

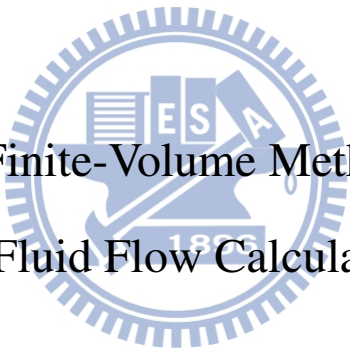
國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

應用有限體積法於非線性結構體之流固耦合計算

Application of Finite-Volume Method for Structure
and Fluid Flow Calculations

The logo of National Tsing Hua University is a circular seal with a gear-like outer edge. Inside the seal, there are stylized Chinese characters and the year '1895'. The letters 'ES' and 'A' are also visible within the seal's design.

研究生：黃俊龍

指導教授：崔燕勇博士

中華民國一零二年七月

應用有限體積法於非線性結構體之流固耦合計算

Application of Finite-Volume Method for Structure
and Fluid Flows Calculations

研究生：黃俊龍

Student : Chun-Lung Huang

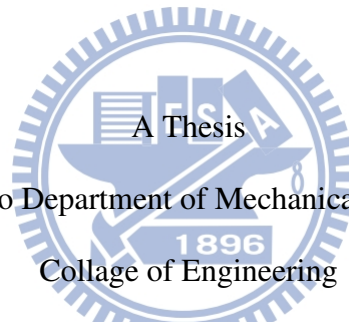
指導教授：崔燕勇

Advisor : Yeng-Yung Tsui

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the degree of

Master of Science

In

Mechanical Engineering

August 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年七月

應用有限體積法於非線性結構體之流固耦合計算

研究生：黃俊龍

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程學系(研究所)碩士班

摘 要

本篇研究主要是採用非結構性網格有限體積法來計算結構體力學及流固耦合之模擬分析。在計算結構體力學中，透過有限體積法，先將固體力學之統御方程式予以積分，並離散整理可得一聯立方程組，再利用虛擬時間之預測修正法進行求解，對於控制體積的選取則是採用以節點為中心的 Cell-Vertex method，該法已證實能有效求解於此類問題，而求解之模型分別為一三維懸臂樑及平板承受一外力，以觀察結構體之位移變化並和理論解作一比較。在流固耦合計算中，主要是探討一矩形阻塊後方之二維水平非線性彈性結構體，當流體流經阻塊便會產生不穩定之渦流因而使結構體上下擺動，此擺動現象對於流場區域之計算網格會因而擠壓變形，故在處理此方面之問題需搭配空間守恆定理來滿足其體積守恆，在控制體積選取的部分，流場區域則是採用將控制體積取在網格中心之 Cell-Centered method，此和結構體有所不同。在流力計算中，對流項則是採用上風法和中央差分法混和之高階方法，計算部分則是採用先預測再修正之 PISO 法則。最後觀察流場之速度、壓力變化及結構體之位移大小並利用快速傅立葉轉換求得擺動頻率和理論解作一比較。

Application of Finite Volume Method for Structure and Fluid Flow Calculations

Student : Chun-Lung Huang

Advisor : Dr. Yeng-Yung Tsui

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

A new unstructured-grid finite-volume method is developed for the structural dynamics and fluid-structure interaction. In structural calculations, the governing equations are discretized using the finite-volume method to obtain a system of ordinary differential equations. These system of ODEs are solved by a virtual time method using predictor-corrector methods. Which control volume is chosen by cell-vertex method. It has been shown that the method is advantage in this problem. The method is tested for three dimensional cantilever and plate. The results are in good agreement with theoretical analysis in terms of displacements and natural frequencies. In fluid-structure interaction, it tests that a two dimensional horizontal plate is placed behind a rectangular block. The vortices caused by the flow over the block result in vibration of the plate. Due to the vibration of the structure, moving grids are employed in flow calculations. Which control volume is chosen by cell-centred method that is difference from the structural calculations. By incorporating the space conservation concept, the mass is conserved in each cell with moving grids. The equations are discretized also using the finite-volume method. The convection term is approximated by a hybrid scheme which mixes the central and upwind differences. The coupling between the momentum and continuity equations is tackled using the predictor-corrector method of the PISO algorithm. Finally, to observe that the vibration of the structure which using Fast Fourier Transfer to get the frequency compared with theoretical solutions and the vortex flow of the fluid is clearly delineated in the interaction.

致 謝

在交大學習的這兩年中，非常感謝崔燕勇教授的指導，使我進步許多，不管是在課業、研究領域或是待人處事方面，都給予最好的教導以及學習的機會，使我在人生的道路上又精進許多。

在計算流力實驗室中，非常感謝許多人的協助使我在研究的道路上能突破重重關卡，故在此特別感謝實驗室中每次碰到問題時，都會一起想辦法解決並給予適時鼓勵，使我成長許多的學長林仕文博士，以及學長們吳奉起、鄭凱鴻、黃裕堂和學姊陳虹汝在學業上給予適時的協助，讓我的研究能夠順利進行，感謝同窗兩年的丁崑哲和葉保杰同學，有你們的陪伴，讓這兩年來學習時光是多采多姿的。

謝謝大學時期的好友們民軒、庭佑、梓豪、銘祐、時昕、景文、景禹、承偉、奕閔、世瑋、庭瑋、蘇坊、朝暉、哲庸、朕鋒、徇禎、詩瑋等人的鼓勵，使我在遇到困境時能讓我換個思考再前進，感謝你們，永遠珍惜與各位的友誼。

最後要感謝的是我的家人，爸爸、媽媽、哥哥、妹妹，有你們在背後默默的支持和鼓勵，才能使我順利完成學業。



目 錄

摘要	i
ABSTRACT	ii
致謝	iii
目錄	iv
符號表	vii
第一章、緒論	1
1.1 前言	1
1.2 流固耦合介紹	2
1.3 文獻回顧	3
1.4 研究內容	5
第二章、數學模式	7
2.1 固體運動模式	7
2.2 流體運動模式	9
2.3 流固耦合	11
第三章、數值方法	12
3.1 固體力學數值方法	12
3.1.1 有限體積法	12
3.1.2 內部點位移梯度計算方式	15
3.1.3 邊界點位移梯度計算方式	15
3.1.4 求解方法	16
3.1.5 邊界上之計算	18
3.2 流體力學數值方法	19
3.2.3 有限體積法	19
3.2.4 PISO 演算法	23
3.2.5 邊界條件	27
3.2.6 流固耦合演算流程	28
第四章、結果與討論	29
4.1 固力分析	29
4.1.1 三維線性懸臂樑受力分析	29
4.1.2 三維線性平板受力分析	32
4.2 流固耦合分析	34
4.2.1 渦流致動之彈性平板	35
第五章、結論	39
參考文獻	41

表目錄

表(一)懸臂樑的材料性質和幾何尺寸【20】	46
表(二)懸臂樑在不同網格數下之位移和誤差百分比	46
表(三)平板的材料性質和幾何尺寸【35】	46
表(四)平板在不同網格數下之位移和誤差百分比	47
表(五) 渦流致動之彈性平板的結構參數【21】	47
表(六) 渦流致動之彈性平板的流體參數【21】	47



圖目錄

圖 3.1 內部點控制體積之示意圖	48
圖 3.2 邊界點控制體積之示意圖	49
圖 3.3 位移梯度計算示意圖	50
圖 3.4 邊界位移梯度計算示意圖	50
圖 3.5 相鄰邊界的控制體積計算示意圖	51
圖 3.6 以網格中心為控制體積之示意圖	51
圖 3.7 主格點和鄰近格點之控制面示意圖	52
圖 3.8 流場網格分割區塊圖	52
圖 3.9 求解流程圖	53
圖 4.1 均勻受力之懸臂樑示意圖	54
圖 4.2 懸臂樑五種不同網格數	55
圖 4.3 懸臂樑網格精準度之誤差分析	56
圖 4.4 懸臂樑尾端頂點的位移反應	56
圖 4.5 懸臂樑整體之位移變化	57
圖 4.6 懸臂樑尾端頂點自由擺動之位移反應	57
圖 4.8 懸臂樑上方全面受力之示意圖	58
圖 4.9 平板上方全面受力之示意圖	59
圖 4.10 平板五種不同網格數	60
圖 4.11 平板網格精準度之誤差分析	61
圖 4.12 平板之位移變化圖	61
圖 4.13 平面 XZ 之位移剖面圖	62
圖 4.14 平面 XY 之位移剖面圖	62
圖 4.15 方向 Z 之正向應力	63
圖 4.16 方向 Y 之正向應力	63
圖 4.17 方向 YZ 之剪應力	64
圖 4.18 單點受力之平板示意圖	64
圖 4.19 渦流致動彈性平板之示意圖	65
圖 4.20 渦流致動彈性平板之網格圖	65
圖 4.21 在不同雷諾數下彈性平板尾端頂點的位移反應	66
圖 4.22 在不同雷諾數下彈性平板之頻譜圖	67
圖 4.23 雷諾數 110，在時間 $t=20(s)$ 時流場流線和壓力圖	68
圖 4.24 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖	69
圖 4.25 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖	70
圖 4.26 雷諾數 290，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖	71
圖 4.27 雷諾數 290，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖	72

符號表

符號	定義
σ	應力
\bar{d}	位移向量
c	阻尼係數
E	楊氏係數
ν	蒲松比
ε	應變
F^C	對流通量
F^D	擴散通量
\dot{m}	質量流率
\dot{m}_f	面上的質量流率
\dot{m}_f^r	流體相對於面上的質量流率
P	流體壓力
\bar{S}_f	面的法向量
t	時間
τ	虛擬時間
\bar{V}	流體速度向量
\bar{V}_g	網格速度向量
$\bar{\delta}_{Pnb}$	P 到 nb 之距離向量
ζ	阻尼比
μ	黏滯係數
ρ	密度
ω	自然角頻率
f	頻率
ΔV_f	一個面掃過的體積
I	面積慣性矩
上標	
l	迭代階數
n	現在時間的未知數
o	前一時間的已知數
m	疊代中的上一個疊代值
'	一次修正量
''	二次修正量

*	預測值
**	一次修正值
***	二次修正值
下標	
<i>f</i>	面上的值
<i>nb</i>	鄰近格點的值
<i>P</i>	主格點的值
<i>b</i>	邊界面



第一章、緒論

1.1 前言

隨著時光的推演，科技日新月異，電腦的發展及演變影響我們許多，不管是對於日常生活的使用或是工程上的應用，皆有劃時代的改變。在工程上，對於數值分析而言，影響其計算速度及結果準確性之因素，除了電腦能力外，所使用之方法往往也佔一重要因素。

計算方法主要可分為三種，分別為有限體積法(Finite volume method)、有限元素法(Finite element method)以及有限差分法(Finite differential method)。在早期有限元素法於工程上的應用主要以固體力學(如:樑、殼、平板等)為主【1,2】，到後來也有學者將其應用於其他領域例如:流體力學、熱傳學、電磁學等。而有限體積法則是由有限差分法發展而來，且普遍應用於熱流場分析(如:散熱系統、室內空調、火警防災等)【3,4】，該法早期主要受限於結構性網格之使用，但其特點是不論局部或整體之計算區域皆守恆其物理現象，故此法能被廣泛的應用。近幾年，有些學者開始以有限體積法來處理固體力學問題【5】，像是平板彎曲位移分析、懸臂樑擺動頻率分析、流固耦合分析等，均有不錯之發展結果。隨著求解模型的複雜化，進而發展出有限體積法搭配非結構性網格來求解此類問題【6-8】，其在計算上能有效地處理複雜的幾何形狀，也能夠做局部加密的動作，之後學者亦證明該法能有

效應用於流體力學、熱傳學等。

1.2 流固耦合介紹

流固耦合為流體力學和固體力學所結合之模擬分析，在目前已經被廣泛應用於各種領域之分析研究，像是人工肺器官【9】、導彈之暫態分析【10】、氣體彈性分析【11】、降落傘氣流分析【12】、血管內之血流動【13】等。在早期碰到流固耦合的相關計算問題，都將結構體視為一剛體以便做計算，但隨著工程上的精密要求，不得不重視流固耦合所產生的影響。當流體流過一結構體時，必定會對其產生壓力及剪應力，結構體也會因其作用力的影響而產生擺動現象進而影響流場的變化，隨著擺動的產生便會有造成共振效應的疑慮，故流固耦合之問題漸漸備受重視。隨著科技技術的發展，已經有學者朝這方面作一研究及探討其所產生的相關效應。

在求解流固耦合的計算中，可將解法分為完全統一法以及分段法兩種。完全統一法是將流力和固力的統御方程式整理成單一方程式，在配合邊界條件對其求解便可得到所需之結果。而分段法是先對固力進行求解，得到變形後之條件再將此條件回傳給流力部份去做計算，如此反覆運算便可得到流場和結構體的變化情形。由於流力計算區域之網格為移動的，故 Eulerian 座標系統在此便不適用，必須採用 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)座標系統【14】，該系統能在交界面移動時，再次重置網格，使結果得到較高之精確度。最後搭配空間守恆定理來進行求解，且此方法也被證明可有效的應

用於流固耦合之計算中。

1.3 文獻回顧

(A) 固力方面

2000 年，Taylor et al. **【15】** 以一個 finite volume (FV) procedure 來分析懸臂樑和平板問題，該計算方法是以 cell vertex 為基礎，並將 FV、FE Galerkin method 和理論解做一比較。其中由結果可發現，不管在變形位移或是收斂速度上，FV、FE Galerkin method 和理論解可得到相近似的結果。

2003 年，Slone et al. **【16】** 以三維 vertex-based 有限體積法對懸臂樑受力之擺動分析，其中使用 Newmark scheme 進行求解，對於結構體受力後之位移變化以及在低阻尼係數下之擺動頻率都和理論解似近，最後並採用此方法來模擬流固耦合之系統

2004 年，Fallah **【17】** 將 cell centred finite volume (CC-FV)、cell vertex finite volume (CV-FV) 和有限元素法應用於結構體上，並作一比較分析，由結果可以發現，CC-FV 和 CV-FV 在懸臂樑受力問題中，其精確度比有限元素法高。且對於有限體積法使用 Mindlin-Reissner 理論分析平板問題時，不會有 locking 現象發生。

2009 年，Filippini et al. **【18】** 以有限元素法及有限體積法在 nodal stress 計算上作一準確度的比較分析，其中以兩端固定之二維懸臂樑做試驗，結果發現，有限元素法比有限體積法在固定邊界的部分會有較大的誤差產生。故

本文以有限體積法為主要探討方法，並對網格的疏密來作一綜合比較，可發現在網格較密時，有限體積法所產生的誤差會是最小的。

2012 年，Pipelzadeh et al. **【19】** 以非結構性網格 Galerkin finite volume method GFVM 來求解二維平面結構之位移及其應變量，其中模型為一具有非規則性彎曲邊界以及具有滑輪支撐的線性邊界之結構體。當使用較粗的三角形網格時，GFVM 的準確度比 FVM 及 FEM 來的好，但隨著結構形狀以及邊界條件的複雜化，仍須採用較細的網格來做計算。

(B)流固耦合方面

2000 年，Souli et al. **【14】** 等人對於流固耦合之移動網格進行分析研究，其中將流場以 Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法和結構體以 Lagrangian 法來耦合試驗，可以發現採用此方法不因結構體之擺動干擾使流力網格無法計算，並由模擬結果可看出，網格在耦合過程中依舊保持良好之狀態。

2007 年，Xia et al. **【20】** 等人利用 matrix-free 隱性之非結構性多重網格有限體積法來分析二維及三維之懸臂樑單點受力問題，由模擬結果可發現使用該法和理論解之位移量隨網格數增加而誤差變小。最後再將結構體置於三維流場中做流固耦合模擬，發現該法在特定網格下，尾端位移量比 ANSYS 更接近理論解。

2008 年，Xia and Lin **【21】** 以 cell vertex 非結構性有限體積法來模擬二維流固耦合之問題，並搭配 implicit dual-time stepping method 來預測在流體

作用力下之結構體位移及應力分佈，其中對於結構體及流場皆採用三角網格。由測試結果可發現，其位移變化、應力分佈和應力最大值與理論解相近，以及在結構體上之應力變化和結構位移呈一角度差，說明結構上之壓力差是造成擺動現象之主要原因。

2011 年，黃義政【22】利用非結構性網格有限體積法來分析二維單點受力及均佈受力之懸臂樑問題，由模擬結果可發現位移量和理論值近似，並對此模擬作一網格精準度分析，顯示出在網格數達到某一臨界值時其誤差將在可接受之範圍內。最後將該懸臂樑置於一流場中做流固耦合之模擬分析，發現結構體尾端會呈現周期性的擺動現象，並和理論擺動頻率作一比較，結果也極為近似。

2012 年，黃裕堂【23】利用隱性之非結構性網格有限體積法來分析結構體受力與流固耦合之現象，而結構模型可分為懸臂樑及彎曲結構體之受力問題，發現使用該法之位移變化和理論解及 ANSYS 結果近似，進而將其與虛擬時間之預測修正法做一計算時間比較，可得後者具有計算快，且可允許時間步階較小之特點。最後將懸臂樑置於流場中，以觀察結構體在不同雷諾數下之擺動現象，並採用快速傅利葉轉換和理論擺動頻率作比較，結果也極為近似。

1.4 研究內容

本文主要研究內容為利用非結構性網格有限體積法來探討三維懸臂樑

以及平板承受一外力之變化情形，進而將二維非線性結構體置於流場中以觀察其和流體間交互作用之流固耦合現象。

對於結構體計算部分，將採用虛擬時間之預測修正法來進行求解，該法已證實能有效運用於此。在此將分別觀察三維線性懸臂樑以及平板在承受一外力條件下，其位移變化和應力分佈之情形，並和理論解進行一分析比較，進而調整模型之網格數以分析其誤差容忍範圍。

在流固耦合計算方面，結構體依舊採用虛擬時間之預測修正法，流場則是使用先預測再修正的 PISO 法則，並搭配空間守恆定理進行求解。計算模型為二維流場中置放一固定於阻塊後方之非線性結構體。主要是觀察結構體受流場之不穩定渦流影響，其所造成之擺動振幅大小、周期的變化，並利用快速傅立葉轉換計算擺動頻率和理論解做一探討比較。最後觀察流場流線及流場壓力分佈情形其與結構體擺動之關係。

第二章、數學模式

本篇研究主要是探討三維結構體承受一外力以及二維之流固耦合模擬現象，故在數學模式中，大致可分為兩類，即固體運動模式和流體運動模式。其中固體運動模式又可再細分為三維線性結構體以及二維非線性結構體兩部分來探討，但本文的描述將以三維為基準，而二維的部分僅需將公式內之 z 方向位移及速度不予考慮即可，對於線性項和非線性項之處理將於內文做詳細介紹。此章之內容包含假設條件的設定、統御方程式之引用以及邊界條件的描述。



2.1 固體運動模式

固體假設條件

假設結構體分別為二維非線性彈性應變以及三維線性彈性應變兩類

固體統御方程式

在固體力學中，其統御方程式為 Cauchy's equation 如下所示：

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma_{ij} + \bar{b} \quad (2.1)$$

其中 σ_{ij} 代表應力、 \bar{d} 代表位移向量、 ρ 代表結構體密度、 \bar{b} 代表物體力

應力和應變關係

在式(2.1)中，應力 σ_{ij} (stress) 與應變 (strain) 之關係可由虎克定律 (Hook's

law)得知，如下所示:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

其中 E 代表楊氏系數(Young's Modulus)、 ν 代表蒲松比(Poisson's ratio)。

而應變(strain)和位移(displacement)之關係式可由 Green-Lagrange relationship 得知，如下所示:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial d_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial d_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_y}{\partial z} + \frac{\partial d_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right) \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_x}{\partial z} + \frac{\partial d_z}{\partial x} + \left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

