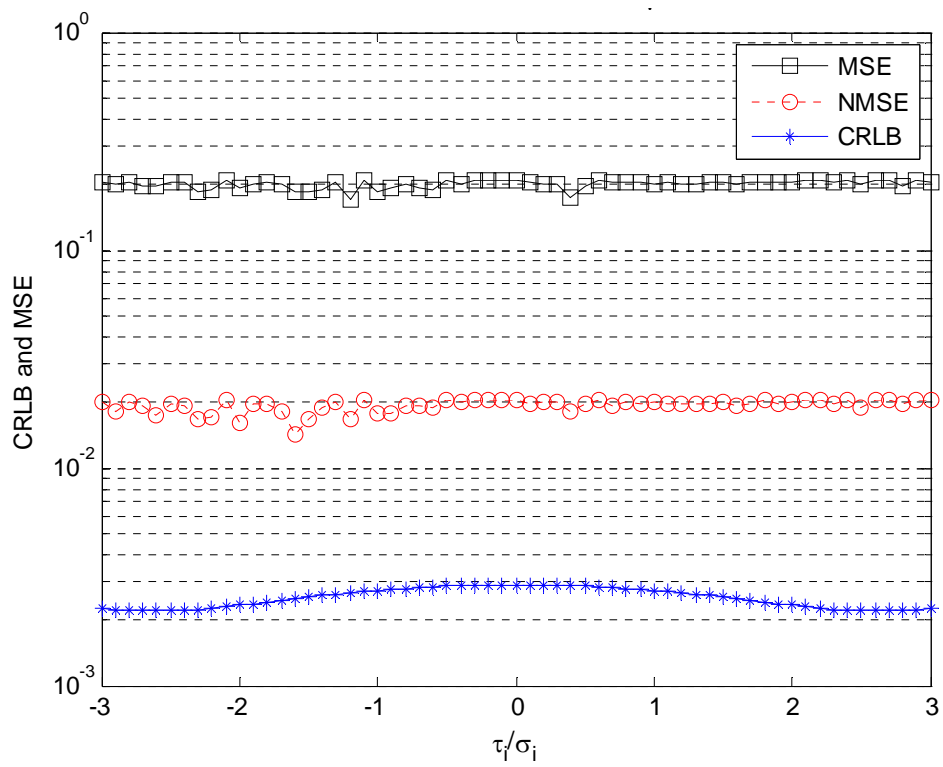


圖 12 Weighted CRLB 與 NMSE 之趨勢圖 - 通道信雜比為 10 (dB)

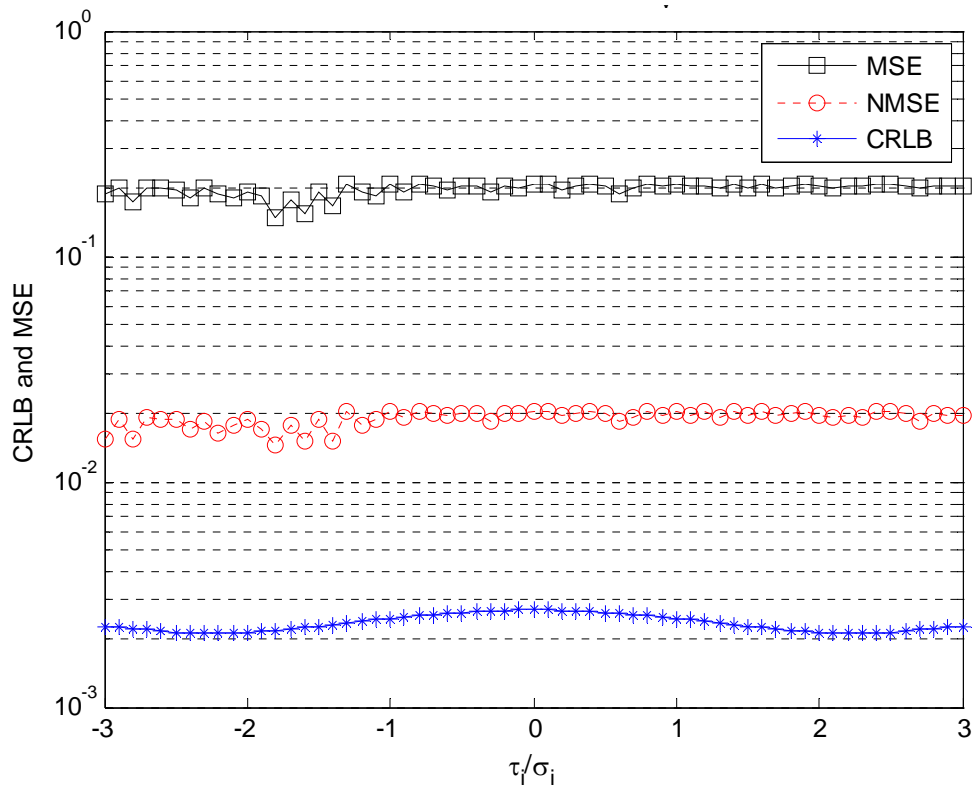


圖 13 Weighted CRLB 與 NMSE 之趨勢圖 - 通道信雜比為 25 (dB)

