第一章　緒論

1.1 前言

台灣的自然地形環境與地質條件特殊，河川坡陡流急，尤以沖積層沖刷最為明顯，於中上游之集水區與山坡地往往是開採砂石之重要場所，加上過度開發，造成了台灣河川輸沙量嚴重增加，尤其當颱風季節來臨時所帶來豐沛的雨量，常在河川中匯集巨大之洪水衝力與夾帶中上游之巨石衝擊，對中下游河床附近有橋墩之橋樑基礎造成劇烈淘刷及侵蝕，帶走原作為穩固基礎的砂石和土層，長期以來已造成各大流域之河道高程嚴重下降，週而復始的傷害使得舊有橋基裸露更為嚴重，因而河川橋樑基礎不適於使用淺層的擴大基腳(Spread footing)。

台灣河川土層多以卵礫石夾雜砂質地盤，早期的舊式橋樑在此種地層施打基樁，易使混凝土基樁碰到堅硬地盤時產生斷裂或毀壞，因此在施工上是十分困難的。所以在全套管樁(Steel casing)未問世前，一般大型橋樑於深基礎設計時多以沉箱(Caissons)為主，沉箱之種類有：開口式沉箱(Open caissons)、氣壓式沉箱(Pneumatic caissons)、浮動式沉箱(Floating caissons)，埋置預定深度下，其優點為剛性大、撓度位移小，與土壤接觸面積大，而沉箱為圓筒狀之鋼筋混凝土結構，上有頂版覆蓋、下為底版封底，箱中以砂石或灌水填充增加穩定性，此沉箱基礎為上部結構之地盤承載來源。

民國七十六年所頒布的公路橋樑設計規範才有初步的耐震設計，幾經實驗與研究後，於民國八十七年頒布之公路橋樑設計規範，開始有韌性設計須求，提高早期耐震能力不足的現象。尤以在九二一集集大地震發生後，又將設計地震加速度大幅提昇，所以國人對早期興建的橋樑，提出大多有耐震能力不足的觀點。

橋樑設計規範於多次改良後更能掌握設計理念及安全性，國人漸漸對舊式橋樑在歷經不可抗拒之天然災害(洪水、地震等)後，信心大不如前，因此對舊有橋樑開始進行耐震評估及補強措施，雖舊式的沉箱頂版在耐震能力設計上有不足之虞，但早期對沉箱頂版設計是以撓曲設計方法為主，所以設計的承載力及斷面多在保守範圍內，因此舊式橋樑是否有耐震能力不足或真有補強之需要，實為本論文探討之要點。加上沉箱頂版在修補工程上相當困難，若只有加深頂版厚度做修補勉強可行，但此舉將導致阻水面積之擴大，遭受水利主管單位的反對，亦增添墩基補強工程之難度。

1.2 研究動機與目的

目前沉箱頂版之設計方法是依照樑理論的撓曲行為作設計，但沉箱頂版之剪跨-有效深度比值(a/d)遠小於傳統樑，其受剪力行為之影響非常大，其破壞行為未必是撓曲破壞，有可能是貫穿剪力(Punching shear)破壞，也有可能形成壓拉桿模式(Strut-and-tie)效應，使用現行設計方法就顯得非常保守，因此是否真有耐震能力不足的問題，是一個值得探討的問題。

墩體上部結構最主要的外力為結構體本身的自重及車輛產生的垂直載重，另外因地震、活載重、風力、及溫度變化的作用下也會產生水平力。沉箱基礎的傳力行為是先由墩柱將上部結構的載重加於頂版，再由頂版傳給沉箱主體，經由沉箱主體傳至土壤中而達到穩定狀態。在沉箱中雖有回填砂石料，初期施工完畢之頂版底部與回填砂石之接觸面(內環面)是具有承載能力，但沉箱中的砂石會隨著時間累積會出現沉陷情形，除了在頂版底部外環面與沉箱接合處具有支承力外，內環面將因砂石下陷形成懸空狀態，若橫斷面來描述其行為，在

版厚度頗深、中央受一載重及兩邊支承端，可以深樑構件以壓拉替模式之公式作計算驗証，因此頂版為本論文討論之重點。

舊式的橋樑是使用舊設計準則，對橋樑簡易設計是否過於保守，沉箱頂版是否有足夠的抗剪、抗撓曲之破壞的能力，須補強與否也是一未知數。因此在上述多種因素下，對固定尺寸的舊式沉箱頂版，在受力面積改變時，鋼筋混凝土材料產生不同的彈、塑性變化，有著值得令人探索及研究的方向，將藉由分析程式將舊式大型頂版做有限元素分析及非線性行為探討。

1.3 研究方法與內容

第一步將以目前設計沉箱頂版之公式設計出此沉箱之斷面及所需的鋼筋比。第二步將以近年來發展出壓拉桿模式之理論，用深樑型式之鋼筋混凝土斷面以壓拉桿行為模式計算之極限承載力。第三步以基礎版設計的貫穿剪力之破壞行計算之極限承載力。第四步以DIANA 程式作此鋼筋混凝土斷面在考慮彈塑性階段下能抵抗之極限承載力，最後將分別以這四種結果作比較。

本論文的研究內容大致可分為第一章泛談研究動機、目的、方法、內容;第二章介紹相關之文獻回顧、應用程式介紹及鋼筋混凝土從線彈性、塑性、非線性開裂破壞之基本力學原理;第三章將以例題(取一簡支樑的實驗結果)數據與程式模擬之分析結果作驗証之比對、沉箱頂版基本假設條件及對 “元素大小” “載重位移量大小”之收斂性分析; 第四章以垂直-位移量及梯形-位移量之兩種載重形式，對沉箱頂版在非線性分析行為之探討，並將分析結果與目前沉箱頂版設計公式、ACI318-02 貫穿剪力公式及壓拉桿模式之公式計算結果作一比對;第五章提出結論及建議。

第二章　程式與混凝土力學之介紹

2.1 文獻回顧

Abdallah, T. and David, H.【1】文中以鋼筋混凝土之結構樑在考量塑性理論行為下施一衝擊載重，於非線性分析時，模擬混凝土為三維實體元素，在加載-卸載時的彈塑性破壞機制，以 Smeared cracking 的拉力軟化方式(tension-softening)，描述混凝土在開裂後尚有部分開裂應力殘留的模擬。文中以一實際尺寸樑作衝擊載重試驗，結果可知在最大衝擊載重下，裂縫的延伸及破壞模式皆與【2】【3】文獻接近。因此可使用鋼筋混凝土結構作衝擊載重之設計。

Moe【4】研究發現鋼筋混凝土版之貫穿剪力強度及撓曲強度有密切關係，當柱尺寸與版厚尺寸比值較小時，鋼筋混凝土版之貫穿剪力強度較高;當鋼筋比維持一定時，若將版的鋼筋集中排列於柱下方，將未能有效增加鋼筋混凝土版之貫穿剪力強度。

Philippe Menetrey【5】於文獻中，以試體大小為 $120^{CM} \times 120^{CM}$ 的八角矩形版，12^{CM} 的版厚，使用不同版內排筋方式，圓版中有四個支撐點，如圖 2-1 所示，以位移控制方式進行版的貫穿剪力試驗。實驗結果可以得到完整的撓曲及貫穿剪力破壞情況，破壞的貫穿圓錐之內部強度大於容許貫穿剪力強度時，版的承載力達極限值，P-Δ之曲線也突然下降，見圖 2-2。對角斜裂縫傾斜的角度通常小於 $20^o \sim 30^o$。開裂傾角大於對角傾斜角度時，P-Δ之曲線會較平和而形成撓曲破壞機制，見圖 2-2。經由力平衡，將貫穿圓錐體之強度推導出計算公式並和實驗結果作比對。

Hallgren M , Mats Bjerke 在【6】中指出目前基礎版的設計方法和規範公式大多以保守範圍內做約略估算，在文中提出墩柱底部對基礎版造成貫穿剪力之破壞和剪跨-版厚比有密切關係，且以實驗數據與2-D 數值(有限元素)模擬分析的結果比對，其基本模型大小以直徑 96 ^{CM} 為的圓形版，版厚 27.5 ^{CM} 見圖 2-3、2-4 的上視及側視圖，探討鋼筋混凝土之圓形基礎版於中央處，受墩柱的軸重後之行為，觀察圖2-5、2-6 之 P-Δ之曲線會因混凝土強度及剪跨-厚度比值有所改變。文中尚研究關於各種參數之調整(例如：剪跨-厚度比、混凝土抗壓強度及抗拉強度、破裂能…等)將影響混凝土極限撓曲強度和貫穿剪力強度之發展，如表 2-1 所示。

Zdenek P. Bazant and Zhiping Cao 在【7】文中採用不同尺寸的鋼筋混凝土版，以類似幾何學理論作貫穿剪力破壞之實驗。假如使用目前的設計公式來討論，剪應力在達破壞時非定值，隨著頂版尺寸的增加而減少。研究貫穿剪力強度對尺寸大小之影響性，較大尺寸的鋼筋混凝土版多因版厚而產生脆性破壞(無韌性)，底部形成均佈開裂現象，由尺寸-影響定律在貫穿剪力強度的變化程度，可作設計公式之改良。此定律也適用於探討撓曲強度破壞是在峰值後緩慢下降趨勢。

林英俊、林欽仁、林世隆【8】文中研究以六十四個高強度混凝土版的試體進行混凝土抗壓強度之探討，及柱斷面長寬比及拉力鋼筋比等參數對高強度混凝土版貫穿強度的影響。依此實驗結果與前人研究的實驗結果，推出對一般強度及高強度混凝土版的貫穿剪力強度之經驗公式，並得到合理預測。

Paramasivam P. , Ahmad I. ,and Mansur M. A. 【9】等人採 14 組以鋼筋混凝土矩形版為主的實驗研究，試體大小為 $120^{CM}\times120^{CM}$ 的矩形版，厚度有 1.5^{CM}、2^{CM}、2.5^{CM}、3^{CM} 不等，試體形狀見圖 2-7 所示，於中央處施載，四周邊緣作部分束制的支承。其影響參數主要有端點束制的自由度、載重面積的尺寸、混凝土的抗壓強度、鋼筋的握裹(降服)強度、版厚等主要影響鋼筋混凝土版在貫穿剪力強度及整體行為變化等的研究。實驗結果顯示對版端部邊緣作束制，基本上會增加強度和勁度，但對主要貫穿剪力強度設定的邊緣條件，對鋼筋混凝土破壞之形狀及位置的影響較小。當參數個別增加時，在裂縫個數及貫穿剪力荷載也相對提昇，如圖 2-8 所示，除了邊緣支撐的厚度。此研究最後以一個等式可計算部分束制之鋼筋混凝土版在貫穿剪力強度的設計。

Bin Mu and Christian Meyer 【10】文中以玻璃或纖維代替鋼筋於混凝土版中施一集中載重，見圖 2-9 所示。於版試體中以隨機分佈一種短的纖維和經排序後的連續長的纖維之相等體積比，以纖維作填充加固材的混凝土試體，分別施以一彎矩力及一軸向的貫穿剪力下，探討對版的體積與形狀的影響。實驗結果顯示長的纖維比短的玻璃纖維在撓曲影響有更好的抗彎效果見圖 2-10 所示，然而分佈的短纖維在抵抗垂直貫穿強度較佳，見圖 2-11 所示。纖維的種類、形狀及體積比皆各別對整體強度有所影響，圓版之破壞型式如圖 2-12 所示。

由上述這些文獻中可知大多以實驗之研究方向的鋼筋混凝土版，其模型結構體的比例遠較實際施工結構體在尺寸較小、版厚較薄

的條件下，改變剪跨-厚度比(Shear space-depth ratio)、材料參數…等作討論。因此本論文中主要將以實際施工結構體大小作分析的模型，此次在沉箱頂版之分析特點與其它文獻之不同處有：頂版厚度大、墩柱直徑大、剪跨比小、支承範圍以面積為單位等假設條件下，考慮非線性行為之有限元素分析。

2.2 DIANA 介紹

DIANA(an acronym for DIsplacement method ANAlyser)。此程式由荷蘭 TNO Building and Construction Research 所研發之 3-D 有限元素分析軟體。由文獻中【11】可知有廣泛的材料、元素和建立圖庫類之資料庫供查尋，並針對混凝土(Concrete)及土壤(Soil)模擬分析的準確性相當高，實為非常優秀的一套土木工程分析軟體。

在歐洲國家的工程顧問公司，已使用此軟體對橋樑設計(Bridge Design)、水壩(Dams)、防波堤(Offshore Platforms)、道路(Road)和軌道設計(Rail Design)、及隧道(Tunneling)等各種土木工程及神戶大地震後，已有許多日本工程師使用 DIANA 做動態載重分析，並給予正面肯定。

2.2.1 功能介紹

土木、機械力學、生物力學、和其它工程問題皆能由 DIANA 程式解決，其中包含範圍：混凝土開裂(Concrete Cracking)、開挖(Excavations)、隧道(Tunneling)、冷卻混凝土(Cooling of Concrete)、塑性分析(Engineering Plastic)、潛變(Creep)、各種支承墊(Various Rubbers)、流動地下水(Groundwater Analysis)、液流結構之影響(Fluid-structure interactions)、溫度材料行為(Temperature-dependent

Material Behavior)、熱傳導(Heat Conduction)、穩定分析(Stability Analysis)、挫曲(Buckling)、動態分析(Phased Analysis)、基礎(Sub-structuring)…等等。

2.2.2 DIANA 內容

此套軟體提供 10 種分析之型式(Analysis Type)、11 種材料模型(Material Model)和 13 類元素型式近 200 多種之結構與流體元素種類(Element Library)等供使用，如表 2-2 所示。

DIANA 提供了 3 種求解方法(Solution Procedure)：

- 解聯立方程式(Solve System of Equations)
- 特徵值分析(Eigenvalue Analysis)
- 次結構分析(Substructuring Analysis)

2.3 混凝土力學行為

2.3.1 彈性行為

在彈性力學中，通常為簡化計算及反應構件的本質，必須做些假設：

(1)連續性假設

假設物體是連續的，無任何空隙。因此物體的位移、應力、應變就會是逐點變化的，皆為座標的單值連續函數。

(2)彈性假設

假設物體是完全彈性，當在恆溫下，物體在任一瞬間的形狀就會完全取決於該瞬間所受的外力，而與過去的受力狀況無關。而且當外力移除後，物體能恢復原來的形狀，簡述為物體服從虎克定律，應力與應變成正比關係。