其中虛線內為非線性項， d_x 、 d_y 、 d_z 分別代表 X、Y 及 Z 方向之位移

固體邊界條件

邊界條件主要可分為作用力邊界和位移邊界兩類

(1)作用力邊界(traction boundary): 在邊界上所承受之作用力必須滿足力平衡之限制條件，如下所示

$$N_{ij} \cdot \sigma_j = f_b \quad (2.4)$$

其中 f_b 為邊界上所承受之作用力， σ_j 為應力向量， N_{ij} 為邊界上向外之單位法向量可表示如下：

$$N = \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

(2)位移邊界(displacement boundary): 在結構體上給定已知位移，如下：

$$\bar{d} = \bar{d}_B \quad (2.6)$$

其中 \bar{d}_B 為已知的位移。

2.2 流體運動模式

流體假設條件

假設流體為二維(2-D)、不可壓縮流(Incompressible Flow)、非穩態流場(Unsteady)且忽略重力項(Neglect body force)。

流體統御方程式

在流固耦合分析中，流場之計算區域會因為結構體之擺動，而造成該區

域呈現移動網格之狀態。以往，計算流場的 Eulerian 系統在此便不適用，而必須使用 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)座標系統來處理，並以此系統作為流場之統御方程式，如下所示：

(1)連續方程式(Continuity Equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_g)] = 0 \quad (2.7)$$

(2)動量方程式(Momentum Equation)

$$\frac{\partial(\rho\bar{V})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_g)\bar{V}] = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu\nabla\bar{V}) \quad (2.8)$$

其中 ρ 為流體密度、 μ 為黏滯係數、 P 為壓力、 \bar{V} 為流體速度、 \bar{V}_g 為網格速度。

在 ALE 座標系統中，當網格速度和流體速度相等時可視為 Lagrangian 系統，而網格靜止不動時即可視為 Eulerian 系統。

在移動網格計算中，除了使用 ALE 座標系統外，尚需搭配空間守恆定理(Space Conservation Law)來滿足流場之守恆性，該定理已證實能有效的運用於有限體積法中 **【24】**，其數學式表示如下：

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\forall} d\forall + \oiint_S \bar{V}_g \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2.9)$$

將(2.9)式乘以 ρ 並代入(2.7)式作一合併整理可得：

$$\oiint_S \rho\bar{V} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2.10)$$

最後，本文之連續方程式將採用和網格速度無關的(2.10)式，以及 ALE 座標系統的動量方程式(2.8)來描述本文的流體運動模式。

在移動網格中，網格的運動方式大致上可分為橢圓正交法、橢圓法、線性內差法【25】，而本文流場網格移動的方式即是根據線性內差法。

流場邊界條件

流場邊界條件的設定為在入口處給定一流量，而在出口處設定其為流量邊界，出口速度則是採用對流邊界條件(Convective Boundary Condition)求得。對於流體和壁面接觸的部份皆採用無滑移邊界條件(No-Slip Condition)，其中包含流體和結構體接觸之壁面。

2.3 流固耦合

在流體和固體接觸的部份，須給定其耦合之條件，方能完整描述其耦合過程。對結構體而言，其接觸面之條件為流體施加之壓力及剪力。對於流體而言，由於固體受流體之影響而產生擺動現象，此現象進而影響流體之接觸面條件，該條件為固體移動之速度及位移。其數學式表示如下：

$$\bar{V}_f = \bar{V}_s \quad (2.11)$$

$$\bar{d}_f = \bar{d}_s \quad (2.12)$$

其中 \bar{V}_f 、 \bar{V}_s 分別代表流體速度及結構體速度， \bar{d}_f 、 \bar{d}_s 分別代表流體和結構體接觸面之位移及結構體位移。

藉由以上對固體模型和流體模型之描述，以及在流固耦合接觸面的條件說明，便可對流固耦合現象進行分析研究。

第三章、數值方法

在本篇研究中，數值方法依舊可分為固體力學及流體力學兩類，其中固體力學的部分又可再細分成二維非線性模型以及三維線性模型兩種來做探討，對於公式的描述依舊以三維為基準，而二維的部分僅需將公式內之 z 方向位移及速度不予考慮即可。對於線性項和非線性項之處理亦將於內文做詳細介紹。

3.1 固體力學數值方法

在固力計算中，對於控制體積的選取則在網格頂點(cell-vertex)上如(圖 3.1)和(圖 3.2)所示，即採用網格之中心點所集合而成的。計算中，所得到之位移和速度均儲存於頂點上。

3.1.1 有限體積法

在此忽略物體力並加入一阻尼效應(damping effects)，該效應具有耗散能量之特點，且與結構運動方向相反，在許多結構力學問題中，其必須予以考慮。故可將上一章的統御方程式(2.1)式改寫成下列通式：

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma_{ij} - c \bar{v} \quad (3.1)$$

其中 c 為阻尼係數， \bar{v} 為結構體之速度。

將上式取體積分後，可表示成如下之積分型式：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\forall} \rho \bar{d} d\forall = \iiint_{\forall} \nabla \cdot \sigma_{ij} d\forall - \iiint_{\forall} c \bar{V} d\forall \quad (3.2)$$

其中應力項透過高斯散度定理，由體積分轉成面積分，即可得到下式：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\forall} \rho \bar{d} d\forall = \oint_S \sigma_{ij} \cdot d\bar{S} \quad (3.3)$$

離散化

對(3.2)式進行離散，可分別表示如下：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\forall} \rho \bar{d} d\forall = \rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} \Delta\forall \quad (3.4)$$

應力項：

$$\oint_S \sigma_{ij} \cdot d\bar{S} = \sum_f (\sigma_{ij})_f \cdot \Delta\bar{S}_f \quad (3.5)$$

阻尼項：

$$\iiint_{\forall} c \bar{V} d\forall = c \bar{V} \Delta\forall \quad (3.6)$$

其中 $i = x, y, z$ 、 $j = x, y, z$ 。因此可知 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 稱為正應力 (Normal stress)； σ_{xy} 、 σ_{yz} 、 σ_{zx} 稱為剪應力 (Shear stress)，下標 f 代表控制體積之面。

在此將離散後之各項作合併整理可得到：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta\forall = \sum_f [(\sigma_{xx}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_z]_f - cu \Delta\forall \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} \Delta\forall = \sum_f [(\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_z]_f - cv \Delta\forall \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} \Delta\forall = \sum_f [(\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{zz}) \cdot \Delta S_z]_f - cw \Delta\forall \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 $\Delta\forall$ 為控制體積之大小， ΔS_x 、 ΔS_y 、 ΔS_z 分別為 x, y, z 之面向量。

而應力項和位移梯度之關係式可由上一章節得到，將(2.2)式及(2.3)式作合併

處理可得如下：

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu \frac{\partial d_y}{\partial y} + \lambda\nu \frac{\partial d_z}{\partial z} + \frac{\lambda(1-\nu)}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 &\quad + \frac{\lambda\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 \sigma_{yy} &= \lambda\nu \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_y}{\partial y} + \lambda\nu \frac{\partial d_z}{\partial z} + \frac{\lambda\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda(1-\nu)}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 &\quad + \frac{\lambda\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\nu \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu \frac{\partial d_y}{\partial y} + \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_z}{\partial z} + \frac{\lambda\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 &\quad + \frac{\lambda(1-\nu)}{2} \left[\left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 \sigma_{xy} &= \mu \left[\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_z}{\partial y} \right) \right] \\
 \sigma_{yz} &= \mu \left[\frac{\partial d_y}{\partial z} + \frac{\partial d_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right) \right] \\
 \sigma_{xz} &= \mu \left[\frac{\partial d_x}{\partial z} + \frac{\partial d_z}{\partial x} + \left(\frac{\partial d_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial d_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d_z}{\partial z} \right) \right]
 \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

其中 $\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ 、 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ，虛線內為非線性之項次。

對於面上值的處理，可依頂點位置分為內部點和邊界點兩種。當為內部點時，面上的值是取面上四頂點之平均值如圖 3.1；當為邊界點時，由於部分面中心位於邊界上，故面上的值則是取邊界上的值做平均如圖 3.2，若以控制體積下部面為例，其面上之值為 $\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_{f5} + \phi_{f7})$ ， ϕ_{f5} 和 ϕ_{f7} 分別為邊界面上之值，該值之計算將於後面做介紹。

3.1.2 內部點位移梯度計算方式

在計算應力項(stress)之前，必須先考慮位移梯度的求得。在此將介紹以內部點取控制體積時之計算過程，並將算出之位移梯度儲存在網格中心，即控制體積之頂點，此和結構體之位移、速度儲存位置有所不同。首先將梯度取體積分後，再透過高斯散度定理轉為面積分並離散可得如下：

$$\nabla \phi = \frac{1}{\Delta \nabla} \iiint_{\nabla} \nabla \phi d\nabla = \frac{1}{\Delta \nabla} \oiint_S \phi d\bar{S} = \frac{1}{\Delta \nabla} \sum_f \phi_f d\bar{S}_f \quad (3.9)$$

其中，網格面上的 ϕ 值是將面的四個頂點取平均值即 $\phi_f = \frac{1}{4}(\phi_{f_1} + \phi_{f_2} + \phi_{f_3} + \phi_{f_4})$ ， $f_1 \sim f_4$ 分別為 f 面上的四個頂點如(圖 3.3)所示。

3.1.3 邊界點位移梯度計算方式

當網格頂點為邊界點時，在計算上將使用到邊界面上的位移梯度，因此需另外去計算。同樣的邊界位移梯度儲存的位置是在邊界面的中心，而計算方式如下：

$$\nabla \phi_b = \nabla \phi_p + \nabla(\nabla \phi) \cdot \bar{\delta}_{pb} \quad (3.10)$$

其中下標 b 代表邊界、 $\bar{\delta}_{pb}$ 代表 P 到 b 距離向量如(圖 3.4)所示。

將(3.10)式的梯度項利用(3.9)式相同之方法離散，即可得：

$$\nabla(\nabla \phi) = \frac{1}{\Delta \nabla} \sum_f \nabla \phi_f \Delta \bar{S}_f = \frac{1}{\Delta \nabla} \left(\nabla \phi_b \Delta \bar{S}_b + \sum_{f \neq b} \nabla \phi_f \Delta \bar{S}_f \right) \quad (3.11)$$

其中 $f \neq b$ 代表不包含邊界的其餘各面。將(3.11)式代入(3.10)式可得邊界上之位移梯度：

$$\nabla \phi_b = \frac{\nabla \phi_p + \frac{1}{\Delta \nabla} \sum_{f \neq b} \nabla \phi_f \Delta \bar{S}_f \cdot \bar{\delta}_{pb}}{1 - \frac{1}{\Delta \nabla} \Delta \bar{S}_b \cdot \bar{\delta}_{pb}} \quad (3.12)$$

3.1.4 求解方法

將方程式對空間作離散化後，(3.7)式即為一階常微分程式(ODE)，在此加入速度和位移之關係式並聯立可得如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial d_x}{\partial t} = u \\ \frac{\partial d_y}{\partial t} = v \\ \frac{\partial d_z}{\partial t} = w \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho \Delta \nabla} \sum_f [(\sigma_{xx}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_z]_f - \frac{cu}{\rho} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho \Delta \nabla} \sum_f [(\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_z]_f - \frac{cv}{\rho} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho \Delta \nabla} \sum_f [(\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{zz}) \cdot \Delta S_z]_f - \frac{cw}{\rho} \end{cases} \quad (3.13)$$

其中 u 、 v 、 w 分別代表 X、Y 和 Z 方向速度。

對於求解上述之聯立方程組有許多方法，一般使用的直接解法在此會因為網格點的耦合計算而造成不穩定現象，以及時間步階的選取必須夠小，如此對於運算效率將會大大降低。故在此加入一個虛擬時間概念去求解，該法已有效應用於流場計算中【26-28】。將上式等號左邊的微分項利用向後差分法 (backward Euler scheme) 將其離散並移至等號右邊，另外在等號左邊加入一

項虛擬時間的微分項 $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau}$ ，故可將方程式改寫成：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d_x^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{d_x^n - d_x^o}{\Delta t}\right) + u^n \\ \frac{\partial d_y^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{d_y^n - d_y^o}{\Delta t}\right) + v^n \\ \frac{\partial d_z^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{d_z^n - d_z^o}{\Delta t}\right) + w^n \\ \frac{\partial u^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{u^n - u^o}{\Delta t}\right) + \frac{1}{\rho \Delta \nabla} \sum_f [(\sigma_{xx}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_z]_f^n - \frac{cu}{\rho} \\ \frac{\partial v^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{v^n - v^o}{\Delta t}\right) + \frac{1}{\rho \Delta \nabla} \sum_f [(\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_z]_f^n - \frac{cv}{\rho} \\ \frac{\partial w^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{w^n - w^o}{\Delta t}\right) + \frac{1}{\rho \Delta \nabla} \sum_f [(\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{zz}) \cdot \Delta S_z]_f^n - \frac{cw}{\rho} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

其中上標 n 代表新的值，上標 o 代表上一個時間的值。

在求解過程中，我們將變數 d_x 、 d_y 、 d_z 、 u 、 v 、 w 令為一個矩陣型式如下：

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

因此可將(3.14)式看成一個聯立常微分方程組，可表示成下式：

$$\frac{d\bar{U}^n}{d\tau} = \bar{G}(\bar{U}^n) \quad (3.16)$$

上式即為一個一階 ODE 型式，因此可使用一般常見的 ODE 數值方法求解，

而本文將採用 Hamming 所提出的 Predictor-corrector method 【29】來解此方程式，其求解之步驟如下：

$$\text{Predictor: } \bar{U}_p^{m+1(0)} = \bar{U}^{m-3} + \frac{4}{3}\Delta\tau(2\bar{G}^m - \bar{G}^{m-1} + 2\bar{G}^{m-2}) \quad (3.17)$$

$$\text{Corrector: } \bar{U}_c^{m+1(l+1)} = \frac{1}{8}(9\bar{U}^m - \bar{U}^{m-2}) + \frac{3}{8}\Delta\tau(\bar{G}_p^{m+1} + 2\bar{G}^{m(l)} - \bar{G}^{m-1}) \quad (3.18)$$

其中 $\Delta\tau$ 代表虛擬之時間步階而下標 p 代表預測之值、c 代表修正後之值，至於上標 m+1、m、m-1、m-2 代表在虛擬時間下之步階、(l)和(l+1)則為迭代階數。

疊代收斂條件

在虛擬時間法中必須在每個時階下疊代至收斂，其收斂與否將以殘值來判斷，數學式表示如下：

$$\sum_{i=1}^N \bar{G}(\bar{U}^n) \leq 10^{-6} \quad (3.19)$$

其中 N 代表網格頂點個數。

3.1.5 邊界上之計算

在結構體中相鄰邊界的控制體積如(圖 3.5)所示，當此邊界有外力之限制條件時，此時處理方式跟內部點不一樣，因此我們必須額外處理。將邊界上控制體積的面分為邊界面 f_b 和非邊界面 f_i ，在 f_b 面上我們直接給定此面所負載之外力 \bar{F} ，而在 f_i 面上給定方式和內部點一樣為面上所需的值。因此在邊界上之計算可將(3.7)式改寫如下：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 d_x}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left[(\sigma_{xx}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_z \right]_f - cu \Delta \nabla + F_x \\ \rho \frac{\partial^2 d_y}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left[(\sigma_{xy}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yy}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_z \right]_f - cv \Delta \nabla + F_y \\ \rho \frac{\partial^2 d_z}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left[(\sigma_{xz}) \cdot \Delta S_x + (\sigma_{yz}) \cdot \Delta S_y + (\sigma_{zz}) \cdot \Delta S_z \right]_f - cw \Delta \nabla + F_z \end{cases} \quad (3.20)$$

3.2 流體力學數值方法

在流力計算中，主要可分成有限體積法的應用、PISO 法則的計算以及邊界條件的處理，而對於控制體積的選取則在網格中心(cell-centered)上如(圖 3.6)所示，並將所計算之速度和壓力儲存於其上。

3.2.3 有限體積法

由第二章中的動量方程式(2.8)式可以得到下列通式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_s)\phi] = \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) + q \quad (3.21)$$

將上式積分後，可表示如下之積分型式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\nabla} \rho \phi d\nabla + \iiint_{\nabla} \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_s)\phi] d\nabla = \iiint_{\nabla} \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) d\nabla + \iiint_{\nabla} q d\nabla \quad (3.22)$$

等式左邊第一項為非穩態項(Unsteady term)，第二項為對流項(Convection term)；等式右邊第一項為擴散項(Diffusion term)，第二項為源項(Source term)。源項的來源是壓力項，故 $q = -\nabla P$ 。其中 ϕ 為速度分量。

將(3.22)式之對流項和擴散項透過高斯散度定理由體積分轉換成面積

分，即可得到下式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho \phi d\forall + \oint_S \rho (\bar{V} - \bar{V}_g) \phi \cdot d\bar{S} = \oint_S \mu \nabla \phi \cdot d\bar{S} + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (3.23)$$

離散化

將(3.23)式之各項進行離散整理，分別介紹如下

非穩態項(Unsteady term)

對於有移動邊界之不可壓縮流，其網格的體積會隨時間而改變。

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall = \frac{\rho \cdot \Delta\forall}{\Delta t} (\phi - \phi^o) \quad (3.24)$$

其中 ϕ 是更新之值、 ϕ^o 是上一個時間的值，因此在計算上可將 ϕ^o 移進源項。

對流項(Convection term)

將對流項進行離散化，可得：

$$\oint_S \rho (\bar{V} - \bar{V}_g) \phi \cdot d\bar{S} = \sum_f (\rho_f (\bar{V} - \bar{V}_g)_f \cdot \bar{S}_f) \phi_f = \sum_f \dot{m}_f^r \phi_f = \sum_f F_f^C \quad (3.25)$$

其中 \dot{m}_f^r 代表相對於移動網格之質量流率、 F_f^C 代表面上的對流通量、下標 f 代表面上的值。對於面上之值，可透過相鄰網格以線性內差的方式求得。

在 ALE 座標系中，因動量方程式之對流項包含網格速度的變化，其會直接影響面上的質量流率，所以在質量流率的計算上必須配合空間守恆定律進行求解，可表示如下：

$$\dot{m}_f^r = \rho_f (\bar{V} - \bar{V}_g)_f \cdot \bar{S}_f = \dot{m}_f - \frac{\rho \Delta\forall_f}{\Delta t} \quad (3.26)$$

其中 \dot{m}_f 為流經面上的質量流率， ΔV_f 為移動網格所掃過之體積量。

本文在求解對流項所採用的方式為一階上風法(UD)和中央差分法(CD)的混合式【30】，因此對流通量可整理如下：

$$F_f^C = F_f^{UD} + \gamma(F_f^{CD} - F_f^{UD}) \quad (3.27)$$

其中 γ 值介於 0~1 之間，當 $\gamma=0$ 時為一階上風法、 $\gamma=1$ 時為中央差分法。

在一階上風法中 ϕ_f 的值取決於上游，當 $\dot{m}_f > 0$ 時，則 $\phi_f = \phi_p$ ；當 $\dot{m}_f < 0$ ，則 $\phi_f = \phi_{nb}$ 。在中央差分法裡， ϕ_f 的值為相鄰網格的內差，表示如下：

$$\phi_f = (1-w)\phi_p + w\phi_{nb} \quad (3.28)$$

其中 w 為權重係數，下標 p 代表主格點的值，下標 nb 代表鄰近格點的值。

故可將(3.27)式整理成下列型式：

$$F_f^C = \max(\dot{m}_f, 0)\phi_p - \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_{nb} + \gamma\left\{\dot{m}_f\left[(1-w)\phi_p^\circ + w\phi_{nb}^\circ\right] - \max(\dot{m}_f, 0)\phi_p^\circ + \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_{nb}^\circ\right\} \quad (3.29)$$

其中上標 \circ 代表上一個時間的已知數，因此在計算上將其移進源項。

擴散項(Diffusion term)

將(3.23)式的擴散項進行離散化，可得：

$$F^D = \oint_S \mu \nabla \phi \cdot d\bar{S} \approx \sum_f \mu_f (\nabla \phi_f) \cdot \bar{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (3.30)$$