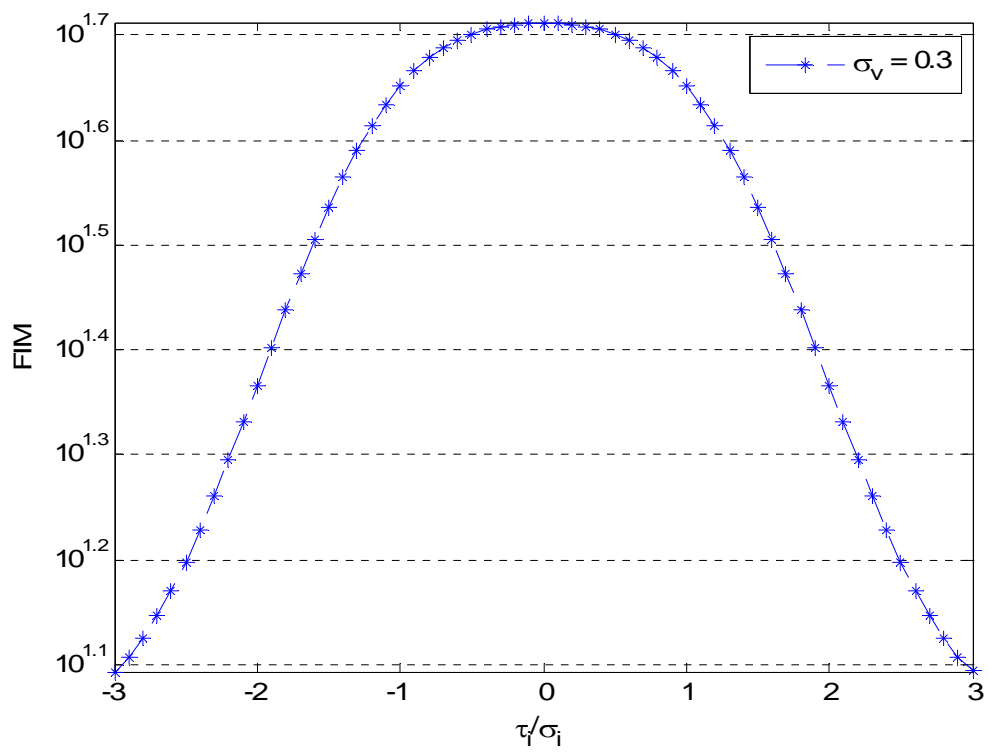


圖 14 Weighted Fisher Information 之趨勢圖 - 通道信雜比為 10 (dB)

