第一章　緒論

§1.1 研究背景

近代工業發展上，厚、薄板已廣泛應用於各類工程領域中，例如土木運輸、機電通訊及化學、生醫工程，各種厚、薄板理論都扮演其重要地位。依據 Kirchhoff hypothesis，古典板 (CPT) 沒有考慮橫向剪力變形(transverse shear deformation)與旋轉慣量(rotary inertia)，僅適用寬厚比(b/h)大於 20 之薄板結構。

然而現今科學技術常應用於高速、高壓、高溫、強輻射及特殊複合材料之工程環境要求，板厚度增加是趨勢所致。隨著寬厚比減少，所造成之剪力變形與旋轉慣量問題則相形重要；不然對厚板結構而言將導致低估撓度及高估其振動頻率。Mindlin [1951]考慮剪力變形與旋轉慣量對板之影響，並利用剪力修正因子κ^2(shear correction factor)，作為厚板理論之基礎，所發展之一階剪力變形理論 (FSDT)，逐漸受到重視。此外，以厚板理論當成分析基礎的特殊材料與功能梯度材料，在工程中也已廣泛獲得應用，可見厚板及其理論在當今之重要性。

§1.2 文獻回顧

本研究從推導一階剪力變形理論的應力奇異漸近解，再將此解應用於 Mindlin 板理論之有限元素法，探討具有尖端裂縫(crack tip)之方形板，以修正在奇異點及其附近元素之應力行為。傳統上，有限

元素法較易於模擬複雜之幾何及材料組合之特性，當面臨分析具有應力奇異之問題時，其分析技巧概分為；(1)奇異元素(singular element)：例如 Banks-Sills 和 Einav [1987]則利用九個節點 Langrangian 矩形元素建立奇異元素，為了模擬$1/\sqrt{r}$(當$r \rightarrow 0$)所導致之應力奇異性，將裂縫尖端之節點移至對角線 1/4 處，則以此元素所得之奇異應力比八個節點更加準確。(2) 高階元素(high order element)： Woo 和 Basu [1989]以高階 P-version 圓柱殼元素探討應力奇異問題，並分析其剛體模態、round-off error 及收斂特性。(3) 強化元素(enrich element)：Gifford 和 Hilton [1978]利用 12 個節點的傳統元素加上以開裂模式 I 和 II 所組成的強化元素，探討各種 2-D 的應力問題。(4)擴展有限元素法(extended finite element method)：Dowbow [2000A]利用具改進不連續性及近裂縫端函數(near-tip function)元素所建構之擴展有限元素法，來模擬具裂縫之無限域板或有限域板裂縫及其裂縫成長行為。(5)混合元素(hterosis element)：Butalia [1990]利用 9 個節點之 Mindlin 混合元素，在不同支承邊界條件及受均佈載重下，計算具銳角斜型板之奇異性解。

上述之方法一般可歸納為兩大類：一為建構具有奇異性之元素來正確的描述應力隨 r 趨近於零之奇異階數；另一種為疊加應力奇異解於有限元素中，而此類方法又可為兩種處理方式：(1)此應力奇異解涵

蓋整個問題之幾何區域 Igarashi 和 Honma [1996]；(2)此應力奇異解只涵蓋奇異點及其附近區域，然後再用"transfinite elements"，連接該區域與與外面由正規(regular)有限元素所涵蓋之其他區域 Yosibash 和 Schiff [1993]。本研究將採用類似(2)之方式，但兩區域交界處以邊界函數之方式處理來取代"transfinite elements"。

探討厚板理論中幾何所引致應力奇異行為之文獻並不多見，針對 Mindlin 一階剪力板奇異解問題之研究，Burton 和 Sinclair [1986]利用應力位能函數探討由六個邊條件所引起之應力奇異解，但此解並沒有考慮剪力造成的奇異性。Huang 等人 [1994]則透過求取徑向簡支撐扇形 Mindlin 板之正確解，探討應力奇異現象。Burton 和 Sinclair [1986]解中，只能描述彎矩奇異性，無法滿足剪力奇異性的條件，然而 Huang 等人 [1994]解中，卻證明了剪力奇異解之存在。Huang [2003]更利用特徵函數展開法求解扇形板各種徑向邊界條件組合之應力奇異解；此奇異解具有彎矩奇異性及剪力奇異性。

總觀前人之研究，針對裂縫厚板奇異點附近之彎矩與剪力奇異性研究尚少，故本研究將以 Mindlin 一階剪力變形理論為基底，以二階形狀函數之有限元素法，導入具描述奇異性之彎矩與剪力漸近解，分析在不同支承邊界條件、靜載條件、寬厚比、裂縫角度、裂縫位置及長度之裂縫板，對奇異點及其附近元素之內力分佈影響，希望藉由考

慮各控制變數作用下，解析奇異點及其附近元素之無因次奇異性彎矩與剪力，使本論文對於 FSDT 板有所貢獻。

§1.3 研究動機與方法

板元件於結構設計中，常會面臨奇異應力(singularity stress)之問題，而此奇異應力發生處統稱為奇異點，此處常是結構破壞之始點，所以分析此奇異點之力學行為有其必要性。通常奇異點可能發生於(England [1971]；Leissa [2001]) (1)幾何形狀之不平滑處：如裂縫、尖銳切角、厚度不連續或邊界條件；(2)載重：如單點載重、衝擊載重或載重強度之急遽改變；(3)材料性質：如層狀複合材料性質之陡變。當數值分析含有奇異應力問題時，此奇異點之特性必須被正確之模擬，方能得到準確之解。Huang [2003]推導出 Mindlin 板在各種裂縫邊界組合之彎矩奇異及剪力奇異漸近解，此漸近解可正確的描述出板結構在應力奇異點及其附近之力學行為。然而準確地決定應力奇異行為的重要性不僅僅只是對破壞力學 Williams [1966]而言，對於任一含尖銳角之複雜問題進行數值分析 Bartholomew [1978]也是一樣重要。

為說明本研究應力奇異解之分析模式，就以圖 1.1 所示為例，整個板之區域為Ω，A 點為具有奇異應力之 reentrant corner。以傳統有限元素法於Ω內建立分析網格，並選擇適當之形狀函數(shape function)來處理；為了正確的描述 reentrant corner 處之彎矩及剪力奇異特性，

於該處附近劃定區域Ω_c(灰斜線區域)。Γ_c (不含 reentrant corner 之兩邊)為Ω_c之邊界與Ω中之某些元素的邊是完全重疊。於Ω_c中，引入彎矩及剪力漸近解。所以，Ω_c內之位移場是以C^∞之應力奇異函數結合C^0傳統有限元形狀函數來表示。不但在Ω_c內之位移函數只侷限於Ω_c，故與有限元素位移函數之相互關係亦僅侷限於Ω_c。由Ω及Ω_c中之位移函數所構成之大域勁度(global stiffness matrix)及大域外力向量(global force vector)，得到一靜力平衡方程式，解出大域位移向量(global displacement vector)後，配合力與位移關係式即可得到板內任一座標點之內力解。

§1.4 內容摘要

本論文之內容概述於下

第一章：緒論。藉由說明研究背景、動機、方法及文獻探討，明確的指出研究內容與方法。

第二章：奇異漸近解之推導。依 Huang [2003]之推導過程闡述本論文所需建構之自由邊界彎矩與剪力漸近解。

第三章：有限元素結合角函數之平衡方程式推導。介紹 Mindlin 板理論的控制方程配合由有限元素及角函數共同組成之疊合位移函數，並以虛功法推導出所需之大域勁度矩陣及大域外力向量，導出所需之靜力方程進而求取大域位移向量，藉由所

得之位移量利用力與位移關係式得到全部Ω區域之各奇異應力與內力分佈。

第四章：案例分析。利用收斂性分析個別驗證與探討具不同支承邊界條件、靜載、寬厚比及不同裂縫位置、角度、長度之方形厚板靜力解，案例可分為有限元程式驗證與實例分析兩大部分。

第五章：結論與建議。將本論文研究所得之結果做完整之結論，並針對所遇到之問題提出建議與分析方法

第二章 奇異漸近解之推導

本研究考慮 Mindlin 板理論，配合二階形狀函數有限元素法，並導入彎矩與剪力奇異性函數於奇異點附近之元素中，藉以分析具有裂縫的板之奇異應力。此方法不同傳統有限元素法分析有奇異應力問題之方式。以下依 Huang [2003]之推導，簡介本文所需之奇異漸近解或角函數(corner function)。

§2.1 基本公式

利用一階剪力變形板理論，並配合漢米爾頓變分原理(Hamilton Principium)，在未施加外力的平衡方程式，以極座標的表示式如下：

$$M_{r,r} + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0$$

$$M_{r\theta,r} + \frac{1}{r} M_{\theta,\theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_\theta = 0$$

$$Q_{r,r} + \frac{Q_r}{r} + \frac{1}{r} Q_{\theta,\theta} = 0 \tag{2.1}$$

力與位移分量的關係式為：

$$M_r = -\overline{D}[\Psi_{r,r} + \nu r^{-1}(\Psi_r + \Psi_{\theta,\theta})]$$

$$M_\theta = -\overline{D}[r^{-1}(\Psi_r + \Psi_{\theta,\theta}) + \nu \Psi_{r,r}]$$

$$M_{r\theta} = \frac{-(1-\nu)\overline{D}}{2}[r^{-1}(\Psi_{r,\theta} - \Psi_\theta) + \Psi_{\theta,r}]$$

$$Q_r = \kappa^2 Gh(-\Psi_r + W_{,r})$$

$$Q_\theta = \kappa^2 Gh(-\Psi_\theta + r^{-1} W_{,\theta}) \qquad (2.2)$$

式(2.2)中，“,”表示對θ或是r之微分，W為z方向位移，Ψ_r與Ψ_θ分別為徑向與環向撓曲造成中平面上之轉角。h為板厚度，$\overline{D} = Eh^3/12(1-\nu^2)$為撓曲剛度，$E$為彈性模數，$\nu$為波松比，$G = E/2(1+\nu)$為剪力模數；$\kappa^2$為剪力修正因子，Mindlin 板取為$\pi^2/12$。

