


# 具裂縫 Mindlin 方形板之 有限元應力分析

研究生：劉存峰

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘 要



利用有限元素法較易於模擬複雜幾何之特性。本研究以二階形狀函數之有限元素法配合角函數，並求解具裂縫之 Mindlin 方形厚板靜力問題。角函數僅疊加於奇異點處之區域，用於描述裂縫尖端附近之應力奇異行為。本論文以收斂性分析，驗證所發展分析方法及電腦程式之正確性；並進一步探討具不同支承邊界條件、靜載、寬厚比及不同裂縫配置之方形厚板，對奇異點附近內力分佈之影響。依據結果顯示，在奇異點處加入角函數確實能有效率地提升奇異點附近內力解之準確性。

# Stress Analysis of Cracked Square Mindlin Plates Via a Finite Element Approach

Student: Tsun-Feng Liu

Adviser: C.S. Huang

Department of Civil Engineering  
National Chiao Tung University



It is well known that finite element approaches can describe the complex geometry of the problem under consideration very well. The work supplements corner functions to the traditional finite element solutions and solves the static problems for cracked square Mindlin plates. Corner functions are used only in the region near the crack tip to describe properly the stress singularity behaviors at the neighborhood of the crack tip. Convergence study is carefully performed to ensure the correctness of the proposed approach and the developed computer code. Then, the approach is applied to investigate the distributions of the stress resultants near the crack tips of cracked square plates with various boundary conditions, thickness to side length ratios, loading conditions and crack configurations. The obtained results show that the corner functions indeed enhance the accuracy of the solutions for stress resultants near the crack tip.

## 誌 謝

上人說：「善用力氣的人，不急不徐；善守理想的人，不猛不弛；一志向前、堅定不移，終可達成目標。」意味對事用心即成專業，有此論文之誕生首先要感謝恩師 黃炯憲教授，在我研究所期間不厭其煩解決我研究及生活上的問題。更感謝老師總是扮演背後那隻穩健的手，一次次的把我更推近目標，足可稱為傳道、授業、解惑者之表率。

再者特別感謝洪士林博士、劉俊秀博士、鄭復平博士及趙文成博士於論文口試期間抽空審查與提出建議，使本文內容更加充實完善。



在研究室裡大家同歡樂共奮鬥之影像還歷歷在目，我將永遠銘記於心。尤其感激博班明儒學長與威智學長，在我生活不順心或是研究遇到瓶頸時，你們總是不吝於提供各種解決妙方助我一臂之力，也感謝共同努力的好友志偉、加地、慎謙及宇祥，因為大家一起分享生活上的心情點滴，讓研究室變得更和諧與溫馨，同時也要向佳穎、勝彥、增蔚及小蓁學弟妹們加油打氣。

對於父母與兩位姊姊的苦心栽培，和祖母及大叔長期的關心，我感恩之情難以言喻，由於你們各方面無條件的支持，存峰才能有今日

階段性的成就，但我絕不會因過去而滿足，日後必將抱持謙虛學習之態度繼續精進；最後要感謝這一年多來一路陪伴及鼓勵我的女友嘉琪，因為妳的出現讓我看見美好的未來。由於要感謝的人眾多，紙短情長，恐不及一一列出，僅將本文獻給曾經關心及幫助過我的人。



劉存峰

謹誌於交通大學工程二館 405B 室

中華民國九十六年三月

# 目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	v
表目錄.....	vii
圖目錄.....	ix
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 文獻回顧.....	1
1.3 研究動機與方法.....	4
1.4 內容摘要.....	5
第二章 奇異漸近解之推導.....	7
2.1 基本公式.....	7
2.2 考慮彎矩奇異性的漸近解.....	9
2.3 考慮剪力奇異性的漸近解.....	15
第三章 有限元素結合角函數之平衡方程式推導.....	19
3.1 有限元素法的位移場表示式.....	19
3.2 以虛功法推導出大域勁度矩陣與大域外力矩陣.....	20
第四章 案例分析.....	30
4.1 角函數.....	30
4.1.1 角函數的採用.....	30
4.1.2 極座標轉換到卡氏座標.....	32
4.1.3 全域卡氏座標轉換到局部 $\xi$ 、 $\eta$ 座標.....	34
4.1.4 裂縫尖端的局部卡氏座標轉換.....	35