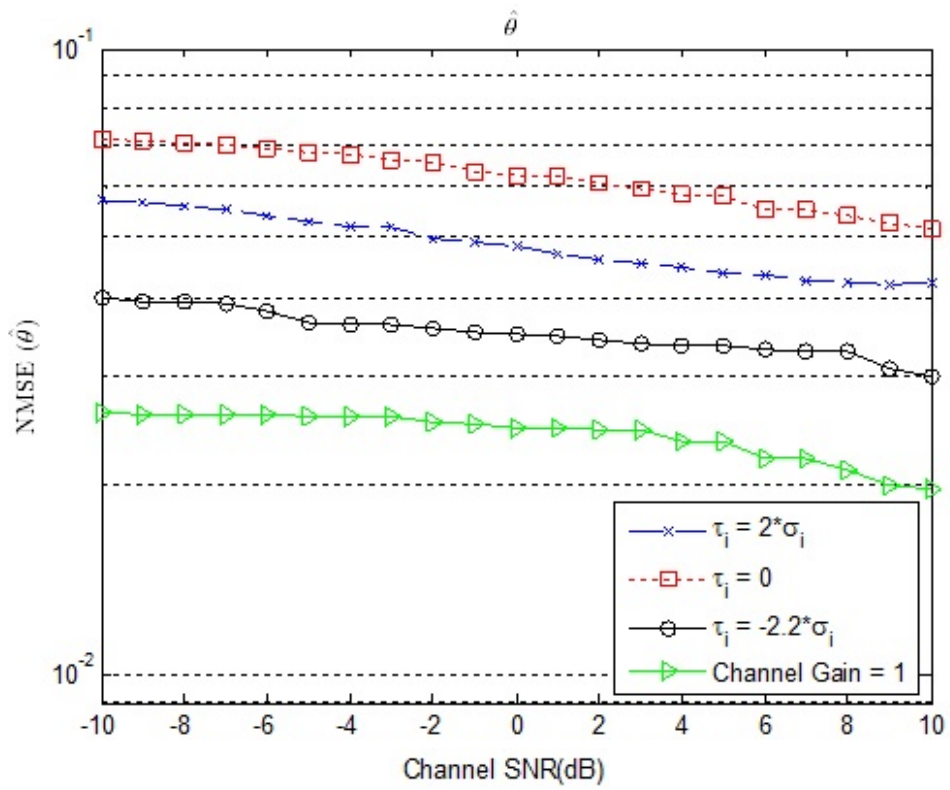


圖 15 不同量化閾值之 NMSE 比較圖

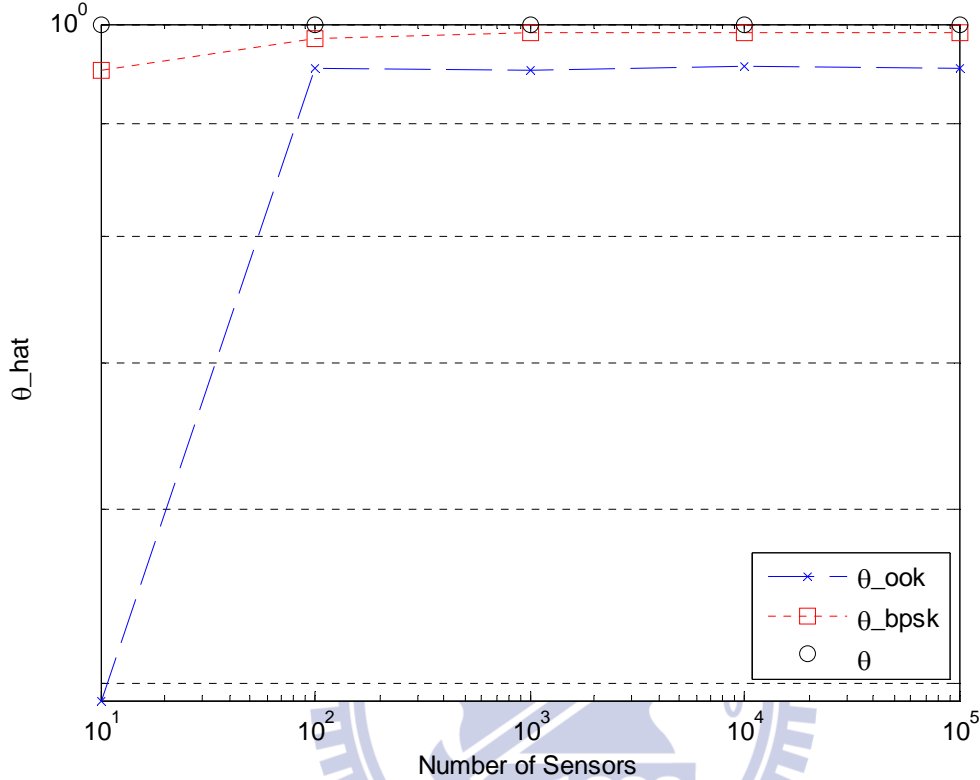


圖 16 檢驗是否為無偏性估計

比較圖 9 和圖 10，可以發現最小的 Weighted CRLB 大約都是發生在 -2.5 附近。再比較圖 11、圖 12、圖 13，可觀察到整體的 MSE 及 NMSE 在負的 γ_i 會比正的部分小，也就是估計的結果會比較接近目標信號。

圖 14 為對 Fisher Information 加權後，透過辛普森法則計算的結果

$$I_w(\tau, \alpha) \triangleq \int I(\theta, \tau, \alpha) W(\theta) d\theta \quad (4.3)$$

此圖主要為觀察使用 $I_w(\tau, \alpha)$ 與 $C_w(\tau, \alpha)$ 的差異。由於 Fisher Information 為 CRLB 之倒數，我們在選擇量化閾值時的準則為最小化 Weighted CRLB，先猜測其結果等同於最大化 Weighted FIM，但很明顯的，比較圖 10 與圖 14，兩者所求得的最佳量化閾值全然不同，再與圖 15 比較，可發現根據 Weighted FIM 所求得的最佳量化閾值 0，並無法得到最小的均方誤差，因此，選擇量化閾值的準則應使用 Weighted CRLB。

圖 16 為檢驗透過牛頓法找解之最大似然估計法，是否為無偏性估計法，由模擬結果可發現並非為無偏性估計法，因為當感測器數目非常大時，估計結果之期望值並不會更接近實際值。

第五章 結論

本篇論文中主要討論以分散式無線感測網路系統偵測目標訊號。相較於過去文獻所考慮的同質感測環境，我們考慮的是較符合實際狀況的異質感測環境，因此，每個感測器感知目標信號所受到的雜訊干擾功率皆不相同。感測器蒐集環境有效資訊後，在考慮最嚴格的傳輸頻寬限制下，感測器需將觀測資料量化為單一位元再傳送，處理中心再根據感測器傳送的資料估計目標訊號。我們推導出最大似然估計法，估計未知目標信號，接著推導出 Cramér–Rao Lower Bound (CRLB) 評估該估計法之效能，由於我們推導出之最大似然估計法，無法得到明確的解析解形式，因此訴諸於數值方法中的牛頓法，以疊代的方式逼近最大似然估計法的解，並且透過模擬說明牛頓法確實可求得不錯的解。

為了使估計誤差可以更小，我們設計一組量化閾值，使無偏性估計法之均方誤差的下界 CRLB 達到最小值，但是 CRLB 與未知目標信號 θ 有關，此處藉由引進了 θ 的事前機率，作為 CRLB 的權重函數，如此一來，便可使用加權後的 CRLB 來設計量化閾值。最後，藉由模擬結果，驗證我們所設計的量化閾值，的確可以縮小估計誤差。