如圖 2.1 所示，M_r為在$r = \text{const}$的截面，沿θ方向之單位長彎曲力矩；M_θ為在$\theta = \text{const}$的截面，沿r方向之單位長彎曲力矩；$M_{r\theta}$為$r = \text{const}$的截面沿θ方向之單位長扭轉力矩；或是$\theta = \text{const}$的截面沿r方向之單位長扭轉力矩，而Q_r與Q_θ分別為在$r = \text{const}$與$\theta = \text{const}$截面上，沿z方向單位長剪力。將式(2.2)代入式(2.1)中可得到以位移分量所表示的平衡方程式：

$$\frac{\overline{D}}{2}\{(1-\nu)(\Psi_{r,rr} + r^{-1}\Psi_{r,r} + r^{-2}\Psi_{r,\theta\theta} - r^{-2}\Psi_r - 2r^{-2}\Psi_{\theta,\theta})$$

$$+ (1+\nu)(\Psi_{r,rr} - r^{-2}\Psi_r + r^{-1}\Psi_{r,r} - r^{-2}{}_{\theta,\theta} + r^{-1}\Psi_{\theta,\theta r})\}$$

$$+ \kappa^2 Gh(-\Psi_r + W_{,r}) = 0 \qquad (2.3a)$$

$$\frac{\overline{D}}{2}\{(1-\nu)(\Psi_{\theta,rr} + r^{-1}\Psi_{\theta,r} + r^{-2}\Psi_{\theta,\theta\theta} - r^{-2}\Psi_\theta + 2r^{-2}\Psi_{r,\theta})$$

$$+ (1+\nu)(r^{-2}\Psi_{\theta,\theta\theta} + r^{-2}\Psi_{r,\theta} + r^{-1}\Psi_{\theta,\theta r})\}$$

$$+ \kappa^2 Gh(-\Psi_\theta + r^{-1} W_{,\theta}) = 0 \qquad (2.3b)$$

$$\kappa^2 Gh(W_{,rr} + r^{-1}W_{,r} + r^{-2}W_{,\theta\theta} - \Psi_{r,r} - r^{-1}\Psi_r - r^{-1}\Psi_{\theta,\theta}) = 0. \qquad (2.3c)$$

利用分離變數的觀念，將式(2.3)中的三個位移分量假設成下列形式：

$$\Psi_r(r,\theta)=e^{p\theta}\psi_r(r),\quad \Psi_\theta(r,\theta)=e^{p\theta}\psi_\theta(r)\ \text{和}\ W(r,\theta)=e^{p\theta}w(r) \tag{2.4}$$

其中，p 為一複數。將式(2.4)代入式(2.3)中，得

$$\frac{\overline{D}}{2}\{(1-\nu)(\psi_r''+r^{-1}\psi_r'-(1+p^2)r^{-2}\psi_r+2pr^{-2}\psi_\theta)$$
$$+(1+\nu)(\psi_r''-r^{-2}\psi_r+r^{-1}\psi_r'-pr^{-2}\psi_\theta+pr^{-1}\psi_\theta')\}$$
$$+\kappa^2Gh(-\psi_r+w')=0 \tag{2.5a}$$

$$\frac{\overline{D}}{2}\{(1-\nu)(\psi_\theta''+r^{-1}\psi_\theta'+(p^2-1)r^{-2}\psi_\theta+2pr^{-2}\psi_r)$$
$$+(1+\nu)(p^2r^{-2}\psi_\theta+pr^{-2}\psi_r+pr^{-1}\psi_r')\}$$
$$+\kappa^2Gh(-\psi_\theta+pr^{-1}w)=0 \tag{2.5b}$$

$$\kappa^2Gh(w''+r^{-1}w'+p^2r^{-2}w-\psi_r'-r^{-1}\psi_r-pr^{-1}\psi_\theta)=0 \tag{2.5c}$$

其中“ ′ ”表示對 r 微分，式(2.5)為一組變係數常微分方程，可利用 Frobenius 級數求解式(2.5)。

§2.2 考慮彎矩奇異性的漸近解

假設板三個與 r 相關之位移函數為：

$$\psi_r(r)=\sum_{m=0}a_{2m}r^{\lambda+2m}\ ，\ \psi_\theta(r)=\sum_{m=0}b_{2m}r^{\lambda+2m}\ \text{和}\ w(r)=\sum_{m=0}c_{2m}r^{\lambda+2m+1} \tag{2.6}$$

λ亦可為一複數。當 r 趨近於 0 時，λ之實數部份必須大於 0，以滿足位移分量的常規條件(regularity conditions) 。式(2.6)代入式(2.2)，可發現其造成在 $r=0$ 附近的彎矩奇異(singularity moment)，但不會引致剪力的奇異性。式(2.6)代入式(2.5)，整理得

$$\frac{\overline{D}}{2}\left\{\sum_{m=0}[(-2+2(2m+\lambda)^2+p^2(1-\nu))a_{2m}+p((\lambda+2m)(1+\nu)-3+\nu)b_{2m}]r^{\lambda+2m-2}\right\}$$

$$+\sum_{m=0}\kappa^2 Gh[-a_{2m}+(\lambda+2m+1)c_{2m}]r^{\lambda+2m}=0 \tag{2.7a}$$

$$\frac{\overline{D}}{2}\left\{\sum_{m=0}[(3-\nu+(1+\nu)(\lambda+2m))pa_{2m}+((1-\nu)((\lambda+2m)^2+p^2-1)\right.$$

$$\left.+(1+\nu)p^2)b_{2m}]r^{\lambda+2m-2}\right\}+\sum_{m=0}\kappa^2 Gh[-b_{2m}+pc_{2m}]r^{\lambda+2m}=0 \tag{2.7b}$$

$$\sum_{m=0}[((\lambda+2m+1)^2+p^2)c_{2m}-(\lambda+2m+1)a_{2m}-pb_{2m}]r^{\lambda+2m-1}=0 \tag{2.7c}$$

滿足式(2.7)， r 隨不同階數的係數必須要為零。因此，各係數之中會有遞迴關係如下：

$$\frac{\overline{D}}{2}\{[(-2+2(2m+2+\lambda)^2+p^2(1-\nu)]a_{2m+2}+p[(\lambda+2m+2)(1+\nu)\}$$

$$-3+\nu]b_{2m+2}=-\kappa^2 Gh[-a_{2m}+(\lambda+2m+1)c_{2m}], \tag{2.8a}$$

$$\frac{\overline{D}}{2}\{[3-\nu+(1+\nu)(\lambda+2m+2)]pa_{2m+2}+[(1-\nu)((\lambda+2m+2)^2+p^2-1)$$

$$+(1+\nu)p^2]b_{2m+2}\}=-\kappa^2 Gh[-b_{2m}+pc_{2m}], \tag{2.8b}$$

$$-(\lambda+2m+3)a_{2m+2}-pb_{2m+2}+[(\lambda+2m+3)^2+p^2]c_{2m+2}=0 \tag{2.8c}$$

另外，將式(2.7)中 r 的最低項係數提出整理得

$$[(1-\nu)]p^2+2\lambda^2-2]a_0+p[(1+\nu)\lambda-3+\nu]b_0=0 \tag{2.9a}$$

$$p[3-\nu+(1+\nu)\lambda]a_0+[(1-\nu)(\lambda^2+p^2-1)+(1+\nu)p^2]b_0=0 \tag{2.9b}$$

$$-(\lambda+1)a_0-pb_0+[(\lambda+1)^2+p^2]c_0=0 \tag{2.9c}$$

式(2.9)為線性代數齊次方程組；其中 a_0，b_0 及 c_0 有非零解 (nontrivial solution)，得 p 須有四個不同的根為

$$p=\pm i(\lambda-1) \quad 和 \quad p=\pm i(\lambda+1) \tag{2.10}$$

當 $p=\pm i(\lambda-1)$，$b_0=\pm ia_0$，且 c_0 是未定係數。

當 $p=\pm i(\lambda+1)$，$b_0=\pm k_1 a_0$，$c_0=\gamma_1 a_0$ (2.11)

其中

$$k_1=-\frac{i[2(1-\nu)+(1+\nu)(\lambda+1)]}{[2(1-\nu)-(1+\nu)(\lambda-1)]} \tag{2.12a}$$

$$\gamma_1=\frac{\nu-1}{-3+\lambda+\nu+\nu\lambda} \tag{2.12b}$$

因此，從式(2.3)推導知，

$$\Psi_r=e^{i(\lambda+1)\theta}\sum_{m=0}a_{2m,1}r^{\lambda+2m}+e^{-i(\lambda+1)\theta}\sum_{m=0}a_{2m,2}r^{\lambda+2m}+e^{i(\lambda-1)\theta}\sum_{m=0}a_{2m,3}r^{\lambda+2m}+e^{-i(\lambda-1)\theta}\sum_{m=0}a_{2m,4}r^{\lambda+2m} \tag{2.13a}$$

$$\Psi_\theta=e^{i(\lambda+1)\theta}\sum_{m=0}b_{2m,1}r^{\lambda+2m}+e^{-i(\lambda+1)\theta}\sum_{m=0}b_{2m,2}r^{\lambda+2m}+e^{i(\lambda-1)\theta}\sum_{m=0}b_{2m,3}r^{\lambda+2m}+e^{-i(\lambda-1)\theta}\sum_{m=0}b_{2m,4}r^{\lambda+2m} \tag{2.13b}$$

$$W=e^{i(\lambda+1)\theta}\sum_{m=0}c_{2m,1}r^{\lambda+2m+1}+e^{-i(\lambda+1)\theta}\sum_{m=0}c_{2m,2}r^{\lambda+2m+1}+e^{i(\lambda-1)\theta}\sum_{m=0}c_{2m,3}r^{\lambda+2m+1}+e^{-i(\lambda-1)\theta}\sum_{m=0}c_{2m,4}r^{\lambda+2m+1} \tag{2.13c}$$

其中 $b_{0,1}=ia_{0,1}$，$b_{0,2}=-ia_{0,2}$，$b_{0,3}=k_1a_{0,3}$，$b_{0,4}=-k_1a_{0,4}$，$c_{0,3}=\gamma_1a_{0,3}$，$c_{0,4}=\gamma_1a_{0,4}$；而 $a_{0,1}$，$a_{0,2}$，$a_{0,3}$，$a_{0,4}$，$c_{0,1}$ 和 $c_{0,2}$ 為未定係數。式(2.13)

中的其他係數可從式(2.8)來決定。

所以一個具有尖角的板，可寫成下列的位移分量來表示出它的奇異性：

$$
\begin{aligned}
\Psi_r(r,\theta) &= (A_1\cos(\lambda+1)\theta + A_2\sin(\lambda+1)\theta + A_3\cos(\lambda-1)\theta \\
&\quad + A_4\sin(\lambda-1)\theta r^{\lambda} + O(r^{\lambda+2}), \\
\Psi_\theta(r,\theta) &= (A_2\cos(\lambda+1)\theta - A_1\sin(\lambda+1)\theta + k_2A_4\cos(\lambda-1)\theta \\
&\quad - k_2A_3\sin(\lambda-1)\theta)r^{\lambda} + O(r^{\lambda+2}), \\
W(r,\theta) &= (C_1\cos(\lambda+1)\theta + C_2\sin(\lambda+1)\theta + \gamma_1A_3\cos(\lambda-1)\theta \\
&\quad + \gamma_1A_4\sin(\lambda-1)\theta)r^{\lambda+1} + O(r^{\lambda+3}),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

上式 $A_1 = a_{0,1} + a_{0,2}$，$A_2 = i(a_{0,1} - a_{0,2})$，$A_3 = a_{0,3} + a_{0,4}$，$A_4 = i(a_{0,3} - a_{0,4})$，$C_1 = c_{0,1} + c_{0,2}$，$C_2 = i(c_{0,1} - c_{0,2})$，$k_2 = -ik_1$。$O(r^{\lambda+2})$與$O(r^{\lambda+3})$代表彎矩奇異角函數的高階項餘項。這些係數決定於徑向邊界條件。

本文所考慮的案例為具有自由邊界條件之方形裂縫板，其邊界條件為：

$$
M_\theta(r,\pm\frac{\alpha}{2}) = M_{r\theta}(r,\pm\frac{\alpha}{2}) = Q_\theta(r,\pm\frac{\alpha}{2}) = 0 \tag{2.15}
$$