(3)均勻性假設

假設物體是均勻性的，在物體中任一處皆具有相同的物理性質，其彈性模數(Elastic modulus)和波松比(Poisson’s ratio)都是常數。

(4)等向性假設

假設物體內每一點各個方向的物理和機械性質都相同。

(5)微小變形假設

假設物體的變形是微小的，即物體受力後，節點的位移都遠小於物體的原有尺寸，應變非常小。在考慮物體變形後的平衡狀態時，可用變形前的尺寸來代替變形後的尺寸。

2.3.2 塑性行為

2.3.2.1 基本力學行為

於任何構件在受力進入塑性階段後，原先彈性分析的結果便不再適用，需以大變位(Total Lagrangian)的原理為主，近年來著重塑性分析的趨勢，例如卸載後之永久變形及殘留應力，塑性分析與彈性分析之異同比較如表 2-3 所示：

(1)單軸載重下行為反應

在微量加載時，混凝土的微裂縫(Micro-crack)會因水泥本身易產生的水化、乾縮、析離等作用所造成的，其應力-應變關係近似直線，可視為線彈性來處理。隨著外力增加，混凝土與鋼筋間會出現應力集中形成握裹開裂(Bond crack)，由原裂縫開始延伸至水泥砂漿，同時也會有新的裂縫(Mortar crack)，其應力-應變曲線的斜率逐漸減少，即進入塑性範圍。當壓應力大於臨界點後，混凝土因裂縫長度達到臨界長度，保持外力不變，裂縫仍會續延伸，直至破壞。

(2)雙軸載重下行為反應

混凝土結構承受雙軸應力作用之機會甚多，近年來許多混凝土受雙軸作用之探討均集中在混凝土強度、變形特性及微裂縫行為等，對混凝土試體而言，側向壓力可視為圍壓，此圍束作用可提高抗壓強度，【12】實驗中可見混凝土之韌性(Ductility)隨其應力狀態而不同，其開裂壓應變約為 0.003，張應變則為 0.0002~0.0004，雙軸壓應力之韌性大於單軸壓應力。當壓應力持續增加達破壞點時，體積產生非彈性增加，此現象即稱為膨脹(Dilatancy)。此階段通常伴隨大量的微裂紋。

(3)三軸載重下行為反應

由雙軸作用顯示，混凝土強度與韌性均明顯提高。於三軸作用下應力-應變韌性行為更為顯著，可以圍束作用模式探討。混凝土承受側向壓力，可防止微裂縫(Micro-crack)的成長，因而增加其強度和極限應變，使得韌性大為提昇，通常在側向壓力使用模式可分為兩種：

1.主動壓力：常見以油壓方式對混凝土施以側向壓力。

2.被動壓力：多以箍筋之束制模式。

2.3.2.2 破壞曲面特性

文獻【13】混凝土達破壞時，其應力狀態可用下列函數表示

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \tag{2-1}$$

由(2-1)式在三維度應力空間($\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$)形成的曲面稱為破壞曲面(Failure surface)，大部分皆以破壞曲面在偏差平面(Deviatoric plane)上的形狀及子午面(Meridian plane)上的經線來描述。偏差平面上的形狀是指破壞曲面與垂直於靜水壓軸(Hydro-static axis)的平面之交線，而經線則是指破壞曲面與固定相似角(Angle of similarity)θ 的子

午面所形成的交線。

混凝土破壞曲面在偏差平面上的形狀特性如下：

(1) 曲線是(smooth)平滑的。

(2) 曲線是(convex)凸面的。

(3) 曲線在張力與低靜水壓下近似三角形，當靜水壓漸增時則逐漸變成圓形。

2.3.2.3 破壞準則

文獻【13】中提到混凝土在承受壓力或張力時展現出極為不同的特性行為，在低圍壓作用下，混凝土行為呈現脆性狀態，反之於高圍壓作用下，混凝土將能展現出類似金屬般之韌性行為。因此，運用塑性理論對鋼筋混凝土材料進行模擬時，破壞準則的選擇須考慮其適合性。

Von Mises 和 Tresca 破壞準則是歸於單一參數的破壞準則，在早期因混凝土材料之研究和試驗資料不足，因此這兩種破壞準則並無法精確的描述混凝土破壞曲面的特性。Von Mises 破壞準則被廣泛地應用於金屬材料，例如：鋼筋、鋼骨等，此材料破壞是由剪應力(Octahedral Shearing Stress)所引起，與平均應力(Mean Stress)無關，因而不適用於粒狀(Granular)材料，如混凝土及砂等，其圖形在偏差平面上為圓形，而在子午面上為一直線。

Drucker 及 Prager 於 1952 年提出考慮平均應力的影響之破壞準則，經實驗結果得知破壞曲面所具有的特性比較後，仍有兩項缺點，一為在偏差平面上保持圓形，二在子午面上仍為直線。

基於不斷地研究與試驗結果，各種不同的破壞準則陸續被提出來，如表所示為各種破壞準則的特性及演進作一統計與比較。於表

2-1 中可得知在後期更多良好的準則被提出，相對地其關係式較複雜，且決定破壞曲面形狀所須材料參數由原先的單個增至 2-5 個不等。

破壞準則發展至目前為止已較能完整描述混凝土破壞曲面的行為，已無必要再仔細畫分研究之，接續工作乃在於將此破壞準則應用到整體組合模式的建立面上，以發展出適合任何應力狀態下之應力-應變關係式。

2.3.2.4 混凝土塑性模式

以有限元素法對混凝土結構進行非線性分析時，針對材料特性必須選擇正確的組合模式，亦成為影響結果正確性之重要因素。經前人研究結果中可得知許多不同形式的塑性模式相繼而生，如表 2-4 所示。

而 DIANA 提供了參考選用項目有 Tresca or Von Mises、Mohr-Coulomb or Drucker-Prager、Rankine Principal stress (Rankine、Rankine / Von Mises、Rankine/ Drucker-Prager、Hardening/Softening)、Modified Mohr-Coulomb…等多種塑性降服準則。

隨著混凝土應用範圍的擴大，其非線性行為分析變得更重要，因此利用數學模式建立材料行為的組成律，並配合電腦作有限元素法之網格分析。在混凝土承受多軸載重時，不能只由單軸拉力及壓力來決定預測行為，欲分析塑性行為必須先確定混凝土之破壞準則，通常混凝土的破壞依其延性(Ductility)及脆性(Brittle)特性可分為壓力破壞(Compression failure)和拉力破壞(Tension failure)兩種型式。

張力破壞準則定義為大裂縫形成並在垂直於裂縫方向失去張力強度，而在壓力破壞準則定義為破壞發生時產生許多微細裂縫，混凝土完全失去強度，如圖 2-13、2-14 所示。在混凝土進入塑性行為

後，其應變可分為彈性應變ε^{e}和塑性應變ε^{p}兩部份，即

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p} \tag{2-2}$$

(1) Mohr-Coulomb 破壞模式

壓力破壞由 Mohr-Coulomb 的最大剪應力所控制產生的剪斷，會隨著最大主應變垂直的平面劈裂。在拉力破壞情況下，裂縫會沿著垂直最大主應力或最大主應變方向發展，而超額的拉應力及剪應力也隨裂縫的延伸而平衡釋放於周圍材料上。因此裂縫的發展會使材料產生一弱面(連體力學中稱之非等向性)。若以剪力破壞情形會使混凝土材料產生潛在的滑動面形成兩個弱向。

(2) Drucker-Prager 破壞模式

Mohr-Coulomb 破壞曲面呈六角形，不易描述數學模式，因此 Drucker-Prager 建議其 Von Mises 增加靜水壓，使 Mohr-Coulomb 曲線變平滑

當最大剪應力降服時，其主應力可表示為($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$):

$$f(\sigma, k) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \overline{\sigma}(k) \tag{2-3}$$

$\overline{\sigma}(k)$ 函數為單軸降服強度，k 為初始變數。由塑性流法則(plastic flow rule)中之塑性勢能函式 $g \equiv f$ 。

2.3.3 開裂行為

由文獻中【13】說明了對混凝土材料可分為在破壞前(Pre-failure)以彈塑性模式建立，和在考慮破壞後(Post-failure)以有限元素數值分析其行為反應。因混凝土材料性質複雜其破壞模式也有所不同，對有限元素法進行分析時，假如材料於張力-張力區或張力-壓力聯合作用區達到破壞時，則定義為開裂破壞(Cracking)，反之當材料達壓力

-壓力區達破壞時，則定義為壓碎破壞(Crushing)。

(1)開裂破壞(cracking)

對混凝土結構來說，進行有限元素分析時以三種近乎不同的開裂模式提供分析：

1. Smeared-cracking model
2. Discrete-cracking model
3. Fracture-mechanics model

在分析時應考量欲達之目的，從上述三種特殊開裂型式作選擇。一般來說，若欲求整體的載重-變位行為是須忽略實際之開裂模式及局部應力，Smeared-cracking model 是最好的選擇，大部份結構力學應用上都以此種分析為主，當然也能使用 Discrete-cracking model 來了解詳細的局部開裂行為，至於 Fracture-mechanics model 已証實可適用在較為特殊的例子，如：金屬(鋼軌)、陶製品或鋼筋混凝土有限元素動態分析等。單以 Smeared-cracking model 來說，在發生破壞瞬間，是以混凝土應力在拉力−拉力區或拉力−壓力區超過極限值時及底部抗拉鋼筋達降服強度致拉斷後，稱之為開裂破壞，但在未開裂之混凝土區域尚有抗拉、抗剪破壞之強度。

(2)壓碎破壞(crushing)

當裂縫延伸致壓力−壓力區時，混凝土之抗壓面積逐漸縮小，抗壓應力達極限值後，混凝土達壓碎破壞如圖 2-15 所示，假設所有的應力在壓碎的間將應力完全釋放，混凝土不再承受任何應力如圖所示，故將壓碎破壞時之勁度矩陣設為零時 $[D]_c = 0$ ，代入式中後將由$\{\sigma_0\}$應力向量等於釋放的應力值，

如圖 2-16 所示。

$$\{\Delta\sigma\}=\{d\sigma\}-\{\sigma_0\}=[D]_c\{d\varepsilon\}-\{\sigma_o\} \tag{2-4}$$

2.3.3.1 Smeared Cracking

【13】假設混凝土開裂後仍保持連體，裂縫存在連體內，在第一道裂縫發生後，混凝土變成非等向性(Orthotropic)或橫向等向性(Transversely Isotropic)情況，開裂後平行的壓桿裂縫間存在剪應力，此剪應力由混凝土裂縫間的摩擦效應或互鎖效應提供。

無限數值分析將 Smeared-cracking 當成一種連續開裂型式，若以有限元素來解釋，是取一小部分斷面元素，此斷面之裂縫呈平行狀。

對於其它未開裂的混凝土，材仍具等向性的，可由部分切斷面推導基本的增量矩陣。在裂縫發生後，混凝土變成非等向性材料，就必須推導一個新的增值關係。已發展完成的正切材料矩陣(Tangent-Material Stiffness)或正切彈性矩陣(Tangent-Elasticity Stiffness)[D]。基於上述，將以平面應力問題為例推導出開裂後的應力-應變關係式 (相對於圖 2-17 的 n 及 t 軸)

$$\begin{bmatrix}\Delta\sigma_n\\ \Delta\sigma_t\\ \Delta\tau\end{bmatrix}=[D_t]\begin{pmatrix}\Delta\varepsilon_n\\ \Delta\varepsilon_t\\ \Delta\gamma\end{pmatrix} \tag{2-5}$$

正切勁度矩陣可定義為

$$[D_t]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & 0 & \beta G\end{pmatrix} \tag{2-6}$$

橫向應變 $$\Delta\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}\Delta\sigma_t \tag{2-7}$$

對混凝土抗壓軟化效應，係指鋼筋混凝土結構中，混凝土受拉開裂後，其裂縫間之局部應力高於平均應力，造成混凝土平均的強度與勁度之衰減，因此在結構分析中所採用的應力-應變關係，應較圓柱試體的單軸抗壓強度來的軟些，所以稱為軟化材料組成律，將由拉力切斷、拉力軟化之關係、抗剪效應作分析時在應用上之簡單介紹。

(1) 拉力切斷 (Tension Cut-off)

一般混凝土在載重作用下，受拉切斷之定義也以混凝土抗拉強度及抗壓強度為主。

(2) 拉力軟化之關係(Tension Softening Relations)

在自然方向由開裂應力σ_{nn}^{cr}及開裂應變ε_{nn}^{cr}組合之關係，函式如下

$$\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) = f_t y(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}}) \quad (2\text{-}8)$$

其f_t拉力強度和$\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$極限開裂應變。可由$y(\ldots)$函式繪出實際 softening 圖形。且拉力強度和極限應變破裂能可在 DIANA 程式同時進行分析。混凝土的軟化行為在限制條件上，經由同等長度或開裂寬度h來決定 Mode-I 破裂勢能 G_f^I 值，由關係式可得知

$$G_f^I = h\int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} \sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (2\text{-}9)$$

將(2-8)代入(2-9)結果可得 $G_f^I = hf_t\int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} r(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}})d\varepsilon_{nn}^{cr}$ (2-10)

假設f_t為定值，將ε_{nn}^{cr}變數改寫成 $x = \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}}$ (2-11)

當$d\varepsilon_{nn}^{cr} = \varepsilon_{nn.ult}^{cr}\,dx$時，其轉換後如下

$$G_f^I = hf_t(\int_{x=0}^{x=\infty} r(x)dx)\varepsilon_{nn.ult}^{cr} \quad (2\text{-}12)$$

在正確的假設$\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$為有限值，最後可表示為 $\varepsilon_{nn.ult}^{cr} = \frac{1}{\alpha}\times\frac{G_f^I}{hf_t}$ (2-14)

其α值經積分後得 $\alpha = \int_{x=0}^{x=\infty} r(x)dx$ (2-15)

以混凝土拉力軟化模式如下列：(附錄一)

- 脆性開裂(Brittle Cracking)：(a)
- 線性軟化(Linear Softening)：(b)
- 多向性軟化(Multilinear Softening)：(c)
- 非線性軟化(Nonlinear Softening)：(d)、(e)

(3) 抗剪效應 (Shear Retention Relations)