参考文献

- [1] I. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarsubramaniam, and E. Cayirci, "Wireless sensor networks: A survey," *Comput. Netw.*, vol. 38, pp. 393–422, Mar. 2002.
- [2] Ribeiro, A. and Giannakis, G.B., "Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor Networks-part I: Gaussian case," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.54, no.3, pp.1131,1143, March 2006.
- [3] Aysal, T.C. and Barner, K.E., "Constrained Decentralized Estimation Over Noisy Channels for Sensor Networks," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.56, no.4, pp.1398,1410, April 2008.
- [4] Ozdemir, O., Ruixin Niu, and Varshney, P.K., "Distributed estimation using binary data transmitted over fading channels," *2009. ICASSP, 2009. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol., no., pp.2069,2072, 19-24 April 2009.
- [5] Tao Wu and Qi Cheng, "Distributed estimation over fading channels using one-bit quantization," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol.8, no.12, pp.5779,5784, December 2009
- [6] ----, "Efficient distributed estimators in wireless sensor networks," *2010 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, vol., no., pp.1,6, 17-19 March 2010
- [7] ----, "One-Bit Quantizer Design for Distributed Estimation under the Minimax Criterion," *2010 IEEE 71st Vehicular Technology Conference (VTC 2010-Spring)*, vol., no., pp.1,5, 16-19 May 2010
- [8] Kapnadak, V., Senel, M., and Coyle, E.J., "Distributed Iterative Quantization for Interference Characterization in Wireless Networks," *2010 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, vol., no., pp.1,6, 23-27 May 2010
- [9] Ruixiang Jiang and Biao Chen, "Fusion of censored decisions in wireless sensor networks," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol.4, no.6, pp.2668,2673, Nov. 2005
- [10] Xin Wang and Chenyang Yang, "Optimal and Suboptimal Decentralized Estimation Underlying Fading Channels in WSNs," *2007. GLOBECOM '07. IEEE Global Telecommunications Conference*, vol., no., pp.2863,2867, 26-30 Nov. 2007
- [11] Jin-Jun Xiao and Zhi-Quan Luo, "Decentralized estimation in an inhomogeneous sensing environment," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.51, no.10, pp.3564,3575, Oct. 2005
- [12] Junyong Chen and Weizhou Su "Optimal bit allocation for distributed estimation in wireless sensor networks", *2009. ICCA, 2009. IEEE International Conference on Control and Automation*, , On page(s): 92 – 97
- [13] Li, Hongbin and Fang, Jun "Distributed Adaptive Quantization and Estimation for Wireless Sensor Networks", *IEEE Signal Processing Letters*, Volume.14, Issue.10, pp.669, 2007
- [14] J.H. Mathews and K.K. Fink, *Numerical Methods Using Matlab*. Prentice Hall, 2004.

- [15] Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.



附錄一 (2.5)式證明

已知處理中心所接收到的訊號為

$$y_i = h_i b_i + v_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

首先，定義 Ψ_i 為 y_i 被判斷為 $\hat{b}_i = 1$ 的範圍。若 $b_i = 1$ ， y_i 的機率密度函數定為 $\phi_1(y_i)$ ，若 $b_i = 0$ ， y_i 的機率密度函數定為 $\phi_0(y_i)$ 。

位元錯誤率 (Bit Error Rate, BER) 可表示為

$$\begin{aligned} & \Pr \{ \text{guess}(b_i = 1) \mid b_i = 0 \} \Pr [b_i = 0] + \Pr \{ \text{guess}(b_i = 0) \mid b_i = 1 \} \Pr [b_i = 1] \\ &= \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid b_i = 0 \} \Pr [b_i = 0] + \Pr \{ y_i \notin \Psi_i \mid b_i = 1 \} \Pr [b_i = 1] \\ &= \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid b_i = 0 \} (1 - q_i(\theta)) + \Pr \{ y_i \notin \Psi_i \mid b_i = 1 \} q_i(\theta) \\ &= \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid b_i = 0 \} (1 - q_i(\theta)) + (1 - \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid b_i = 1 \}) q_i(\theta) \\ &= q_i(\theta) + (1 - q_i(\theta)) \int_{\Psi_i} \phi_0(y_i) dy_i - q_i(\theta) \int_{\Psi_i} \phi_1(y_i) dy_i \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

若欲使錯誤機率最小，則

$$\Psi_i^{opt} = \{ (1 - q_i(\theta)) \phi_0(y_i) - q_i(\theta) \phi_1(y_i) < 0 \} \quad (\text{A.2})$$

因此，最佳的決策法則 (Optimal decision rule) 為

$$\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \stackrel{1}{\underset{0}{\gtrless}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{(y_i - h_i)^2}{2\sigma_v^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_v^2}\right)} = \exp\left(\frac{2y_i h_i - h_i^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

最後推導出之判斷依據為

$$y_i \stackrel{1}{\underset{0}{\gtrless}} \frac{\sigma_v^2}{h_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + \frac{h_i}{2} \quad (\text{A.4})$$

定義決策閾值 (Decision threshold) 為

$$th \triangleq \frac{\sigma_v^2}{h_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + \frac{h_i}{2} \quad (\text{A.5})$$

因此，最小解碼錯誤率為

$$\begin{aligned} e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) &= (1 - q_i(\theta)) \Pr \{ y_i > th \mid b_i = 0 \} + q_i(\theta) \Pr \{ y_i < th \mid b_i = 1 \} \\ &= (1 - q_i(\theta)) \Pr \left\{ \frac{y_i}{\sigma_v} > \frac{th}{\sigma_v} \right\} + q_i(\theta) \Pr \left\{ \frac{y_i - h_i}{\sigma_v} < \frac{th - h_i}{\sigma_v} \right\} \end{aligned}$$