其中，α 為特定楔形開口角度，可將 $\Psi_r(r,\theta)$、$\Psi_\theta(r,\theta)$、$W(r,\theta)$ 分成下列所示的對稱及反對稱部分，

對稱：

$$\Psi_r(r,\theta) = (A_1\cos(\lambda+1)\theta + A_3\cos(\lambda-1)\theta)r^{\lambda},$$

$$\Psi_\theta(r,\theta) = (-A_1\sin(\lambda+1)\theta - k_2A_3\sin(\lambda-1)\theta)r^{\lambda},$$

$$W(r,\theta) = (C_1\cos(\lambda+1)\theta + \gamma_1A_3\cos(\lambda-1)\theta)r^{\lambda+1} \tag{2.16}$$

反對稱：

$$\Psi_r(r,\theta) = (A_2\sin(\lambda+1)\theta + A_4\sin(\lambda-1)\theta)r^{\lambda},$$

$$\Psi_\theta(r,\theta) = (A_2\cos(\lambda+1)\theta + k_2A_4\cos(\lambda-1)\theta)r^{\lambda},$$

$$W(r,\theta) = (C_2\sin(\lambda+1)\theta + \gamma_1A_4\sin(\lambda-1)\theta)r^{\lambda+1} \tag{2.17}$$

將式(2.16)與(2.17)分別代入式(2.15)，可以各得到一組三元一次聯立方程式：

對稱：

$$A_1\lambda(1-\nu)\cos(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) + A_3(k_2(\lambda-1)-\lambda\nu-1)\cos(\frac{\lambda-1}{2}\alpha) = 0$$
$$-2A_1\lambda\sin(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) - A_3(1+k_2)(\lambda-1)\sin(\frac{\lambda-1}{2}\alpha) = 0$$
$$-A_1\sin(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) + A_3(\lambda\gamma_1-k_2-\gamma_1)\sin(\frac{\lambda-1}{2}\alpha) + C_1(\lambda+1)\sin(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) = 0$$
$$\tag{2.18}$$

反對稱：

$$A_2\lambda(1-\nu)\sin(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) + A_4(k_2(\lambda-1)-\lambda\nu-1)\sin(\frac{\lambda-1}{2}\alpha) = 0$$
$$2A_2\lambda\cos(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) + A_4(1+k_2)(\lambda-1)\cos(\frac{\lambda-1}{2}\alpha) = 0$$
$$A_2\cos(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) - A_4(\lambda\gamma_1-k_2-\gamma_1)\cos(\frac{\lambda-1}{2}\alpha) - C_2(\lambda+1)\cos(\frac{\lambda+1}{2}\alpha) = 0$$
$$\tag{2.19}$$

因為A_1、A_3、C_1和A_2、A_4、C_2不可全部為零，所以以上兩聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於0。結果可得到兩條特徵方程式：

對稱：

$$\sin\lambda\alpha = -\lambda\sin\alpha \tag{2.20}$$

反對稱：

$$\sin\lambda\alpha = \lambda\sin\alpha \tag{2.21}$$

將式(2.20)與(2.21)代回式(2.18)、(2.19)可解出A_1、A_2等係數。因此得到邊界條件為自由端的彎矩奇異漸近解整理如下：

對稱：

$$\Psi_r(r,\theta) = r^{\lambda}\{\eta_1\cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta\},$$

$$\Psi_\theta(r,\theta) = r^{\lambda}\{-\eta_1\sin(\lambda+1)\theta - k_2\sin(\lambda-1)\theta\},$$

$$W(r,\theta) = r^{\lambda+1}\{\eta_2\cos(\lambda+1)\theta + \gamma_1\cos(\lambda-1)\theta\}, \tag{2.22}$$

其中

$$\eta_1 = -\frac{k_2(\lambda-1)-\lambda\nu-1}{\lambda(1-\nu)}\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2}$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1+\lambda} - \frac{(\lambda\gamma_1-k_2-\gamma_1)\sin(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda)\sin(\lambda+1)\alpha/2}$$

反對稱：

$$\Psi_r(r,\theta) = r^{\lambda}\{\eta_3\sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta\},$$

$$\Psi_\theta(r,\theta)=r^{\lambda}\{\eta_3\cos(\lambda+1)\theta+k_2\cos(\lambda-1)\theta\},$$

$$W(r,\theta)=r^{\lambda+1}\{\eta_4\sin(\lambda+1)\theta+\gamma_1\sin(\lambda-1)\theta\}, \tag{2.23}$$

其中

$$\eta_3=-\frac{k_2(\lambda-1)-\lambda\nu-1}{\lambda(1-\nu)}\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2}$$

$$\eta_4=\frac{\eta_3}{1+\lambda}-\frac{(\lambda\gamma_1-k_2-\gamma_1)\cos(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda)\cos(\lambda+1)\alpha/2}$$

§2.3 考慮剪力奇異性的漸近解

為了考慮剪力的奇異特性，將板三個位移函數與 r 相關的函數假設成：

$$\psi_r=\sum_{n=0}\bar{a}_{2n}r^{\bar{\lambda}+2n+1}\text{，}\psi_\theta=\sum_{n=0}\bar{b}_{2n}r^{\bar{\lambda}+2n+1}\text{，}w=\sum_{2n=0}\bar{c}_{2n}r^{\bar{\lambda}+2n} \tag{2.24}$$

式(2.20)中，$\bar{\lambda}$是一個帶有正實部的複數，可滿足位移分量在$r=0$附近的常規條件(regularity conditions)。式(2.24)代入式(2.2)，可發現其造成在$r=0$附近的剪力奇異(singularity of shear force)，但不會引致彎矩的奇異性。

有關剪力奇異性的漸近解之推導過程和前一節彎矩奇異性的漸近解相同，在這裡便不再贅述。經過計算之後得三個位移表示式如下：

$$\Psi_r(r,\theta)=(\bar{A}_1\cos\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_2\sin\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_3\cos(2+\bar{\lambda})\theta$$

$$+\bar{A}_4\sin\left(2+\bar{\lambda}\right)\theta)r^{\bar{\lambda}+1}+O\left(r^{\bar{\lambda}+3}\right),$$

$$\Psi_\theta(r,\theta)=(\bar{B}_1\cos\bar{\lambda}\theta-\bar{B}_2\sin\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_4\cos(2+\bar{\lambda})\theta$$

$$-\bar{A}_3\sin\left(2+\bar{\lambda}\right)\theta)r^{\bar{\lambda}+1}+O\left(r^{\bar{\lambda}+3}\right),$$

$$W(r,\theta)=(\bar{l}_1\left(\bar{A}_1\cos\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_2\sin\bar{\lambda}\theta\right)+\bar{l}_2\left(\bar{B}_2\cos\bar{\lambda}\theta-\bar{B}_1\sin\bar{\lambda}\theta\right))r^{\bar{\lambda}}+O\left(r^{\bar{\lambda}+2}\right),$$

$$(2.25)$$

上式中，$O\left(r^{\bar{\lambda}+2}\right)$與$O\left(r^{\bar{\lambda}+3}\right)$代表剪力奇異角函數的高階項餘項，

$$\bar{l}_1=\frac{-\bar{D}}{2\kappa^2Gh}\left(3-\nu+\left(1+\nu\right)\left(1+\bar{\lambda}\right)\right)$$

$$\bar{l}_2=\frac{\bar{D}}{2\kappa^2Gh}\left(2\left(1-\nu\right)-\left(1+\nu\right)\bar{\lambda}\right)$$

如同 2-2 推導的過程，將式(2.25)分成對稱及反對稱兩部分，

對稱：

$$\Psi_r(r,\theta)=(\bar{A}_1\cos\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_3\cos(2+\bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$\Psi_\theta(r,\theta)=(-\bar{B}_2\sin\bar{\lambda}\theta-\bar{A}_3\sin(2+\bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$W(r,\theta)=(\bar{l}_1\bar{A}_1\cos\bar{\lambda}\theta+\bar{l}_2\bar{B}_2\cos\bar{\lambda}\theta)r^{\bar{\lambda}}, \qquad (2.26)$$

反對稱：

$$\Psi_r(r,\theta)=(+\bar{A}_2\sin\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_4\sin(2+\bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$\Psi_\theta(r,\theta)=(\bar{B}_1\cos\bar{\lambda}\theta+\bar{A}_4\cos(2+\bar{\lambda})\theta)r^{\bar{\lambda}+1},$$

$$W(r,\theta)=(\bar{l}_1\bar{A}_2\sin\bar{\lambda}\theta-\bar{l}_2\bar{B}_1\sin\bar{\lambda}\theta)r^{\bar{\lambda}}, \qquad (2.27)$$

將式(2.26)與(2.27)代入式(2.15)中，可分別得到一組三元一次聯立方

程式如下：

對稱：

$$\bar{A}_1\left(1+\nu+\bar{\lambda}\nu\right)\cos(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})+\bar{A}_3\left(1+\bar{\lambda}\right)\left(-1+\nu\right)\cos(\frac{\bar{\lambda}+2}{2}\alpha)+\bar{B}_2\bar{\lambda}\cos(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})=0$$

$$-\bar{A}_1\bar{\lambda}\sin(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})-2\bar{A}_3\left(1+\bar{\lambda}\right)\sin(\frac{\bar{\lambda}+2}{2}\alpha)+\bar{B}_2\bar{\lambda}\sin(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})=0$$

$$\bar{A}_1\bar{l}_1\bar{\lambda}\sin(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})+\bar{B}_2\bar{l}_2\bar{\lambda}\sin(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})=0 \tag{2.28}$$

反對稱項：

$$\bar{A}_2\left(1+\nu+\nu\bar{\lambda}\right)\sin(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})+\bar{A}_4\left(1+\bar{\lambda}\right)\left(\nu-1\right)\sin(\frac{\bar{\lambda}+2}{2}\alpha)-\bar{B}_1\bar{\lambda}\sin(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})=0$$

$$\bar{A}_2\bar{\lambda}\cos(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})+2\bar{A}_4\left(1+\bar{\lambda}\right)\cos(\frac{\bar{\lambda}+2}{2}\alpha)+\bar{B}_1\bar{\lambda}\cos(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})=0$$

$$-\bar{l}_1\bar{A}_2\bar{\lambda}\cos(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})+\bar{l}_2\bar{B}_1\bar{\lambda}\cos(\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2})=0 \tag{2.29}$$

同樣地，$\bar{A}_1$、$\bar{A}_3$、$\bar{B}_2$和$\bar{A}_2$、$\bar{A}_4$、$\bar{B}_1$不可全部為零，因此，以上兩聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於 0。結果可得到兩條特徵方程式：