(i)Full Shear Retention

剪彈性模數 G 將不降低，且$\beta=1$時，意指正切開裂之剪力勁度為無限大

$$D^{II}_{secant}=\infty \tag{2-16}$$

此為閉合開裂的情形。

(ii)Constant Shear Retention

由降低剪力勁度及$\beta\leq 1$時

$$D^{II}_{secant}=\frac{\beta}{1-\beta}G \tag{2-17}$$

此為開口開裂的情形。

2.3.3.2 Total Strain Crack Models

【11】分別描述拉力行為與壓力行為之應力-應變的關係，可將材料預定發展為開裂或壓碎狀態，分析時可分別定義出一種為可用範圍情況(Serviceability limit state)、另一種為極限範圍情況(Ultimate limit state)。在一個增量迭代解法中，例如以Newton-Raphson 迭代步驟，首先以內部應力與外部載重之間達到平衡，再定義勁度矩陣達平衡。於 DIANA 程式中以最接近的函式來描述勁度矩陣：正切勁度矩陣(Tangent stiffness matrix)與正割勁度矩陣(Secant stiffness matrix)。

將軟化組成律應用於桁架模型，加上平面莫爾圓應變諧和律，基本上假設混凝土主應力與主應變軸一致，因混凝土抗拉開裂後之

應力不連續，會使得混凝土在開裂後隨著鋼筋降服主應力應變軸轉動，相當於裂縫或壓桿傾斜角度會隨載重而轉動，也可預測對角開裂鋼筋混凝土平版元素之載重位移曲線，文獻【14】稱之為「轉動角度之軟化桁架模型」(Rotating angle softened truss model,RA-STM)

若以「固定度角之軟化桁架模型」 (Fixed angle softened truss model,FA-STM)，文獻中【15】其假壓桿始終平行混凝土初始開裂角度，開裂後平行的壓桿裂縫間存在剪應力，此剪應力由混凝土裂縫間的摩擦效應或互鎖效應提供，此軟化組成律除了混凝土抗壓、混凝土抗拉、鋼筋之外，還需增加混凝土受剪應力-應變關係，此法觀念作分析較為複雜。

(1)拉力行為(Tensile behavior)

於鋼筋混凝土之拉力行為可用不同的方法描述，對於 Total strain crack models 有四種軟化之破裂能函數須定義：線性軟化曲線(Linear softening curve)、指數軟化曲線(Exponential softening curve)、非線性軟化曲線 Reinhardt(Non-linear softening curve)、非線性軟化曲線 Hordijk (Non-linear softening curve)。其它四種較為單純之軟化行為：彈性行為(Elastic behavior)、理想化行為(Ideal behavior)、脆性行為(Brittle behavior)、多線性行為(Multi-linear behavior)等，見附錄二。

(2)剪力行為(Shear behavior)

通常在開裂後剪力勁度(Shear stiffness)會減少，所以只須要具有固定開裂(Fixed crack concept)的特質下定義剪力行為，於程式中將剪力開裂勁度定義為

$$G^{cr} = \beta G \tag{2-18}$$

β為剪力回復係數，範圍大約在$0 \le \beta \le 1$。對轉動開裂(Rotating crack concept)的定義來說可將剪力回復係數假設為 1。

(3)壓力行為(Compressive behavior)

混凝土的壓應力主要是以抗壓行為作依據，當強度及韌性增加時等向應力伴隨著增加。由於側向限制，對等向應力的增加會影響在定義抗壓行為之應力-應變關係，基本由f_c'最大壓應力作降服控制，在 DIANA 程式中以七種壓力降服行為描述：線彈性行為(Elastic behavior)、理想化行為(Ideal behavior)、Thorenfeldt 行為、線性行為(Linear behavior)、多線性行為(Multi-linear behavior)、飽和式行為(Saturation type behavior)、拋物線行為(Parabolic behavior)等，見附錄二。

2.4 六面體等參數單元

圖 2-18(b)是一個在$oxyz$直角座標系中的二十節點曲面六面體元素，已知各節點座標值。用等分該曲面六面體元素各個面的一組曲面進行分割(Mesh)，取這組曲面交匯的中心點作為座標原點，就構成隨著元素形狀而變化的三維曲線自然座標系$o\xi\eta\zeta$，並稱之為局部座標系，把原來的$oxyz$稱為廣域座標系，在該局部座標系中，元素各節點的座標值為 1、-1 或 0。圖(a)為一個採用局部座標系的二十節點六面體元素，它的各節點的座標值也為 1、-1 或 0。

圖 2-18(b)所示的實際元素看成是由圖 2-18(a)的母元素在受力後演變成的形狀。所以實際元素就可以採用與母元素同樣的完全三次模式的形狀函數即

$$N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta-2) \quad (i=1,2,3,4,5,6,7,8)$$

$$N_i(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \qquad (i=9,10,11,12) \tag{2-19}$$

$$N_i(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\zeta_i\zeta)(1+\xi_i\xi) \qquad (i=13,14,15,16)$$

$$N_i(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \qquad (i=17,18,19,20)$$

其位移函數可寫成

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{20}N_i(\xi,\eta,\zeta)u_i$$

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{20}N_i(\xi,\eta,\zeta)v_i \tag{2-20}$$

$$w(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{20}N_i(\xi,\eta,\zeta)w_i$$

利用等參數變換，可得到座標函數

$$x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{20}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i$$

$$y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{20}N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i$$

$$z(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{20}N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i \tag{2-21}$$

$$\{d\}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & & N_2 & 0 & 0 & & N_{20} & 0 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0\\ 0 & 0 & N_1 & & 0 & 0 & N_2 & & 0 & 0 & N_{20}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\w_2\\\vdots\\u_{20}\\v_{20}\\w_{20}\end{Bmatrix}$$

$$=[N]\{q\} \tag{2-22}$$

$$
\{d\}=\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \,|\, & |\, 0 & N_2 & 0 \,|\ldots| & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix}
$$

$$
=[N]\{h\} \tag{2-23}
$$

$[N]$稱為 20 節點曲面六面體元素的形狀函數矩陣、$\{q\}$稱為 20 節點曲面六面體元素的節點位移行矩陣、$\{h\}$稱為 20 節點曲面六面體元素的節點座標行矩陣。

將位移函數代入空間幾何方程，則得

$$
[\varepsilon]=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial z} & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_{20}}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix} \tag{2-24}
$$

簡化為 $\{\varepsilon\}=[B_1 \quad B_2 \quad \ldots \quad B_{20}]\{q\}=[B]\{q\}$ (2-25)

$[B]$為 20 節點曲面來面元素的應變矩陣，而子矩陣為

$$[B_i]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix} \qquad (i=1,2,3...,20) \tag{2-26}$$

由(2-26)式中欲求得應變矩陣，應將各形狀函數對 x,y,z 作偏微分，偏微分後之方程式為：

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}&=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}&=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}&=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{aligned} \tag{2-27}$$

以矩陣形式如下

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix} \tag{2-28}$$

(2-28)式中 $[J]$ 三維矩陣(Jacobian matrix of three-dimension)

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix} \tag{2-29}$$

(2-29)式中的元素可以座標轉換求得，即

$$[J]=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i \\ \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i & \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i \\ \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}x_i & \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}y_i & \sum_{i=1}^{20}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}z_i \end{bmatrix} \tag{2-30}$$

由形狀函數可求得 $\frac{\partial N_i}{\partial \xi},\frac{\partial N_i}{\partial \eta},\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ 之解，再將廣域座標值(x_i, y_i)及$(i=1,2,3...,20)$代入，對式求反矩陣，則可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \qquad (i=1,2,3...,20) \tag{2-31}$$

將(2-31)式中求得的代入子矩陣中，則可求得應變矩陣 $[B]$。

局部座標下的微分體積

$$dV=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta\, d\zeta=|J|\,d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{2-32}$$

將(2-32)式代入單位矩陣的通式

$$[K]=\int_V [B]^T[D][B]dV \tag{2-33}$$

20 節點曲面六面體元素的勁度矩陣

$$[K]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[D][B]|J|\,d\xi d\eta d\zeta \tag{2-34}$$

將(2-34)式以高斯數值積分法運算。

2.5 分析方法

【13】中在分析過程中，當增量很小時，或許誤差不明顯，但當增量稍大，此時求解過程，就須做迭代(Iteration)之處理，以免求解過程，因累積誤差之效果而偏離了正確解。

原方程式：

$$ {}_0^t x_{i,j} = \delta_{ij} + {}_0^t u_{i,j} \tag{2-35} $$

由(2-35)式可寫成：

$$ \int_{0_v} {}_0C_{ijrs}\,{}_0e_{rs}\delta_0 e_{ij}{}^0 dV + \int_{0_v} {}_0^tS_{ij}\delta_0\eta_{ij}{}^0 dV = {}^{t+dt}R - \int_{0_v} {}_0^tS_{ij}\delta_0\varepsilon_{ij}^0 dV \tag{2-36} $$

作迭代之動作後如下：

$$ \int_{0_v} {}_0C_{ijrs}\,{}_0e_{rs}\delta_0 e_{ij}{}^0 dV + \int_{0_v} {}_0^tS_{ij}\delta_0\eta_{ij}{}^0 dV = {}^{t+dt}R - \int_{0_v} {}_0^{t+dt}S_{ij}^{(l-1)}\delta_0^{t+dt}\varepsilon_{ij}^{(l-1)0} dV \tag{2-37} $$

以矩陣式表示為：

$$ \begin{aligned} &\left({}_0^tK_L + {}_0^tK_{NL}\right)\Delta U^{(l)} = {}^{t+dt}R - {}_0^{t+dt}F^{(l-1)} \\ &{}^{t+dt}U^{(l)} = {}^{t+dt}U^{(l-1)} + \Delta U^{(l)} \\ &{}^{t+dt}U^{(0)} = {}^tU \end{aligned} \tag{2-38} $$

${}_0^{t+dt}F^{(l-1)}$ 以是由$\int_{0_v} {}_0^{t+dt}S_{ij}^{(l-1)}\delta_0^{t+dt}\varepsilon_{ij}^{(l-1)0} dV$ 計算得到的，上標l為作迭代之動作，表示應力及應變是由${}^{t+dt}U^{(l)}$計算得到的。

因

$$ \delta_0^{t+dt}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_0 U_{i,j} + \delta_0 U_{i,j} + {}_0^{t+dt}U_{k,i}\delta_0 U_{k,j} + {}_0^{t+dt}U_{k,j}\delta_0 U_{k,i}) \tag{2-39} $$

所以

$$ {}_0^{t+dt}F^{(l)} = \int_{0_v} {}_0^{t+dt}B_L^{(l)} \quad {}_0^{t+dt}\hat{S}^{(l)0} dV \tag{2-40} $$

2.6 收斂準則

【13】收斂準則為於迭代過程中，判定此時之解，是否趨近於真解。收斂準則關係到解之正確性和計算的效應性，假如採用一個不適當的收斂準則或者是容許誤差值定的太大，將影響到精確性，而容許

誤差值定的太小，將導致龐大的計算量，對解的準確性只能達到某一個極限值。大致上來說收斂準則分為三種：

2.6.1 Displacement convergence

第一種以位移作判斷標準：

$$\frac{\| \Delta U_{(l)} \|_2}{\| {}^{t+dt}U \|_2} \le \varepsilon_D \tag{2-41}$$

代表每次迭代所得之位移 $\Delta U_{(l)}$ 總位移之比值是否小於 ε_D，作為判斷其是否收斂之標準。

2.6.2 Force convergence

第二種是以不平衡力作判斷標準：

$$\frac{\| {}^{t+dt}R - {}^{t+dt}F_{(l)} \|_2}{\| {}^{t+dt}R - {}^{t}F \|_2} \le \varepsilon_F \tag{2-42}$$

為每次迭代之不平衡力和增量力之比值是否小於 ε_F，作為判斷其是否收斂之標準。

2.6.3 Energy convergence

第三種是利用不平衡力所做的功作判斷標準：

$$\frac{[\Delta U_{(l)}({}^{t+dt}R - {}^{t+dt}F_{(l)})]}{[\Delta U_{(l)}({}^{t+dt}R - {}^{t}F)]} \le \varepsilon_E \tag{2-43}$$

為每次迭代之不平衡力所作之功和增量力所作之功的比值是否小於 ε_E ，作為判斷其是否收斂之標準。

2.7 混凝土結構之壓拉桿

直到目前為止的研究【17】，已有運用在深梁之解釋原理，通常以一個合理的鋼筋混凝土結構設計，必須以材料的力學性質為基礎，混凝土材料具有高抗壓強度和低抗拉強度的特性，因此當混凝土承受拉力荷重時，其拉力區會有開裂，必須靠鋼筋的材料來傳遞拉力。因此藉桁架傳遞載重的觀念，形成鋼筋混凝土結構特有的「壓拉桿模型」(Strut-and-tie model)。Schäfer【16】文中提到深梁之基本抗剪形式有兩條路徑，一個是對角傳遞壓力的直接路徑，另一個是先從角落以壓桿傳至中間的拉桿，再由拉桿帶動另一邊的壓桿傳力至對角的間接路徑，由這兩種路徑同時存在共同抵抗剪力。

一個結構體以拉壓桿作討論時，可分成兩種區域：B 區域代表梁受撓時斷面之平面維持平面的 Bernoulli 假設適用的區域，也可稱為一般梁理論適用的範圍，大多用在細長梁的設計。D 區域是指結構中具有非線性應變場而梁理論不適用的區域，通常在深梁中的區域是以載重中心線到支承反力中心線為 D 區的分佈範圍，以間接路徑中的拉力桿需要配置鋼筋來承擔，在拉桿尚維持在彈性條件下，以此域的抗剪跨深比估計水平或垂直腹筋之拉桿能傳遞的拉力，如圖 2-19 的(a)、(b)所示，因此次分析模型為一單跨構件，且在剪力跨度$a<2h$下所以將頂版受載後假設內部壓拉應力，將會以圖 2-19 (a)作為深梁之壓拉桿行為模式作探討。

第三章 例題驗証及頂版之收斂性分析

3.1 例題驗證

3.1.1 前言

有限元素法分析鋼筋混凝土在非線性之行為，發展至今已有相當多的軟體程式可勝任，在使用此套程式前，為驗証 DIANA 程式對鋼筋混凝土材料在線性及非線性所有行為之準確性，故採文獻【18】中一組實驗數據作數值模擬分析，鋼筋混凝土構件如圖 3-1 所示，鋼筋混凝土為一種複雜的混合材料，材料行為之多變性，由彈性階段進入塑性階段和開裂後之 P-Δ 行為，可由【2】【3】以載重-時間作混凝土在進入非線性時的狀態，本章中也將會對材料參數作組合，對載重-位移曲線將有何不同的影響。