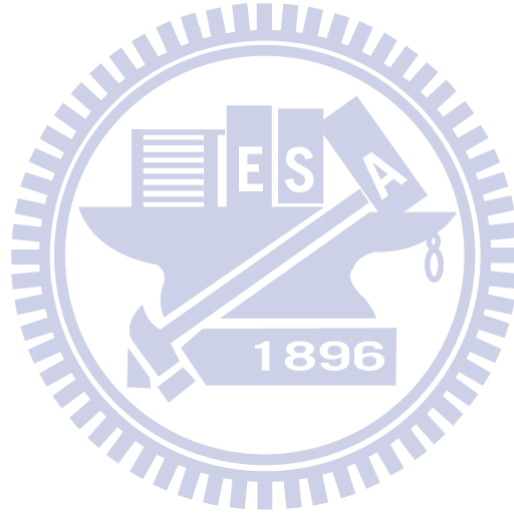
$$\begin{aligned}
&= (1 - q_i(\theta))Q\left(\frac{th}{\sigma_v}\right) + q_i(\theta)\left(1 - Q\left(\frac{th - h_i}{\sigma_v}\right)\right) \\
&= (1 - q_i(\theta))Q\left(\frac{h_i}{2\sigma_v} + \frac{\sigma_v}{h_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) + q_i(\theta)Q\left(\frac{h_i}{2\sigma_v} - \frac{\sigma_v}{h_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

定義通道信噪比值 (Channel SNR ratio) 為 $\alpha_i \triangleq \frac{h_i}{2\sigma_v}$

則解碼錯誤率可表示為

$$e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) = (1 - q_i(\theta))Q\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) + q_i(\theta)Q\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) \quad (\text{A.7})$$

□



附錄二 (3.19)式證明

已知處理中心所接收到的訊號為

$$s_i = h_i m_i + v_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

首先，定義 Ψ_i 為 y_i 被判斷為 $\hat{m}_i = 1$ 的範圍。若 $m_i = 1$ ， y_i 的機率密度函數定為 $\phi_1(y_i)$ ，若 $m_i = -1$ ， y_i 的機率密度函數定為 $\phi_{-1}(y_i)$ 。

位元錯誤率可表示為

$$\begin{aligned} & \Pr \{ \text{guess}(m_i = 1) \mid m_i = -1 \} \Pr [m_i = -1] + \Pr \{ \text{guess}(m_i = -1) \mid m_i = 1 \} \Pr [m_i = 1] \\ &= \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid m_i = -1 \} \Pr [m_i = -1] + \Pr \{ y_i \notin \Psi_i \mid m_i = 1 \} \Pr [m_i = 1] \\ &= \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid m_i = -1 \} (1 - q_i(\theta)) + \Pr \{ y_i \notin \Psi_i \mid m_i = 1 \} q_i(\theta) \\ &= \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid m_i = -1 \} (1 - q_i(\theta)) + (1 - \Pr \{ y_i \in \Psi_i \mid m_i = 1 \}) q_i(\theta) \\ &= q_i(\theta) + (1 - q_i(\theta)) \int_{\Psi_i} \phi_{-1}(y_i) dy_i - q_i(\theta) \int_{\Psi_i} \phi_1(y_i) dy_i \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

若欲使錯誤機率最小，則

$$\Psi_i^{\text{opt}} = \{ (1 - q_i(\theta)) \phi_{-1}(y_i) - q_i(\theta) \phi_1(y_i) < 0 \} \quad (\text{B.2})$$

因此，最佳的決策法則 (Optimal decision rule) 為

$$\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \underset{-1}{\overset{1}{\geq}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{(y_i - h_i)^2}{2\sigma_v^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{(y_i + h_i)^2}{2\sigma_v^2}\right)} = \exp\left(\frac{2h_i y_i}{\sigma_v^2}\right) \quad (\text{B.3})$$

最後推導出之判斷依據為

$$y_i \underset{-1}{\overset{1}{\geq}} \frac{\sigma_v^2}{h_i} \ln \left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \right) \quad (\text{B.4})$$

定義決策閾值 (Decision threshold) 為

$$th \triangleq \frac{\sigma_v^2}{h_i} \ln \left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \right) \quad (\text{B.5})$$

因此，最小解碼錯誤率為

$$\begin{aligned} e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) &= (1 - q_i(\theta)) \Pr \{ y_i > th \mid m_i = -1 \} + q_i(\theta) \Pr \{ y_i < th \mid m_i = 1 \} \\ &= (1 - q_i(\theta)) \Pr \left\{ \frac{y_i + h_i}{\sigma_v} > \frac{th + h_i}{\sigma_v} \right\} + q_i(\theta) \Pr \left\{ \frac{y_i - h_i}{\sigma_v} < \frac{th - h_i}{\sigma_v} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - q_i(\theta))Q\left(\frac{th + h_i}{\sigma_v}\right) + q_i(\theta)\left(1 - Q\left(\frac{th - h_i}{\sigma_v}\right)\right) \\
&= (1 - q_i(\theta))Q\left(\frac{h_i}{\sigma_v} + \frac{\sigma_v}{h_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) + q_i(\theta)Q\left(\frac{h_i}{\sigma_v} - \frac{\sigma_v}{h_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

定義通道信噪比值 (Channel SNR ratio) 為 $\alpha_i \triangleq \frac{h_i}{2\sigma_v}$

則解碼錯誤率可表示為

$$e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) = (1 - q_i(\theta))Q\left(2\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) + q_i(\theta)Q\left(2\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln\left(\frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)\right) \quad (\text{B.7})$$