對稱：

$$\sin\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2}=0 \tag{2.30}$$

反對稱：

$$\cos\frac{\bar{\lambda}\alpha}{2}=0 \tag{2.31}$$

將式(2.30)與(2.31)代回式(2.28)與(2.29)可解出$\bar{A}_1$、$\bar{A}_3$、$\bar{B}_2$和$\bar{A}_2$、$\bar{A}_4$、$\bar{B}_1$，由式(2.30)得知$\bar{\lambda}=\dfrac{2n\pi}{\alpha}$，所以在對稱部分不會有奇異性。而邊界條件為自由端且具有剪力奇異漸近解之反對稱項整理如下：

$$\Psi_r(r,\theta)=\bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1}\sin\bar{\lambda}\theta$$

$$\Psi_\theta(r,\theta)=\frac{(1+\nu+\bar{\lambda}\nu)}{\bar{\lambda}}\bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1}\cos\bar{\lambda}\theta$$

$$W(r,\theta)=\bar{A}_2\left(\bar{l}_1-\frac{\bar{l}_2(1+\nu+\bar{\lambda}\nu)}{\bar{\lambda}}\right)r^{\bar{\lambda}}\sin\bar{\lambda}\theta \tag{2.32}$$

圖 2.2、2.3 分別為 Huang [2003]所研究的楔形角之彎矩奇異特性及剪力奇異特性的關係圖，本文的案例裂縫邊界條件皆為自由端(F_F) ，從圖中可觀察出，楔形角必須要大於 180 度時，漸近解(角函數)才會具有彎矩與剪力的奇異特性。

第三章 有限元素結合角函數之平衡方程式推導

本章將介紹用 Mindlin 板理論的控制方程以虛功法，推導由二階形狀函數有限元素及角函數所建構的大域勁度矩陣與大域外力向量。藉由大域勁度矩陣及大域外力向量，可求所需的節點變位與角函數之變位係數，最後利用力與位移關係得到各節點內力與奇異點附近之內力分量。

§3.1 有限元素法的位移場表示式

如圖 1.1 所示，本研究先用傳統的有限元素法於整個板區域Ω內建立網格，Mindlin 板於(x,y)座標系統之三個位移函數為

$$\Psi_{xe}(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\{N_{xe}\}^T\{\hat{\psi}_{xe}\} \tag{3.1a}$$

$$\Psi_{ye}(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\{N_{ye}\}^T\{\hat{\psi}_{ye}\} \tag{3.1b}$$

$$W_e(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\{N_{we}\}^T\{\hat{w}_e\} \tag{3.1c}$$

上式中$\{N_{xe}\}$、$\{N_{ye}\}$及$\{N_{we}\}$為每一元素之形狀函數行向量，$\{\hat{\psi}_{xe}\}$、$\{\hat{\psi}_{ye}\}$及$\{\hat{w}_e\}$為元素 e 之節點位移分向量。而在Ω_c區域額外引入角函數(即應力漸近解)：

$$\Psi_{xc}(x,y)=\sum_{c=1}^{N_c}\{\psi_{xc}\}^T\{a_c\}f(x,y) \tag{3.2a}$$

$$\Psi_{yc}(x,y)=\sum_{c=1}^{N_c}\{\psi_{yc}\}^T\{b_c\}f(x,y) \tag{3.2b}$$

$$W_c(x,y)=\sum_{c=1}^{N_c}\{w_c\}^T\{c_c\}f(x,y) \tag{3.2c}$$

上式中$\{\psi_{xc}\}$、$\{\psi_{yc}\}$及$\{w_c\}$為角函數所構成之行向量，$\{a_c\}$、$\{b_c\}$及$\{c_c\}$為角函數係數向量；而$f(x,y)$為一函數滿足在邊界Γ_c上為零，由於Ω_c內之三個位移函數是由式 (3.1)與(3.2)疊加而成，角函數乘上$f(x,y)$後，可使Ω與Ω_c位移場交界處保持c^0連續。當角函數乘上$f(x,y)$，雖會改變其在Ω_c內之行為；但依然保存其在奇異點處之原來奇異特性。另外，由於式(3.2)只侷限於Ω_c，故其與有限元素之位移函數(式(3.1))之相互關係亦僅侷限於Ω_c。整個板結構之三個位移函數可整理表示成

$$\Psi_x(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\{N_{xe}\}^T\{\hat{\psi}_{xe}\}+\sum_{c=1}^{N_c}\{\psi_{xc}\}^T\{a_c\}f_{\Gamma c}=\hat{\Phi}_x+\tilde{\Phi}_{xc} \tag{3.3a}$$

$$\Psi_y(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\{N_{ye}\}^T\{\hat{\psi}_{ye}\}+\sum_{c=1}^{N_c}\{\psi_{yc}\}^T\{b_c\}f_{\Gamma c}=\hat{\Phi}_y+\tilde{\Phi}_{yc} \tag{3.3b}$$

$$W(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\{N_{we}\}^T\{\hat{w}_e\}+\sum_{c=1}^{N_c}\{w_c\}^T\{c_c\}f_{\Gamma c}=\hat{W}+\tilde{W}_c \tag{3.3c}$$

其中，$\tilde{\Phi}_{xc}$、$\tilde{\Phi}_{yc}$和$\tilde{W}_c$僅在Ω_c內有值。為了方便以下推導，令$\{\overline{\varphi}_{xc}\}^T=\{\psi_{xc}\}^T f_{\Gamma c}$、$\{\overline{\varphi}_{yc}\}^T=\{\psi_{yc}\}^T f_{\Gamma c}$、$\{\overline{w}_c\}^T=\{w_c\}^T f_{\Gamma c}$所以

$$\tilde{\Phi}_{xc}=\{\overline{\varphi}_{xc}\}^T\{a_c\}\text{，}\tilde{\Phi}_{yc}=\{\overline{\varphi}_{xc}\}^T\{b_c\}\text{，}\tilde{W}=\{\overline{w}_c\}^T\{c_c\}$$

§3.2 以虛功法推導出大域勁度矩陣與大域外力矩陣

將式(3.3a~3.3c)之位移函數代入有限元素法推導之標準程序；在

Mindlin 板理論，需滿足下列虛功表示式 Reddy [1999]

$$\int_{\Omega}(\frac{\partial\delta W}{\partial x}Q_x+\frac{\partial\delta W}{\partial y}Q_y-q\delta W)dA-(\int_{\Gamma}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\delta W ds)=0 \quad (3.4a)$$

$$\int_{\Omega}(\frac{\partial\delta\Psi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\Psi_x}{\partial y}M_{xy}+\delta\Psi_x Q_x)dA-(\int_{\Gamma}(\hat{M}_{xx}n_x+\hat{M}_{xy}n_y)\delta\Psi_x ds)=0$$

(3.4b)

$$\int_{\Omega}(\frac{\partial\delta\Psi_y}{\partial x}M_{xy}+\frac{\partial\delta\Psi_y}{\partial y}M_{yy}+\delta\Psi_y Q_y)dA-(\int_{\Gamma}(\hat{M}_{xy}n_x+\hat{M}_{yy}n_y)\delta\Psi_y ds)=0$$

(3.4c)

其中力與位移關係表示如下

$$M_{xx}=-\overline{D}(\frac{\partial\Psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\Psi_y}{\partial y}),$$

$$M_{yy}=-\overline{D}(\frac{\partial\Psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\Psi_x}{\partial x}),$$

$$M_{xy}=-\frac{1}{2}\overline{D}(1-\nu)(\frac{\partial\Psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_y}{\partial x}),$$

$$Q_x=\kappa^2 Gh(-\Psi_x+\frac{\partial W}{\partial x}),$$

$$Q_y=\kappa^2 Gh(-\Psi_y+\frac{\partial W}{\partial y}),$$

如圖 3.1 所示，q 為作用在板上方之均佈荷重，而 $\hat{M}_{xx}$、$\hat{M}_{xy}$、$\hat{M}_{yy}$、$\hat{Q}_x$ 及 $\hat{Q}_y$ 為在邊界上作用外力，n_x 與 n_y 分別是邊界 Γ 上法向量之 x 與 y 分量。δ 為對有限元素之節點位移式(3.1)中之 $\{\hat{\psi}_{xe}\}$、$\{\hat{\psi}_{ye}\}$ 及 $\{\hat{w}_e\}$ 或

式(3.2)中之係數$\{a_c\}$、$\{b_c\}$及$\{c_c\}$變分。將位移場代入之後得到式(3.5)~(3.7)

$$\int_{\Omega}[\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_x+\frac{\partial\hat{W}}{\partial x})+\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_y+\frac{\partial\hat{W}}{\partial y})-q\delta\hat{W}]dA$$

$$+\int_{\Omega_c}[\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{xc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial x})+\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{yc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial y})-q\delta\tilde{W}_c]dA$$

$$+\int_{\Omega_c}[\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{xc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial x})+\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{yc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial y})]dA$$

$$+\int_{\Omega_c}[\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_x+\frac{\partial\hat{W}}{\partial x})+\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_y+\frac{\partial\hat{W}}{\partial y})]dA$$

$$-\int_{\Gamma e}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\delta\hat{W}ds-\int_{\Gamma c}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\delta\tilde{W}_c ds=0 \qquad (3.5)$$

$$\int_{\Omega}[\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_x}{\partial x}(-D(\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial y}))+\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_x}{\partial y}(-\frac{1}{2}D(1-\nu)(\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_x+\frac{\partial\hat{W}}{\partial x})\delta\hat{\Phi}_x]dA$$

$$\int_{\Omega}[\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_{xc}}{\partial x}(-D(\frac{\partial\hat{\Phi}_{xc}}{\partial x}+\nu\frac{\partial\hat{\Phi}_{yc}}{\partial y}))+\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_{xc}}{\partial y}(-\frac{1}{2}D(1-\nu)(\frac{\partial\hat{\Phi}_{xc}}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\Phi}_{yc}}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_{xc}+\frac{\partial\hat{W}_c}{\partial x})\delta\hat{\Phi}_{yc}]dA$$

$$+\int_{\Omega c}[\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_x}{\partial x}(-D(\frac{\partial\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x}+\nu\frac{\partial\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y}))+\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_x}{\partial y}(-\frac{1}{2}D(1-\nu)(\frac{\partial\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{xc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial x})\delta\hat{\Phi}_x]dA$$

$$+\int_{\Omega c}[\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_{xc}}{\partial x}(-D(\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial y}))+\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y}(-\frac{1}{2}D(1-\nu)(\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_x+\frac{\partial \hat{W}}{\partial x})\delta\tilde{\Phi}_{xc}]dA-\int_{\Gamma c}(\hat{M}_{xx}n_x+\hat{M}_{xy}n_y)\delta\tilde{\Phi}_{xc}ds$$

$$-\int_{\Gamma e}(\hat{M}_{xx}n_x+\hat{M}_{xy}n_y)\delta\hat{\Phi}_x ds=0 \tag{3.6}$$

$$\int_{\Omega}[\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_y}{\partial x}(-\frac{D}{2}(1-\nu)(\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial x}))+\frac{\partial\delta\hat{\Phi}_y}{\partial y}(-D(\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_y+\frac{\partial \hat{W}}{\partial y})\delta\hat{\Phi}_y]dA$$

$$+\int_{\Omega c}[\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x}(-\frac{D}{2}(1-\nu)(\frac{\partial\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x}))+\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y}(-D(\frac{\partial\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y}+\nu\frac{\partial\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{yc}+\frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y})\delta\tilde{\Phi}_{yc}]dA$$

$$+\int_{\Omega c}[\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{y}}{\partial x}(-\frac{D}{2}(1-\nu)(\frac{\partial\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x}))+\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{y}}{\partial y}(-D(\frac{\partial\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y}+\nu\frac{\partial\tilde{\Phi}_{xc}}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{yc}+\frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial y})\delta\tilde{\Phi}_{y}]dA$$

$$\int_{\Omega c}[\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial x}(-\frac{D}{2}(1-\nu)(\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial x}))+\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}_{yc}}{\partial y}(-D(\frac{\partial\hat{\Phi}_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\hat{\Phi}_x}{\partial x}))$$

$$+\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_y+\frac{\partial \hat{W}}{\partial y})\delta\tilde{\Phi}_{yc}]dA-\int_{\Gamma e}(\hat{M}_{xy}n_x+\hat{M}_{yy}n_y)\delta\hat{\Phi}_y ds$$

$$-\int_{\Gamma c}(\hat{M}_{xy}n_x+\hat{M}_{yy}n_y)\delta\tilde{\Phi}_{yc}ds=0 \tag{3.7}$$