4.2 程式驗證.....	36
4.2.1 均佈荷重簡支板靜力分析.....	37
4.2.2 懸臂厚板靜力分析.....	38
4.2.3 具垂直邊界裂縫簡支方形板受均載之收斂性分析 .....	40
4.3 中間水平裂縫厚板靜力收斂性分析 .....	41
4.3.1 四端固定支承且 $c/b = 0.25$ 之方形裂縫厚板 .....	42
4.3.2 四端簡支承且 $c/b = 0.25$ 方形裂縫厚板 .....	44
4.4 案例分析.....	47
4.4.1 裂縫旋轉之方形厚板.....	47
4.4.2 四端簡支承且 $c/b = 0.1$ 之裂縫厚板 .....	50
第五章 結論與建議 .....	51
5.1 結論.....	51
5.2 建議.....	52
參考文獻.....	54
附 錄 A .....	57
附 表 .....	59
附 圖 .....	66



## 表目錄

表 4.1	均荷簡支板中點最大應力值.....	59
表 4.2	受均佈載重 $q$ 懸臂厚板在不同 $Y = \text{const.}$ 斷面之無因次 化平均內力值 .....	59
表 4.3	受板端彎矩 $\hat{M}$ 懸臂厚板在不同 $Y = \text{const.}$ 斷面之無因次 化平均內力值 .....	60
表 4.4	有限元素與有限元素配合角函數兩分析模式所得之內力 值比較.....	60
表 4.5	四端簡支承具邊緣裂縫厚板在均佈載重( $q$ )之角函數最低 階係數收斂性分析 .....	61
表 4.6	四端固定支承板在均佈載重( $q$ )奇異點之角函數最低階係 數收斂性分析 .....	61
表 4.7	四端簡支承板在均佈載重( $q$ )奇異點 Corner A 之角函數 最低階係數收斂性分析 .....	62
表 4.8	四端簡支承板受板端彎矩( $\hat{M}$ )奇異點 Corner A 之角函數 最低階係數收斂性分析 .....	62
表 4.9(a)	懸臂支承板受均佈載重( $q$ )奇異點 Corner A 之角函數最 低階係數收斂性分析 .....	63
表 4.9(b)	懸臂支承板受均佈載重( $q$ )奇異點 Corner B 之角函數最 低階係數收斂性分析 .....	63

表 4.10(a) 懸臂支承板受均佈載重( $q$ )奇異點 Corner A 之角函數最低階係數收斂性分析 ..... 64

表 4.10(b) 懸臂支承板受均佈載重( $q$ )奇異點 Corner B 之角函數最低階係數收斂性分析 ..... 64

表 4.11 懸臂支承板受均佈載重( $q$ )角函數最低階係數收斂解..... 65





## 圖目錄

圖 1.1	具應力奇異點厚板示意圖 .....	66
圖 2.1	板上內力之示意圖(修改 Reddy, 1999).....	66
圖 2.2	最小實部 $\lambda$ 值與扇形角之關係(節錄 Huang, 1994).....	67
圖 2.3	最小 $\bar{\lambda}$ 值與扇形角之關係(節錄 Huang, 1994) .....	67
圖 3.1	板上之剪力與彎矩示意圖 .....	68
圖 4.1	方形板裂縫與座標系統示意圖 .....	69
圖 4.2	極座標與卡式座標轉換示意圖 .....	69
圖 4.3	四邊型元素示意圖及其形狀函數定義 .....	70
圖 4.4	三角形元素示意圖及其形狀函數定義 .....	71
圖 4.5	裂縫尖端之座標轉換示意圖 .....	72
圖 4.6	一階剪力變形理論 (FSDT) 簡支承邊界條件.....	72
圖 4.7	sq1(a)網格切割圖 .....	73
圖 4.8	sq1(b)網格切割圖 .....	73
圖 4.9	四周邊界為 FFCF 之懸臂板示意 .....	74
圖 4.10	分析 FFCF 板所切割之網格圖 .....	74
圖 4.11	sq3 網格切割圖 .....	75
圖 4.12	裂縫與裂縫尖端示意圖 .....	75
圖 4.13	分析具邊界裂縫簡支板之網格切割圖 .....	76
圖 4.14	四端邊界為 CCCC 之裂縫厚板有限元素網格分析 模型 .....	77
圖 4.15	$\Delta = 0^\circ$ , 奇異點(Corner A)在 $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ 之計算 內力方向.....	78
圖 4.16	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 具裂縫四端固定支承(CCCC) 板受均佈載重之裂縫處內力收斂性分析 .....	80