其中 μ_f 代表面上的黏滯係數、 F_f^D 代表面上的擴散通量。針對非結構性網格而言，將採用 Over-Relax approach 來近似原來之面法向量。首先將 \bar{S}_f 表示如下：

$$\bar{S}_f = \bar{d} + (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (3.31)$$

上式等號右手邊第一項為正交向量、第二項為非正交向量。

其中正交向量 \bar{d} 定義如下：

$$\bar{d} = \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} \bar{\delta}_{Pnb} \quad (3.32)$$

其中 $\bar{\delta}_{Pnb}$ 定義如(圖 3.7)所示。將(3.30)式、(3.31)式和(3.32)式合併整理可得：

$$F^D = \sum_f \left[\frac{\mu_f |\Delta \bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \Delta \bar{S}_f} (\phi_{nb} - \phi_p) + \mu_f \overline{\nabla \phi_f^o} \cdot (\Delta \bar{S}_f - \bar{d}) \right] \quad (3.33)$$

其中上標 o 代表上一個時間的已知數、 $\overline{\nabla \phi_f^o}$ 由相鄰網格線性內差得到。且

上式右手邊第一項為正交項、第二項為非正交項，在計算上將已知數非正交項移進源項。

源項(Source term)

將源項離散化可表示為：

$$\iiint_{\nabla} q d\nabla = q \cdot \Delta \nabla \quad (3.34)$$

其主要來源是壓力項。

而壓力項的面積分簡化近似為：

$$\oiint_S P \cdot d\bar{S} \approx \sum_f P \cdot d\bar{S}_f = \nabla P \cdot \Delta \nabla \quad (3.35)$$

線性代數式的整理

透過前面的推導，可將非穩態項、對流項、擴散項和源項合併後，即可得到下列的線性代數式：

$$A_p \phi_p = \sum A_{nb} \phi_{nb} + Q \quad (3.36)$$

$$\text{其中 } A_p = \sum A_{nb} + \rho \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \quad (3.37)$$

$$A_{nb} = \frac{\mu_f |\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (3.38)$$

$$Q = \sum_f \left\{ -\left[\gamma (F_f^{CD} - F_f^{UD}) \right]^o + \mu_f \nabla \phi_f^o (\bar{S}_f - \bar{d}) \right\} - \nabla P^o \cdot \Delta \nabla + \rho \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \phi^o \quad (3.39)$$

3.2.4 PISO 演算法

在前面介紹了動量方程式的求解方式，但是在物理上其實未滿足連續方程式。因此為了滿足連續方程式，必須透過壓力和速度的關係式來加以修正。到目前為止，已發展出幾種壓力和速度的耦合方式【31】。因本文為非穩態流場，所以採用 PISO 演算法來修正動量方程式所得到的壓力和速度【32】，如此一來即可滿足連續方程式。使用 PISO 演算法的好處是，此解法不需經由反覆的疊代，該過程為一次預測步驟和兩次修正步驟，因此可以節省很多的計算時間。

預測步驟

將(3.36)式中 Q 裡的壓力項提出表示成下式：

$$A_p \bar{V}_p^* = \sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + (S - \nabla P_p^* \Delta \nabla) \quad (3.40)$$

將上式各項同除以 A_p 可得如下：

$$\bar{V}_p^* = \bar{H}_p^* - D_p \nabla P_p^* \quad (3.41)$$

$$\text{其中 } \overline{H}_p^* = \frac{\sum_{nb} A_{nb} \overline{V}_{nb}^* + S}{A_p} \text{ , } D_p = \left(\frac{\Delta V}{A_p} \right)_p \text{ 。}$$

同樣的，面上速度和壓力之關係式可透過(3.41)式表示成：

$$\overline{V}_f^* = \overline{H}_f^* - \overline{D}_f \nabla P_f^* \quad (3.42)$$

$$\text{其中 } \overline{H}_f^* = \overline{V}_f^* + \overline{D}_f \nabla P_f^*$$

而上標"—"表示面上 f 的值是由主格點 p 和相鄰之格點 nb 內差所得，如下：

$$\overline{\nabla P}_f = w_p \nabla P_{nb} + (1 - w_p) \nabla P_p \quad (3.43)$$

$$\overline{V}_f = w_p \overline{V}_{nb} + (1 - w_p) \overline{V}_p \quad (3.44)$$

其中 w_p 為權重因子 (weighting factor)

而 \overline{D}_f 的值為主格點和相鄰格點取平均，如下：

$$\overline{D}_f = \frac{1}{2} (D_p + D_{nb}) \quad (3.45)$$

由空間守恆定理可知【24】，ALE 座標系的連續方程式可簡化為和網格速度無關之連續方程式，因此面上的質量流率可改寫為：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^* &= \rho_f \overline{V}_f^* \cdot \overline{S}_f \\ &= \rho_f \overline{\overline{V}}_f^* \cdot \Delta \overline{S}_f - \rho_f \overline{D}_f \left(\frac{|\Delta \overline{S}_f|^2}{\overline{\delta}_{Pnb} \cdot \Delta \overline{S}_f} \right) \left[(P_{nb}^* - P_p^*) - \overline{\nabla P}_f^* \cdot \overline{\delta}_{Pnb} \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

第一次修正步驟

在前一個步驟已求得速度 \overline{V}_f^* 和壓力 P^* 仍然尚未滿足連續方程式，因此接下來必須做第一次的修正。在此假設第一次修正後的速度為 \overline{V}^{**} 、壓力為 P^{**} ，故第一次修正中，速度和壓力的關係如下：

$$\bar{V}_P^{**} = \bar{H}_P^* - D_P \nabla P_P^{**} \quad (3.47)$$

在此之 \bar{H}_P^* 和預測步驟內相同，故可將(3.47)式與(3.41)式相減，可得到速度修正量和壓力修正量的關係式為：

$$\bar{V}_P' = -D_P \nabla P_P' \quad (3.48)$$

其中 $\bar{V}' = \bar{V}^{**} - \bar{V}^*$ ； $P' = P^{**} - P^*$ 。

相同地，面上之速度修正量可表示為：

$$\bar{V}_f' = -D_f \nabla P_f' \quad (3.49)$$

因此第一次修正後的流量值可以表示成下列：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^{**} &= \dot{m}_f^* + \rho_f \bar{V}_f' \cdot \Delta \bar{S}_f \\ &\approx \dot{m}_f^* - \rho_f \bar{D}_f \frac{|\Delta \bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \Delta \bar{S}_f} (P_{nb}' - P_p') - \rho_f \bar{D}_f \nabla P_f' \cdot (\Delta \bar{S}_f - \bar{d}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

在此依舊採用擴散項介紹之 Over-Relaxed approach。

為了滿足質量守恆，因此對於所有面上流量的總和應該為 0，表示如下：

$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = \sum_f \dot{m}_f^* + \sum_f \dot{m}_f' = 0 \quad (3.51)$$

將(3.50)式代入(3.51)式，可整理成線性代數式：

$$A_P P_P' = \sum_f A_{nb} P_{nb}' + S_{P1}^1 + S_{P2}^1 \quad (3.52)$$

其中上標"1"代表第一次修正，而其它定義如下所示：

$$A_{nb} = \rho_f \bar{D}_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \Delta \bar{S}_f} \quad (3.53)$$

$$A_P = \sum_f A_{nb} \quad (3.54)$$

$$S_{P1}^1 = -\sum_f \dot{m}_f^* \quad (3.55)$$

$$S_{P2}^1 = \sum_f \rho_f \bar{D}_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (3.56)$$

第二次修正步驟

在第一次的修正步驟中，得到了第一次修正過後的速度 \bar{V}^{**} 和壓力 P^{**} 。

在第二次修正步驟中，如同第一次修正步驟的方法，可得到速度和壓力之關係式如下：

$$\bar{V}_P^{***} = \bar{H}_P^{**} - D_P \nabla P_P^{***} \quad (3.57)$$

將上式與一次修正量(3.47)式做合併可得：

$$\bar{V}_P'' = \bar{H}_P' - D_P \nabla P_P'' \quad (3.58)$$

其中 $\bar{V}'' = \bar{V}^{***} - \bar{V}^{**}$ 、 $\nabla P'' = \nabla P^{***} - \nabla P^{**}$ 。相同地，可得面上之速度修正量為：

$$\bar{V}_f'' = \bar{H}_f' - \bar{D}_P \nabla P_P'' \quad (3.59)$$

其中 \bar{H}_f' 可藉由主格點 p 和相鄰之格點 nb 內差得到。

因此第二次修正後的流量值可以表示成下列：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^{***} &= \dot{m}_f^{**} + \dot{m}_f'' = \dot{m}_f^{**} + \rho_f \bar{V}_f'' \cdot \Delta \bar{S}_f \\ &= \dot{m}_f^{**} - \rho_f \bar{D}_f \frac{|\Delta \bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \Delta \bar{S}_f} (P_{nb}'' - P_p'') - \rho_f \bar{D}_f \overline{\nabla P_f''} \cdot (\Delta \bar{S}_f - \bar{d}) + \rho_f \overline{H_f'} \cdot \Delta \bar{S}_f \end{aligned} \quad (3.60)$$

在此必須滿足質量守恆，表示如下：

$$\sum_f \dot{m}_f^{***} = \sum_f \dot{m}_f^{**} + \sum_f \dot{m}_f'' = \sum_f \dot{m}_f'' = 0 \quad (3.61)$$

將(3.60)式代入(3.61)式，整理後即可得到下列的線性代數式：

$$A_p P_p'' = \sum_f A_{nb} P_{nb}'' + S_{P1}^2 + S_{P2}^2 \quad (3.62)$$

其中上標”2”代表第二次修正，而其它定義如下所示：

$$A_{nb} = \rho_f \bar{D}_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} \quad (3.63)$$

$$A_p = \sum_f A_{nb} \quad (3.64)$$

$$S_{P1}^2 = -\rho_f \left(\frac{\sum_f A_{nb} \bar{V}_{nb}'}{A_p} \right)_f \cdot \bar{S}_f \quad (3.65)$$

$$S_{P2}^2 = \sum_f \rho_f \bar{D}_f \nabla P_f'' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (3.66)$$

3.2.5 邊界條件

出口流量邊界的速度計算

在計算壓力邊界上的速度，我們採用對流邊界條件(Convective Boundary

Condition)，其數學式表示如下：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3.67)$$

經由離散後可得下式：

$$\frac{\phi_b^n - \phi_b^o}{\Delta t} + u_c \frac{\phi_b^n - \phi_{nb}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.68)$$

其中上標 n 、 o 分別代表新跟舊的值，下標 b 、 nb 分別代表邊界跟相鄰的網

格。將(3.68)式整理如下：

$$\phi_b^n = \frac{\phi_b^o + Cr\phi_{nb}^n}{1 + Cr} \quad (3.69)$$

其中 $Cr = \frac{u_c \Delta t}{\Delta x}$ ， Cr 為 Courant number。

3.2.6 流固耦合演算流程

在流固耦合分析中，可將演算流程分成三部分來作探討，即結構體和流場之計算以及移動網格之重置，在進行演算前，先將所有變數予以初始化，接著進行計算之流程步驟：

對結構體而言，因為其置於流場中，故受到流場作用於其表面之壓力及剪應力之影響而造成其擺動，該外力即為結構體之作用力邊界條件，如此便可透過虛擬時間之預測修正法求解固力統御方程式，以得到位移和速度。

網格部分則可依據流場之位置大致分成四部分如(圖 3.8)所示，其中區域 1 之網格將予以固定，其他區域則會根據更新後之結構體位置，進行網格的重新配置，該重置過程將採用線性內差法來處理。

在網格配置完成後，便可開始進行流場之計算。其中流場和結構體界面之位置，可由前面之運算得到，最後在採用 PISO 法則進行流場之壓力和速度的求解，進而可得到施加於結構體表面之壓力及剪力。

求解之順序可分成，結構體之位移計算、網格的重置以及流場之壓力和速度計算，重複以上之計算如(圖 3.9)所示，直到模擬所設定之最大時間步階即停止，如此便可以觀察結構體於流場中之模擬擺動情形。

第四章、結果與討論

4.1 固力分析

本文在固體力學計算模擬中，將探討三維線性結構體在不同之幾何形狀和不同之受力條件下，其和理論解之誤差分析比較，其內容包含網格精準度分析、不同負載形式之變化等。故可將求解模型分為兩類，分別為三維懸臂樑及三維平板之受力問題，對於求解之方法將採用虛擬時間之預測修正法來處理。

4.1.1 三維線性懸臂樑受力分析

在此主要針對懸臂樑的受力問題做一研究探討，其內容包含網格測試、擺動頻率分析、不同形式外力負載之懸臂樑。

4.1.1.1 網格測試

本小節測試的例子為一懸臂樑在其尾端承受一均勻分佈力如(圖 4.1)，以觀察其在不同網格密度下之精確度分析，在模擬中將結構體切割成五種不同網格大小，由疏到密分別為 $20 \times 2 \times 2$ 、 $40 \times 4 \times 2$ 、 $40 \times 4 \times 4$ 、 $60 \times 6 \times 4$ 、 $80 \times 8 \times 4$ 如(圖 4.2)，至於結構體材料性質和幾何尺寸列於表(一)。在此施加於結構體上之均勻分佈力 F 為 200N ，所使用之真實時間步階為 0.01sec ，虛擬時間步階為 0.001sec 。

由幾何尺寸可得知，懸臂樑之厚度為單位長度，故在此施加之均勻分

佈力亦等於在二維情況下施加於尾端之單點受力。由此可知，對於本次模擬之三維懸臂樑受力問題，可以藉由自由端尾端的位移理論值【33】來進行驗證，如下所示：

$$d_x = -\frac{FL^3}{3EI} \quad (4.1)$$

透過上式，將變數代入可得理論之位移 $d_x = -0.08$ m。而懸臂樑於各種網格密度下所計算之位移和誤差列於表(二)，由(圖 4.3)可得知，在網格數為 60x6x4 時誤差在 1%左右，已在可接受之範圍，將網格再加密時可看出最後兩組之誤差皆在 1%以下且差距非常小。對於以下之懸臂樑模擬皆以 60x6x4 之網格數為基準，以觀察其在不同條件下之反應現象。由(圖 4.4)可以觀察到，懸臂樑在受力過程中 A 點於 X 方向之變化情形，以及懸臂樑整體之位移變化如(圖 4.5)，結構體將因與外力達成力平衡狀態而不在變化。

4.1.1.2 擺動頻率分析

為了進一步了解結構體之擺動型態，可藉由探討懸臂樑之擺動頻率和週期來判斷其模態種類。在測試中將懸臂樑前 60 秒受限於外力負載而達穩態，之後將外力移去後並將阻尼係數設定為零，以觀測其自由擺動現象如(圖 4.6)，該擺動軌跡依舊以 A 點為基準。

其中可藉由 Bernoulli-Euler 樑理論分析，求得均勻樑之自然頻率，而該頻率會隨著樑的邊界條件不同而有差異性。在此分析之例子將以懸臂樑為

基準，其第一振動模態之自然角頻率【34】如下所示：

$$\omega = 3.516 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (4.2)$$

其中 m 代表單位長度的質量、 I 代表面積慣性矩。而 I 可表示如下：

$$I = \frac{db^3}{12} \quad (4.3)$$

自然頻率 f Hz 和角頻率 ω rad/sec 之關係如下：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.4)$$

透過(4.2)式即可得本文模擬之懸臂樑的第一自然角頻率為 0.315 rad/sec，再藉由(4.4)式即可得到結構體之振動頻率和週期分別為 0.05Hz 和 20sec。在此將使用快速傅立葉轉換對擺動軌跡進行分析如(圖 4.7)所示，由圖中可以發現，擺動軌跡主要以振幅大小 0.0767m、擺動頻率 0.05Hz 之波形所形成，並將此結果和理論頻率、週期做一比較，可以發現是完全吻合，亦顯示出懸臂樑之擺動型態將以第一模態做變形。

4.1.1.3 不同形式外力負載之懸臂樑

在流固耦合模擬中，結構體置於流場內部且結構表面將因流場之作用力影響而產生擺動現象，對於結構體而言該作用力並非前面討論之局部均勻受力，而是將結構體完全包覆之作用力。故在本小節將施力範圍由局部均勻受力延伸至結構體上方之線性均勻受力如(圖 4.8)所示，其中施加於結構上之作用力 w 為 100N/m^2 ，結構體材料性質和幾何尺寸和前小節相同。對於此

作用力施加於懸臂樑時，其尾端 A 點之位移理論值【33】為：

$$d_x = -\frac{wL^4}{8EI} \quad (4.5)$$

其中可透過(4.5)式計算得到理論位移值為-0.3 m，而本文模擬得到之 A 點位移量為-0.302 m，並以本文模擬數據與理論值做一比較可得其誤差在 1% 以內。

4.1.2 三維線性平板受力分析

在本節主要針對平板的受力問題做一分析比較，其內容包含網格測試、應力分析以及不同形式外力負載之平板。

4.1.2.1 網格測試

在此測試的例子為一四邊固定(clamped boundaries)之平板在其上方承受一均勻分佈力如(圖 4.9)所示，以觀察其在不同網格密度下之精確度分析，在模擬中將平板切割成五種不同網格大小，由疏到密分別為 10x10x5、20x20x5、40x40x10、50x50x10、60x60x10 如(圖 4.10)，至於平板材料性質和幾何尺寸列於表(三)。在此施加於平板上之均勻分佈力 q 為 10N/m^2 ，所使用之真實時間步階為 0.001sec，虛擬時間步階為 0.0001sec。

對於此模擬問題，會在平板中央之 A 點產生最大位移變化量，該位移可由理論公式表示如下【35】：

$$d_x = -0.00126 \frac{qL^4}{D} \quad (4.6)$$

其中 L 為平板之邊長、 D 值可由下式得到:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.7)$$

其中 t 為平板厚度。透過上式，將變數代入可得理論之位移

$d_x = -0.0176 \text{ m}$ 。而平板於各種網格密度下所計算之位移和誤差列於表

(四)，由(圖 4.11)可得知，在網格數為 $20 \times 20 \times 5$ 時誤差在 1% 以內，已在可接

受之範圍，將網格再加密時可看出其誤差已經非常小。接著由位移變化圖可

以觀察到(圖 4.12)，其位移將以平板中心為主，呈現同心圓的變化分佈，進

而觀察(圖 4.13)和(圖 4.14)其為在 xz 平面及 xy 平面之位移剖面圖，兩者呈

現之結果相同。對於以下之平板模擬皆以 $20 \times 20 \times 5$ 之網格數為基準，以觀

察其在不同條件下之反應現象。



4.1.2.2 應力分析

為了進一步了解平板之應力分佈型態，在此將均勻受力下之平板進行

應力分析，對於四邊固定(clamped boundaries)之平板而言，其在受力後，最

大之正向應力 $(\sigma_{yy})_{\max}$ 、 $(\sigma_{zz})_{\max}$ 將發生在平板周圍的中點，其理論之應力

大小如下所示 **【35】**：

$$(\sigma_{yy})_{\max} = (\sigma_{zz})_{\max} = \frac{6M_{\max}}{t^2} \quad (4.8)$$

其中 t 為平板厚度， M_{\max} 可由下式得到:

$$M_{\max} = 0.0513qL^2 \quad (4.9)$$

由以上之計算公式可得到，理論之最大應力為 2462Pa，接著觀察(圖 4.15)和

(圖 4.16)可以發現其最大應力分佈在周圍的中點，且模擬得到之最大應力為 2500Pa，此結果和理論值近似。接著進行平板之剪應力分析，由理論剪應力計算公式可得如下【35】：

$$(\sigma_{yz})_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \quad (4.10)$$

由(圖 4.17)可發現，其剪應力將以對角線對稱分佈，且在平板中央的剪應力大小為 0，此結果和理論公式(4.10)式計算相同。

4.1.2.3 不同形式外力負載之平板

在前面已經介紹過平板於均勻受力下，其位移變化和應力分佈之情形，在此將以不同形式之外力負載作用於平板上，即在平板中點處施加以 200N 之作用力 F 如(圖 4.18)，其平板材料性質和幾何尺寸和前面相同，在此可由理論公式得到最大位移量，如下所示【36】：

$$d_x = -0.0056 \frac{FL^2}{D} \quad (4.11)$$

在此將平板之變數代入，可得理論之位移為 -0.00391m，而本篇模擬中，以網格密度 20x20x5 為基準，得到之位移為 -0.00401m，由此可得知，兩者之結果非常近似。