其中，Ω為整個板所佔之區域，Ω_c為角函數所含蓋之區域。另外再定義Ω_e為每個有限單元所佔之區域。所以$\Omega=\sum_{e=1}^{N_e}\Omega_e$，$\Omega_c=\sum_{e=1}^{N_{ec}}\Omega_e$，其中$N_e$和$N_{ec}$分別為在$\Omega$與$\Omega_c$之有限元素個數。式(3.5)~(3.7)分成數項，為推導方便將分別給予編號。例如式(3.5)的第一積分項定為

(3.5a)，第二積分項定為(3.5b)，以此類推。

使用變分原理，計算式(3.5a)~(3.5e)後，整理如下

$$\int_{\Omega}[\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_x+\frac{\partial\hat{W}}{\partial x})+\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_y+\frac{\partial\hat{W}}{\partial y})-q\delta\hat{W}]dA$$

$$=[\int_{\Omega}-\{N_{we}\}_{,x}\kappa^2 Gh\{N_{xe}\}^T\{\hat{\psi}_{xe}\}+\kappa^2 Gh\{N_{we}\}_{,x}\{N_{we}\}_{,x}^T\{\hat{w}_e\}$$

$$-\kappa^2 Gh\{N_{we}\}_{,y}\{N_{ye}\}^T\{\hat{\psi}_{ye}\}+\kappa^2 Gh\{N_{we}\}_{,y}\{N_{we}\}_{,y}^T\{\hat{w}_e\}-q\{N_{we}\}^T]dA$$

(3.8a)

$$\int_{\Omega_c}[\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{xc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial x})+\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{yc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial y})-q\delta\tilde{W}_c]dA$$

$$=[\int_{\Omega c}\kappa^2 Gh\{\overline{w}_c\}_{,x}(-\{\overline{\varphi}_{xc}\}^T\{a_c\}+\{\overline{w}_c\}_{,x}^T\{c_c\})+\kappa^2 Gh\{\overline{w}_c\}_{,y}(-\{\overline{\varphi}_{yc}\}^T\{b_c\}$$

$$+\{\overline{w}_c\}_{,y}^T\{c_c\})-q\{\overline{w}_c\}]dA \qquad (3.8b)$$

$$\int_{\Omega_c}[\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{xc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial x})+\frac{\partial\delta\hat{W}}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\tilde{\Phi}_{yc}+\frac{\partial\tilde{W}_c}{\partial y})]dA$$

$$=\int_{\Omega c}[\kappa^2 Gh\{N_{we}\}_{,x}(-\{\overline{\varphi}_{xc}\}^T\{a_c\}+\{\overline{w}_c\}_{,x}\{c_c\})+\kappa^2 Gh\{N_{we}\}_{,y}(-\{\overline{\varphi}_{yc}\}^T\{b_c\}$$

$$+\{\overline{w}_c\}_{,y}^T\{c_c\})]dA \qquad (3.8c)$$

$$\int_{\Omega_c}[\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial x}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_x+\frac{\partial\hat{W}}{\partial x})+\frac{\partial\delta\tilde{W}_c}{\partial y}\kappa^2 Gh(-\hat{\Phi}_y+\frac{\partial\hat{W}}{\partial y})]dA$$

$$=\int_{\Omega c}[\kappa^2 Gh\{\overline{w}_c\}_{,x}(-\{N_{xe}\}^T\{\hat{\psi}_{xe}\}+\{N_{we}\}_{,x}^T\{\hat{w}_e\})$$

$$+\kappa^2 Gh\{\overline{w}_c\}_{,y}(-\{N_{ye}\}^T\{\hat{\psi}_{ye}\}+\{N\}_{we,y}^T\{\hat{w}_e\})]dA \qquad (3.8d)$$

$$-[\int_{\Gamma e}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\delta\hat{W}ds+\int_{\Gamma c}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\delta\tilde{W}_c ds]$$

$$=-[\int_{\Gamma e}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\{N_{we}\}ds+\int_{\Gamma c}(\hat{Q}_x n_x+\hat{Q}_y n_y)\{\overline{w}_c\}ds] \qquad (3.8e)$$

如同式(3.5)的變分計算過程來處理式(3.6)、(3.7)之後，可將這些式子整理成兩部分，並以矩陣的方式表示。第一類為傳統有限元素部分，即在Ω區域內：

$$[K_e]\begin{Bmatrix}\hat{\psi}_{xe}\\ \hat{\psi}_{ye}\\ \hat{w}_e\end{Bmatrix}=\{F_e\} \tag{3.9}$$

其中

$$[K]_e=\int_{\Omega_e}[B]_e^T[D]_e[B]_e\,dA\text{，}$$

$$[B]_e^T=\begin{bmatrix}\{N_{xe}\}_{,x} & \{0\} & \{N_{xe}\}_{,y} & \{0\} & -\{N_{xe}\}\\ \{0\} & \{N_{ye}\}_{,y} & \{N_{ye}\}_{,x} & -\{N_{ye}\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{N_{we}\}_{,y} & \{N_{we}\}_{,x}\end{bmatrix},$$

$$[D]_e=\overline{D}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2Gh/\overline{D} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2Gh/\overline{D}\end{bmatrix},$$

$$\{F_e\}=\begin{Bmatrix}f_x\\ f_y\\ f_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\int_{\Gamma e}\left(\hat{M}_{xx}n_x+\hat{M}_{xy}n_y\right)\{N_{xe}\}ds\\ \int_{\Gamma e}\left(\hat{M}_{xy}n_x+\hat{M}_{yy}n_y\right)\{N_{ye}\}ds\\ \int_{\Omega}q\{N_{we}\}dA+\int_{\Gamma e}\left(\hat{Q}_xn_x+\hat{Q}_yn_y\right)\{N_{we}\}ds\end{Bmatrix},$$

$[K_e]$與$\{F_e\}$分別是在Ω區域內的單元勁度矩陣及外力向量，Γ_e表示針對邊界上的元素，$\{\hat{\psi}_{xe}\}$、$\{\hat{\psi}_{ye}\}$及$\{\hat{w}_e\}$為有限元素法中各個元素的節

點位移分向量。

第二類為Ω_c在區域內的部分

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\psi}_{xe} \\ \hat{\psi}_{ye} \\ \hat{w}_e \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} a_c \\ b_c \\ c_c \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ F_c \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

其中

$$[K]_{ee} = \int_{\Omega_e} [B]_e^T [D]_e [B]_e \, dA \text{，}$$

$$[K]_{ec} = \int_{\Omega_e} [B]_e^T [D]_e [B]_c \, dA \text{，}$$

$$[K]_{ce} = \int_{\Omega_e} [B]_c^T [D]_e [B]_e \, dA \text{，}$$

$$[K]_{cc} = \int_{\Omega_e} [B]_c^T [D]_e [B]_c \, dA \text{，}$$

$$[B]_c^T = \begin{bmatrix} \{\overline{\varphi}_{xc}\}_{,x} & \{0\} & \{\overline{\varphi}_{xc}\}_{,y} & \{0\} & -\{\overline{\varphi}_{xc}\} \\ \{0\} & \{\overline{\varphi}_{yc}\}_{,y} & \{\overline{\varphi}_{yc}\}_{,x} & -\{\overline{\varphi}_{yc}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{\overline{w}_c\}_{,y} & \{\overline{w}_c\}_{,x} \end{bmatrix},$$

$$\{F_c\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma c} \left(\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y\right) \{\overline{\varphi}_{xc}\} ds \\ \int_{\Gamma c} \left(\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y\right) \{\overline{\varphi}_{yc}\} ds \\ \int_{\Omega c} q \{\overline{w}_c\} dA + \int_{\Gamma c} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y) \{\overline{w}_c\} ds \end{Bmatrix},$$

$\{a_c\}$、$\{b_c\}$及$\{c_c\}$為各個角函數之係數；$[K_{cc}]$與$\{F_c\}$分別是Ω_c區域內的單元勁度與外力向量，Γ_c表示針對邊界上的元素，$[K_{ec}]$與$[K_{ce}]$是

有限元素與角函數相關的部分，$[K_{cc}]$則是完全由角函數所組成的。

由於考慮靜力載重問題，當外載作用時整個板內所有元素的勁度矩陣及外力向量配合Ω_c區域內奇異漸進解可疊合成一組方程式：

$$[k]\{d\}=\{f\} \tag{3.11}$$

其中$[k]$、$\{d\}$及$\{f\}$分別為板結構描述具奇異特性之大域勁度矩陣、大域位移向量與大域外力向量，其靜力方程建構必須依據奇異點個數(m)，角函數對稱和反對稱特性及其對應係數，配合角函數個數(C)，與其邊界函數$f(x,y)$加以計算，由式(3.11)可詳細表示成

$$\begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}]_1 & \cdots & [K_{ec}]_m \\ [K_{ce}]_1 & [K_{cc}]_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{ce}]_m & \cdots & \cdots & [K_{cc}]_m \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \hat{\psi}_{xe} \\ \hat{\psi}_{ye} \\ \hat{w}_e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_c^s \\ b_c^s \\ c_c^s \\ a_c^a \\ b_c^a \\ c_c^a \end{Bmatrix}_m \right\} = \left\{ \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma e} \left(\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y\right)\{N\}_{xe}\, ds \\ \int_{\Gamma e} \left(\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y\right)\{N\}_{ye}\, ds \\ \int_{\Omega} q\{N\}_{we}\, dA + \int_{\Gamma e} \left(\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y\right)\{N\}_{we}\, ds \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma c} \left(\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y\right)\{\overline{\varphi}_{xc}^s\} ds \\ \int_{\Gamma c} \left(\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y\right)\{\overline{\varphi}_{yc}^s\} ds \\ \int_{\Omega c} q\{\overline{w}_c^s\} dA + \int_{\Gamma c} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y)\{\overline{w}_c^s\} ds \\ \int_{\Gamma c} \left(\hat{M}_{xx} n_x + \hat{M}_{xy} n_y\right)\{\overline{\varphi}_{xc}^a\} ds \\ \int_{\Gamma c} \left(\hat{M}_{xy} n_x + \hat{M}_{yy} n_y\right)\{\overline{\varphi}_{yc}^a\} ds \\ \int_{\Omega c} q\{\overline{w}_c^a\} dA + \int_{\Gamma c} (\hat{Q}_x n_x + \hat{Q}_y n_y)\{\overline{w}_c^a\} ds \end{Bmatrix}_m \right\} \tag{3.12}$$