於本章中因 DIANA 提供了 Smeared Cracking 和 Total Strain Crack Model 兩種對混凝土材料開裂後，在進入非線性出現不同的行為作描述，首先對 P-Δ 效應比較其實驗值與分析值之差異性，並且可由 DIANA 分析結果中，對例題進一步做力學行為的探究，例如在不同位移控制下產生之變形行為、混凝土之應力分佈、鋼筋之應力情形及開裂後的行為等的結果。

3.1.2 基本參數說明

此組構件的混凝土材料為波特蘭水泥，支承處在樑左右端往內 250^{mm} 處，左邊為固定端，右邊為鉸支端，就以 DIANA 程式模擬此一 3D 鋼筋混凝土樑如圖 3-2 所示，上圖為座標組成的點線體，紅色細線為支承處，粉紅色為控制載重位移處，如圖 3-2 作為有限元素分析須將構件切割成網格的形式大小。

試體之斷面尺寸：

樑長度為 $\ell = 3600^{MM}$

斷面尺寸為 $360^{MM} \times 240^{MM}$

混凝土保護層 10^{MM}

樑中央每次加載位移量 10^{MM}

混凝土抗壓強度 $f_c^{'}$=48.5 MPa

混凝土楊氏模數 E_c=32719 MPa

鋼筋降服強度 f_y=420 MPa

鋼筋楊氏模數 E_s=200000 MPa

抗壓鋼筋 $A_c = 2-469.13^{MM^2}$ 及 $1-360.35^{MM^2}$

抗拉鋼筋 $A_t = 2-272.89^{MM^2}$ 及 $1-112.72^{MM^2}$

圍束鋼筋(箍筋) $A_{hoop} = 71.33^{MM^2}$ @12^{cm}

3.1.3 分析程序及使用元素說明

在 DIANA 程式基本考量之操作順序：構件模型的建立、材料性質的設定、位移載重的施加、邊界條件的架設、切割網格的大小、元素種類的選擇…等，以上作為有限元素分析之基本條件，在這些步驟完成後，即可寫出 Input file(.dat)，後續再建立分析之 Command file(.com)，其時收斂性的準確性將影響結果之正確性，因此在元素大小及載重位移量須謹慎選用，最後 Output 可由圖形界面(Femview)、列表顯示值(Tabulate)、數據庫(Database)三種型式輸出結果。

此構架是採用 Solid element CHX60 是由 20 個點(Node)組合的均質參數的方形實體元素(Isotropic Parametric Solid Brick Element)，以二十節點曲面六面體此形狀元素對構架模型切割

(Mesh)，整體以網格分割後將得到 6493 節點(Nodes)和 1200 元素(Elements)。

3.1.4 分析模式

以有限元素法對混凝土結構進行非線性分析時，【11】文中說明針對材料特性必須選擇適當的分析模式，亦成為影響結果正確性之重要因素。

3.1.4.1 Smeared Cracking 分析模式【11】

(1)混凝土使用參數

使用之參數有基本性質有楊氏模數E_c、波松比μ，塑性降服，應變硬化準則採用 Drucker-Prager 如圖 3-3、3-4 所示，開裂參數以 Smeared Cracking 為主，拉力切斷(Tension Cut-off)(圖 3-5a)中的抗拉強度及抗壓強度$f_t = 4.85 \,{}^{N}\!/\!{}_{mm^2}$，$f_c = 48.5 \,{}^{N}\!/\!{}_{mm^2}$、拉力軟化(Tension Softening)(圖 3-5b)對鋼筋混凝之極限應變值定義為$\varepsilon_{ult}^{cr} = \dfrac{\sigma_{y,steel}}{E_{steel}} = 0.0019$、定值抗剪強度(Constant Shear Retention)，剪力係數$\beta = 0.2$。

(2)鋼筋使用參數

以鋼筋之楊氏模數E_s、波松比μ，鋼筋降服準則採 Von-Mises (金屬類分析多以此假設)及降服強度。

3.1.4.2 Total Strain Crack 分析模式【11】

(1)混凝土使用參數

基本性質楊氏模數E_c、波松比μ，此種材料於開裂參數是以 Total Strain Crack 考慮 Crushing 行為，來定義抗拉行為(Behavior in tension)使用 Hordijk 之抗拉軟化模式，其破裂能量

(Fracture Energy)是經元素開裂帶寬度作計算(在 DIANA 中是以元素的面積或體積) $G_f = 0.09$，抗拉強度 $f_t = 4.85 \, N/mm^2$，如圖 3-6 所示、抗壓行為(Behavior in compression)以拋物線(Parabolic)之抗壓碎裂模式，抗壓破裂能量 $G_c = 5$，抗壓強度為 $f_c = 48.5 \, N/mm^2$，如圖 3-6 所示、剪力行為之剪力回復係數 $\beta = 0.01$、側向圍束(Lateral Influence)可提高抗壓強度，因此使用 VC1993、VECCHI 標準規範內定值。

(2)鋼筋使用參數

同第一種材料之鋼筋性質。

3.2 例題之 P-∆效應

在 3.1.4 節中對混凝土在非線性階段使用兩種分析模式，以這兩種分析模式與實驗數據做一比較並選出最符合實際狀況之分析模式。

3.2.1 載重-位移之探討

由【18】中實驗曲線可知最大外加載重 $P_{\max} = 319.369^{KN}$ 、降服載重變位 $\Delta_y = 15.056^{MM}$ 、最大載重變位 $\Delta_{\max} = 110.3^{MM}$ ，其破壞模式有 1.壓力筋挫屈 2.壓力區混凝土碎裂 3.拉力筋軸向發展之握裹裂縫，在圖 3-7 可見實驗曲線因開裂後的混凝土無法再承受拉應力，所以在中性軸以下的梁斷面拉應力將改由鋼筋承受，使載重-位移曲線上升斜率改變。

鋼筋混凝土樑定義兩種材料型式之組合，於 DIANA 程式分析後可由基本之載重-變位曲線，配合實驗值來判別，第一種分析模式由混凝土(Drucker 和 Smeared Cracking)配合鋼筋(Von Mises)模擬材料由零位移載重量到混凝土開裂時，此階段之關係曲線近似直線，但與實驗曲線有誤差，且繼續增加位移載重量到鋼筋達降服

後，混凝土以 Smeared Cracking 方式來模擬混凝土開裂後軟化行為，在底部受拉處裂縫產生後，拉力側之混凝土強度暨勁度部分減少後，在開裂後將會在塑性階段中維持一定之承載力見圖 3-8 所示。

第二種分析模式以 Total strain crack model 的開裂準則，此準則能模擬出鋼筋混凝土樑在混凝土材料達初始開裂載重時，底部將產生裂縫，在樑中央隨著位移載重量增加，而鋼筋假設條件之理想化降服狀態，鋼筋與混凝土之間的握裹滑移(Bond slip)在此並未考量，因此無產生細微裂縫和圍束效應情形，所以在圖 3-8 中 Total Strain Crack model 分析無法提高韌性之因素，但在圖中得以証明鋼筋混凝土在初始開裂強度與實驗值吻合。

3.2.2 小結

在 3.2.1 節中討論出以 Total Strain Crack model 分析模式可求出當鋼筋混凝土受載後，可達極限承載強度後產生壓碎破壞，承載強度會隨之下降或緩慢下降之曲線，所以在往後沉箱頂版之分析將以此分析模式，為混凝土在塑性階段的基本定義模式。

3.3 例驗之力學行為

由圖 3-8 可見鋼筋混凝土樑在 DIANA 程式中，將有內部鋼筋配置與網格圖的兩種顯示模式。

3.3.1 不同位移控制下產生之變形行為

此例以 y 方向作位移控制，由圖 3-8 中之 Total Strain Crack model 曲線可得知在 20.5^{MM} 會達到最大極限載重值 274 kN，對圖 3-9a 可看出實際變位量 2.02^{MM} 時變形尚維持於線彈性範內。圖 3-9b 則剛好是變位量在 20.5^{MM} 達極限承載力降服，鋼筋混凝土樑頂部及底部已出現較大變位量。圖 3-9c、圖 3-9d 可看出在進入非線性狀態，

其變形曲線已呈下降之直線交合狀態，在以拉力軟化行為來看，可推論此樑在底部已呈破裂，當載重變位量愈大，其下降直線交合與擠壓之角度愈大且變形非常明顯，樑頂部已出現擠壓狀態。

3.3.2 混凝土之應力分佈

圖 3-10 為混凝土之應力分佈，參照表 3-1，於載重位移量 2.02 ^{MM}，其壓應力值為 18.6 MPa 和拉應力為 5.3MPa 如圖 3-10a。載重位移量 6 ^{MM}，其壓應力值增為 47.3MPa 和拉應力也增至 6.06MPa 如圖 3-10b。當達到最大極限承載力及位移量在 20.5^{MM} 時其壓應力值最大可達 95.5MPa 和拉應力也增至 22.8MPa 如圖 3-10c，在頂部抗壓處已有兩條線狀的混凝土喪失抗壓強度。

於混凝土進入非線性階段後，當裂縫由底部拉力區漸漸向上延伸，混凝土的有效斷面隨著減少，勁度隨之下降當裂縫進入壓力區後，如圖 3-10 所示，位移量達 140 ^{MM} 此時壓應力值減為 34.9MPa 和拉應力減至 10.2MPa，在勁度值消散及減少的區域，推論混凝土已有部分壓碎(Crushing)，由圖中可知在開裂後大部分混凝土的抗拉應力幾乎消失，只剩支承處頂部範圍，而在頂部受載處之混凝土因抗壓強度失效，已於樑中央頂部呈現圓形碎裂狀。

3.3.3 鋼筋之應力情形

縱向鋼筋配置在靠近受拉面以抵抗拉力，拉力筋的降服強度 500MPa，用來抵抗壓力之壓力筋的降服強度 460MPa，主要是為了減少受壓構材的截面尺寸，由圖 3-11 鋼筋之應力示意圖參照表 3-1，位移量 2.02 ^{MM} 其抗壓鋼筋為 57.7MPa 和抗拉鋼筋值為 97MPa 如圖 3-11a，位移量 6 ^{MM} 其抗壓鋼筋增為 104MPa 和抗拉鋼筋值昇為

293MPa 如圖 3-11b，尚在彈性階段內。

達最大極限載重時，鋼筋於位移量在 20.5^{MM} 時進入降服狀態，其抗壓鋼筋增為 503MPa 和抗拉鋼筋值昇為 513MPa 如圖 3-11c，於混凝土進入非線性開裂後，抗壓及抗拉鋼筋於整體行為來看會漸漸失去強度，可由圖 3-11d 所示在位移量達 140^{MM} 時抗壓鋼筋減為 460MPa 和抗拉鋼筋值在 516MPa，由上述行為可得知，構件達破壞時抗拉鋼筋尚未降服、抗壓鋼筋強度呈現部分減少。

3.3.4 開裂後行為討論

混凝土的剪力破壞之抵抗機制來自：

- 來自主筋的插接作用(Dowel action)
- 沿著斜裂縫骨材間產生互鎖作用
- 由未開裂的混凝土直接傳遞剪力

於鋼筋混凝土梁上施以漸增位移載重量，觀察開裂及破壞過程：

1. 位移由零開始到開裂時之位移

位移量 2.02^{MM} 此階段為線彈性行為，在這階段反力-位移曲線為直線，在拉力側樑底之中央附近發生細小的垂直裂縫，稱之為開裂(Cracking)如圖 3-12 所示，以網格元素為單位，受位移載重加載後，元素會將開裂應變值以色塊圖層方式表示，此階段大都在中性軸以下，因此中性軸以上之抗壓剪拉破壞能力尚足，當載重持續增加時將由多處已開裂元素塊向上擴展，進入下一個階段。

2. 初始開裂階段

鋼筋混凝土梁在位移量在 20.5^{MM} 時達塑性階段時，裂縫分佈

範圍於樑底已由拉力側中央小部分段延伸至兩端支承點處，以底部中央處之開裂應變值最大為 0.00658，超過抗拉應力產生斜裂縫的元素，已在此階段超過中性軸向上延伸至樑頂壓力側，頂部受壓側之受壓應變為 0.00197，如圖 3-13 所示。

3. 壓力區混凝土碎裂階段

鋼筋混凝土樑在位移載重量繼續增加，超過極限承載階段時，裂縫分佈範圍於樑底已由拉力側中央部分延伸至兩端支承點處，位移量達 140^{MM} 以底部中央處之開裂應變值最大為 0.0739，超過抗拉應力產生斜裂縫的元素，頂部受壓側之抗壓應變為 0.0295，此階段的沉箱頂版頂面已有部分元素達壓碎破壞，如圖 3-14 所示。

3.4 例題驗証之小結

作完此例之有限元素法分析後，對此軟體在鋼筋混凝土在非線性結果中，對整體載重-變位曲線能作到開裂及碎裂的程度，且能觀察每一個載重位移量的混凝土的變形、主應力、開裂狀態及鋼筋的降服行為，與基本物理行為來探討其可信度頗高。

因此例題有實驗結果之數據可供參考，所以在分析後之初始承載力與實驗值之初始承載力，誤差約在 1%左右，且載重-變位曲線與預期結果頗為接近。接下來的沉箱頂版分析並無實驗數據與經驗作交叉驗証，在分析時須有相當多未知因素須考量，而且前人研究多以小型試體作實驗與分析，與實際運用上較有相當的誤差，因此此次模擬分析是以構築於橋墩下的沉箱頂版，將以實際尺寸大小並

以實體元素進行非線性行為模擬與探討，首先為減少分析計算所累積的誤差，因此收斂性分析的角色變得極為重要。

3.5 沉箱頂版設計

以表 3-1 中之所有數值作設計檢核來源，沉箱頂版應按兩種載重型態加以考慮，以參考文獻【19】中之設計準則，檢核第一種為橋墩混凝土澆灌後尚未凝固以前，以橋墩軀體重量作用於簡支承之頂版加以考慮，第二種為全部完工後，考慮頂版與橋墩為整體結構，而頂版為固定於墩體之懸臂版，受沉箱壁支承處之外力作用，如圖 3-15、3-16 平面圖及立面圖所示，計算如下：