4.2 流固耦合分析

在流固耦合分析中，主要是探討二維非線性結構體置於流場內，結構表面受到流體之壓力及剪力之影響，進而觀察結構體隨時間變化之擺動情形，

流場區域會隨著結構體之擺動現象而變動其範圍，進而影響流場之速度及壓力。在本節將探討渦流致動彈性平板之例子，並設定其阻尼係數 c 為零。計算中，主要可以分成兩部份，即固力、流力計算，在固力計算中，將採用虛擬時間之預測修正法來處理，流力部份則是採用 PISO 法則來演算，故在耦合過程中，時間步階必須具有一致性。在選用時間步階時必須滿足 (Courant-Friedrichs-Lewy Stability Condition) CFL 穩定性收斂條件如下：

$$C_n = \frac{c\Delta\tau}{\Delta x} \quad (4.12)$$

其中 $c = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ 為波傳速度、 Δx 為網格的特徵長度。

在此以固力計算為基準，虛擬時間步階採用 10^{-6} sec，真實時間步階採用 10^{-4} sec，並將以上之條件代入(4.12)式可得虛擬時間步階下 C_n 為 0.1，真實時間下 C_n 為 10。對於穩定性條件而言，固力在以虛擬時間下計算已達其穩定條件 C_n 小於 1，故將採用此組時間步階，而流場之計算時間步階將以其真實時間為主來進行耦合，由公式中可以發現，時間步階將與網格之特徵長度成正比，即在計算中，隨著網格密度的增加，網格特徵長度會因而變小，時間步階也必須跟著調小，才能符合穩定性收斂條件。

4.2.1 渦流致動之彈性平板

當流體流經一鈍形物體時，會產生非穩態之渦流逸散(vortex shedding)，即流體在物體之上下壁面會產生週期性的脫離現象。故在本篇研究中，將一非線性彈性平板固定於正方阻塊後方，並將其置於流場內部以觀測其流固

耦合現象如(圖 4.19)。其中彈性平板和流體之性質分別列於表(五)和表(六)，結構體所使用之網格密度為 64×6 ，流場之網格數則為 62376(圖 4.20)。在此測試三種不同之均勻入口流速，分別為 17、31.5、44.8 cm/s，並以阻塊大小為特徵長度可計算出相對應之雷諾數分別為 110、204、290。(圖 4.21)即為在不同雷諾數下平板尾端頂點的位移反應圖，由圖中可發現，頂點之擺動幅度及頻率快慢將因雷諾數之不同而有所差異。在此搭配快速複立葉轉換進行分析，可得知位移反應圖之擺動頻率，進而可了解到結構體之擺動型態為何。

在雷諾數為 110 時，可由(圖 4.21a)發現到其頂點之位移變化量非常小，並對該變化量進行快速複立葉分析可得到其擺動頻率為 0.65Hz(圖 4.22 a)，將此結果和(4.2)式得到之第一共振頻率 0.61Hz 做一比較，可發現其擺動現象將以第一模態為主。接著觀察流場流線如(圖 4.23)，可發現在平板周圍形成一封閉型式之對稱渦流，此乃造成平板上下方幾乎沒有壓差而位移變化量非常小之主因，且該尺度大小已經大於平板之長度，此現象說明該流動已達到穩態。一般而言，渦流逸散開始於雷諾數約 50，在此還未出現渦流逸散的原因可能是固定於阻塊後方之平板抑制上下方渦流之交互作用【37-38】，另外的原因可能是流場外部之管壁所影響，此原因不是本文研究之重點，故不深入探究。

接著提高雷諾數至 204，由(圖 4.21 b)可以很明顯的觀察到，平板在初

期的擺動現象並不明顯，但和流體之交互作用下，其振幅隨之增加，擺動頻率亦隨之加快，接著將位移變化圖進行快速複立葉分析如(圖 4.22 b)，圖中顯示出該位移之頻率由 3.85Hz 和較微弱之頻率 1Hz 所組成。但該擺動現象主要以頻率 3.85Hz 做週期性的擺動，該頻率接近第二共振頻率 3.8Hz，計算公式【34】如下所示：

$$w = 22.035 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (4.13)$$

由流場流線(圖 4.24)可以觀察到，平板之擺動現象呈弓狀形，該形狀亦說明其擺動屬於第二模態。由於彈性平板之擺動和變形造成流體於阻塊後方形成數個渦流，大致上而言，平板彎曲時，其內側會產生一個較大之渦流，另外一側則會產生兩個渦流，其中一個為剛形成之較小尺寸渦流，當平板擺動現象從凹狀變成凸狀時，流場之形態也隨之改變，值得注意的是，隨著擺動型態週期性的改變，沒有渦流逸散從平板尾端出現。接著觀察流場壓力圖(圖 4.25)，當平板往下擺動時，可看出在平板的下方壓力大、上方壓力較小，而當平板往上擺動時，此時平板上方壓力大、下方壓力較小，此現象可說明平板上下方之壓力差即為擺動現象之主因。

最後觀察雷諾數在 290 時之擺動情形如(圖 4.21 c)，其擺動幅度隨著雷諾數之增加而變大，擺動現象亦趨向複雜化。接著對位移反應圖進行快速複立葉轉換如(圖 4.22 c)，由圖中可發現其主要頻率分別為 1Hz 和 4.067Hz，將此結果和第一共振頻率 0.61Hz 及第二共振頻率 3.8Hz 比較，可以發現擺

動型態接近兩種之模態。進而觀察流場流線(圖 4.26)，可發現渦流分佈比在低雷諾數下複雜許多，而在時間 $t = 14.65\text{sec}$ 時，平板尾端下半部有一渦流分離，由此可推得，隨雷諾數繼續增加，渦流逸散形成 Karman vortex street 將明顯出現。在流場壓力中(圖 4.27)，可發現渦流產生之區域即為低壓區，且低壓區將伴隨流動趨勢而往下游方向移動。



第五章、結論

在本文研究中可將結果歸納成以下幾點:

- 在流固耦合計算中，為了在流體和固體之耦合計算上能達成一致性，故在此發展非結構性網格有限體積法於固體力學中，且該法已能有效運用於典型的三維懸臂樑和平板的問題。
- 在固力計算中，使用虛擬時間之預測修正法進行求解，並將求解模型分為三維懸臂樑和平板兩類，進行網格精確度測試及不同外力負載之試驗。經由分析後可發現，結構位移與理論解非常接近，另外也與文獻比較，在應力分析中可得相似之趨勢分佈。
- 本文所採用之計算方法在固體力學計算中，於不同之求解模型和不同之受力條件下，皆可得到理想之精確度。
- 在流固耦合計算中，固力使用的時間步階受限於結構體的幾何尺寸和性質，故可藉由虛擬時間法進行求解，以達到收斂穩定度的標準，進而在流體和固體之耦合上達到相同之時階下進行分析。
- 由耦合模擬可發現，在雷諾數 110 時，阻塊後方形成對稱之封閉尾流，且流場已趨於穩態。進而觀察雷諾數 204 時，流場呈現非穩態且週期性的流動，結構體擺動現象亦較顯著，但在此還未觀察到 vortex shedding 現象。最後再提高雷諾數至 290 時，可發現已經有渦流從平板頂點脫離。結果顯示出於阻塊後方固定一平板，將會影響 vortex shedding 現象

發生之機制。

- 在耦合分析中，渦流致動之彈性平板問題為較大變形的位移，因此在分析上應考慮以三維模型來分析，以提高計算之準確性。



参考文献

- 【1】 Owen, D.R.J., Hinton, E., Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Ltd, Swansea, United Kingdom, 1980.
- 【2】 Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., The Finite Element Method Basic Formulation and Linear Problems, vol. 1, McGraw-Hill, Maidenhead, United Kingdom, 1989.
- 【3】 Patanker, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, Washington, DC, 1980.
- 【4】 Hirsch, C., Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of Numerical Discretization, vol. 1, Wiley, New York, 1988.
- 【5】 Taylor, G.A., A vertex-based discretization scheme applied to material non-linearity within a multi-physics finite volume framework, Ph.D., Thesis, The University of Greenwich, 1996.
- 【6】 Wheel, M.A., “A geometrically versatile finite volume formulation for plane elasto static stress analysis”, Journal of Strain Analysis, vol. 31, 111-116, 1996.
- 【7】 Wheel, M.A., “A mixed finite volume formulation for determining the small strain deformation of incompressible materials”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 44, 1843-1861, 1999.
- 【8】 Jasak, H., Weller, H.G., “Application of the finite volume method and unstructured meshes to linear elasticity”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 48, 267-287, 2000.
- 【9】 Bathe, K.J., Zhang, H., “Finite element developments for general fluid flows with structural interactions”, International Journal for Numerical

Methods in Engineering, vol. 60, 213-232, 2002.

- 【10】 Hassan, O., Probert, E.J., Morgan, K., “Unstructured mesh procedures for the simulation of three-dimensional transient compressible inviscid flows with moving boundary components”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 27, 41-55, 1998.
- 【11】 Slone, A.K., Pericleous, K., Bailey, C., “A finite volume unstructured mesh approach to dynamic fluid-structure interaction: an assessment of the challenge of predicting the onset of flutter”, Applied Mathematical Modelling, vol. 28, 211-239, 2004.
- 【12】 Johnson, A.A., Tezduyar, T.E., “Parallel computation of incompressible flows with complex geometries”, International Journal for Numerical in Fluids, vol. 24, 1321-1340, 1997.
- 【13】 Taylor, C.A., Hughes, T.J.R., Zarins, C.K., “Finite element modeling of blood flow in arteries”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 158, 155-196, 1998.
- 【14】 Souli, M., Ouahsine, A., Lewin, L., “ALE formulation for fluid-structure interaction problems”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, 659-675, 2000.
- 【15】 Taylor, G.A., Bailey, C., Cross, M., “Computational solid mechanics using a vertex-based finite volume method”, In F. Benkhaldoun R.Vilsmeier and D. Hanel, editors, Finite Volumes for Complex Applications II: Problems and Perspectives, page 507-515, 2000.
- 【16】 Slone, A.K., Pericleous, K., Bailey, C., Cross, M., “Dynamic fluid-structure interaction using finite volume unstructured mesh procedures”, Computers and Structures, vol. 80, 371-390, 2002.
- 【17】 Fallah, N., “A cell vertex and cell centred finite volume method for plate bending analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and

Engineering, vol. 193, 3457-3470, 2004.

- 【18】 Vaz, M., Jr., Munoz-Rojas, P. A., Filippini, G., “On the accuracy of nodal stress computation in plane elasticity using finite volumes and finite elements” , Computers and Structures, vol. 87, 1044-1057, 2009.
- 【19】 S.R. Sabbagh-Yazdi., S. Ali-Mohammadi., M.K. Pipelzadeh., “Unstructured finite volume method for matrix free explicit solution of stress–strain fields in two dimensional problems with curved boundaries in equilibrium condition”, Applied Mathematical Modelling, vol. 36, 2224-2236, 2012.
- 【20】 Lv, X., Zhao, Y., Huang, X.Y., Xia, G.H., Su, X.H., “A matrix-free implicit unstructured multi-grid finite volume method for simulating structural dynamics and fluid–structure interaction”, Journal of Computational Physics, vol. 225, 120-144, 2007.
- 【21】 Xia, G., Lin, C.L., “An unstructured finite volume approach for structural dynamics in response to fluid motions”, Computers and Structures, vol. 86, 684-701, 2008.
- 【22】 黃義政，“發展一非結構性網格有限體積法對固體結構及流固耦合計算分析”，國立交通大學機械工程所，碩士論文，民國 100 年。
- 【23】 黃裕堂，“發展一適用於結構體力學之隱性有限體積法及應用於流固耦合計算”，國立交通大學機械工程所，碩士論文，民國 101 年。
- 【24】 Demirdzic, I., Peric, M., “Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow”, International Journal for Numerical Method in Fluids, Vol. 8, 1037-1050, 1988.
- 【25】 Stenel, D.C., Schafer, M., Heck, M., Yigit, S., “Efficiency and accuracy of fluid-structure interaction simulations using an implicit partitioned approach”, Computational Mechanics, 43, 103-113, 2008.

- 【26】 Jameson, A., “Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings”, AIAA Paper, 91-1596, 1991.
- 【27】 Jameson, A., “An Assessment of Dual-Time Stepping, Time Spectral and Artificial Compressibility Based Numerical Algorithms for Unsteady Flow with Applications to Flapping Wings”, AIAA Paper, 2009-4273, 2009
- 【28】 Weiss, J.M., Smith, W.A., “Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows”, AIAA Journal, vol. 33, 2050-2057, 1995.
- 【29】 Hornbeck, R. W., Numerical of Methods, Quantum, New York, 1975.
- 【30】 Tsui, Y.Y., Wu, T.C., “A Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithm Using High-Resolution Schemes for All-Speed Flows”, Numerical Heat Transfer Part B Fundamentals, vol. 53, 75-96, 2008.
- 【31】 Tsui, Y.Y., Pan, Y.F., “A Pressure-Correction Method for Incompressible Flows Using Unstructured Meshes”, Numerical Heat Transfer Part B Fundamentals, vol. 49, 43-65, 2006.
- 【32】 Issa, R.I., “Solution of The Implicitly Discretized Fluid-Flow Equations by Operator-Splitting”, Journal of Computational Physics, vol. 62, 40-65, 1986.
- 【33】 Fenner, Roger, T., Mechanics of Solids, Blackwell Scientific, Boston, 1989.
- 【34】 劉晉奇，褚晴暉，有限元素分析與 ANSYS 的應用工程，滄海書局，台中，民國九十五年。
- 【35】 Xia, G.H., Zhao, Y., Yeo, J.H., Lv, X., “A 3D implicit unstructured-grid finite volume method for structural dynamics”, Computational Mechanics, vol. 40, 299-312, 2007.
- 【36】 Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, Singapore, 1959.
- 【37】 Unal, M.F., Rockwell, D., “On Vortex Formation from a Cylinder .2.

Control by Splitter-Plate Interference”, Journal of Fluid Mechanics,
vol.190, 513-529, 1988.

- 【38】 Ozono, S., “Flow Control of Vortex Shedding by a Short Splitter Plate Asymmetrically Arranged Downstream of a Cylinder”, Physics of Fluids, vol. 11, 2928-2934, 1999.



表(一)懸臂樑的材料性質和幾何尺寸【20】

楊氏係數 Young's modulus (MPa)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(kg/m^3)
E	ν	ρ
10	0	2600

長度(m)	厚度(m)	深度(m)
L	b	d
20	2	1

表(二)懸臂樑在不同網格數下之位移和誤差百分比

網格數	位移(m)	誤差(%)
20x2x2	-5.358×10^{-2}	33.02
40x4x2	-7.815×10^{-2}	2.31
40x4x4	-7.816×10^{-2}	2.3
60x6x4	-8.043×10^{-2}	0.53
80x8x4	-8.088×10^{-2}	1.1

表(三)平板的材料性質和幾何尺寸【35】

楊氏係數 Young's modulus (MPa)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(kg/m^3)
E	ν	ρ
10	0.3	2600

長度(m)	寬度(m)	高度(m)
L	b	t
20	20	0.5

表(四)平板在不同網格數下之位移和誤差百分比

網格數	位移(m)	誤差(%)
10x10x5	-1.776×10^{-2}	0.91
20x20x5	-1.766×10^{-2}	0.34
40x40x10	-1.791×10^{-2}	1.76
50x50x10	-1.788×10^{-2}	1.59
60x60x10	-1.779×10^{-2}	1.07

表(五) 渦流致動之彈性平板的結構參數【21】

楊氏係數 Young's modulus ($g/cm \cdot s^2$)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(g/cm^3)
E	ν	ρ
2×10^6	0.35	2