在式(3.12)中，經由建構厚板大域勁度矩陣與大域外力向量，可求在有限元素法計算得之位移分向量$\{\hat{\psi}_{xe}\}$、$\{\hat{\psi}_{ye}\}$及$\{\hat{w}_e\}$；與角函數分析出之對稱係數$\{a_c^s\}$、$\{b_c^s\}$及$\{c_c^s\}$及反對稱係數$\{a_c^a\}$、$\{b_c^a\}$及$\{c_c^a\}$。所以

可將式(3-2a~c)寫成

$$\Psi_{xc}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{c=1}^{N_c}(\{\psi_{xc}^{s}\}_i^T\{a_c^s\}_i+\{\psi_{xc}^{a}\}_i^T\{a_c^a\}_i)\{f(x,y)\}_i \tag{3.13a}$$

$$\Psi_{yc}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{c=1}^{N_c}(\{\psi_{yc}^{s}\}_i^T\{b_c^s\}_i+\{\psi_{yc}^{a}\}_i^T\{b_c^a\}_i)\{f(x,y)\}_i \tag{3.13b}$$

$$W_c(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{c=1}^{N_c}(\{w_c^{s}\}_i^T\{c_c^s\}_i+\{w_c^{a}\}_i^T\{c_c^a\}_i)\{f(x,y)\}_i \tag{3.13c}$$

其中，$\{f(x,y)\}_i$代表在不同的奇異點下，在(x,y)座標系統下所對應的邊界函數。將角函數位移分量的式(3.13a~c)分別替代入式(3.3a~c)。

本文所用有限元素八個節點四邊形單元(共 24 個自由度)或六個節點三角形單元(共 18 個自由度)，所以$[K_{ee}]$之總體自由度取決於節點數目與支承邊界條件。$[K_{cc}]$的總維度則不同於傳統有限元素法是決定於奇異點數目、角函數特徵值個數、角函數對稱和反對稱特性。$[K_{ec}]$與$[K_{ce}]$矩陣維度則是對應$[K_{ee}]$與$[K_{cc}]$而衍生。

外力矩陣分為傳統有限元素與角函數兩部分，有限元素中$\hat{M}_{xx}$、$\hat{M}_{xy}$、$\hat{M}_{yy}$、$\hat{Q}_x$及$\hat{Q}_y$加載於邊界上的元素(Γ_e)以線積分處理，q於Ω區域裡以面積分處理，但均須考量直角座標之分向量(n_x,n_y)與二階形狀函數；在角函數的部分，q僅加載於Ω_c區域內，其維度考慮條件與$[K_{cc}]$相同。

由於傳統有限元素法與有限元素法配合角函數兩種分析模式的

總體自由度非常多，所以在建構 Fortran 程式求解的過程中，便使用林聰悟與林佳慧 [1999]中對稱變寬帶儲存矩陣的方式。此方法需先計算出對稱變寬帶矩陣的位置指標(Location Index)，然後利用此指標可將變寬帶上半矩陣的非零值轉存於一維陣列；可節約程式記憶體的使用空間。利用高斯-勒讓德(Gauss-Kronrod)積分法，來節省計算時間，最後配合對稱變寬帶矩陣之分解與求解（克雷斯基法），求得各自由度之位移量與角函數係數。

本文位移場由兩套位移函數構成，分別計算Ω與Ω_c位移場內之位移量後，總位移量共同以卡式座標疊合而成，並配合力與位移關係式得到全部Ω區域之內力分佈與奇異應力。

第四章 案例分析

本章以二階形狀函數有限元素法配合角函數，進行無裂縫及具裂縫方形厚板之靜力分析；並考慮不同邊界條件、靜載、寬厚比與不同裂縫角度、位置及長度對奇異點附近內力分佈之影響。其中透過收斂性分析來驗證本研究方法與程式之正確性。

§4.1 角函數

§4.1.1 角函數的採用

本章所分析的實例為方形板四周不同支承邊界，而內部裂縫尖端的邊界條件為自由邊界，參看圖 4.1。所採用的角函數會有對稱和反對稱兩種特性。在考慮三個位移分量的特性後，$\{\psi_{xc}\}$與$\{\psi_{yc}\}$採用考慮彎矩奇異的漸近解，$\{w_c\}$採用考慮剪力奇異的漸近解(參看第二章)。在$(r,\ \theta)$座標系統中，角函數之表示式可由第二章得：

對稱：

$$\Psi_{ri}^{s} = r^{\lambda_i}\{\eta_i \cos(\lambda_i + 1)\theta + \cos(\lambda_i - 1)\theta\}$$

$$\Psi_{\theta i}^{s} = r^{\lambda_i}\{-\eta_i \sin(\lambda_i + 1)\theta - k_2 \sin(\lambda_i - 1)\theta\}$$

$$W_i^{s} = r^{\bar{\lambda}_i} \cos\bar{\lambda}_i\theta \qquad (4.1)$$

其中

$$\eta_i = -\frac{k_2(\lambda_i - 1) - \lambda_i \upsilon - 1}{\lambda_i(1-\upsilon)} \frac{\cos(\lambda_i - 1)\alpha/2}{\cos(\lambda_i + 1)\alpha/2}$$

$$k_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\lambda_i + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\lambda_i - 1)]}$$

λ_i 滿足 $\sin \lambda_i \alpha = -\lambda_i \sin \alpha$,

$\bar{\lambda}_i$ 滿足 $\sin \frac{\bar{\lambda}_i \alpha}{2} = 0$，所以得到 $\bar{\lambda}_i = \frac{2n\pi}{\alpha}$, $n = 1,2,3\cdots\cdots$

反對稱：

$$\Psi_{ri}^{a} = r^{\tilde{\lambda}_i}\{\tilde{\eta}_i \sin(\tilde{\lambda}_i + 1)\theta + \sin(\tilde{\lambda}_i - 1)\theta\},$$

$$\Psi_{\theta i}^{a} = r^{\tilde{\lambda}_i}\{\tilde{\eta}_i \cos(\tilde{\lambda}_i + 1)\theta + k_2 \cos(\tilde{\lambda}_i - 1)\theta\},$$

$$W_i^{a} = r^{\hat{\lambda}_i} \sin \hat{\lambda}_i \theta \qquad (4.2)$$

其中

$$\tilde{\eta}_i = -\frac{\tilde{k}_2(\tilde{\lambda}_i - 1) - \tilde{\lambda}_i \nu - 1}{\tilde{\lambda}_i(1-\nu)} \frac{\sin(\tilde{\lambda}_i - 1)\alpha/2}{\sin(\tilde{\lambda}_i + 1)\alpha/2}$$

$$\tilde{k}_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\tilde{\lambda}_i + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\tilde{\lambda}_i - 1)]}$$

$\tilde{\lambda}_i$ 滿足 $\sin \tilde{\lambda}_i \alpha = \tilde{\lambda}_i \sin \alpha$,

$\hat{\lambda}_i$ 滿足 $\cos \frac{\hat{\lambda}_i \alpha}{2} = 0$，所以得到 $\hat{\lambda}_i = \frac{(2n+1)\pi}{\alpha}$, $n = 0,1,2\cdots\cdots$

§4.1.2 極座標轉換到卡氏座標

式(4.1)及(4.2)表示的角函數是以極座標系統來表示，但第三章有限元素的勁度矩陣及外力向量是用ξ、η座標系統建立的。因此，要導入角函數到具奇異點附近的元素中，需將式(4.1)及式(4.2)之Ψ_{ri}、$\Psi_{\theta i}$及W_i作三次座標轉換。本節將介紹極座標和全域卡氏座標的轉換，考慮兩座標系統如圖 4.2 所示，則(x,y)座標系統下之角函數為

$$\psi^s_{xc} = \Psi^s_{ri}\cdot\cos\theta_2 - \Psi^s_{\theta i}\cdot\sin\theta_2$$

$$\psi^s_{yc} = \Psi^s_{ri}\cdot\sin\theta_2 + \Psi^s_{\theta i}\cdot\cos\theta_2$$

$$w^s_c = W^s_i \tag{4.3}$$

由於角函數只使用於Ω_c區域內，為確保在Ω_c區域的邊界Γ_c上滿足C^0連續，令

$$\overline{\psi}^s_{xc} = \psi^s_{xc}\cdot f_{\Gamma c}$$

$$\overline{\psi}^s_{yc} = \psi^s_{yc}\cdot f_{\Gamma c}$$

$$\overline{w}^s_c = w^s_c\cdot f_{\Gamma c} \tag{4.4}$$

在式(3.10)組成勁度矩陣的過程中，$\overline{\psi}^s_{xc,x}$、$\overline{\psi}^s_{xc,y}$、$\overline{\psi}^s_{yc,x}$、$\overline{\psi}^s_{yc,y}$、$\overline{w}^s_{c,x}$及$\overline{w}^s_{c,y}$也是需要透過Ψ^s_{ri}與$\Psi^s_{\theta i}$轉換得來。在此列出$\overline{\psi}^s_{xc,x}$與$\overline{\psi}^s_{xc,y}$的轉換過程如下：

(x,y)與$(r,\ \theta_2)$座標間之微分關係為

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta_2=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta_2=\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x}=-\frac{\sin\theta_2}{r}=-\frac{y}{r^2}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=\frac{\cos\theta_2}{r}=\frac{x}{r^2} \tag{4.5}$$

因此$\overline{\Psi}^{s}_{xc,x}$與$\overline{\Psi}^{s}_{xc,y}$可以寫成

$$\overline{\Psi}^{s}_{xc,x}=\psi^{s}_{xc,x}\cdot f_{\Gamma c}+\psi^{s}_{xc}\cdot f_{\Gamma c,x}$$

$$\overline{\Psi}^{s}_{xc,y}=\psi^{s}_{xc,y}\cdot f_{\Gamma c}+\psi^{s}_{xc}\cdot f_{\Gamma c,y} \tag{4.6}$$

其中

$$\psi^{s}_{xc,x}=\psi^{s}_{xc,r}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)+\psi^{s}_{xc,\theta_2}\cdot\left(-\frac{y}{r^2}\right)$$

$$\psi^{s}_{xc,y}=\psi^{s}_{xc,r}\cdot\left(\frac{y}{r}\right)+\psi^{s}_{xc,\theta_2}\cdot\left(\frac{x}{r^2}\right)$$

再來將下面兩式

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{4.7}$$

$$\theta_2=\tan 2^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad -\pi\le\theta_2\le\pi \tag{4.8}$$

代入式(4.6)即完成極座標對卡氏座標之轉換，以上皆為角函數對稱項

轉換流程，反對稱項推導亦相同，故不贅述之。

§4.1.3 全域卡氏座標轉換到局部ξ、η座標

本文所用的有限元素單元有兩種，一為八個節點的四邊形元素，另一個則是六個節點的三角形單元，如圖 4.3 和圖 4.4 所示。皆為等參數單元(isoparametric element)。每個元素都是轉換到局部座標系 (ξ,η) 座標；此座標元素各有不同的局部座標。全域座標 (x,y) 與此 (ξ,η) 局部座標間之關係為：