3.5.1 沉箱頂版設計檢核

- 第一種載重型態

圓版直徑=7.2 ^{M}

圓版半徑=3.6 ^{M}

墩柱直徑=3 ^{M}

頂版厚=3 ^{M}

保護層=10 ^{CM}

No=墩重(含墩帽)=300 ^{T}

假設 No 均勻分佈於圓版上

則 $\omega_1 = \dfrac{N_0}{\pi r^2} = \dfrac{300}{3.14 \times (3.6)^2} \cong 7.37^{T/M^2}$

頂版重量 $\omega_2 = 2.4 \times 2^{T/M^2}$

$\therefore \sum \omega = \omega_1 + \omega_2 = 7.37 + 4.8 = 12.17^{T/M^2}$

混凝土波松比 $\boldsymbol{\mu} \fallingdotseq 0.167$

圓版跨徑 D=7.2-0.9=6.3^{M}

則簡支承之圓版最大彎矩及剪力為：

$M_{\max} = \dfrac{3+\mu}{16} \times \sum \omega \times D^2 = 95.59^{T-M}$

$V_{\max}$ = 周邊反力= $\dfrac{\text{圓版之全部載重}}{\text{支承中心圓周長}} = \dfrac{3.14 \times 3.6^2 \times 7.37}{2 \times 3.14 \times 3.15} \cong 25.03^{T/M}$

- 第二種載重型態

常時：墩軀和上部結構靜重=2500^T

活載重=$(0.96 \times 50 + 11.8) \times 4 \times 0.9 = 215.28^T$

沉箱上部載重 No=墩重+上部結構靜重+活載重=2725.28^T

(四車道、跨徑 50^M，採用車道載重，不計衝擊)

假設 No 均勻分佈於圓版上

則 $\omega_1 = \dfrac{N_0}{\pi r^2} = \dfrac{3215.28}{3.14 \times (3.6)^2} \cong 66.69^{T/M^2}$

頂版重量 $\omega_2 = 2.4 \times 2 = 4.8^{T/M^2}$

$\therefore \sum \omega = \omega_1 + \omega_2 = 66.69 + 4.8 = 71.49^{T/M^2}$

圓版全部載重=$(\pi \times r^2 \times \sum \omega) = 2910.7^T$

支承中心之圓周長=$2 \times \pi \times \dfrac{D}{2} = 19.79^M$

∴周邊反力 R=$\dfrac{2910.7}{19.79} = 147.06^{T/M}$

若取臂長最大之中心部份每公尺寬度計算之

則 $\ell = \dfrac{D}{2} - \dfrac{\text{墩柱直徑}}{2} = 1.65^M$

$\therefore M = R \times \ell = 242.66^{T-M}$

地震時：

頂版底部垂直力：$N = 3000 \times \pi \times (3.6)^2 \times 2.4 = 2597.72^T$

頂版底部彎曲力矩：

$$M = 2597.72 + 375 \times 2 + \pi \times (3.6)^2 \times 2.4 \times 0.15 \times 1.0 = 3236.26^{T-M}$$

頂版支承面積：$A = \pi \times \left(3.6^2 - 2.7^2\right) = 17.81^{M^2}$

頂版支承面之斷面係數：$S = \dfrac{\pi}{32} \times \dfrac{(7.2)^4 - (5.4)^4}{7.2} = 25.05^{M^2}$

∴支承面外緣之最大應力：$\delta = \dfrac{N}{A} \pm \dfrac{M}{S} = 16.64 \pm 275.03^{T/M^2}$

支承面之單位長反力可由最大壓應力求得，即：

$$R = 275.03 \times 0.9 = 247.53^{T/M}$$

$$臂長\ \ell = \frac{(6.3-3)}{2} = 1.65^{M}$$

$$\therefore M_{\max} = R \times \ell = 408.42^{T-M}$$

➢ 斷面應力校核

(i) 由上式中可得知斷面設計由第二種載重型態之地震時所控制

$$n = \frac{E_S}{E_C} = 10$$

design unit b=100 ^{CM}

cover $d' = 10^{CM}$

concrete 至 cover 距 $d = 290^{CM}$

$$\frac{d'}{d} = 0.0345$$

Design 時 Bottom steel use

$$\#10 - A = 8.17^{CM^2} \ @15^{CM}，則 A_{bottom} = 8.17 \times \frac{100}{15} = 54.47^{CM^2}$$

Top steel use

$$\#9 - A = 7.4^{CM^2} \ @30^{CM}，則 A_{top} = 7.4 \times \frac{100}{30} = 24.67^{CM^2}$$

$$\therefore \mu = \frac{A_{bottom}}{bd} = 0.00188$$

$$\mu' = \frac{A_{top}}{bd} = 0.00085$$

$$\kappa = \sqrt{n^2(\mu + \mu')^2 + 2n\left(\mu + \mu' \times \frac{d'}{d}\right)} - n(\mu + \mu') = 0.1682$$

$$L = \frac{\kappa}{2}\left(1 - \frac{\kappa}{3}\right) + n \times \frac{\mu'}{\kappa}\left(\kappa - \frac{d'}{d}\right)\left(1 - \frac{d'}{d}\right) = 0.0859$$

$$\therefore f_c' = \frac{M_{\max}}{Lbd^2} = 56.52 \ {}^{kg}\!/_{cm^2} < 112 \ {}^{kg}\!/_{cm^2} \ (o.k)$$

$$f_s = n \times f_c' \times \frac{(1-\kappa)}{\kappa} = 2794.58 \ {}^{kg}\!/_{cm^2} \cong f_y = 2793 \ {}^{kg}\!/_{cm^2} \ (o.k)$$

$$v = \frac{R}{bd} = 8.54 \, {}^{kg}\!/\!{}_{cm^2} < 9.25 \, {}^{kg}\!/\!{}_{cm^2} \, (o.k)$$

3.5.2 貫穿剪力檢核

由文獻【20】提到基礎版有一種重要的破壞型式，那就是因垂直力(自重或靜載)所產生的貫穿剪力，其破壞機制為環繞柱集中載重處或反力處，如圖 3-17 所示，產生截頭圓錐或角錐之貫穿剪力，此種破壞模式與一般單向版及樑結構之梁式剪力破壞不同。由於貫穿剪力破壞不具預警性，故設計時多採用保守的設計考量。

美國混凝土學會 ACI318-02 規範(2002)

ACI 318-02 規範中以回歸方式求到三組設計公式，這三組設計公式均是以臨界斷面上的貫穿剪力強度當設計標準，ACI 318-02 規範中認定貫穿剪力強度與混凝土圓柱試體的抗壓強度開平方根成正比。規範中對鋼筋混凝土樑剪應力應取 $0.17\sqrt{f_c'}$ MPa，而對貫穿剪應力則取 $0.332\sqrt{f_c'}$ MPa，提高了將近一倍，因臨界斷面同時受到柱載重垂直壓應力與版撓曲水平壓應力的聯合作用，而造成鋼筋混凝土版之貫穿剪力強度得提昇。

ACI 318-02 規範亦考量柱頭位置對貫穿剪力強度的影響，當柱頭位於邊緣或角落時，貫穿剪力強度會因為邊界束制的情況而降低其強度，故在規範中亦需定義柱束制參數來反應此種情形，柱束制參數在內柱時為 40，邊柱時為 30，角柱時為 22。

ACI 318-02 規範的設計公式如下，其標稱貫穿剪力強度需取(3-1)式、(3-2)式、(3-3)式之最小值控制：

$$V_{n,ACI} = 0.332\sqrt{f_c'}\,b_o d \tag{3-1}$$

$$V_{n,ACI}=0.83\left(2+\frac{4}{\beta_c}\right)\sqrt{f_c'}b_od \tag{3-2}$$

$$V_{n,ACI}=0.83\left(2+\frac{\alpha_s d}{b_o}\right)\sqrt{f_c'}b_od \tag{3-3}$$

$b_o=\pi(c+d)$ 為環形載重下之貫穿剪力臨界斷面周長(mm)

$b_o=(4b+\pi d)$ 為矩形載重下之貫穿剪力臨界斷面周長(mm)

$d=$ 版頂距鋼筋之有效深度(mm)

β_c=為矩形柱斷面長短邊比

α_s=為柱束制參數

在設計時，需將 $V_{n,ACI}$ 乘上強度折減係數 $\phi=0.85$。

當自重、風力、地震力或其它的側向力等因素在墩柱(腳)與頂版接合處形成的彎矩力 M_u，可稱為不均勻分佈剪力。

3.5.3 壓拉桿模式檢核

【20】一般結構構材在模擬壓拉桿模式中，見圖 3-18 所示，壓桿是定義成一受壓構材，代表一平行或扇形壓力場之合力，通常壓桿在中央部位受壓混凝土會朝側向伸展，稱之為瓶狀壓桿(Bottle-shaped strut)，在設計時，壓桿通常被理想化為稜體的受壓桿件(Idealize prismatic strut)。拉桿為壓拉桿模式中之受拉桿件(Tie)，由鋼筋與環繞拉桿軸線之混凝土所組成。基於力平衡條件，壓拉桿模式的節點至少須有三個力同時作用，為壓桿、拉桿與集中載重之軸線在接頭處的交點，本分析模式採 C-C-T(Compression、Compression、Tension)，如圖 3-19 所示。節點區(Nodal zone)通常為節點周遭的混凝土塊，用以傳遞交會於節點處的壓拉桿力，如圖 3-20 中因應力量分佈效應之擴展節點區，以此行為作混凝土之壓拉桿計算，相關公式如下：

載重點與支承點之夾角 $\theta = \tan^{-1}(\frac{d}{a})$ (3-4)

拉桿之有效斷面 $A_{st} = \sum (A_s + A_s' + A_v)$ (3-5)

拉桿強度 $F_{nt} = A_{st} \times f_y$ (3-6)

節點區之有效抗壓強度 $f_{cu}' = 0.85\beta_n f_c'$ (3-7)

(節點區採多根拉桿 $\beta_n = 0.6$)

有效拉桿寬度 $w_t = \dfrac{F_{nt}}{b_s f_{cu}'}$ (3-8)

有效壓桿寬度 $w_s = \ell_b \sin\theta + w_t \cos\theta$ (3-9)

混凝土之有效抗壓強度 $f_{cu} = 0.85\beta_s f_c'$ (3-10)

(壓桿為均勻斷面 $\beta_s = 1.0$)

壓桿之有效斷面 $A_{str} = b_s \times w_s$ (3-11)

壓桿強度 $F_{nn} = A_{str} \times f_{cu}$ (3-12)

壓桿之垂直分量=承載強度 $P = 2R = F_{nn} \times \sin\theta$ (3-13)

3.6 建模考量

於 DIANA 程式中建立模型時，因頂版為大型結構體，若以整體尺寸來模擬，網格切割後將會呈現以萬為單位的元素，而元素型式主要以四邊形實體元素(Quadrilateral solid element)，此種元素有 20 個節點，一個節點有六個自由度，在元素、節點、自由度過多時就須以增量迭代法(Increment iteration method)作計算，但此法在非線性分析時易收斂成不正確答案，再加上材料性質的選擇也以定義非線性行為為主…等，不儘增加分析時的時間，也佔用記憶體、硬體的使用量，造成分析時諸多不便。

因沉箱頂版為圓形版與圓形柱組合，為對 xy 雙向對稱結構(Symmetrical structure)，只有垂直載重時(以垂直向均佈位移載重模擬)，可以用四分之一的沉箱頂版分析。當載重有彎矩載重時 (以

梯形均佈位移載重模擬)，可以二分之一的沉箱頂版作分析，尺寸大小見表 3-2 所示。

3.7 頂版之基本條件

3.7.1 網格建立及元素使用

要進行有限元素分析，首要的步驟就是要將分析的結構體，分割成許多簡單幾何形狀的元素（Element），一維就是(Problem domain)，元素是以線，若以二維(Two-dimensional)的分析，元素可以是三角形或四邊形；在三維(Three-dimensional)的分析，元素可以是四面體、五面體(Pentahedral)或六面體(Hexahedral)。每一個元素內部我們也會設定一些位置（一般而言是在元素的頂點及邊的中點等），建立節點（Node），而這些元素及節點就構成了分析的網格（Mesh）。

鋼筋混凝土之有限元素法分析時選擇的實體元素如下：

- 混凝土元素以四邊形實體元素(Quadrilateral solid element)及三角形實體元素(Triangular solid element)作三維分析，此規則性的元素可簡單並完整的描述混凝土之行為，如圖 3-21 所示。

  (1)楔形(Wedge -15 nodes)：為三角形-曲線狀的實體，15 節點，基於二次內插及數值積分的方式來求解，如圖 3-21a 左所示。

  (2)塊形(Brick -20 nodes)：為四邊形-曲線狀的實體，20 節點，基於二次內插及高斯積分的方式來求解，如圖 3-21b 右所示。

- 鋼筋元素是以理想化的降服與握裹之行為埋置於周圍元素中，以線型態呈現，無任何之自由度，可稱為母體元素。

3.7.2 材料性質設定

對於沉箱頂版之非線性分析後須維持一定的物理特性，構件變形也要在諧和變形條件下，為保持加載變形區不影響頂版產生集中應力，在柱頂加一層元素以線性彈性(應力-應變)行為，使其勁度 E 值無限大，此塊剛體(Rigid body)運動型式只做垂直向變位。頂版與柱元素模擬為均質等向性之材料，特性定義對混凝土來說有彈性模數、波松比、抗拉強度、抗壓強度、Total strain crack 之進入塑性狀態的拉力及壓力行為見表 3-3，鋼筋須定義彈性模數、波松比、降服強度、降服準則見表 3-4 所示。

3.7.3 載重控制

有限元素分析中，載重控制除了可以是力量、壓力或力矩外，也可以是非零的位移量（Displacement），程式於分析後會計算出達到每階段之位移量所需的承載反力，以力量、壓力或力矩控制的載重型式，在使用非線性分析時在達極限載重後容易呈現發散而無法分析。這些載重量可以是靜態（Static, Time independent），也可以是動態（Dynamic, Time dependent）。

沉箱頂版之載重控制於頂部柱斷面，由於柱並非使用真實尺寸，為使載重均勻分佈於柱斷面上，假設一塊很大的 E 值材料元素，在這塊元素上以位移控制的載重面或線的加載方式，作均佈垂直的向下施加位移及梯形分佈位移加載方式。若以均佈垂直加載方式分析時，先設定最終加載位移量，將其分成 50 等分，每次以此 50 分之一位移加載量施加。若以梯形位移加載方式時，先設定最終施加位移之最大與最小量，將此二施加位移量分成 50 等分，以此二所構成之梯形位移施加，直到最終位移載重。