□



附錄三 定理 3.2 證明

首先，為了使推導過程較易說明，定義了以下參數

$$t_i \triangleq \alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}, \quad u_i \triangleq \alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \quad (\text{C.1})$$

則解碼錯誤率可表示為

$$e_o(\theta, \tau, \alpha_i) \triangleq (1 - q_i(\theta))Q(t_i) + q_i(\theta)Q(u_i) \quad (\text{C.2})$$

已知

$$L_o(\theta, \tau, \alpha) \triangleq \sum_{i=1}^N \hat{b}_i \ln(\tilde{q}_i(\theta)) + \sum_{i=1}^N (1 - \hat{b}_i) \ln(1 - \tilde{q}_i(\theta))$$

$$\tilde{q}_i(\theta) = q_i(\theta)(1 - e_o(\theta, \tau, \alpha_i)) + (1 - q_i(\theta))e_o(\theta, \tau, \alpha_i)$$

定義 $\dot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)$ 及 $\ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)$ 分別為 $L_o(\theta, \tau, \alpha)$ 的一階微分和二階微分，其推導過程如下：

首先求得一階微分

$$\dot{L}_o(\theta, \tau, \alpha) = \sum_{i=1}^N \hat{b}_i \frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} - \sum_{i=1}^N (1 - \hat{b}_i) \frac{1}{1 - \tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{C.3})$$

接著，二階微分可推得為

$$\begin{aligned} \ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha) &= \sum_{i=1}^N \hat{b}_i \left(\frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial^2 \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} - \left(\frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N (1 - \hat{b}_i) \left(\frac{1}{1 - \tilde{q}_i(\theta)} \left(-\frac{\partial^2 \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{(1 - \tilde{q}_i(\theta))^2} \left(\frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\text{由於 } E[\hat{b}_i] = \tilde{q}_i(\theta), \quad E[1 - \hat{b}_i] = 1 - \tilde{q}_i(\theta) \quad (\text{C.5})$$

則 $E[\ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i(\theta) \left(\frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial^2 \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} - \left(\frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N (1 - \tilde{q}_i(\theta)) \left(\frac{1}{1 - \tilde{q}_i(\theta)} \left(-\frac{\partial^2 \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{1 - \tilde{q}_i(\theta)} \frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)} \left(\tilde{q}_i(\theta) \frac{\partial^2 \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial \tilde{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1-\tilde{q}_i(\theta))} \left((1-\tilde{q}_i(\theta)) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{q}_i(\theta) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{q}_i(\theta) \right)^2 \right) \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{-1}{\tilde{q}_i(\theta)(1-\tilde{q}_i(\theta))} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{q}_i(\theta) \right)^2
\end{aligned} \tag{C.6}$$

已知 $\partial q_i(\theta) / \partial \theta = p_i(\tau_i - \theta)$ 。

定義 $\partial p_i(\tau_i - \theta) / \partial \theta = \dot{p}_i(\tau_i - \theta)$ ， $\partial e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) / \partial \theta = \dot{e}_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)$

則

$$\partial \tilde{q}_i(\theta) / \partial \theta = (1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)) p_i(\tau_i - \theta) + (1 - 2q_i(\theta)) \dot{e}_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
(\partial \tilde{q}_i(\theta) / \partial \theta)^2 & = (1 - 2q_i(\theta))^2 (\dot{e}_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2 + p_i^2(\tau_i - \theta) (1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2 \\
& \quad + 2(1 - 2q_i(\theta)) p_i(\tau_i - \theta) (1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)) \dot{e}_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)
\end{aligned} \tag{C.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\dot{e}_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) & = -p_i(\tau_i - \theta) \dot{Q}(t_i) + p_i(\tau_i - \theta) \dot{Q}(u_i) \\
& \quad + (1 - q_i(\theta)) \dot{Q}(t_i) + q_i(\theta) \dot{Q}(u_i)
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\dot{Q}(t_i) \triangleq \partial Q(t_i) / \partial \theta = \frac{1}{2\alpha_i \sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_i(\tau_i - \theta)}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta))} \right) \exp\left(-\frac{(t_i)^2}{2}\right) \tag{C.11}$$

$$\dot{Q}(u_i) \triangleq \partial Q(u_i) / \partial \theta = \frac{-1}{2\alpha_i \sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_i(\tau_i - \theta)}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta))} \right) \exp\left(-\frac{(u_i)^2}{2}\right) \tag{C.12}$$

因此可推得

$$(\partial \tilde{q}_i(\theta) / \partial \theta)^2 = p_i^2(\tau_i - \theta) (G(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2 \tag{C.13}$$

其中

$$\begin{aligned}
G(\theta, \tau_i, \alpha_i) & = Q(u_i) - Q(t_i) \\
& \quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{2\alpha_i} \left(\frac{1}{(1 - q_i(\theta))} \exp\left(-\frac{(u_i)^2}{2}\right) - \frac{1}{q_i(\theta)} \exp\left(-\frac{(t_i)^2}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