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{6\,or\,8} N_i(\xi,\eta)\cdot x_i \\
y &= \sum_{i=1}^{6\,or\,8} N_i(\xi,\eta)\cdot y_i
\end{aligned}
\qquad (4.9)
$$

其中 N_i 是以ξ、η表示的形狀函數，x_i 和 y_i 分別是節點 i 的 x 和 y 座標值。

由於座標系的變換，因此在式(3.9)與式(3.10)中 $\{N_{xe}\}_{,x}$ 、$\{N_{xe}\}_{,y}$ 、$\{N_{ye}\}_{,x}$ 和 $\{N_{ye}\}_{,y}$ 都必須作以下的轉換：

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad i = (1\sim 6 \quad or \quad 8) \qquad (4.10)
$$

其中

$$[J]=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{6or8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\cdot x_i & \sum_{i=1}^{6or8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\cdot y_i \\ \sum_{i=1}^{6or8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\cdot x_i & \sum_{i=1}^{6or8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\cdot y_i \end{bmatrix}$$，稱為 Jacobian Matrix。

另外在組成勁度矩陣、外力向量的式(3.9)和(3.10)中積分的變數也要因座標轉換而改變如下：

$$dA = dxdy = |J| d\xi d\eta \tag{4.11}$$

其中 $|J|$ 為 Jacobian 行列式值。

§4.1.4 裂縫尖端的局部卡式座標轉換

由於本文所使用的角函數其 r 的起算點必須在奇異點(crack tip)上，θ 的起算應於裂縫開口的對稱軸上。在有旋轉裂縫的情形下，必須把原本的 (r, θ) 座標系統，先轉換成 $(\overline{x},\overline{y})$ 局部座標系統(參看圖 4.5)，再依前兩節所述轉換至 (ξ,η) 座標，以便進行積分運算。此系統與原系統座標轉換如下：

$$\overline{X} = x_1 - x_0$$

$$\overline{Y} = y_1 - y_0$$

$$\theta_2 = \tan 2^{-1}\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right) \qquad -\pi \le \theta_2 \le \pi \tag{4.12}$$

其中，(x_0, y_0)為奇異點座標，(x_1, y_1)為計算目標點座標

如果上述θ_2有小於零之情況發生，則將θ_2加上2π修正，隨後代入式(4.13)，即完成θ之轉換

$$r = \sqrt{\overline{X}^2 + \overline{Y}^2}$$

$$\theta = \theta_2 - \Delta \qquad -\pi \le \Delta \le \pi \tag{4.13}$$

其中Δ定義為裂縫旋轉角度，以$\overline{x}$軸正向至裂縫尖端之分角線逆時鐘為正，反之為負。經過此系統轉換則r、θ即完全符合角函數座標系統之定義。

§4.2 程式驗證

為了驗證本研究所發展分析方法及電腦程式之正確性。首先分析簡支承無裂縫板受均佈荷重之內力解，並與解析解比較；再者於傳統(純)有限元程式部份，以懸臂無裂縫板受均佈荷重或於板端部受均佈彎矩進行分析，以確認程式之正確性。爾後，再以一懸臂無裂縫板受均佈載重為例，並刻意加入角函數，以驗證含角函數部份程式之正確性。本文所考慮之方形板，若無特別說明，即令邊長(b)為 20 inch、波松比(ν)為 0.3、彈性模數(E)為 30,000 ksi、均佈荷重(q)為 100 psi 及板端均佈彎矩($\hat{M}$)為 100 inch-lbs/inch。

§4.2.1 均佈荷重簡支板靜力分析

本節利用傳統有限元素法分析四周邊界為簡支承的無裂縫方形板，求得厚板內任一點彎矩之內力無因次值，並與簡支板解析解 Reddy [1999]作比較，確認本研究所發展有限元程式之正確性。

本研究所謂之"簡支承"邊界條件，定義為：(參看圖 4.6)，平行 x 軸的邊界處， $\{W\}$與$\{\Psi_{xe}\}$為零；與平行 y 軸的邊界處，$\{W\}$與$\{\Psi_{ye}\}$為零。為與解析解 Reddy [1999]比較，取波松比$\nu = 0.25$。在有限元素分析中，當元素數目切割的越多，理論上能得到越精確且穩定的結果。本案例切割了 400 和 1600 個元素的兩組網格，為了方便描述，分別給予編號 sq1(a)、sq1(b)如圖 4.7 和 4.8 所示。為了配合解析解之分析結果，取在板上緣($z = h/2$)之無因次化應力：

$$\overline{\sigma}_{ii}(x,y) = \frac{6}{b^2 q} M_{ii}(x,y) \tag{4.14}$$

M_{ii}為板內 i 向彎矩值。

表 4.1 所示者為利用 sq1(a)與 sq1(b)網格所得之最大應力，並與解析解所得者 Reddy [1999]比較。表中亦考慮了不同寬厚比之影響。在均載情況下，應力最大處正好在板中央處(即$(x,y) = (a/2, b/2)$)。不論何種寬厚比或應力分量，sq1(a)與 sq1(b)兩種網格無因次分析結果

皆與解析解所得者相當接近，故可初步確認本研究所撰寫有限元程式之正確性。

§4.2.2 懸臂厚板靜力分析

（a）受均佈載重或板端彎矩之傳統有限元素解

考慮如圖 4.9 所示之懸臂板(FFCF 板)，取 $\nu = 0.3$ 受均佈載重 q 或板端彎矩 $\hat{M}$ (在 y=0)處。利用如圖 4.10 所示之網格 sq2(a)~sq2(d)進行分析，各網格分別含有 225、900、3600 與 1600 個元素。

由於該板無解析解，但吾人可以從力平衡直接計算在任一 y=const.斷面上之平均 M_{yy} 及 Q_y，即為力平衡解。基於懸臂板屬於二維平面，即使同屬一 y=const.之斷面上的節點內力，其值也不會相同，所以在計算有限元素解時，乃以一斷面各節點之內力合再除以該斷面上之節點數。進而可計算力平衡解與有限元素解之無因次化物理量，在受均佈載重的情況

$$\overline{M}_{yy} = 10\frac{M_{yy}}{b^2 q}\ ,\ \overline{Q}_y = \frac{Q_y}{bq} \tag{4.15}$$

在受板端彎矩的情況

$$\overline{M}_{yy} = \frac{M_{yy}}{\hat{M}}\ ,\ \overline{Q}_y = \frac{Q_y}{(\hat{M}/h)} \tag{4.16}$$

其中Q_y板內剪力值，$\hat{M}$為板端均佈外力彎矩

表 4.2 即列受均佈荷重時不同 y=const.斷面之平均之$\overline{M}_{yy}$及$\overline{Q}_y$，表中利用網格 sq2(a)、sq2(b)及 sq2(c)，分別得到 y 為 4 in. 、10 in.及 16 in.斷面處之不同寬厚比的無因次力平衡解及有限元素解。利用 sq2(a)所得之$\overline{M}_{yy}$與$\overline{Q}_y$，不論在任何 y=const.斷面上，都有隨著板厚變厚而越接近解析解的趨勢。惟$\overline{Q}_y$的在寬厚比 20 時，可能是網格切割數不足，導致計算結果不理想。隨著增加網格元素與節點數目，所得之有限元素解可得知，均更逼近於力平衡解；尤其$\overline{M}_{yy}$的相對誤差(approximate Relative Error）甚至低於 0.01％以下。綜觀表 4.2 所示，考量不同寬厚比且受均佈載重的情形下懸臂方形板$\overline{M}_{yy}$與$\overline{Q}_y$之內力值，可藉由增加較多網格數來獲得準確的分析結果。

表 4.3 所示為受板端均佈彎矩下，對應不同 y=const.斷面之平均之$\overline{M}_{yy}$及$\overline{Q}_y$，表中僅取一組網格 sq2(d)所分析之有限元素解與力平衡解比對。觀察表 4.3，在不同 y=const.斷面下之有限元素解，與力平衡解相比較而知，利用厚板理論搭配傳統有限元素法，求解板中無因次$\overline{M}_{yy}$及$\overline{Q}_y$，其分析結果是相當精準與可靠，故再進一步證明本研究所撰寫之有限元程式之正確性。

（b）有限元素法配合角函數之靜力解

為驗證含角函數部份電腦程式之正確性，吾人重解前節均佈荷重

之問題，並刻意於有限元網格 sq3 中加入角函數於板端部某區域(如圖 4.11 所示之陰影區域)。很明顯地，於該區域所加之角函數須為對應於第二章所述楔形開口角α為 180 度之情況；其並沒有奇異應力之現象。

表 4.4 所示為利用 sq2(b)及 sq3(含角函數)所得之部份內力值。sq2(b)及 sq3 具有相同之有限元素網格，惟於 sq3 中加入角函數。需注意到，表 4.4 所示M_{xy}與Q_x之正確值為零(由於對稱關係)；而有限元分析結果接近零，其可代表此結果之精準度。比較利用 sq2(b)及 sq3 所得結果，發現於Ω_c區域外(即圖 4.11 陰影處外)兩者所得結果是非常一致(如所預期地)；而於Ω_c區域內，兩者結果亦是相當接近。

§4.2.3 具垂直邊界裂縫簡支方形板受均載之收斂性分析

從第二及第三章所述可發現，本研究所發展之分析方法，處理具有奇異點板問題時，奇異點附近之應力分佈最主要決定於角函數，尤其是 r 階數小於 1 之角函數。因此，當探討奇異點附近收斂性時，可僅專注於 r 階數小於 1 中最小者角函數之對應係數。內力彎矩及剪力與角函數中最低項位移係數之關係可參考附錄 A。

裂縫在數學上常以一條線來代表，但此在有限元素模式中，是無法辦到的；因為數學上之線是無厚度的。在本研究中，吾人對裂縫之

模擬如圖 4.12 所示，裂縫尖端(crack tip)開口角度(α)為 0.5 度，裂縫尖端長度(L) (本文 L 均取各節分析案例網格數最少者之單位元素長)、寬度為(d)。

為進一步確認本研究所發展電腦程式之正確性，針對具裂縫簡支方形板受均佈荷重(q)進行收斂性分析。其中 $b/h = 10$ 與 $c/b = 0.1$(此 c 為裂縫全長)，圖 4.13 所示為所用不同網格 sq4(a)~(d)，各網格分別具有 400、576、784 及 1600 個元素；而且圖中所示灰色部分為 Ω_c 區域，其中分別涵蓋 4、36、100 及 225 個元素，並在 Ω_c 加入不同個數之角函數特徵值；由於此問題為對稱問題，所加之角函數亦僅是對稱角函數。

表 4.5 所示者為利用不同網格配合不同角函數個數所得之結果，其中僅需考慮控制裂縫尖端處彎矩奇異特性之角函數最低項位移係數 a_1^s 與 b_1^s。在此問題中剪力不具奇異性。表中結果可發現使用較細之網格，均能使 a_1^s 與 b_1^s 係數收斂，也可藉由此最低項係數之大小能了解奇異點附近處應力逼近無窮大之速率快慢。