3.7.4 邊界條件

結構的某些區域也需要給予一些固定或限制條件，就是所謂邊界條件，如果沒有這些邊界（限制）條件，結構受力後就會做剛體運動（Rigid body motion）而不是變形（Deformation），因此假設的邊界條件相對地非常重要。最簡單的邊界條件就是結構某些區域（一般在邊界）予以固定，這些固定可以是完全固定，就是固定區域完全沒有位移量，或是某些方向固定，好比允許水平滑動但不能有垂直向位移，。

若以四分之一的沉箱頂版作為分析之型式，此模式於 x 軸之對稱面，束制 y 方向位移，此平面容許 x 向水平位移及 z 向垂直位移。y 軸之對稱面，束制 x 方向位移，此平面 y 向水平位移及 z 向垂直位移。垂直於 z 軸之底部最外緣支承面上，束制 z 向位移，容許 x 向及 y 向可做水平位移，如圖 3-22 所示。

若以二分之一的沉箱頂版作為分析之型式，此模式於 x 軸之對稱面，束制 y 方向位移，此平面容許 x 向水平位移及 z 向垂直位移。垂直於 z 軸之底部最外緣支承面上，束制 z 向位移，容許 x 向及 y 向可做水平位移，如圖 3-23 所示。

3.8 收斂性分析標準

由於有限元素分析中，網格內的元素數目及大小是有限的（Finite），所以此分析法就稱為有限元素法（實際結構體是可以分割成無限個元素的）。有限元素於非線性分析時答案的精確度（精確不一定是準確）和網格粗細程度、位移載重增量大小有相當大的關係。因此將以切割元素和位移載重增量大小之兩種收斂方式，對四分之一的沉箱頂版做收斂準確度之探討與比較。

3.8.1 切割元素收斂性

一般而言，切割元素尺寸(Mesh size)越小（數目越多），或是節點數目愈多，答案就愈精確，此行為稱之「切割元素收斂性」分析（Converge），但元素或節點數目越多，有限元素計算求解所需的時間及記憶體、硬碟空間就隨須求量而增大。

將沉箱頂版分別切割出不同網格大小，長寬高比大約相同，有 No.1、No.2、No.3、No.4 四組網格切割模式，如表 3-5 所示。

(1) No.1 切割尺寸大約以 40^{CM} 為主：整體元素為 666 個 (Elements)，節點數目 2731 個(Nodes)，最大極限反力值 1750.3^{Ton}。

(2) No.2 切割尺寸大約以 30^{CM} 為主：整體元素為 1616 個 (Elements)，節點數目 6169 個(Nodes)，最大極限反力值 1916.2^{Ton}。

(3) No.3 切割尺寸大約以 25^{CM} 為主：整體元素為 2784 個 (Elements)，節點數目 10479 個(Nodes)，最大極限反力值 1846.7^{Ton}。

(4) No.4 切割尺寸大約以 20^{CM} 為主：元素總合為 5155 個 (Elements)，節點數目 18562 個(Nodes)，最大極限反力值 1844.8 $_{Ton}$。

切割元素之大小與元素的多寡，可由每組的最大極限承載力 P_{max} 計算出最小誤差百分比，見表 3-6、圖 3-27 中 No.3 及 No.4 這兩組的誤差已經是很小，約為 0.1%左右，因此為節省電腦計算時間、記憶體速度及硬體存放空間，選擇 No.3 在 xyz 軸向之大小分別為 24^{CM}×30^{CM}×25^{CM} 左右之元素大小為之後分析之切割尺寸之

標準。

3.8.2 位移載重增量大小的收斂性

通常在分析時也可由位移載重量控制其收斂程度，於求解的過程中，極限承載力會隨位移載重量之大小而改變，位移載重量控制的愈小，計算出的承載力誤差值也會隨之減少，答案就愈準確，此行為稱 「位移載重增量大小的收斂性 」分析，相對的若位移載重量愈小，所對應的總位移載重量在迭代計算時會等分為更多步，因此在計算時間及空間的須求也愈大。

以 3.8.1 節中最後選擇最佳切割元素的尺寸，分別以迭代步伐A、B、C、D、E、F 六種型式作收斂性分析比較，由表 3-7 中改變加乘係數 0.18、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0 來控制每步的實際位移增量 0.09^{MM}、0.1^{MM}、0.2^{MM}、0.3^{MM}、0.4^{MM}、0.5^{MM}，當連續計算 50 步後之累積位移量為 4.5^{MM}、5^{MM}、10^{MM}、15^{MM}、20^{MM}、25^{MM}，其發生最大極限載重的步伐位置均不同，但發生極限承載值所對應的位移量頗為接近。以這六種迭代加乘係數所計算出來的最大極限承載力，對之間的誤差百分比作取捨，見表 3-8、圖 3-28 所示，其中以位移增量 0.09^{MM}、0.1^{MM} 兩種迭代增量作分析，誤差值約在 1.4%左右，所以在以後的分析均取位移載重每步 0.09^{MM} 的增量，進行 50 次迭代。

第四章 沉箱頂版之非線性探討

4.1 前言

沉箱中使用回填砂石可增加其穩定性，但砂石會隨著時間出現沉陷情形，頂版除了底部外環面與沉箱接合處具有支承力外，內環面將因砂石下陷形成懸空情形，頂版必須再將上部結構體、墩柱重、活載重等的垂直力和因地震力、風力、溫度變化、等所造成之水平力和彎矩，將力量經由沉箱主體傳遞至土層，如果沉箱頂版破壞將造成整體倒塌。沉箱頂版有多種破壞模式，由最基本的承壓破壞模式、剪力破壞、撓曲破壞及撓剪破壞，依目前在沉箱頂版設計之尺寸，應不會有撓曲破壞的可能。

因此於本章節將以變換柱徑，探討此頂版垂直作用力及在地震力造成之彎矩作用下，鋼筋及混凝土之非線性變形、降服、開裂等行為。由前人文獻中，大多取剪跨-有效深度比值($\frac{a}{d}$)以大、中、小三種來區分其產生的破壞模式，通常$\frac{a}{d}$比值較大時皆以撓曲破壞為主，極限載重值較低，因版跨距大，版厚度薄，若有配制合理的鋼筋量，可增其版之韌性，就會以撓曲降服狀態呈現。相反若此比值小時，易造成剪壓破壞，極限承載強度較大。

4.2 均佈垂直位移控制

本研究以柱頂作均佈之垂直位移作為載重，使用五種剪跨-有效深度比，探討極限載重和變位之關係，並取一組剪跨-有效深度比，說明沉箱頂版變形行為、開裂應力-應變分佈及鋼筋降服之狀況。

4.2.1 載重-變位關係

當變位開始加載，混凝土尚在彈性階段，勁度維持不變，載重變位關係呈近似直線形狀，加載到某種程度後，混凝土開始開裂，載

重隨之降低，因鋼筋尚未降服，變位載重持續增加，產生第二次承載能力提昇，此階段的勁度已剩下 35%，直到鋼筋降服，頂部混凝土達極限承載力立即下降，形成雙高峰現象。破壞機制為環繞柱與頂版交接處延伸至支承處，產生截頭圓錐貫穿剪力破壞面。

4.2.2 不同墩柱半徑對極限載重值的影響

由圖 4-1 所示，使用固定尺寸與厚度之沉箱頂版，探討因柱徑不同而產生不同的剪跨-深度比，其它參數條件如混凝土及鋼筋之材料性質、邊界條件、元素型式的選擇已於第三章中介紹。

柱半徑使用 1^{M}、1.25^{M}、1.5^{M}、1.75^{M}、2^{M} 等五種尺寸，如圖 4-1 所示，從柱徑外緣到支承中心點距離(可稱為剪跨距)分別為 2.15^{M}、1.9^{M}、1.65^{M}、1.4^{M}、1.15^{M}，而剪跨距與頂版厚度之比值 $\frac{a}{d}$ 為 0.72、0.63、0.55、0.47、0.38，參照圖 4-2 來看，在比值愈大其極限承載反力愈低，當 $\frac{a}{d}$ 比值逐漸減少，極限承載力慢慢提高，達混凝土開裂承載力與極限承載力所須的變位載重也隨之變小，本分析是以¼之沉箱頂版進行分析後的極限承載力，表 4-1 中的極限承載力必須乘四倍，因此五種不同柱徑斷面之極限承載力分別為 5333.6^{Ton}、5980.4^{Ton}、7511.6^{Ton}、7972.8^{Ton}、9919.2^{Ton}。

4.2.3 不同墩柱半徑之變形

墩柱頂面受均佈垂直位移載重下，¼沉箱頂版之頂面變形，將隨著墩柱半徑尺寸由 1^{M}、1.25^{M}、1.5^{M}、1.75^{M} 增加到 2^{M}，在垂直位移載重為 0.45^{MM} 時，頂版頂面之變形曲線也隨著受力面積之擴大而向外擴張，沉箱頂版頂面的變位量由 0.34^{MM}~0.405^{MM} 不等，此變位

量隨著柱徑的增加而加大，如圖 4-3 所示。在沉箱頂版外環 0.9^{M} 為支承處，所以 z 向不變形，在線性階段中相同位移載重之底部變形曲線會因柱徑受載面積愈大，底部變形也愈大，沉箱頂版底面的變位量由 0.17^{MM} ~0.29^{MM} 不等，如圖 4-4 所示，同樣的墩柱徑愈大，其極限承載力對應的變形量也愈大。

4.2.4 同一種墩柱半徑在不同荷載下之變形

(1) 斷面變位

本節就墩柱半徑為 1^{M} 之沉箱頂版由線性進入非線性過程之變位作逐步探討，由於實際變位十分微小，通常圖示都以某種倍數放大，方可顯示其變位，此係數稱之放大係數(Scale factor)。 圖 4-5a 為沉箱頂版在實際位移載重量為 0.09^{MM} 時之斷面變位圖，此時之放大係數為 5200，仍然在線性範圍。

圖 4-5b 為達混凝土初始開裂狀態，其實際位移載重量為 2.25^{MM}，變形之放大係數(Scale factor)已減至 115，已進入非線性行為。

圖 4-5c 為達最大極限承載力之變位，實際位移載重量為 4.41^{MM} 步時，變形之放大係數(Scale factor)減至 65.2。

圖 4-5d 為沉箱頂版已破壞，最後實際位移載重量為 5.4^{MM} 步時，由柱腳與版接合點至支承處連成一線之最大開裂應變帶，變形之放大係數(Scale factor)已減至 36.2。

由圖 4-5 圖形介面較不易了解在進入非線後的變形曲線，將由下個單元沉箱頂版之頂面及底面變位作介紹。

(2) 頂面及底面變位

沉箱頂版之頂面的變形增量曲線隨位移控制量而增加，受載位

移量 0.09^{MM} 時頂面變形曲線在受載後變形尚不明顯，隨著 0.45^{MM}、0.9^{MM}、1.35^{MM}、1.8^{MM}、2.25^{MM}、2.7^{MM}、3.15^{MM}、3.6^{MM}、4.05^{MM}、4.5^{MM} 每 0.45^{MM} 為一受載位移量，對頂版頂面的平均變位量大約為 0.453^{MM} 左右，如圖 4-6 所示。在頂版之下層面來說，因下層 x 軸向之最外緣 2700^{MM}~3600^{MM} 為支承處，為 z 向位移量為零，其的變形增量在柱與版接合 1000^{MM} 處，變位量最大處，由圖曲線可見，在線性階段變形曲線呈現平滑狀，由圖 4-2 可知在達初始開裂時(受載位移量約在 1.17^{MM})，細微裂縫形成後，底部最大變形處隨著荷載量的增加而增加，載重-變形曲線在開裂後形成多段曲狀，經過降服點至非線性階段，變形量隨之更大，見圖 4-7 所示。

4.2.5 混凝土主應變區

圖 4-8a 為垂直位移載重量 0.09^{MM} 時，混凝土於 x 向之主應變分佈狀況，最大主應變達 0.00021。圖 4-8b 可見當位移載重量 1.17^{MM}，當混凝土達開裂強度後，主應變範圍明顯發生在頂版底部正中央，當最大主應變達 0.0065，已超過混凝土抗壓應變 0.003，受載位移量愈大裂縫範圍也隨之延伸。在達極限承載力狀況時圖 4-8c，受載位移量 4.41^{MM} 時之主應變可達 0.04，而整體主應變也在 0.00276 以上，開裂範圍也漸漸擴散至頂版頂部。圖 4-8d 為超過極限狀態後受載位移量 5.4^{MM}，主應變最大值將由版底支承內緣處進入壓力區與柱腳連成一開裂破壞帶。

4.3.6 鋼筋降服情形

鋼筋埋置於混凝土中，主要為增加抗拉強度，補足混凝土抗拉能力，在此次模擬中以 Von-Mises 之應力-應變降服狀態為主，抗拉降服強度為 270MPa，對應圖 4-2 的極限載重-變位圖中，在剪跨-有效深

度比為 0.72 之曲線，第一點下降為混凝土達初始開裂強度，第一道裂縫產生，爾後因鋼筋還未降服，因此承載力在下降後仍可上昇，第二次下降為鋼筋降服時，拉力筋降服後並維持固定，最後為混凝土達極限承載力至碎裂。

圖 4-9、4-10 為底部抗拉鋼筋之降服應力、鋼筋之最大主要剪應力在線性的受載位移量 0.09^{MM} (圖 a)，鋼筋所受應力並非很大，產生裂縫的受載位移量 1.08^{MM} (圖 b)，鋼筋受最大應力發生在 45 度方向上，近似一直線分佈，極限狀況的受載位移量 4.41^{MM} (圖 c)，鋼筋受最大應力處已擴散至整個½半徑的中心區，開裂後的受載位移量 5.4^{MM} (圖 d)的情形由圖上可知幾乎整個底部斷面鋼筋都已降服。在圖 4-10 當鋼筋達極限承載後，由底部呈三角形狀之垂直筋、環狀水平腹筋及未支承面積之鋼筋所受剪應力值達最大，可達 135MPa。

4.3.7 開裂應力-應變

混凝土作網格切割後，元素會以塊狀呈現，在前章定義混凝土抗拉強度為 2.1MPa，因此當元素在受載位移量影響下，超過混凝土抗拉值，就會以不同顏色方式顯示。在每一個階段，混凝土裂縫分佈區域皆不同，載重位移量愈大，其裂縫延伸含蓋的範圍就愈大，開裂應力圖層隨之不同。初始混凝土之開裂應力、開裂應變發生在受載位移量 0.09^{MM} (圖 4-11a)、在此階段後混凝土開裂但鋼筋未達降服，沉箱頂版承載力達第一個高峰時，受載位移量為 1.08^{MM} (圖 4-11b)，受載位移雖增加，但沉箱承載力欲下降，受載位移繼續增加，沉箱承載力恢復上昇，部分鋼筋開始降服，當所有鋼筋已達降服時，達極限承載力的受載位移量 4.41^{MM} (圖 4-11c)、受載位移繼續增加，頂版頂部