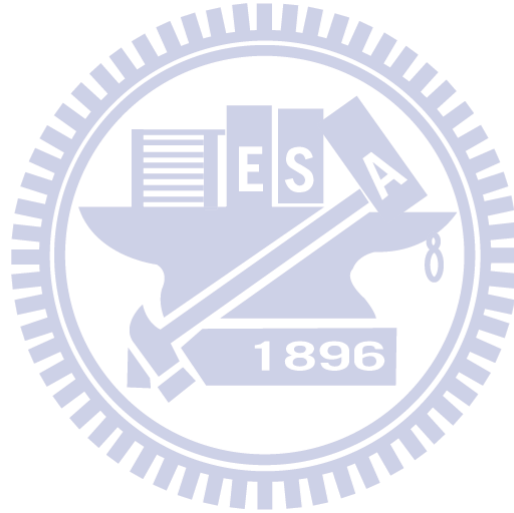
最後，Fisher Information $I_o(\theta, \tau, \alpha) \triangleq -E[\ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)]$ ，可表示為

$$\begin{aligned}
I_o(\theta, \tau, \alpha) & = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tilde{q}_i(\theta)(1-\tilde{q}_i(\theta))} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{q}_i(\theta) \right)^2 \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) (G(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta)) + e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))(1 - 2q_i(\theta))^2}
\end{aligned} \tag{C.15}$$

因此，可得 CRLB $B_o(\theta, \tau, \alpha)$ 為

$$\begin{aligned}
 B_o(\theta, \tau, \alpha) &= \{I_o(\theta, \tau, \alpha)\}^{-1} \\
 &= \left[\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) \left(G(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) \right)^2}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta)) + e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))(1 - 2q_i(\theta))^2} \right]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{C.16}$$

□



附錄四 推論 3.3 證明

首先，引進定理 3.2 的結果，Fisher Information 為

$$I_o(\theta, \tau, \alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) \left(G(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) \right)^2}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta)) + e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i))(1 - 2q_i(\theta))^2}$$

其中， $G(\theta, \tau_i, \alpha_i) = Q\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) - Q\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{1}{2\alpha_i} \left[\left(\frac{1}{1 - q_i(\theta)}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)^2\right) - \frac{1}{q_i(\theta)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)^2\right) \right]$

而 $e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) = (1 - q_i(\theta))Q\left(\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + q_i(\theta)Q\left(\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)$

此推論的環境設定主要有以下兩點

- 同質感測環境

$$\sigma_i = \sigma, \tau_i = \tau, \text{ for all } 1 \leq i \leq N \quad (\text{D.1})$$

- 理想傳輸通道

$$h_i = 1 \text{ and } \sigma_v = 0, \text{ for all } 1 \leq i \leq N \quad (\text{D.2})$$

由理想通道傳輸的特性可推得

$$\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \approx \alpha_i \quad (\text{D.3})$$

$$\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \approx \alpha_i \quad (\text{D.4})$$

且 $Q(\alpha_i) \approx 0$ ， $\exp(\alpha_i) \approx 0$ ，則

$$G(\theta, \tau_i, \alpha_i) \approx 0 \quad (\text{D.5})$$

$$e_o(\theta, \tau_i, \alpha_i) \approx 0 \quad (\text{D.6})$$

將 (D.5) 及 (D.6) 帶入定理 3.2 中，可得

$$I_o(\theta, \tau, \alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta)}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta))} \quad (\text{D.7})$$

定義 $I(\theta, \tau)$ 為考慮同質感測環境和理想傳輸通道下的 Fisher Information

最後帶入同質感測環境的設定，得到

$$I(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^N \frac{p^2(\tau - \theta)}{q(\theta)(1 - q(\theta))} \quad (\text{D.8})$$

□

附錄五 定理 3.4 證明

已知傳輸二位元相位偏移調變訊號之解碼錯誤率為

$$e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \triangleq (1 - q_i(\theta))Q\left(2\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right) + q_i(\theta)Q\left(2\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}\right)$$

為方便證明過程的說明，定義

$$\tilde{t}_i \triangleq 2\alpha_i + \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)}, \quad \tilde{u}_i \triangleq 2\alpha_i - \frac{1}{2\alpha_i} \ln \frac{1 - q_i(\theta)}{q_i(\theta)} \quad (\text{E.1})$$

則解碼錯誤率可表示為

$$e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \triangleq (1 - q_i(\theta))Q(\tilde{t}_i) + q_i(\theta)Q(\tilde{u}_i) \quad (\text{E.2})$$

已知

$$L_b(\theta, \tau, \alpha) \triangleq \sum_{i=1}^N \frac{1 + \hat{m}_i}{2} \ln(\bar{q}_i(\theta)) + \sum_{i=1}^N \frac{(1 - \hat{m}_i)}{2} \ln(1 - \bar{q}_i(\theta))$$

$$\bar{q}_i(\theta) = q_i(\theta)(1 - e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)) + (1 - q_i(\theta))e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)$$

定義 $\dot{L}_b(\theta, \tau, \alpha)$ 及 $\ddot{L}_b(\theta, \tau, \alpha)$ 分別為 $L_b(\theta, \tau, \alpha)$ 的一階微分和二階微分，其推導過程如下：

首先求得一階微分

$$\dot{L}_b(\theta, \tau, \alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{1 + \hat{m}_i}{2} \frac{1}{\bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial \bar{q}_i(\theta)}{\partial \theta} - \sum_{i=1}^N \frac{1 - \hat{m}_i}{2} \frac{1}{1 - \bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial \bar{q}_i(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{E.3})$$