表(六) 渦流致動之彈性平板的流體參數【21】

黏滯係數 viscosity($g/cm \cdot s$)	密度(g/cm^3)
μ	ρ
1.82×10^{-4}	1.18×10^{-3}

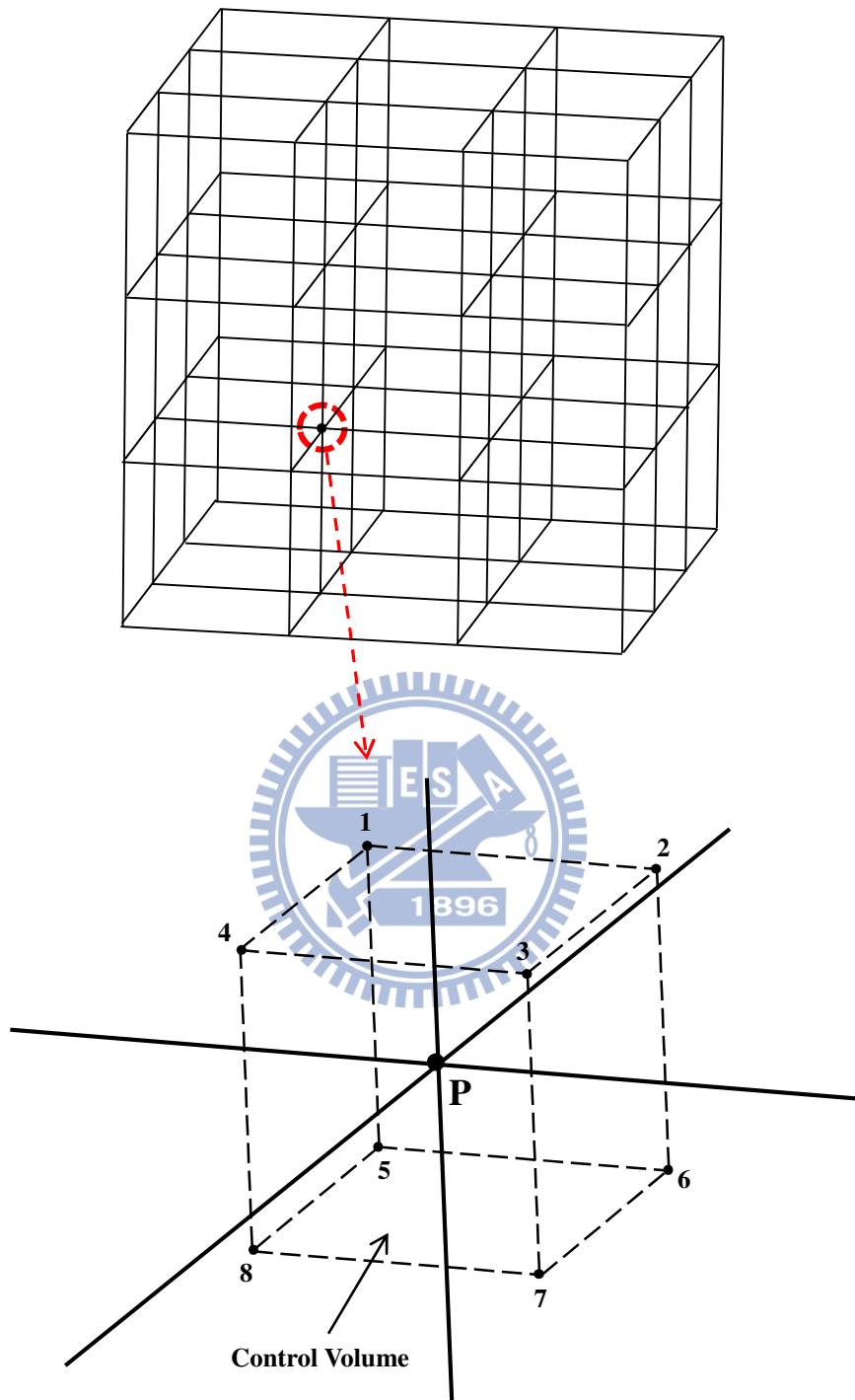


圖 3.1 內部點控制體積之示意圖

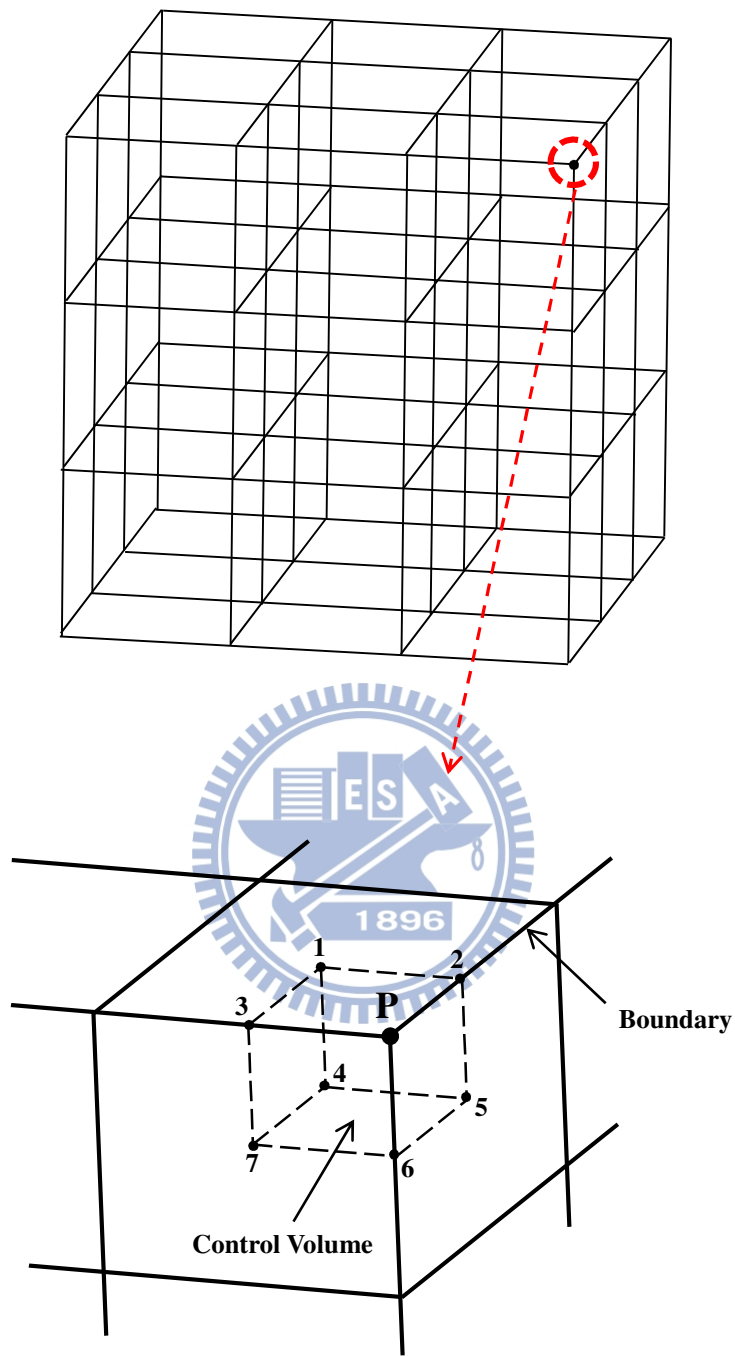


圖 3.2 邊界點控制體積之示意圖

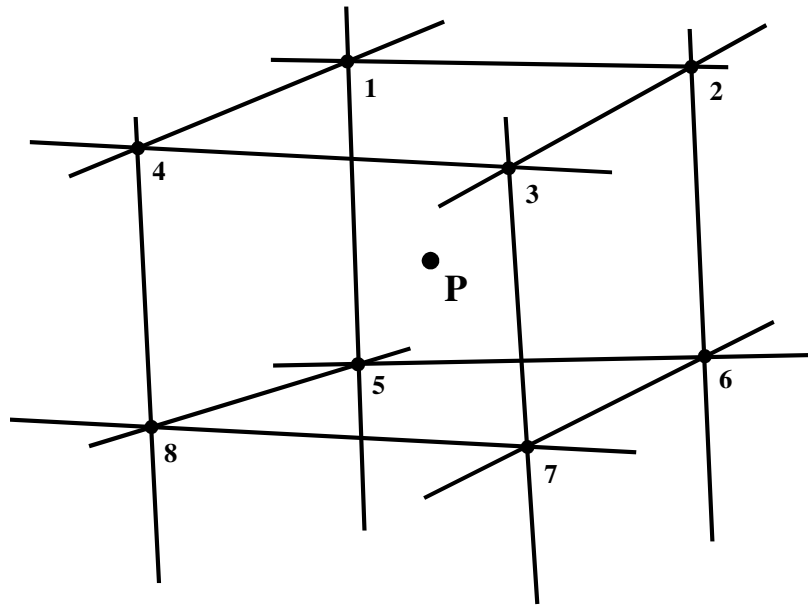


圖 3.3 位移梯度計算示意圖

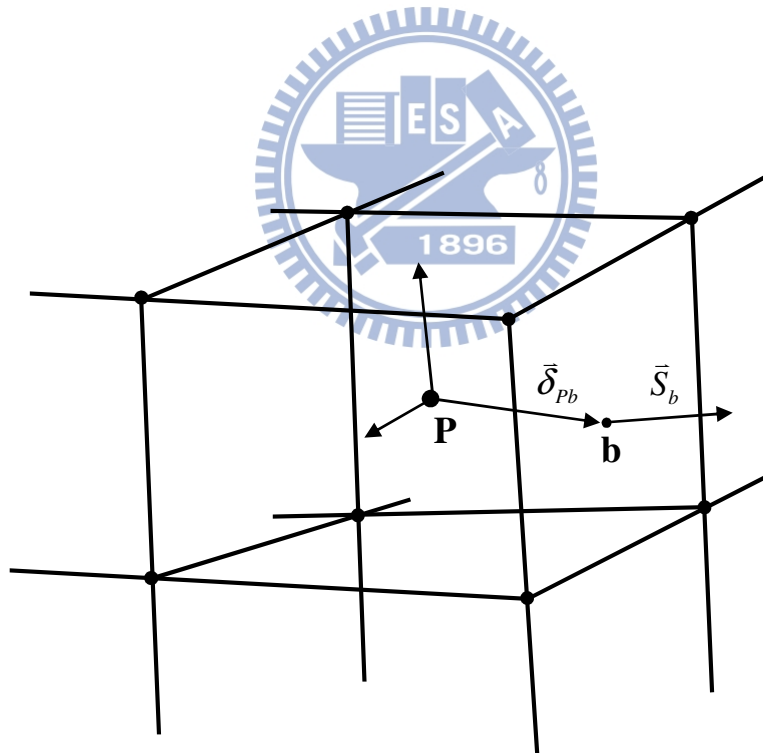


圖 3.4 邊界位移梯度計算示意圖

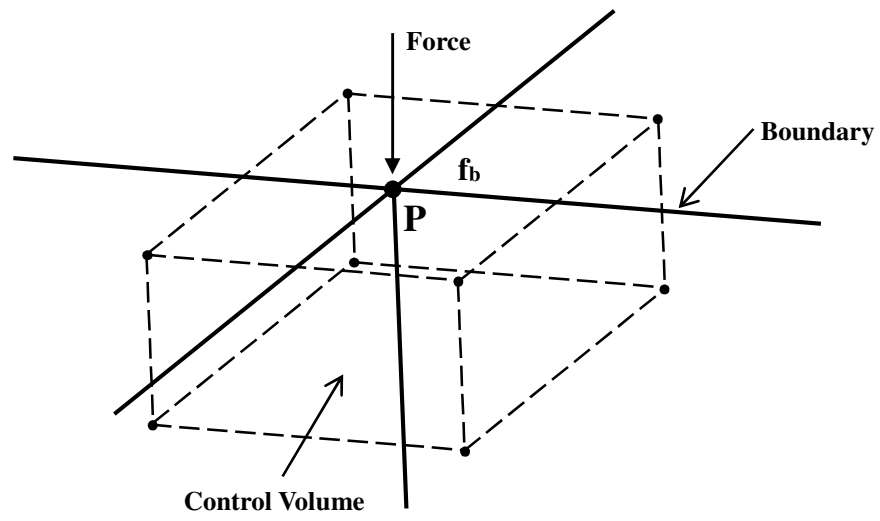


圖 3.5 相鄰邊界的控制體積計算示意圖

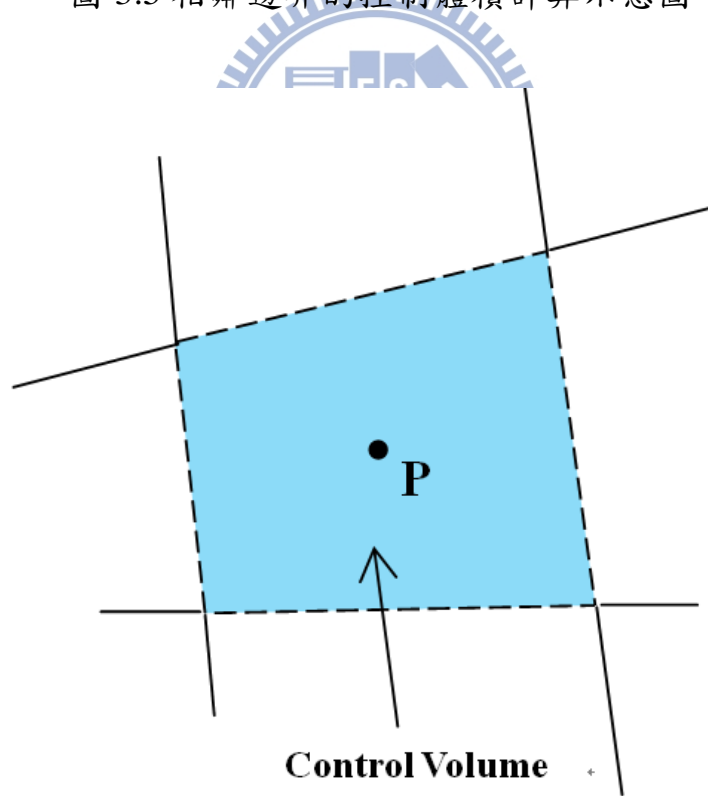


圖 3.6 以網格中心為控制體積之示意圖

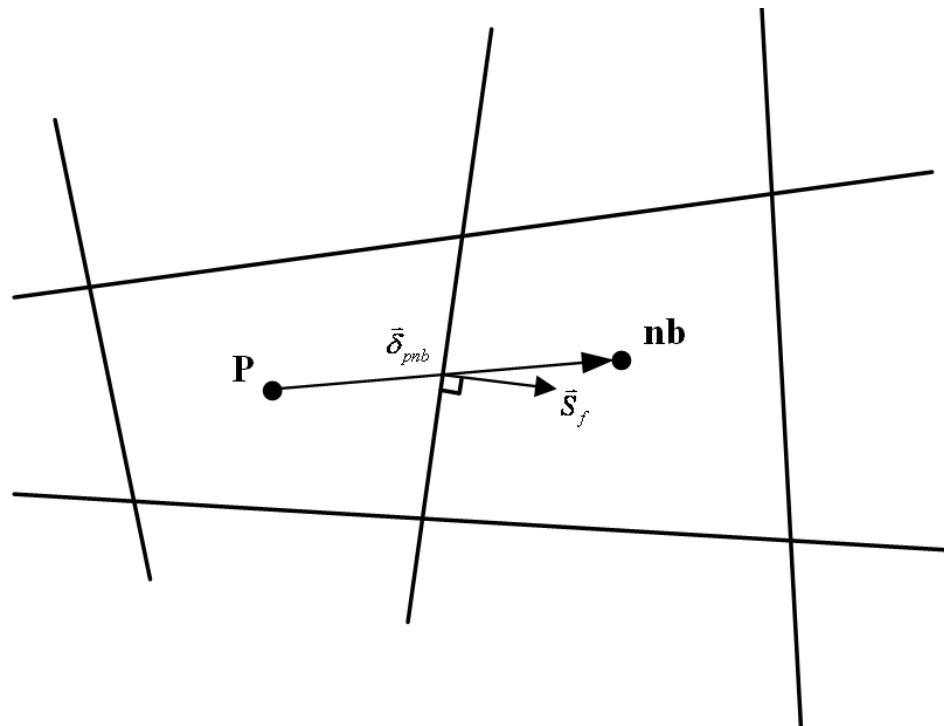


圖 3.7 主格點和鄰近格點之控制面示意圖

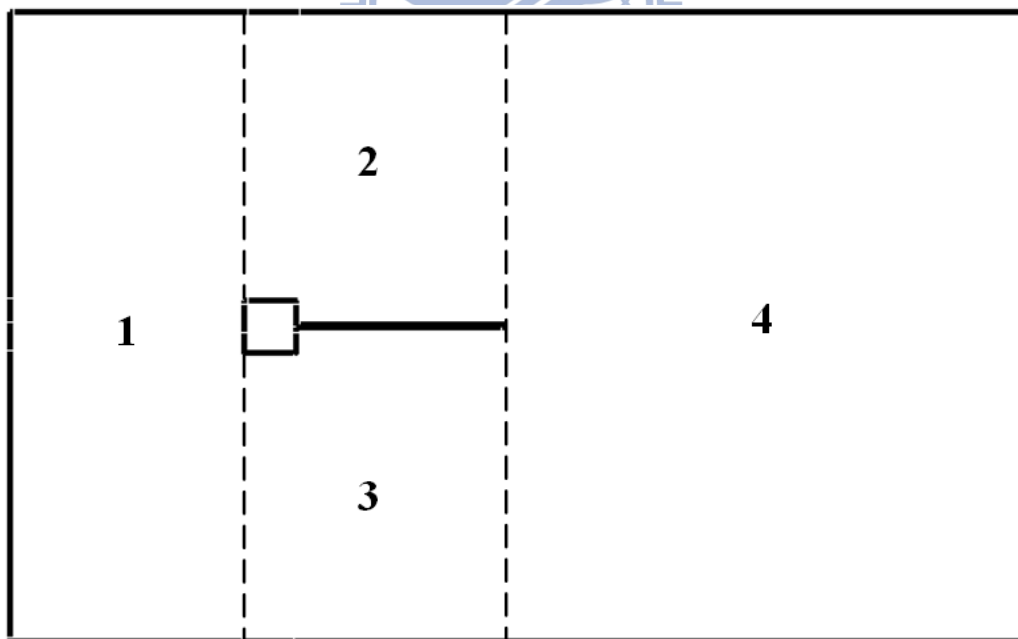


圖 3.8 流場網格分割區塊圖

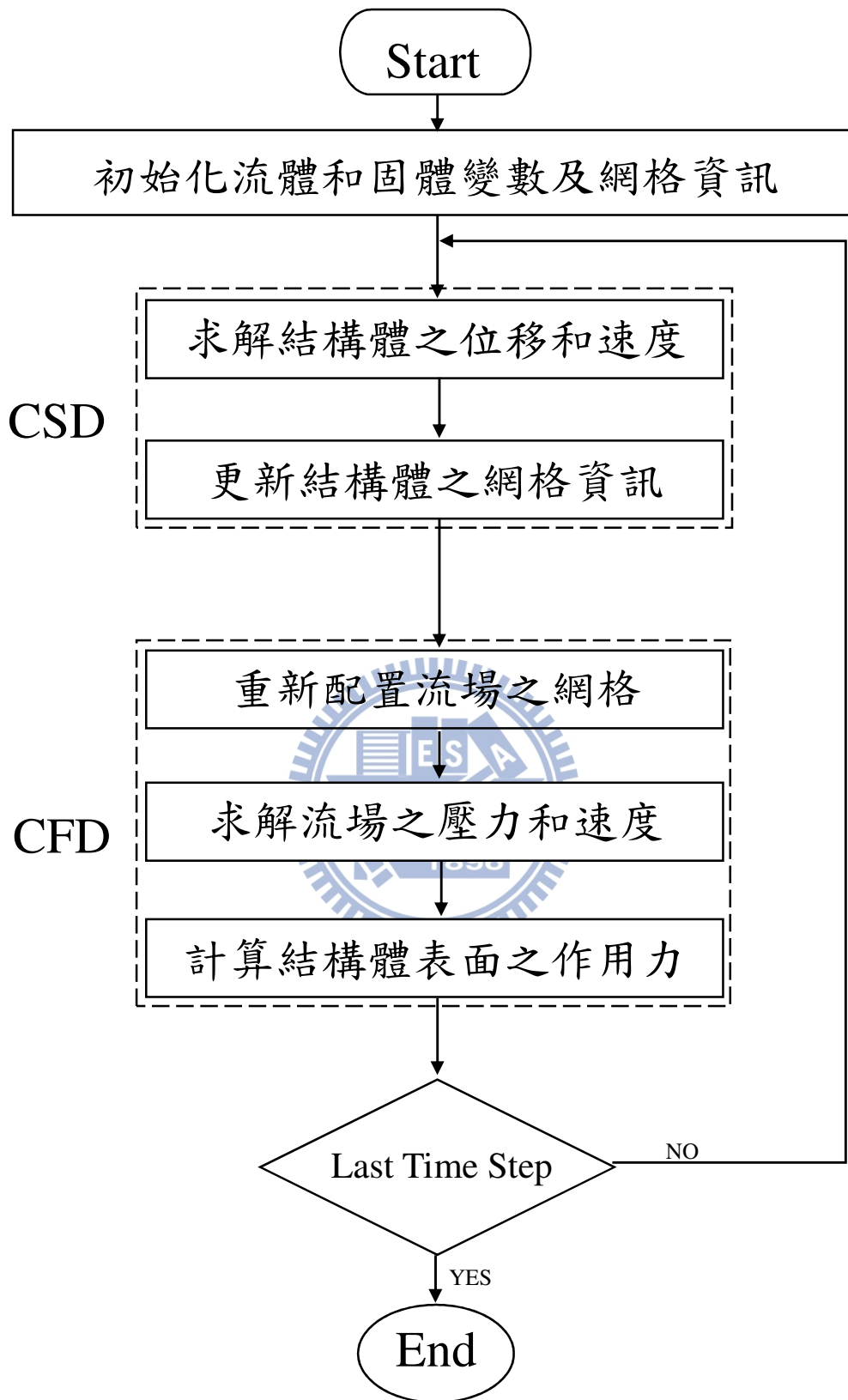


圖 3.9 求解流程圖