混凝土碎裂，頂版承載力急速下降，在受載位移量 5.4^{MM} (圖 4-11d) 時沉箱頂版之開裂應力-應變分佈圖如圖 4-11 所示。

頂版於混凝土彈性階段，版底部中央處其應變值約在 0～0.000102，如圖 4-12a 所示。基本上混凝土抗拉強度設定為抗壓強度的十分之一，若然在載重增加後，元素部分超過抗拉應力 $f_t = 2.1MPa$，如圖 4-11a 所示，其開裂應變最大可達 0.00289，已有小部分裂縫產生於此處，如圖 4-12b 所示。

繼續加載，混凝土繼續開裂，頂版將呈現類似壓拉桿模式，擁有良好韌性的底層鋼筋，成為類似桁架中的水平拉桿(Horizontal tie)，承受水平拉力，裂開後的混凝土類似承壓力的斜桿，形成壓拉桿模式，沉箱頂版勁度降低為原始的35%，直到頂版達極限承載力時，鋼筋達到降服強度圖4-12c，版底部元素的最大應變約為0.00536，以最小應變也達到0.00243。

再繼續加載，裂縫逐漸延伸進入頂部壓力區，其由圖 4-12d 中可知裂縫由柱腳與頂版接合，頂部混凝土開始碎裂，所以沉箱頂版趨於破壞，沉箱已無多大的承載力，以整體貫穿開裂破壞。

4.3 驗証½和¼的沉箱頂版

為模擬沉箱頂版承受垂直載重及彎矩，在版中央柱頂面作一 z 方向之梯形位移載重的模擬，此種情況對 y 方向頂版已是不對稱情況，不能以原四分之一的沉箱頂版模擬，但對 x 向還是對稱，因此可用二分之一頂版作分析，為驗証分析模式的正確性，分別使用二分之一及四分之一的頂版模式(見圖 4-13 所示)施加垂直位移載重分析，兩種情況必須有相同的結果。

為驗証 DIANA 程式在分析後½的沉箱頂版和¼的沉箱頂版的分

析結果，將四分之一頂版分析的承載力乘兩倍後與二分之一分析頂版作比較，見圖 4-13 及表 4-2，¼之沉箱頂版，極限承載力為 1333.4^{Ton}，乘兩倍後，極限承載力為 2666.8^{Ton}，½之沉箱頂版，極限承載力為 2675.6^{Ton}，誤差範圍約為 0.33%，兩個結果的誤差均在容許範圍之內，也可在此說明模式的準確性。

4.4 梯形位移載重

4.4.1 直徑 2^M 墩柱

此章節將說明分析時選用的尺寸大小及分析模式，模擬模式由圖 4-14b 可知，沉箱頂版基本組合是由版直徑 7.2^M、支承寬 0.9^M、版厚 3^M、墩柱直徑 2^M 的沉箱頂版作為程式分析之模型尺寸，頂版材料為鋼筋混凝土。

本研究使用七種位移加載，如表 4-4 所示，其對應之最終位移載重量之最大與最小量分別為 6.75^{MM} 和 2.25^{MM}、9^{MM} 和 0^{MM}、11.25^{MM} 和 -4.5^{MM}、13.5^{MM} 和 -4.5^{MM}、15.75^{MM} 和 -6.75^{MM}、18^{MM} 和 -9^{MM}、20.25^{MM} 和 -11.25^{MM}，對應之角度 0.129°、0.258°、0.386°、0.516°、0.645°、0.774°、0.902°，每次以其五十等分之一的位移量逐次增加，共以 50 次進行加載分析，見圖 4-15。

中心位移加載量在 0.45^{MM} 時尚在線性階段，七種加載位移頂版變位如圖 4-16 所示，觀察頂版頂面(Top-face)之變位，在墩柱左側與頂版接合處附近最大，當加載位移轉角量繼續增加時，變位最大量逐漸向右偏移。在墩柱右側與頂版接合處，當位移加載有較大轉角時頂面變位會有明顯轉折點的出現，如轉角較小轉折點並不明顯，但相對位移變異量較大，以第四種載重位移轉角型式出現明顯轉折點。底部變位最大量隨著位移載重轉角的增加，發生在距柱中

心左側 0.5^{M} 處，最大變位量也隨著變大，變位曲線在兩支承點間形成類似拋物線的圓滑曲線，如圖 4-17 所示。

在彎矩載重作用下，由支承內緣處形成斜裂縫後，已有部分混凝土無抗拉能力但尚未達破壞，隨著位移載重增加後，斜裂縫逐漸延伸進入壓力區時，混凝土受壓區面積逐漸縮小，最後在壓應力與剪應力聯合作用下在柱角與頂版接合處達到壓碎破壞。

極限承載值隨載重轉角的增加而逐漸減少如圖 4-18 所示，垂直位移載重所出現的雙峰現象，在有轉角之梯形位移載重下，雙峰現象完全消失，此七種轉角造成沉箱頂版在垂直承載強度(P)分別為：7006^{Ton}、5922^{Ton}、5342^{Ton}、4494^{Ton}、4426^{Ton}、4096^{Ton}、3936^{Ton}。

在極限承載力產生時，以底部支承面的每一個節點力取對 y 軸的彎矩力總合，稱之為極限撓曲強度(M)，撓曲強度會隨受載轉角變大而增加再緩慢減少，此七種轉角造成整體沉箱頂版的撓曲強度為：$1022^{Ton\text{-}M}$、$1618^{Ton\text{-}M}$、$1854^{Ton\text{-}M}$、$1684^{Ton\text{-}M}$、$1750^{Ton\text{-}M}$、$1634^{Ton\text{-}M}$、$1610^{Ton\text{-}M}$，由極限撓曲力與極限垂直承載力(M/P)可求出，此版受到撓曲作用力時產生的偏心距，由表 4-6 可得知在轉角愈大時偏心距愈大，而此七種轉角造成的偏心量(M/P)：14.6^{CM}、27.3^{CM}、34.7^{CM}、37.4^{CM}、39.5^{CM}、39.9^{CM}、40.9^{CM}。

載重變位曲線(圖 4-18)顯示，在彈性範圍內，當位移載重傾角愈大時，載重變位曲線的斜率愈陡，頂版勁度愈大，產生極限承載力時的施加載重位移愈小。而且表 4-6 中清楚看出，受載位移面稍有偏斜，頂版將以混凝土及鋼筋作最大局部承壓、受拉行為，因尚有其它未達極限的元素提供使用，並不會以整體作鋼筋降服、貫穿開裂破壞，因此 P-Δ 曲線之斜率較為圓滑。

4.4.2 直徑 4$^{\mathrm{M}}$ 墩柱

此章節將說明分析時選用的尺寸大小及分析模式，模擬模式由圖 4-14 可知，沉箱頂版模式是由版直徑 7.2$^{\mathrm{M}}$、支承寬 0.9$^{\mathrm{M}}$、版厚 3$^{\mathrm{M}}$、墩柱直徑 4$^{\mathrm{M}}$ 的沉箱頂版作為程式分析之模型尺寸，頂版材料為鋼筋混凝土。

本研究使用七種位移加載，如表 4-5 所示，其對應之最終位移載重量之最大與最小量分別為 6.75$^{\mathrm{MM}}$ 和 2.25$^{\mathrm{MM}}$、9$^{\mathrm{MM}}$ 和 0$^{\mathrm{MM}}$、11.25$^{\mathrm{MM}}$ 和-4.5$^{\mathrm{MM}}$、13.5$^{\mathrm{MM}}$ 和-4.5$^{\mathrm{MM}}$、15.75$^{\mathrm{MM}}$ 和-6.75$^{\mathrm{MM}}$、18$^{\mathrm{MM}}$ 和-9$^{\mathrm{MM}}$、20.25$^{\mathrm{MM}}$ 和-11.25$^{\mathrm{MM}}$，對應之角度 0.065°、0.129°、0.193°、0.285°、0.332°、0.387°、0.451°，每次以其五十等分之一的位移量逐次增加，共以 50 次進行加載分析。

中心位移加載量在 0.45$^{\mathrm{MM}}$ 時尚在線性階段，觀察頂版頂面(Top-face)之變位如圖 4-19 所示，在墩柱左側與頂版接合處附近最大，當加載位移轉角量繼續增加時，變位最大量逐漸向右偏移。在墩柱右側與頂版接合處，當位移加載有較大轉角時頂面變位將有明顯轉折點的出現，如轉角較小轉折點並不明顯，但相對位移變異量較大，以第三種載重位移轉角型式出現明顯轉折點。底部變位最大量隨著位移載重轉角的增加，發生在距柱中心左側 1$^{\mathrm{M}}$ 處，最大變位量也隨著變大，變位曲線在兩支承點間形成類似拋物線的圓滑曲線，如圖 4-20 所示。

對整塊頂版來說只以局部面受最大變位量，對底部垂直極限承載值隨載重轉角的增加而逐漸減少，見表 4-5 中、表 4-6 中對此七種轉角位移增量造成的整體之沉箱頂版的垂直承載強度(P)分別為：12412$^{\mathrm{Ton}}$、11234$^{\mathrm{Ton}}$、10682$^{\mathrm{Ton}}$、10486$^{\mathrm{Ton}}$、10248$^{\mathrm{Ton}}$、9442$^{\mathrm{Ton}}$、9452$^{\mathrm{Ton}}$。

在極限承載力產生時，以底部支承面的每一個節點力取對 y 軸的彎矩力總合，稱之為極限撓曲強度(M)，撓曲強度會隨受載轉角變大而緩慢減少，此七種轉角造成整體之沉箱頂版的撓曲強度分別為：$5070^{\text{Ton-M}}$、$9186^{\text{Ton-M}}$、$11158^{\text{Ton-M}}$、$11712^{\text{Ton-M}}$、$12870^{\text{Ton-M}}$、$11080^{\text{Ton-M}}$、$11240^{\text{Ton-M}}$，由極限撓曲力與極限垂直承載力(M/P)可求出，此版受到撓曲作用力時產生的偏心距，由表 4-6 可得知在轉角愈大時偏心距愈大，而此七種轉角造成的偏心量(M/P)分別為：40.8^{CM}、81.3^{CM}、104.5^{CM}、111.7^{CM}、125.6^{CM}、117.4^{CM}、118.9^{CM}。

4.4.3 小結

以柱直徑 4^{M}、2^{M} 兩種受梯形位移載重情況下比較後，可知當墩柱直徑放大 2 倍時，載重面積加大後，當位移載重量之最大與最小量分別為 1.125^{MM} 和 -0.225^{MM} 時，頂面的最大變位量放大約 1.4 倍，底面的最大變位量將放大 2 倍。當最終位移載重量之最大與最小量分別為 11.25^{MM} 和 -4.5^{MM} 時，垂直極限承載強度放大 2.56 倍，極限撓曲強度放大 6.66 倍，偏心距約放大 3.26 倍，見表 4-6 所示。

4.5 垂直與梯形均佈加載之應變情形

分別一垂直均佈加載及一梯形均佈加載，以此兩種不同加載情況下，並以½沉箱頂版在墩柱直徑(受載面)分別為 1^{M} 及 2^{M} 時之變形圖、鋼筋應力的降服情況和頂版之底面、橫斷面、頂面在由彈性-塑性-破壞不同階段下的應變變化，欲觀察從線性，開裂情形進入非線性開裂，最後達破壞有何不同處。

4.5.1 沉箱頂版之變形及鋼筋降服情況

由圖 4-21(a)(b)可知當墩柱斷面愈大，在垂直位移載重量為 4.5^{MM} 作用下，沉箱頂版因受載面積增大，整體的變形曲線明顯較大，

尤以底部未支承處。若將此兩種墩柱斷面以梯形位移載重作用下，由最大變位量 11.25^{MM} 及最小變位量-4.5^{MM} 作用下，由圖 4-22(a)可知因墩柱斷面積較小，除了在墩柱腳處有較大的變形外，而沉箱頂版的影響較小，以圖 4-22(b)墩柱斷面較大，受載面積相對為提高，對沉箱頂版未支承處的變形顯的相當大，頂版偏斜量也較為明顯。

圖 4-23(a)在垂直位移載重作用下，墩柱直徑為 2^{M} 時，位移載重量為 4.5^{MM} 時，其拉力鋼筋應力可達 271MPa，壓力鋼筋應力呈現 268MPa，圖 4-23(b)墩柱直徑為 4^{M}，位移載重量為 4.5^{MM} 時，其拉力鋼筋應力可達 271MPa，壓力鋼筋應力呈現 59.3MPa。

墩柱直徑為 2^{M}，在梯形位移載重作用下時，圖 4-24(a)顯示，由最大變位量 11.25^{MM} 及最小變位量-4.5^{MM} 作用下，其拉力鋼筋應力可達 77.4MPa，壓力鋼筋應力呈現 36.2MPa，圖 4-24(b)為墩柱直徑 4^{M}，由最大變位量 11.25^{MM} 及最小變位量-4.5^{MM} 作用下，其拉力鋼筋應力達 271MPa，壓力鋼筋應力呈現 270MPa。

4.5.2 沉箱頂版之底面情況

圖 4-25(a)及圖 4-25(b)為墩柱直徑分別為 2^{M} 及 4^{M} 頂版受載位移量為 0.9^{MM}，沉箱頂版底面在垂直均佈荷載下之應變演變情況，兩種柱徑的最大應變值分別為 0.00958 及 0.00352。當受載位移量增加至為 1.8^{MM} 時，而兩種柱徑的影響下頂版的最大應變值分別為 0.0182 及 0.00872，隨著受載位移量繼續增加至 4.5^{MM} 時裂縫已佈滿頂版底面，而兩種柱徑的影響下頂版的最大應變值分別為 0.0572 及 0.0162，而應變最大值也隨受載位移量的增加而增加，慢慢向外擴張如圖中之圓環黃色區，最後以剪力貫穿破壞機制，其受載面積愈大，應變值將愈小。