圖 4.17	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 具裂縫四端固定支承 (CCCC)板受均佈載重之裂縫處內力收斂性分析.....	83
圖 4.18	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 具裂縫四端固定支承 (CCCC)板受均佈載重之裂縫處內力收斂性分析.....	86
圖 4.19	四端邊界為 SSSS 之裂縫厚板有限元素網格分析模型	87
圖 4.20	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 具裂縫四端簡支承(SSSS) 板受均佈載重之裂縫處內力收斂性分析 .....	89
圖 4.21	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 具裂縫四端簡支承(SSSS) 板受均佈載重之裂縫處內力收斂性分析 .....	92
圖 4.22	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 具裂縫四端簡支承(SSSS) 板受均佈載重之裂縫處內力收斂性分析 .....	95
圖 4.23	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 具裂縫四端簡支承(SSSS) 板受板端彎矩之裂縫處內力收斂性分析 .....	97
圖 4.24	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 具裂縫四端簡支承(SSSS) 板受板端彎矩之裂縫處內力收斂性分析 .....	100
圖 4.25	$c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 具裂縫四端簡支承(SSSS) 板受板端彎矩之裂縫處內力收斂性分析 .....	101
圖 4.26(a)	$c/b = 0.25$ 網格與角函數階數應力強度無因次收斂性 分析.....	104
圖 4.26(b)	不同裂縫開口角度與角函數階數應力強度無因次收 斂性分析 .....	104
圖 4.27(a)	$\Delta = 30^\circ$ , 奇異點(Corner A)在 $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ 之計算 內力方向 .....	105
圖 4.27(b)	$\Delta = 60^\circ$ , 奇異點(Corner A)在 $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ 之計算	

	內力方向 .....	105
圖 4.27(c)	$\Delta = 90^\circ$ , 奇異點(Corner A)在 $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ 之計算	
	內力方向 .....	106
圖 4.27(d)	$\Delta = 120^\circ$ , 奇異點(Corner A) $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ 之計算	
	內力方向 .....	106
圖 4.27(e)	$\Delta = 150^\circ$ , 奇異點(Corner A)在 $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ 計算	
	內力方向 .....	107
圖 4.28	裂縫尖端 Corner A 分別旋轉 30 度(a)及 150 度(b)之 懸臂裂縫厚板有限元素網格分析模型 .....	108
圖 4.29	$\Delta = 30^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	109
圖 4.30	$\Delta = 30^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	110
圖 4.31	$\Delta = 30^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	111
圖 4.32	$\Delta = 150^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	112
圖 4.33	$\Delta = 150^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	113
圖 4.34	$\Delta = 150^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	114
圖 4.35	裂縫尖端 Corner A 分別旋轉 60 度(c)及 120 度(d)之 懸臂裂縫厚板有限元素網格分析模型 .....	115

圖 4.36	$\Delta = 60^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	116
圖 4.37	$\Delta = 60^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	117
圖 4.38	$\Delta = 60^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	118
圖 4.39	$\Delta = 120^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	119
圖 4.40	$\Delta = 120^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	120
圖 4.41	$\Delta = 120^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	121
圖 4.42	裂縫尖端 Corner A 旋轉 90 度與 Corner B 旋轉-90 度 之懸臂裂縫厚板有限元素網格分析模型 .....	122
圖 4.43	$\Delta = 90^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	123
圖 4.44	$\Delta = 90^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	124
圖 4.45	$\Delta = 90^\circ, c/b = 0.25, b/h = 10, \theta = 90^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	125
圖 4.46	$c/b = 0.1$ 且四端邊界為 SSSS 之方形裂縫厚板有限元 素網格分析模型 .....	126
圖 4.47	$\Delta = 0^\circ, c/b = 0.1, b/h = 10, \theta = 0^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	127
圖 4.48	$\Delta = 0^\circ, c/b = 0.1, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時	

	裂縫處內力分佈 .....	128
圖 4.49	$\Delta = 0^\circ, c/b = 0.1, b/h = 10, \theta = 45^\circ$ 懸臂板受均載時 裂縫處內力分佈 .....	129
圖 4.50	不同板厚之示意圖 .....	130
圖 4.51	$c/b = 0.1$ 板厚與角函數階數應力強度無因次收斂性 分析.....	131