接著，二階微分可推得為

$$\begin{aligned} \ddot{L}_b(\theta, \tau, \alpha) &= \sum_{i=1}^N \frac{1 + \hat{m}_i}{2} \left[\frac{1}{\bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial^2 \bar{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} - \left(\frac{1}{\bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{(1 - \hat{m}_i)}{2} \left[\frac{1}{1 - \bar{q}_i(\theta)} \left(-\frac{\partial^2 \bar{q}_i(\theta)}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{(1 - \bar{q}_i(\theta))^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\text{由於 } E[1 + \hat{m}_i] = 2\bar{q}_i(\theta), \quad E[1 - \hat{m}_i] = 2(1 - \bar{q}_i(\theta)) \quad (\text{E.5})$$

則 $E[\ddot{L}_o(\theta, \tau, \alpha)]$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \bar{q}_i(\theta) \left(\frac{1}{\bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{q}_i(\theta) - \left(\frac{1}{\bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N (1 - \bar{q}_i(\theta)) \left(\frac{1}{1 - \bar{q}_i(\theta)} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{q}_i(\theta) \right) - \left(\frac{1}{1 - \bar{q}_i(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{q}_i(\theta)} \left(\bar{q}_i(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{q}_i(\theta) - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1 - \bar{q}_i(\theta))} \left((1 - \bar{q}_i(\theta)) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{q}_i(\theta) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{-1}{\bar{q}_i(\theta)(1 - \bar{q}_i(\theta))} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2
\end{aligned} \tag{E.6}$$

已知 $\partial q_i(\theta) / \partial \theta = p_i(\tau_i - \theta) \cdot \partial p_i(\tau_i - \theta) / \partial \theta = \dot{p}_i(\tau_i - \theta) \cdot$ (E.7)

定義 $\partial e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) / \partial \theta = \dot{e}_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)$

則

$$\partial \bar{q}_i(\theta) / \partial \theta = (1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)) p_i(\tau_i - \theta) + (1 - 2q_i(\theta)) \dot{e}_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \tag{E.8}$$

$$\begin{aligned}
(\partial \bar{q}_i(\theta) / \partial \theta)^2 &= (1 - 2q_i(\theta))^2 (\dot{e}_b(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2 + p_i^2(\tau_i - \theta) (1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i))^2 \\
&\quad + 2(1 - 2q_i(\theta)) p_i(\tau_i - \theta) (1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)) \dot{e}_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)
\end{aligned} \tag{E.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\dot{e}_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) &= -p_i(\tau_i - \theta) \dot{Q}(\tilde{t}_i) + p_i(\tau_i - \theta) \dot{Q}(\tilde{u}_i) \\
&\quad + (1 - q_i(\theta)) \dot{Q}(\tilde{t}_i) + q_i(\theta) \dot{Q}(\tilde{u}_i)
\end{aligned} \tag{E.10}$$

$$\dot{Q}(\tilde{t}_i) \triangleq \partial Q(\tilde{t}_i) / \partial \theta = \frac{1}{2\alpha_i \sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_i(\tau_i - \theta)}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta))} \right) \exp\left(-\frac{(\tilde{t}_i)^2}{2}\right) \tag{E.11}$$

$$\dot{Q}(\tilde{u}_i) \triangleq \partial Q(\tilde{u}_i) / \partial \theta = \frac{-1}{2\alpha_i \sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_i(\tau_i - \theta)}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta))} \right) \exp\left(-\frac{(\tilde{u}_i)^2}{2}\right) \tag{E.12}$$

因此可推得

$$(\partial \bar{q}_i(\theta) / \partial \theta)^2 = p_i^2(\tau_i - \theta) \left(\tilde{G}(\theta, \tau_i, \alpha_i) (1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \right)^2 \tag{E.13}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\theta, \tau_i, \alpha_i) &= Q(\tilde{u}_i) - Q(\tilde{t}_i) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{2\alpha_i} \left(\frac{1}{(1 - q_i(\theta))} \exp\left(-\frac{(\tilde{u}_i)^2}{2}\right) - \frac{1}{q_i(\theta)} \exp\left(-\frac{(\tilde{t}_i)^2}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{E.14}$$

最後，Fisher Information $I_b(\theta, \tau, \alpha) \triangleq -E[\ddot{L}_b(\theta, \tau, \alpha)]$ ，可表示為

$$\begin{aligned}
 I_b(\theta, \tau, \alpha) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{q}_i(\theta)(1-\bar{q}_i(\theta))} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{q}_i(\theta) \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) \left(\tilde{G}(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \right)^2}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta)) + e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i))(1 - 2q_i(\theta))^2}
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

因此，可得 CRLB $B_b(\theta, \tau, \alpha)$ 為

$$\begin{aligned}
 B_b(\theta, \tau, \alpha) &= \{I_b(\theta, \tau, \alpha)\}^{-1} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2(\tau_i - \theta) \left(\tilde{G}(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - 2q_i(\theta)) + 1 - 2e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i) \right)^2}{q_i(\theta)(1 - q_i(\theta)) + e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i)(1 - e_b(\theta, \tau_i, \alpha_i))(1 - 2q_i(\theta))^2} \right\}^{-1}
 \end{aligned} \tag{E.16}$$

□