圖 4-26(a)及圖 4-26(b)為墩柱直徑 2^{M} 及 4^{M} 墩柱受載面，當最大位移量 2.25^{MM} 和最小位移量 -0.45^{MM} 時，其梯形位移加載之應變演變情況，在兩種柱徑的影響下頂版的最大應變值分別為 0.000203 及 0.00402，隨載重位移量增加至最大位移量 11.25^{MM} 和最小位移量 -2.25^{MM}，在兩種柱徑的影響下頂版的最大應變值分別為 0.00122 及 0.015。由圖 4-26 中可知，在梯形分佈載重及柱徑 2^{M} 的條件下，在較大變位處向支承邊緣呈現兩個互相垂直的較大應變帶，柱徑 4^{M} 時的較大的應變值是集中於最大位移載重處。

4.5.3 沉箱頂版之橫斷面情況

圖 4-27(a)為墩柱直徑 2^{M}，沉箱頂版橫斷面在垂直位移荷載下之應變演變情況，其應變最大值也隨受載位移量的增加而增加，在位移載重量加載到 0.9^{MM}，在墩柱及頂版接合外緣處連至支承內緣面形成一最大應變帶，類似以壓拉桿模式機制破壞方式，在此最大應變開裂環面內的元素之應變值皆大於環面外的元素，臨界破壞環面及內部的剪力強度相對的較大，在圖 4-27(b)為墩柱直徑 4^{M} 時，因受載面積較大，在位移載重量加載到 2.7^{MM} 才形成較明顯的開裂應變帶，臨界破壞面內的元素，少部分未受影響。

由圖 4-28(a)顯示，沉箱頂版橫斷面在最終梯形位移轉角 0.193° 及加載的最大位移量 11.25^{MM} 和最小位移量 -2.25^{MM} 時，對兩種柱徑斷面 2^{M} 及 4^{M} 之沉箱頂版的應變演變情況，因柱徑斷面較小，對整體來說只以最大位移量周圍的元素向下延伸至頂版底面，呈一三角狀，由圖 4-28(b)對柱徑斷面較大來說，有較明顯的最大開裂應變值發生在左邊墩柱與頂版接合處與頂版左邊底部處，斷面元素幾乎佈滿應開裂應變值。

4.5.4 沉箱頂版之頂面情況

由圖 4-29 可知在(a)受垂直均佈位移時，在柱外緣形成一環狀的破壞帶，(b)梯形位移載重時，在柱外緣形成半圓形的破壞帶。

4.6 極限承載力之比較

先將圓版與圓柱換算成相等斷面積之矩形版及矩形柱如圖 4-30 所示，因沉箱頂版受力處為中央墩柱斷面處，而版底外環處為支承點，因此可假設成矩形版分成多等分簡支梁，在樑中受一均佈載重，載重斷面隨柱徑改變，樑左右端為支承處，以此斷面見圖 4-31 分別用一般用在設計沉箱頂版、基礎版之貫穿剪力、壓拉桿模式之檢核公式計算出極限強度。

4.6.1 一般沉箱頂版設計之檢核

【19】由 3.5.1 節中對一般設計沉箱頂版的公式，分別將墩柱半徑為 1.5^{M} 時，以外部載重與內部斷面應力作力平衡時，最大載重值為 2725.3^{Ton}，當柱半徑另四種：1^{M}、1.25^{M}、1.75^{M}、2^{M}，校對檢核作計算後，其設計載重值將有 1525.3^{Ton}、2025.3^{Ton}、3525.3^{Ton}、4825^{Ton} 等四種承載強度，如表 4-7 所示。

4.6.2 ACI318 貫穿剪力之檢核

【20】由 3.5.2 節中以公式(3-1)計算出沉箱頂版之標稱貫穿剪力強度值，以五種不同柱半徑：1^{M}、1.25^{M}、1.5^{M}、1.75^{M}、2^{M} 作計算後，其設計貫穿剪力強度將有 2147.79^{Ton}、2366.95^{Ton}、2586.11^{Ton}、2805.28^{Ton}、3024.43^{Ton} 等五種，換算成垂直極限承載力為 4295.58^{Ton}、4733.90^{Ton}、5172.23^{Ton}、5610.55^{Ton}、6048.87^{Ton}，如表 4-7 所示。

4.6.3 ACI318 壓拉桿模式之檢核

【20】由 3.5.3 節中以公式(3-4~3-13)計算壓拉桿模式對沉箱頂

版作強度檢核，將圓版等效斷面轉換後的柱版尺寸，以不同墩柱受載面下的有效斷面為 b_s=1.57^{M}、1.963^{M}、2.356^{M}、2.75^{M}、3.14^{M}分別計算出的垂直承載強度有 4246.65^{Ton}、5112.65^{Ton}、6385.25^{Ton}、7775.27^{Ton}、9249.67^{Ton} 等值，如表 4-7 所示。

4.6.4 檢核比較

以一般沉箱頂版之設計公式的最大設計載重為最保守值，分別以 ACI318-02 code 之貫穿剪力的載重強度、ACI318-02 code 之壓拉桿模式的載重強度和 DIANA 程式分析後的極限承載力作比較，見表 4-8 所示。當柱直徑為 2^{M}，分別以二種設計公式、程式分析的極限承載力與目前沉箱頂版設計公式計算出來極限承載力，求出三組比原設計還大的比值，將三組比值平均後約 3.03 倍，如表 4-8 所示。當柱直徑為 2.5^{M}，分別以二種設計公式、程式分析的極限承載力與目前沉箱頂版設計公式計算出來極限承載力，求出三組比原設計還大的比值，將三組比值平均後約 2.6 倍，如表 4-8 所示。當柱直徑為 3^{M}，分別以二種設計公式、程式分析的極限承載力與目前沉箱頂版設計公式計算出來極限承載力，求出三組比原設計還大的比值，將三組比值平均後約 2.33 倍，如表 4-8 所示。當柱直徑為 3.5^{M}，分別以二種設計公式、程式分析的極限承載力與目前沉箱頂版設計公式計算出來極限承載力，求出三組比原設計還大的比值，將三組比值平均後約 2.02 倍，如表 4-8 所示。當柱直徑為 4^{M}，分別以二種設計公式、程式分析的極限承載力與目前沉箱頂版設計公式計算出來極限承載力，求出三組比原設計還大的比值，將三組比值平均後約 1.74 倍，如表 4-8 所示。

4.6.5 小結

由上節可知，早期在沉箱頂版的設計公式多偏保守，與到目前為止的研究，實屬 ACI318-02 壓拉桿模式之計算公式只考慮墩柱下之有效橫斷面作計算、與 DIANA 程式分析值較能反應出沉箱頂版之極限承載值。柱徑愈小目前沉箱頂版使用之設計方法與分析結果差別愈大，因無實驗數據可供比對修正，所以在分析結果僅供參考

第五章 結論與建議

5.1 前言

綜合前面章節在程式分析時，是以固定模型尺寸的沉箱頂版，配筋型式及數量不變，混凝土材料特性以統合應變之開裂(Total Strain Crack model)分析模式，改變墩柱直徑大小，並分別以垂直及梯形位移載重型式，邊界條件的設定下作非線性分析後。將原沉箱頂版以撓曲設計方式與 ACI318-02 code 的貫穿剪力及壓拉桿模式之設計公式，所計算的結果與程式的結果作一探討，結論如下。

5.2 結論

1. 以簡支樑構件作 Total Strain Crack model 分析模式，當鋼筋混凝土受載後可達極限承載強度後，產生壓碎破壞，可以得到承載力隨之下降或緩慢下降之曲線，但並未考慮鋼筋與混凝土之握裹滑移(Bond slip)的界面行為，不易求得韌性區段。
2. 以非線性有限元素法分析鋼筋混凝土梁的載重-變位關係能作到開裂及碎裂的程度，且能觀察每一個載重位移量的混凝土的變形、主應力、開裂狀態及鋼筋的降服行為，可以得到某種程度的準確度。
3. 對沉箱頂版做元素大小之收斂性分析後，以 $24^{CM}\times30^{CM}\times25^{CM}$ 左右之元素大小作為頂版之分析使用，可能達到分析所需要的準確程度。
4. 對沉箱頂版做步伐大小之收斂性分析後，每一步荷載若控制在垂直荷載為 0.09^{MM} 時，可以得到較佳的結果，荷載為 4.5^{MM} 時達到非線性階段。
5. 承受垂直均佈變位應力應變關係呈現雙高峰現象，但此現象相當

敏感，只要有水平力出現此現象即消失，因此一般實驗不易得此結果。

6. 垂直均佈位移荷載情況下的沉箱頂版，當柱徑愈大、剪跨-厚比愈小，其頂版勁度及極限承載強度愈大，極限承載強度對應之加載變位反而越小，且破壞機制為環繞柱與頂版交接處延伸至支承處，產生截頭圓錐貫穿剪力破壞面。
7. 梯形均佈位移荷載情況下的沉箱頂版，受載面積常因梯形形狀，易在較大荷載位移量處，形成應力集中，應變擠壓破壞，繼續向下延伸擴展至底部，但較大開裂處仍屬較大荷載位移之正下方。
8. 以柱直徑 4^{M}、2^{M} 兩種情況比較後，可知當墩柱直徑放大 2 倍時，載重面積加大後，當位移載重量之最大與最小量分別為 1.125^{MM} 和 -0.225^{MM} 時，頂面的最大變位量放大約 1.4 倍，底面的最大變位量將放大 2 倍。當最終位移載重量之最大與最小量分別為 11.25^{MM} 和 -4.5^{MM} 時，垂直極限承載力放大 2.56 倍，極限撓曲強度放大 6.66 倍，偏心距約放大 3.26 倍。
9. 柱直徑 2^{M}、2.5^{M}、3^{M}、3.5^{M}、4^{M}，分別以 ACI318-02 基礎版貫穿剪力設計、ACI318-02 壓拉桿模式設計及 DIANA 程式分析之結果，與目前沉箱頂版設計的極限承載力比平均約為 3.03、2.6、2.33、2.02、1.74 倍。
10. 所以當柱徑愈小在目前沉箱頂版使用之設計方法與分析結果差別愈大，而以 ACI318-02 壓拉桿模式之計算公式只考慮墩柱下之有效橫斷面作計算、與 DIANA 程式分析值作比較後，較能反應出沉箱頂版之極限承載值。

5.3 建議

1. 在本文中以程式分析作時並未考慮鋼筋與混凝土之握裹滑移(Bond slip)的界面行為，因此不易求得韌性區段，希望能在這方面修正，將能分析得更為準確。
2. 因此次分析的沉箱頂版礙於模型是以實際作橋樑施工設計之結構，結構體本身尺寸相當大，所以目前尚未有類似此實驗的結果可供比較，希望未來有類似的實驗以供參考，並推出一合理的經驗公式。

參考文獻

1. Abdallah, T. and David, H., “Three-Dimensional Simulation of Nonlinear Response of Reinforced Concrete Members Subjected to Impact Loading”, ACI Structural Journal, September-October 2000.
2. Watson, A. J. and Ang, T. H., “Reinforced Micro-concrete Beam under Impact Loading ” ,Concrete Structure under Impact and Impulsive Loading, RILEM, Berlin, June 1982.
3. Eibl, J., Block, K. and Kreuser, K., “Vergleichende Versuche and Stoßbelasteten Ballken und Platten mit Bewehrung aus Betonstahl 1100 bsw ” , Herkömmlichen betonstählen, Technical Report , Universität Karlsruhe, October 1983.
4. Moe, J., “Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footing under Concentrated Loads.” Development Bulletin D47, Portland Cement Association, Skokie, I11, April, 1961.
5. Philippe Menetrey., “Relationships between Flexural and Punching Failure.” ACI Structural Journal, July-August,1998.
6. Hallgren M , and Bjerke M., “Non-linear finite element analyses of punching shear failure of column footings”, Scandiaconsult , P.O. Box4205,SE-102 65 Stockholm, Sweden . Cement &Concrete Composites 24 491-496, 2002.
7. Zdenek P. Bazant ,and Zhiping Cao , “Size effect in punching shear failure of Slabs”,ACI Structural Journal, technical paper,January-February,1987.
8. 林英俊、林欽仁、林世隆 “鋼筋混凝土版之貫穿剪力”，中國土

木水利工程學刊，第七卷，第三期，1995。

9. Paramasivam P. , Ahmad I. ,and Mansur M. A., “Punching Shear Behavior of Restrained Ferrocement Slabs” , ACI Structural Journal ,September-October 2000,pp.765-773.

10. Bin Mu and Christian Meyer , “Bending and Punching Shear Strength of Fiber-Reinforced Glass Concrete Slabs”, ACI Material Journal, V.100, No.15, March-April 2003, pp.127-132.

11. Frits C. de Witte and Wijtze Pieter Kikstra, “DIANA User’s Manul”, TNO Building and Construction Research.

12. Kupfer H.B. , Hilsdorf H.K. and Rusch H. “Behavior of concrete under biaxial stress” , ACI Journal, vol.66, 1969, pp.556-566.

13. Chen, Wai-Fah , “Plasticity in Reinforced Concrete” , Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1982.

14. Pang, X. B., and Hsu, T., T., C., “Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear” , ACI Structural Journal ,November-December 1995 ,pp.665-679.

15. Pang, X. B., and Hsu, T., T., C., “Fixed Angle Softened Truss Model of Reinforced Concrete” , ACI Structural Journal ,March-April 1996 ,pp.197-207.

16. Schäfer, K., “Strut-and-Tie Models for the Design of Structural Concrete” , Notes of Workshop, Department of Civil Engineering, National Cheng Kung University, Tainan ,Taiwan ,March 1996, pp.140.

17. 李宏仁， “A Study of Strength of Reinforced Concrete

Beam-Column Joints for Earthquake Resistance”，國立台灣科技大學，營建工程系博士論文，2000。
18.涂瑞麟，“Investigation of Flexural Behavior of Self-Compacting Concrete Beams”，國立交通大學，土木工程系碩士論文，2003。
19.張嘉德，“沉箱與樁基礎之設計”，銀來圖書出版有限公司。
20.ACI Committee 318, “Building Code Requirements for Structural Concrete(ACI318-02) and Commentary(ACI318R-02)” ,American Concrete Institute, pp.372-384.
21.王權銘，“鋼筋混凝土設計”，東華出版社。
22.Nilson, A. H., “Design of Concrete Structures” , McGraw-Hill ,1997.
23.Bathe, K.J. and Cimento, A.P. “Some Practical Procedures for the solution of Nonlinear Finite Element Equations”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.22, 1980, pp.59-85.