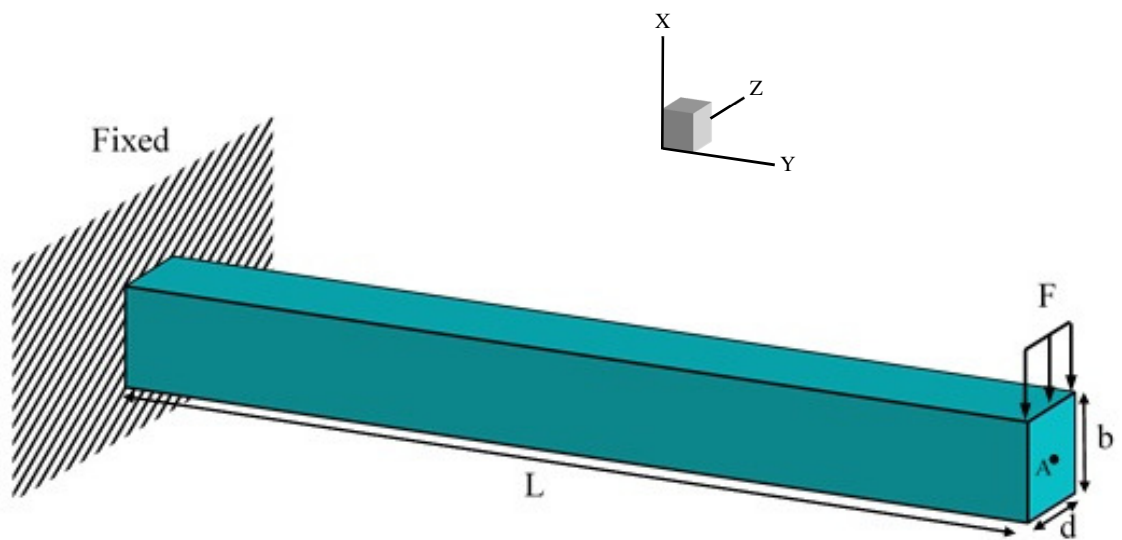


圖 4.1 均勻受力之懸臂樑示意圖

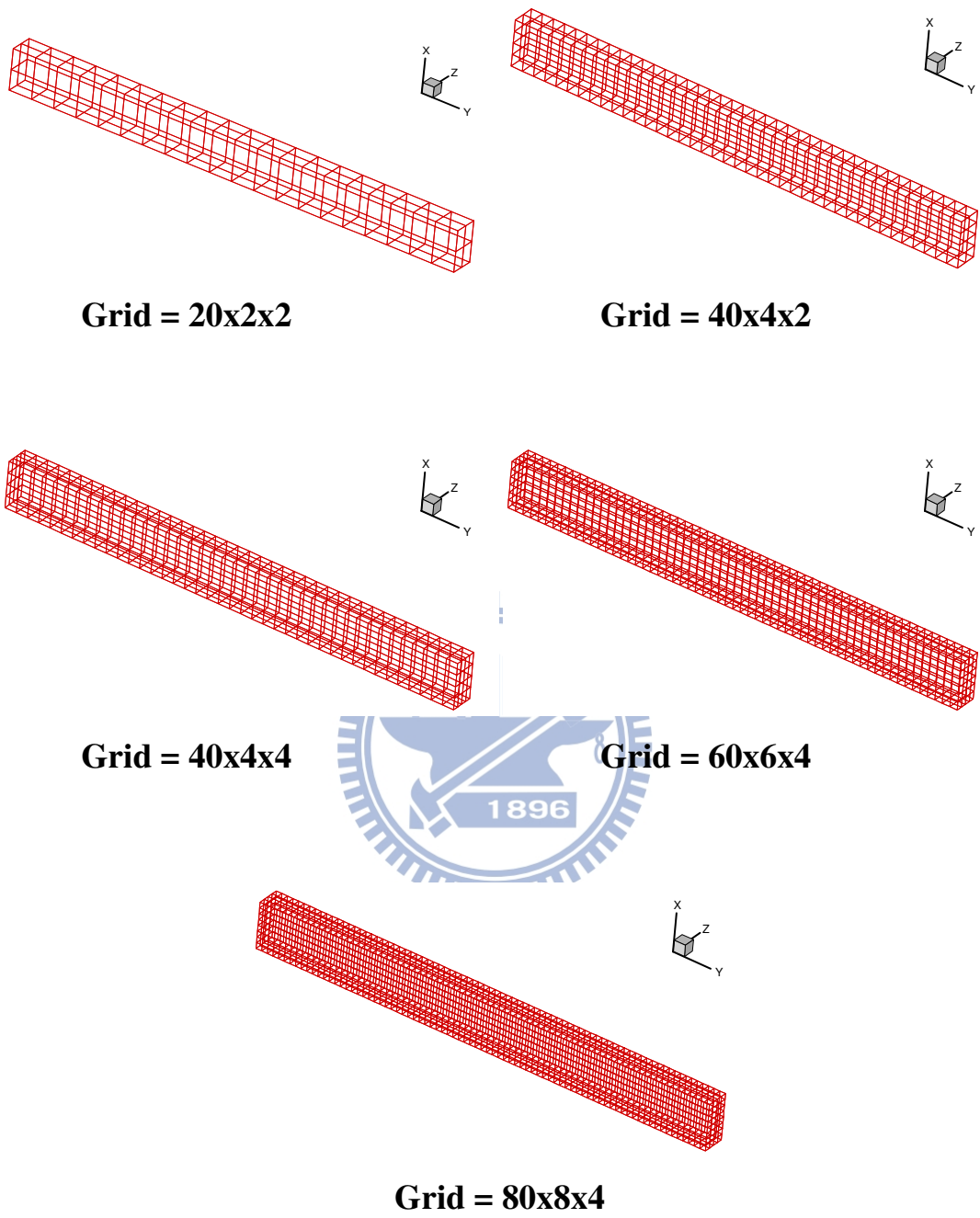


圖 4.2 懸臂樑五種不同網格數

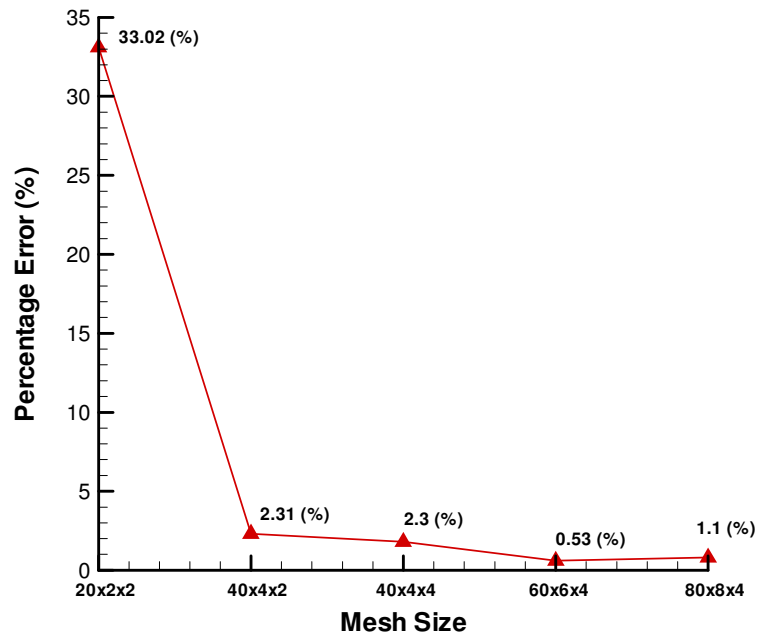


圖 4.3 懸臂樑網格精準度之誤差分析

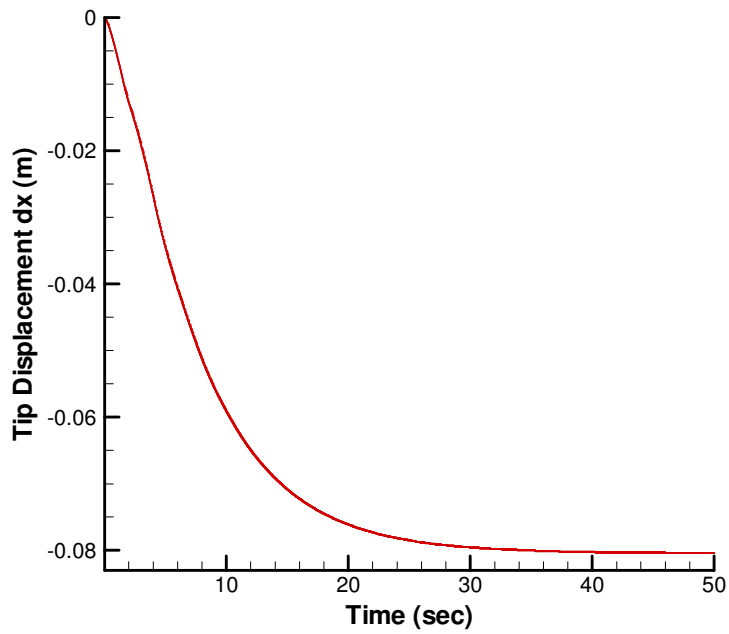


圖 4.4 懸臂樑尾端頂點的位移反應

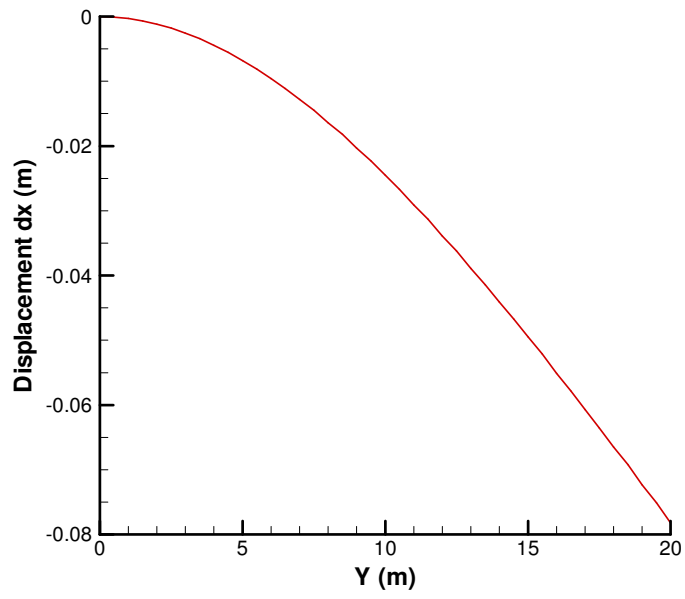


圖 4.5 懸臂樑整體之位移變化

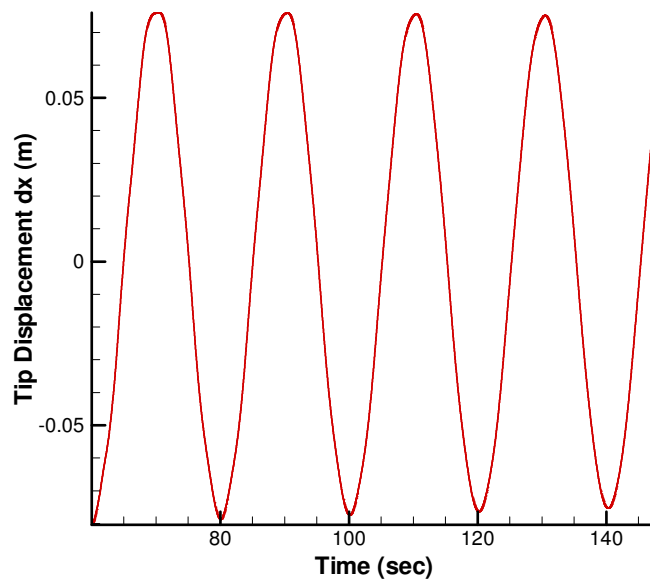


圖 4.6 懸臂樑尾端頂點自由擺動之位移反應

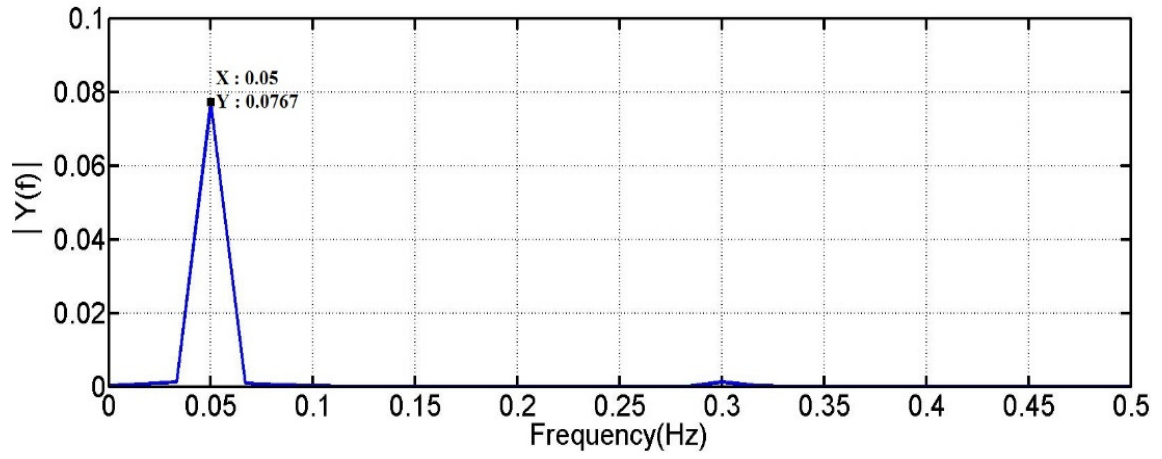


圖 4.7 懸臂樑尾端位移之頻譜圖

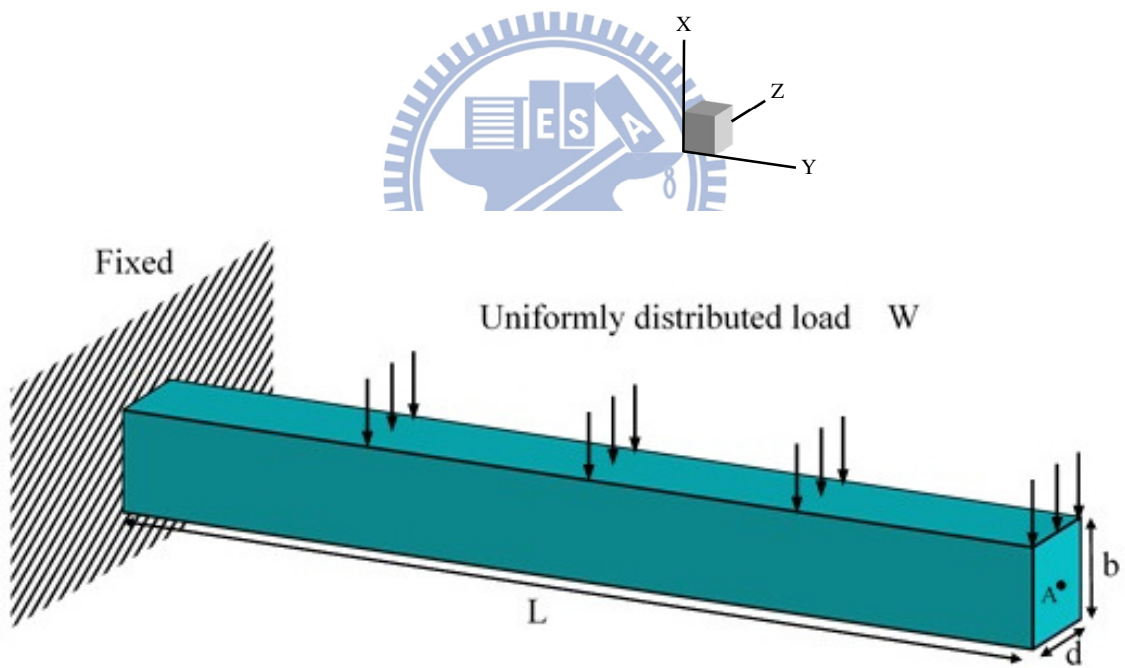


圖 4.8 懸臂樑上方全面受力之示意圖

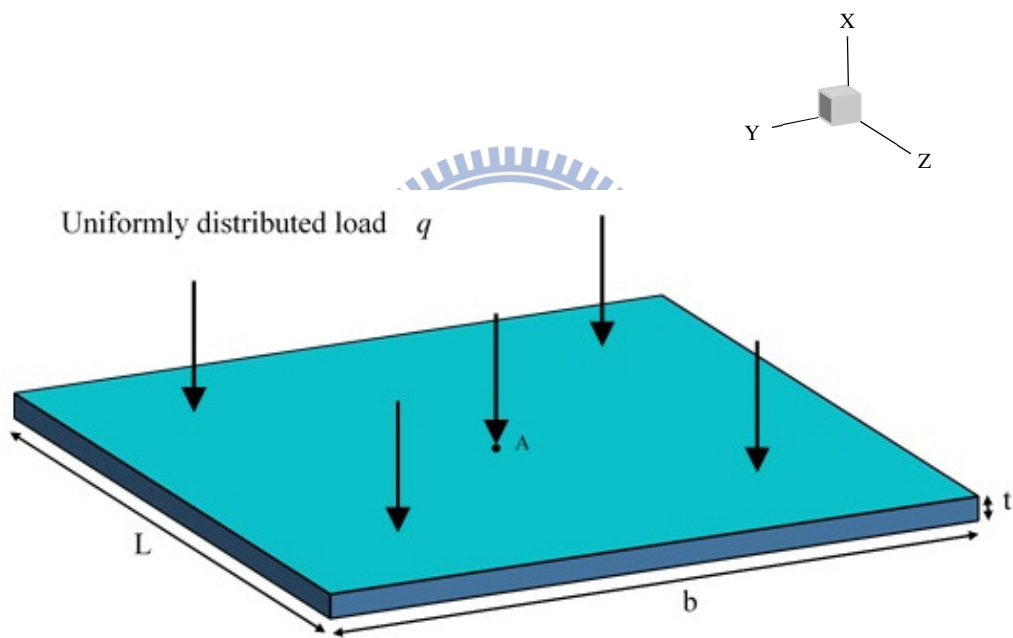


圖 4.9 平板上方全面受力之示意圖

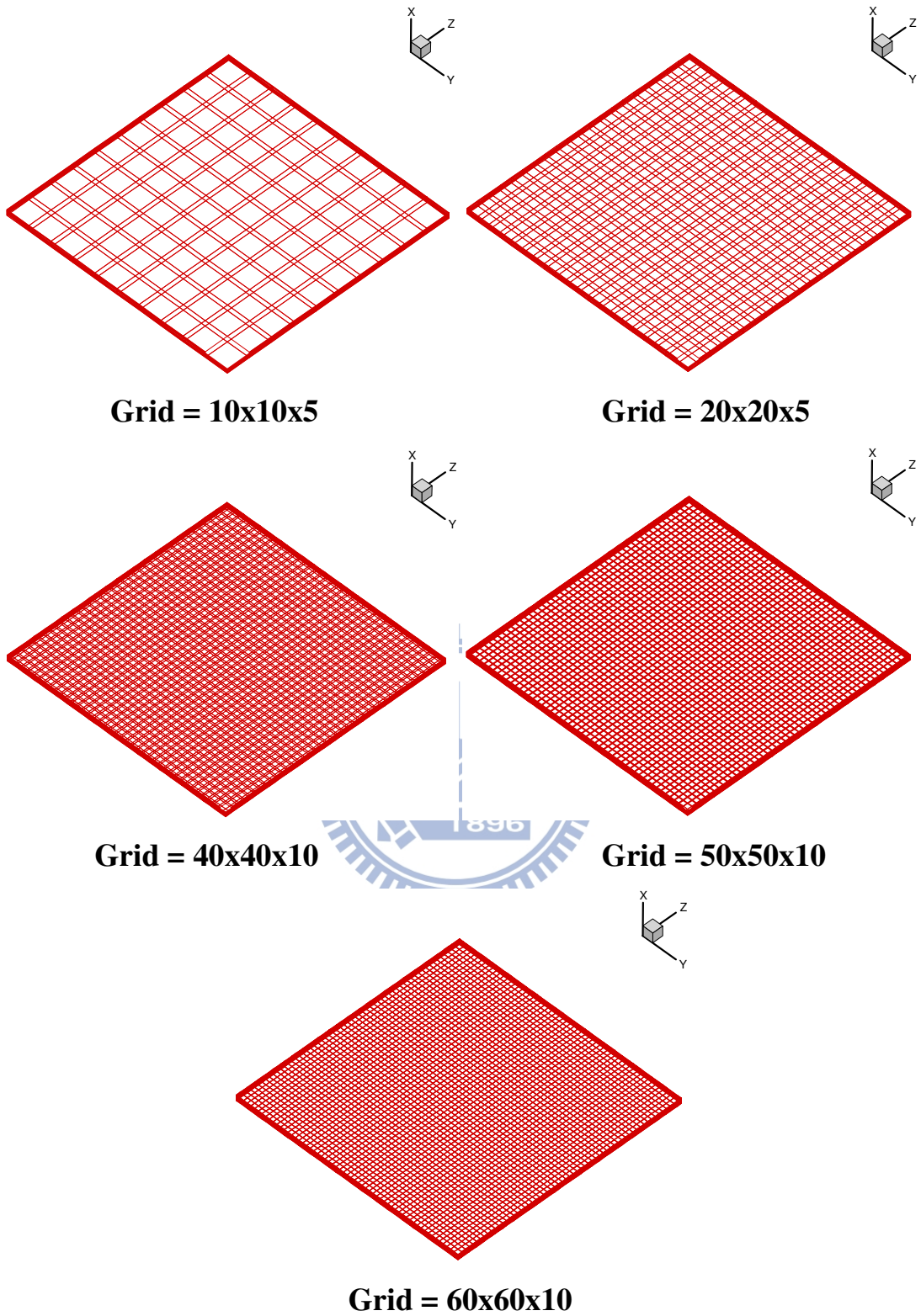


圖 4.10 平板五種不同網格數

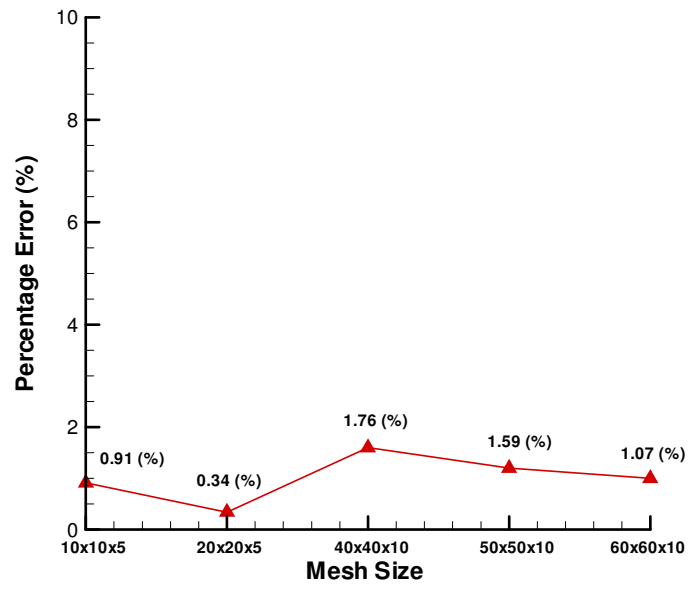


圖 4.11 平板網格精準度之誤差分析

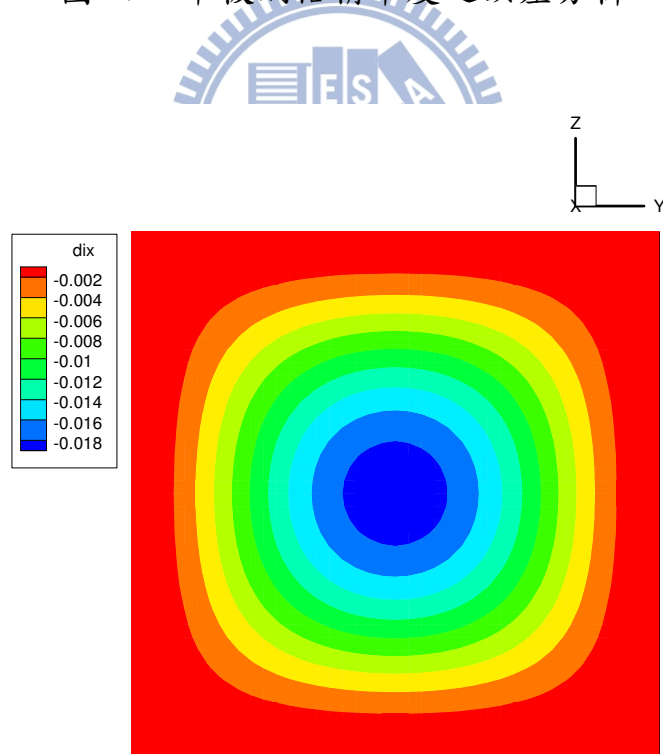


圖 4.12 平板之位移變化圖

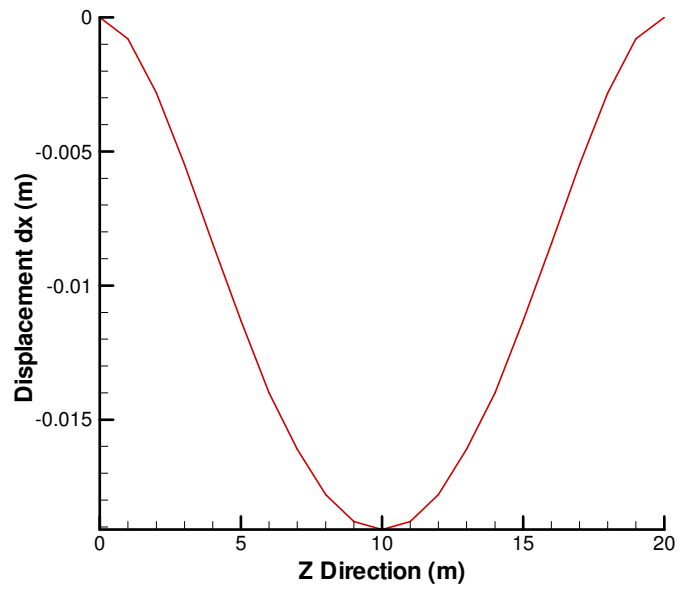


圖 4.13 平面 XZ 之位移剖面圖

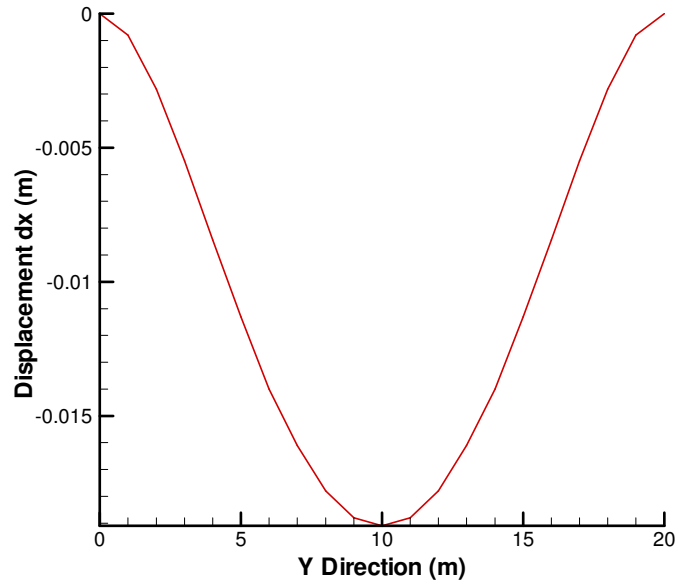


圖 4.14 平面 XY 之位移剖面圖

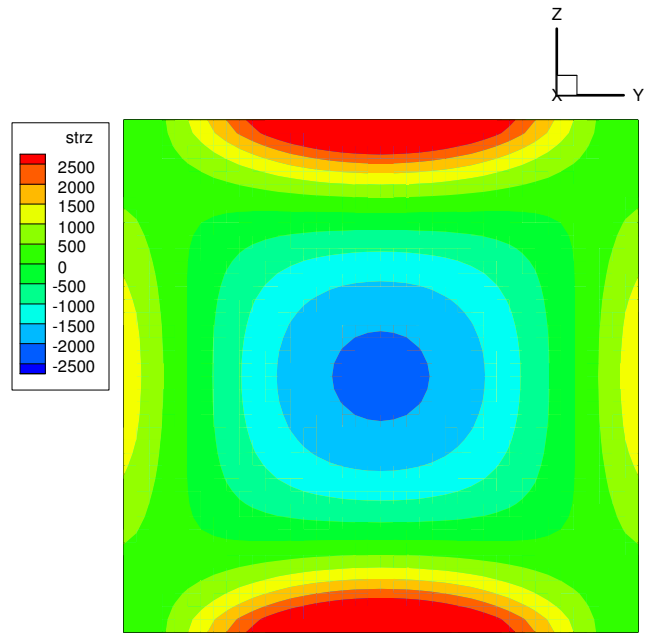


圖 4.15 方向 Z 之正向應力

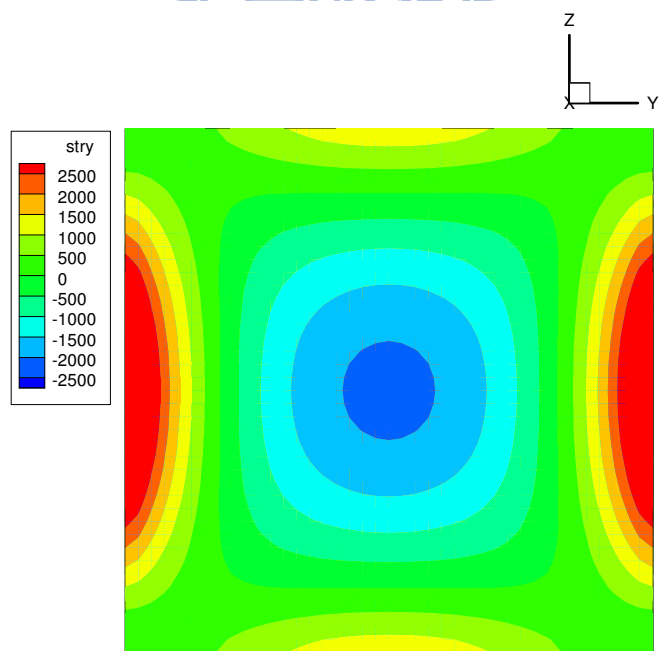


圖 4.16 方向 Y 之正向應力

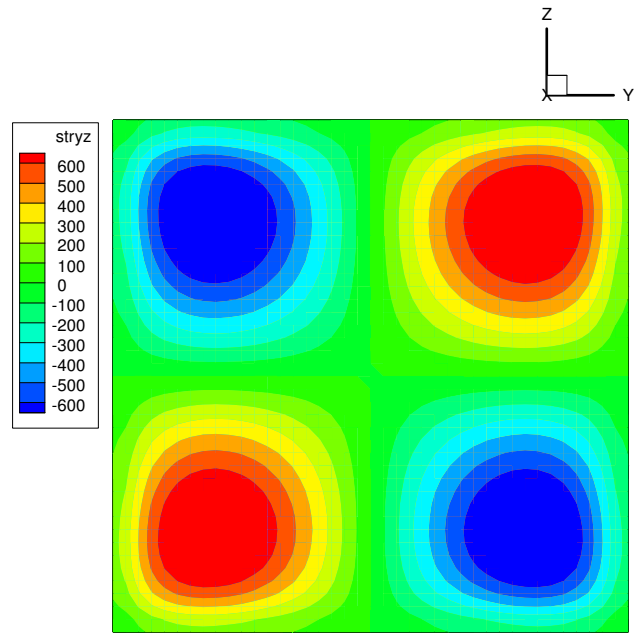


圖 4.17 方向 YZ 之剪應力

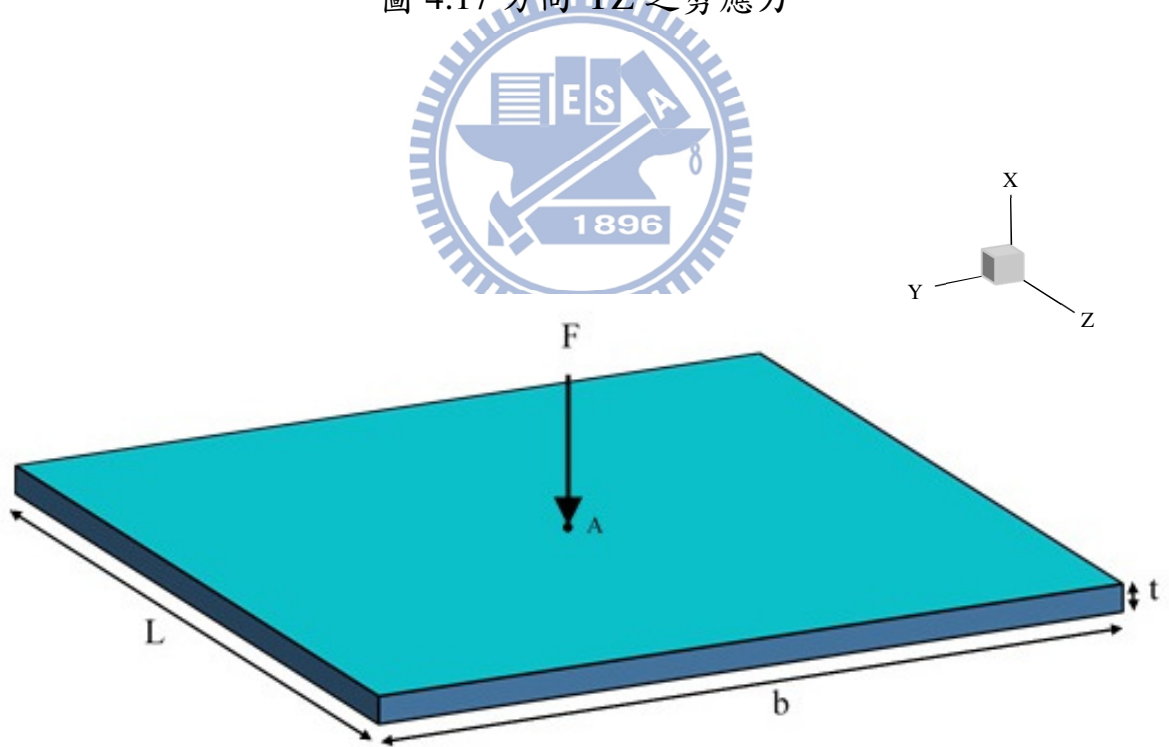


圖 4.18 單點受力之平板示意圖

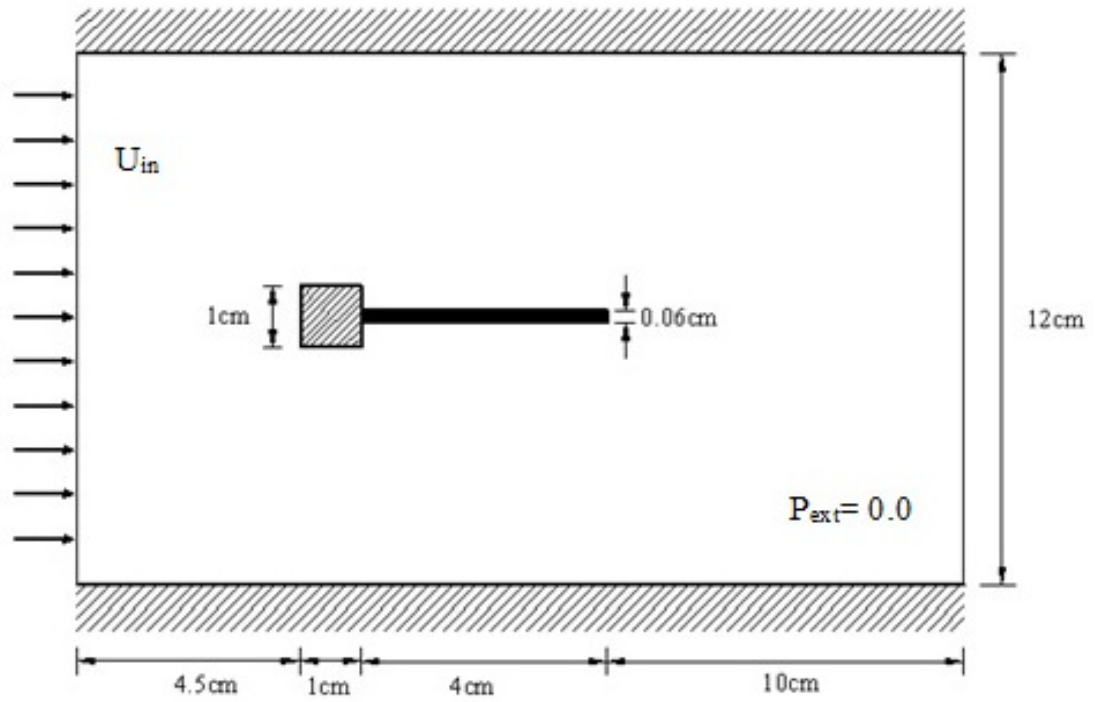


圖 4.19 渦流致動彈性平板之示意圖

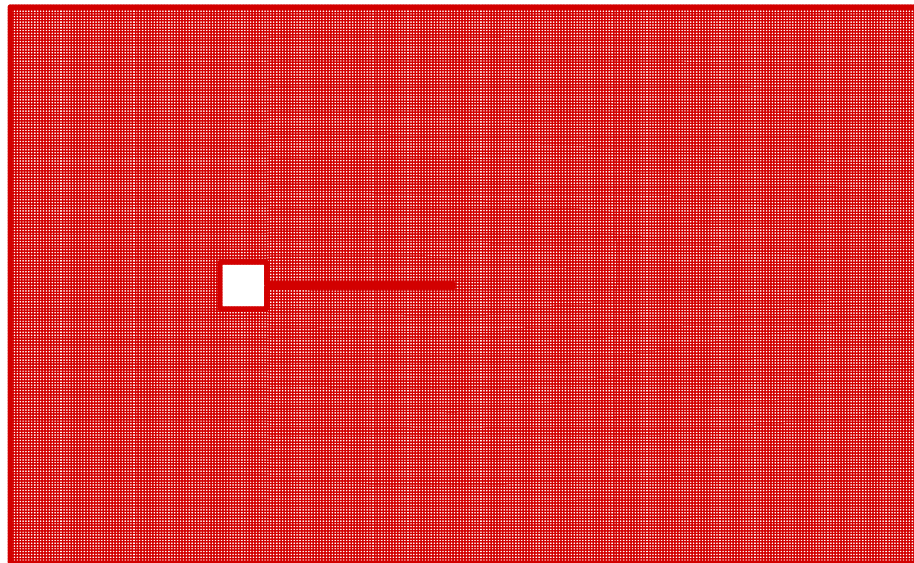
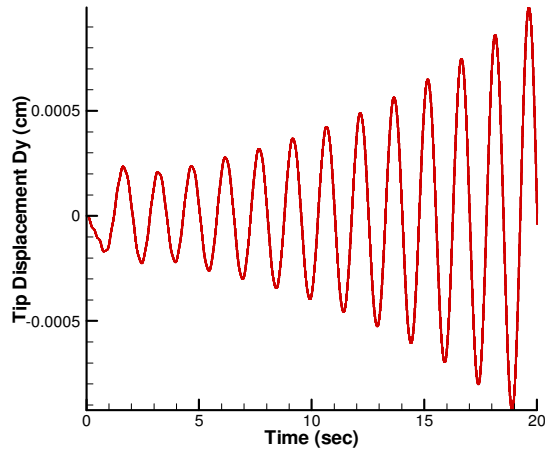
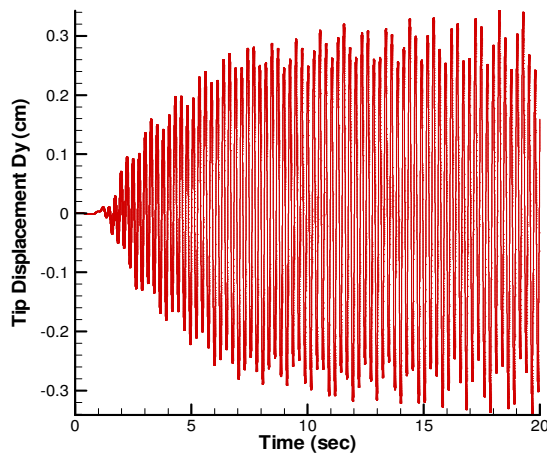


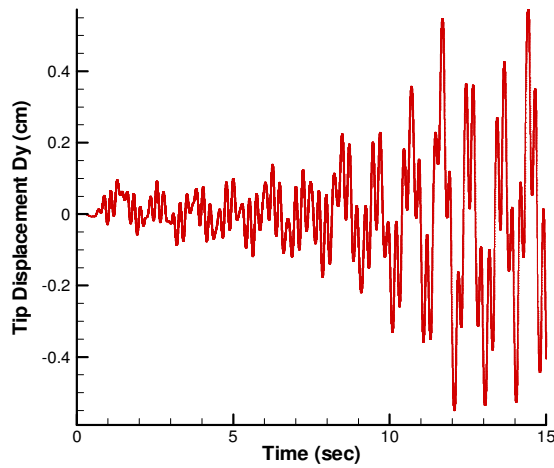
圖 4.20 渦流致動彈性平板之網格圖



(a) $Re = 110$

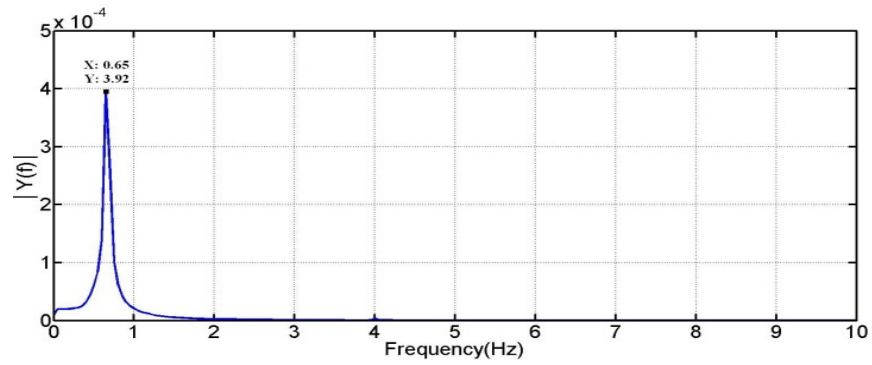


(b) $Re = 204$

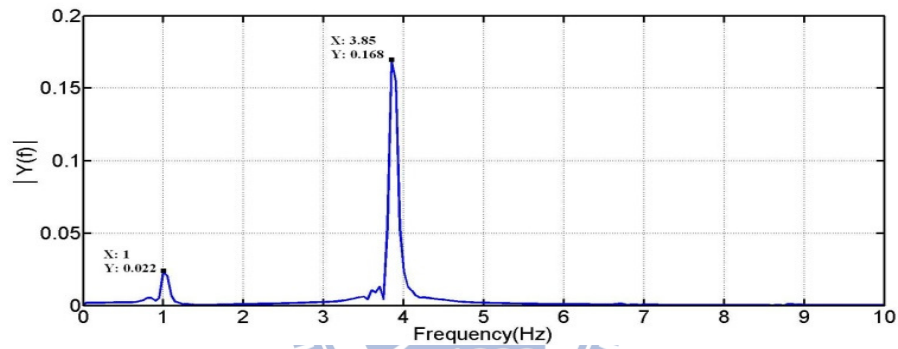


(c) $Re = 290$

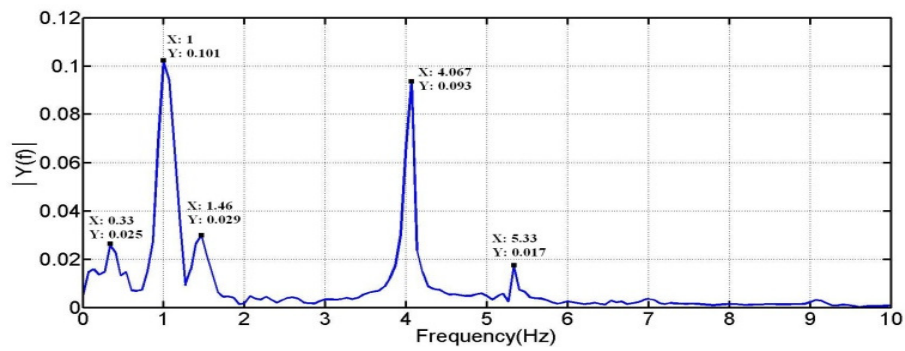
圖 4.21 在不同雷諾數下彈性平板尾端頂點的位移反應



(a) $Re = 110$



(b) $Re = 204$



(c) $Re = 290$

圖 4.22 在不同雷諾數下彈性平板之頻譜圖

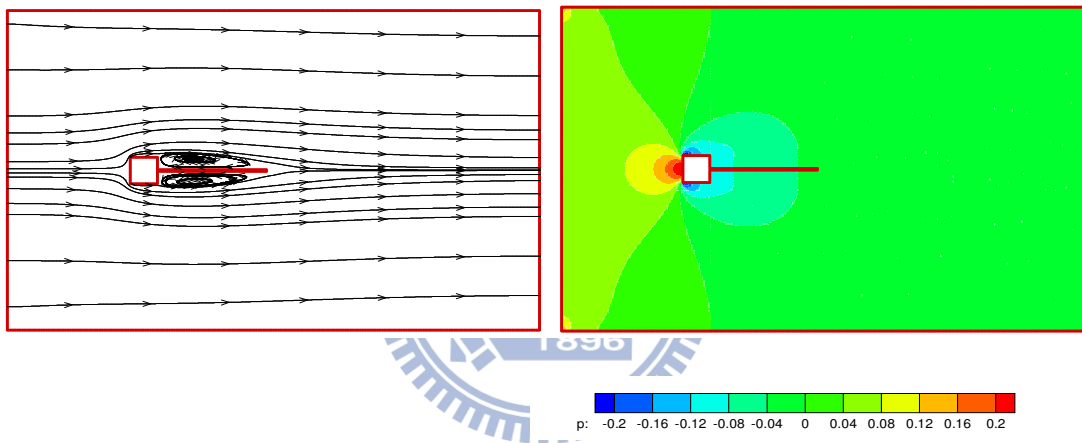


圖 4.23 雷諾數 110，在時間 $t=20(s)$ 時流場流線和壓力圖

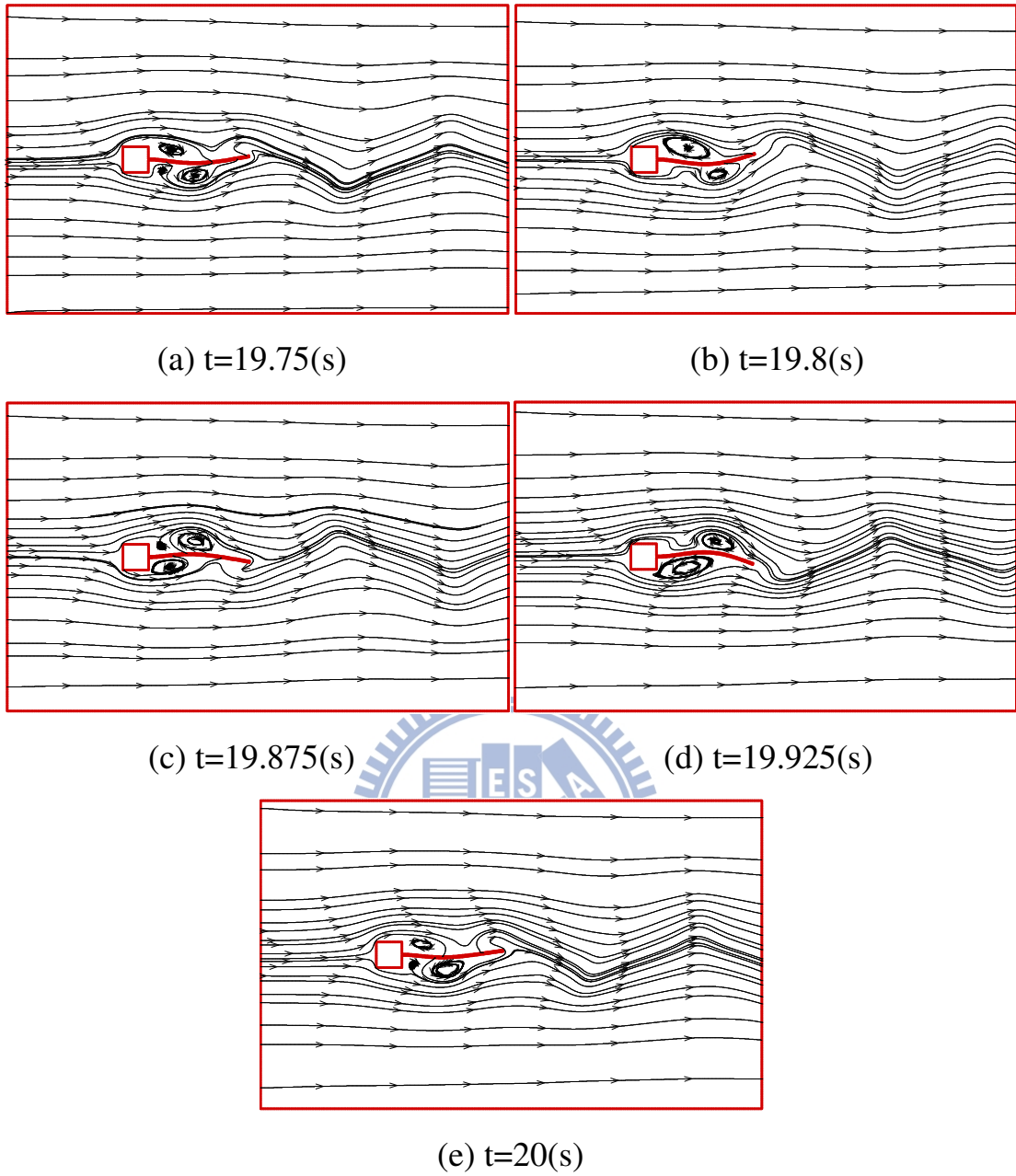


圖 4.24 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖

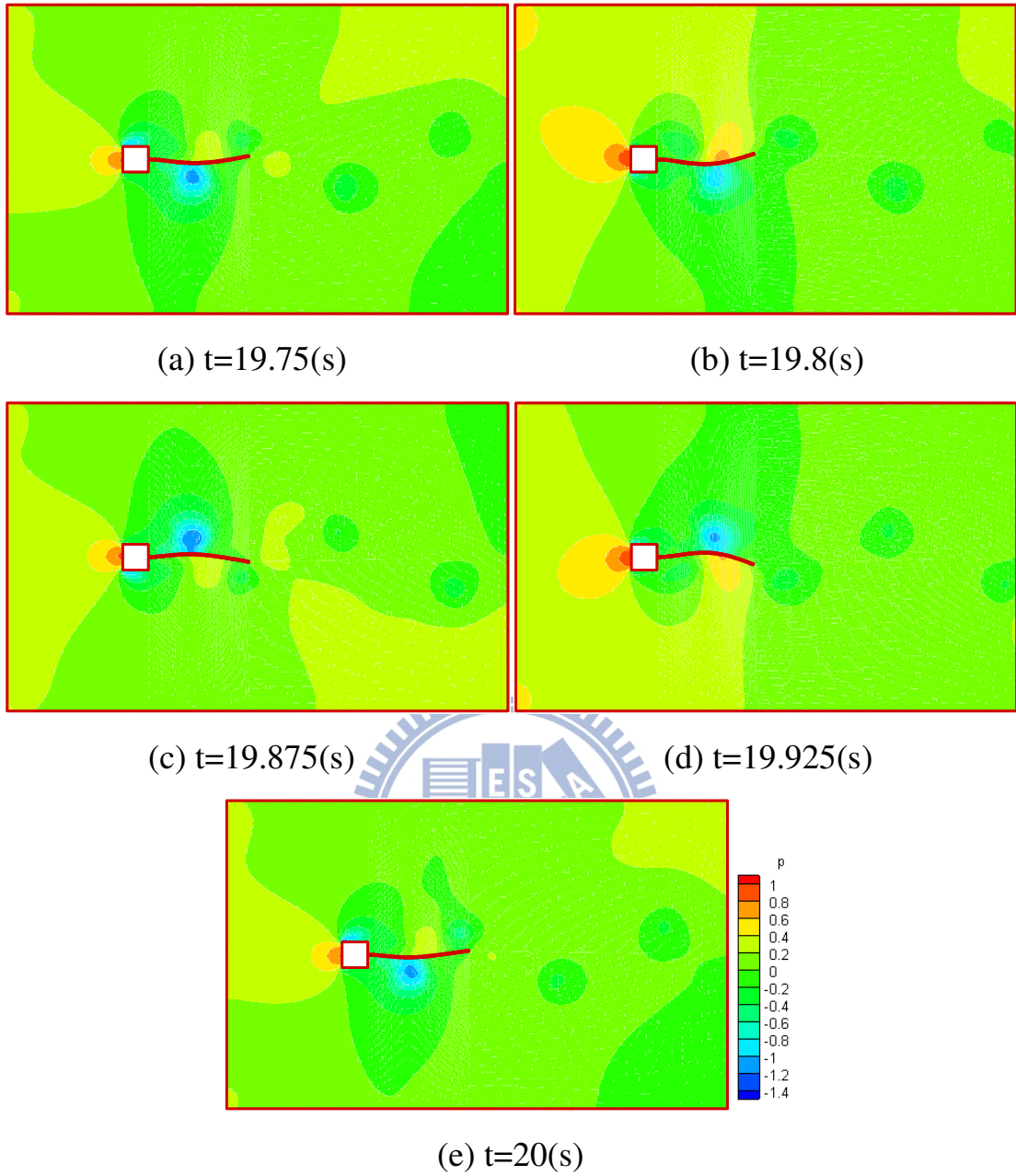


圖 4.25 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖

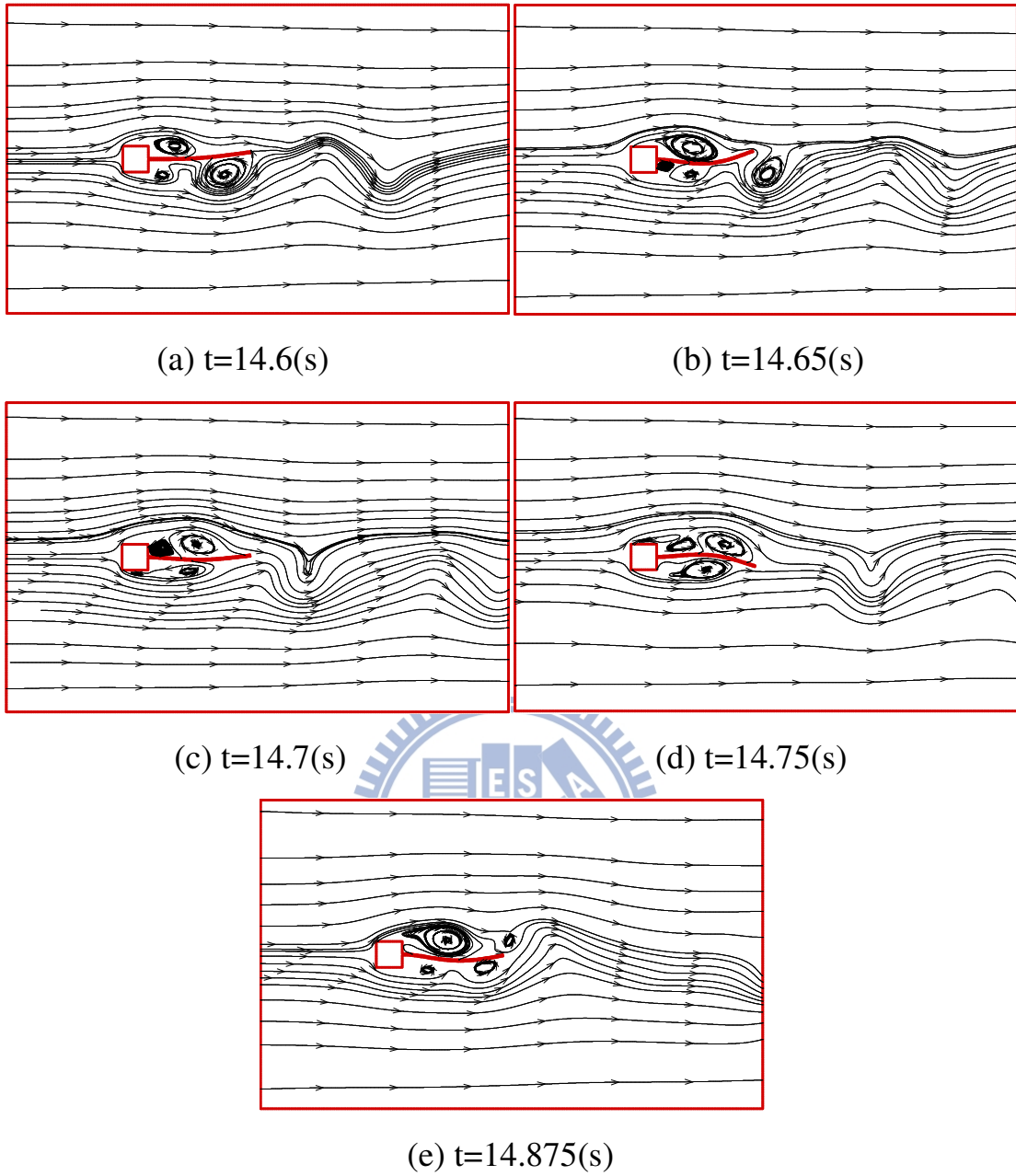


圖 4.26 雷諾數 290，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖

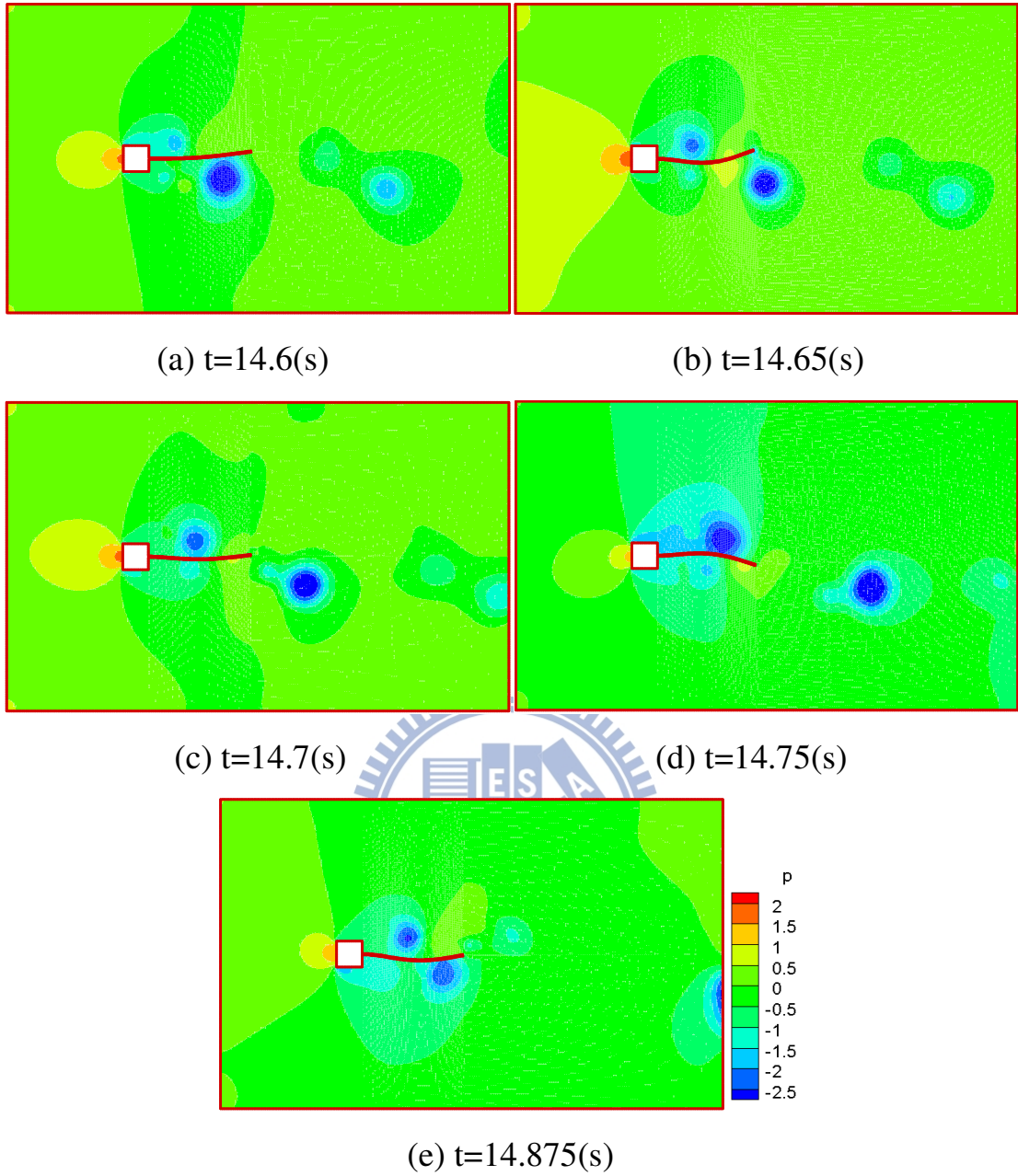


圖 4.27 雷諾數 290，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