§4.3 具中間水平裂縫厚板靜力收斂性分析

為了解裂縫尖端處由靜載所造成之應力奇異問題，本節將裂縫處引入角函數進行分析，並嘗試改變有限元網格型態與角函數特徵值之

個數，藉以探討在奇異點及其附近，無因次內力分佈及角函數最低項位移係數之收斂情形。

經過上節分別驗證在靜載問題中無裂縫板內力解之正確性，與具邊界裂縫單一奇異點之角函數最低項係數收斂性分析，首先證實(a)傳統有限元素分析模式，對於板受外載之靜力問題能計算出非常精準的結果；再者於(b)有限元素法配合角函數分析模式中，求解含有應力奇異性問題的裂縫厚板之靜力解，及其角函數係數能達成良好之收斂效果。所以本節將此兩種分析模式應用至具中間水平裂縫($\Delta=0°$)且 $b/h=10$、$c/b=0.25$(此 c 為裂縫半長)、波松比(ν)為 0.3、彈性模數(E)為 30,000 ksi、均佈荷重(q)為 100 psi 或板端均佈彎矩($\hat{M}$)為 100 inch-lbs/inch 的方形裂縫厚板(示意圖參看圖 4.1)。

§4.3.1 四端固定支承且 $c/b=0.25$ 之方形裂縫厚板

本小節主要探討四端固定支承(CCCC)型態之裂縫板在均載作用時，奇異點附近的內力分佈情況。吾人擬利用上述所定之兩種分析模式，並對有限元素網格做切細動作及改變角函數特徵值之使用個數，以進行內力及角函數最低項位移係數收斂性分析。

如圖 4.14(a)~(c)所示之網格 sq5(a)~(c)，各網格分別含有 400、528 及 1008 個元素，在 Ω_c 內也分別涵蓋了 4、16 及 64 個元素，如圖 4.15

所示灰色區域Ω_c即角函數疊加之範圍。分別在奇異點附近元素以$\theta = (0°,45°,90°)$三個方向，計算彎矩與剪力值隨橫軸r趨近於奇異點之無因次內力分佈

如圖 4.16(a)~(c)、圖 4.17(a)~(e)及圖 4.18(a)~(c)所示者，$D = 10/b^2q$代表將各彎矩分量無因次化之係數，$D_q = 1/bq$代表將各剪力分量無因次化之係數，圖中表示出網格 sq5(a)~(c)在受不同的分析模式與對應不同角函數個數時，分別在$\theta = (0°,45°,90°)$之無因次彎矩與剪力之雙對數內力分佈，觀察圖中可知傳統(純)有限元素分析之結果，皆隨著網格之切細而收斂，但卻都無法有效描述奇異點附近之奇異性，反觀在奇異點附近導入角函數後之內力解，在$r \to 0$附近之彎矩值很明顯的發生應力值急速增大之情形，然剪力部分如預期並不發生奇異特性。

細看圖 4.16(a)~(c)、圖 4.17(a)~(e)及圖 4.18(a)~(c)中可知，在具有應力奇異之裂縫厚板收斂分析中，各無因次內力分量收斂速率與有限元素網格數目和角函數個數密切相關。在裂縫板之奇異點附近引入角函數後，如網格 sq5(a)與 sq5(b)分析結果所示，即不需要太細的網格也能藉由增加角函數的個數來得到逼近之無因次收斂解；換言之，在較細的網格下如 sq5(c)，增加角函數使用個數對結果已經沒有影

響，相對而言只是徒增程式之計算時間。

綜觀圖 4.16(a)~(c)、圖 4.17(a)~(e)及圖 4.18(a)~(c)，雙對數無因次內力彎矩均於$r^{-0.5} \sim r^{-1}$間開始發生內力值急速增大之情形，在對稱案例中剪力不具奇異性也由此可觀察出。

如表 4.6 所示者為利用網格 sq5(a)~(c)，受均佈載重 q 及四周邊界固定支承下，分別利用不同角函數個數，進行對角函數最低項位移係數之收斂性分析，表中Γ_c為奇異點之邊界函數，網格 sq5(a)中係數收斂速率最快但結果尚不理想，網格 sq5(b)雖收斂速度較慢但卻已逼近收斂解，而最細的網格 sq5(c)其係數計算值皆保持穩定且收斂。由以上結果可推知Ω_c區域內之有限元素數目與角函數個數的使用量，的確能控制裂縫板其角函數最低項位移係數之收斂速度與準確度。

§4.3.2 四端簡支承且$c/b = 0.25$方形裂縫厚板

本小節主要探討四端簡支承(SSSS)型態之裂縫板在受均佈載重或板端四周均佈彎矩作用之靜力問題。吾人一樣利用上述所定之兩種分析模式，並對有限元素網格做切細動作及改變角函數之使用個數，以進行內力及角函數最低項位移係數收斂性分析。參看圖 4.19(a)~(c)所示四端簡支承之網格 sq6(a)~(c)，其網格分別涵蓋 400、528 及 1008 個元素，在Ω_c區域中分別含有 4、16 及 64 個元素。

(a)均佈載重

網格 sq6(a)~(c)承受均佈載重 q，分別計算$\theta=(0°,45°,90°)$方向下，彎矩與剪力值隨橫軸r趨近於奇異點之無因次內力分佈，結果如圖 4.20(a)~(c)、圖 4.21(a)~(e)及圖 4.22(a)~(e)所示，圖中在取雙對數的情況下很明顯的表現出，無因次內力彎矩與距離 r 在趨近於奇異點時均成線性關係，但彎矩值的奇異特性會隨著離奇異點越遠而越不明顯，所以從圖 4.20~22 中可觀察出，由有限元素配合角函數所計算之彎矩分量，於橫軸 r 小於 0.5 的距離內開始發生內力值急速增大之現象；且隨離奇異點越遠其內力解越吻合原本由傳統有限元素所得之內力值，這也正說明了奇異漸進解之特性與正確性；在奇異點附近能求出奇異點近域彎矩內力分量也能維持遠域由傳統有限元素所得之解。觀察上述之圖，如所預期本對稱案例剪力分量不發生奇異特性。

由表 4.7，分別比較網格 sq6(a)~(c)隨不同角函數個數，所計算之角函數最低項位移係數值，分析表 4.7 可知角函數最低項係數收斂結果，可隨Ω_c區域內有限元素數目之切細與增加角函數個數之使用量，求得穩定且收斂之解，故可證明本研究所撰寫之有限元程式，在受均佈載重時，求解方形簡支裂縫厚板靜力問題之正確性。

(b)四端受均佈板端彎矩($\hat{\mathbf{M}}$)

圖 4.23(a)~(c)、圖 4.24(a)~(e)及圖 4.25(a)~(e)所示者為網格 sq6(a)~(c)承受四端邊界均佈板端彎矩，分別計算 $\theta = (0°, 45°, 90°)$ 方向下，彎矩與剪力值隨橫軸 r 趨近於奇異點之無因次內力分佈，圖中 $D_m = (\hat{M})^{-1}$ 代表將各彎矩分量無因次化之係數，$D_{qm} = (\hat{M}/h)^{-1}$ 代表將各剪力分量無因次化之係數。從圖中分析結果發現，網格 sq6(a)~(c)在僅受均佈板端彎矩的情況下，各 θ 方向之內力值，在距離 $r^{-0.5} \sim r^{-1}$ 之內的情況，皆開始發生彎矩值急速增大之現象。

表 4.8 所示為四端簡支承方形裂縫板，在受四周板端彎矩下角函數最低項位移係數之收斂性分析。圖 4.26(a)~(b)為利用附錄 A 中式(A.2a)對稱項+式(A.3a)反對稱項來分析網格 sq6(a)~(c)，分別比較不同網格、角函數使用個數及裂縫開口角($\overline{\alpha}$)的應力強度 M_{yy} 無因次收斂值，其中 $S = 4\sqrt{2}/(qb^2\sqrt{c})$ 代表將應力強度 M_{yy} 無因次化之係數，直方圖則代表各網格的誤差百分率，從圖 4.26(a)中很明顯的觀察出，應力強度 M_{yy} 無因次值皆隨網格元素與角函數個數增加而趨近收斂。而網格 sq6(b)之分析結果也可視為已逼近收斂之解，圖 4.26(b)所顯示為裂縫開口角($\overline{\alpha}$)與應力強度 M_{yy} 值之關係。

由於本節之裂縫開口角度均為 0.5 度，故可比較施以相同靜載與不同支承邊界下，觀察角函數最低項係數值，對於內力逼近應力無窮

大速率之影響，觀察表 4.6 與表 4.7 可發現，簡支承之收斂係數解均較固接支承為大，故可說明簡支承板在奇異點處越容易破壞。

綜合本節受均載的四端簡支承及固定支承板分析之結果，可發現 M_{xx} 之內力強度隨 θ 增大而減小， M_{yy} 則相反。

§4.4 案例分析

前述透過對不同網格型態與不同支承邊界條件之裂縫厚板，作內力分佈與角函數最低項位移係數收斂性分析，已經證實角函數的確有效的能描述彎矩與剪力於奇異點附近的力學行為；所以本節更進一步探討，在受均佈載重之情況，觀察旋轉在不同的裂縫角度(Δ)或改變裂長比下，各彎矩與剪力分量在奇異點附近之內力分佈與各奇異點角函數係數之收斂值。因此本節亦將應用前節所述之兩種分析模式於，$b/h=10$、波松比(ν)為 0.3、彈性模數(E)為 30,000 ksi、均佈荷重(q)為 100 psi、c/b 為 0.25 懸臂支承或 c/b 為 0.1 四端簡支承之方形裂縫厚板(示意圖參看圖 4.1)。

§4.4.1 裂縫旋轉之方形厚板

圖 4.27(a)~(e)所示者，主要探討將裂縫旋轉 30°、60°、90°、120° 及 150° 時，且在 $c/b=0.25$ 的情況下，分析具有 FFCF 支承型態的懸臂裂縫板。圖中分別說明了在不同裂縫旋轉角(Δ)下，針對各個奇異

點所屬的局部座標系統下，應用前述之兩種分析模式以 $\theta=(0°,45°,90°)$ 方向來分析奇異點(Corner A)，在各無因次彎矩與剪力在 r 趨近於奇異點之力學行為。

圖 4.28(a)~(b)意為網格 sq7(a)與 sq7(b)，在奇異點(Corner A)分別旋轉 30° 及 150° 的網格切割圖，兩組網格均包含 668 個元素。參看圖 4.29(a)~(e)~圖 4.31(a)~(e)及圖 4.32(a)~(e)~圖 4.34(a)~(e)所示者，分別為利用網格 sq7(a)與 sq7(b)進行分析之結果，圖中在各 $\theta=(0°,45°,90°)$ 的方向下，計算由傳統有限元素與有限元配合角函數所得之彎矩與剪力分量，隨 r 趨近於奇異點之彎矩與剪力無因次分佈；圖 4.35(a)~(b)所示者為網格 sq7(c)與 sq7(d)，在奇異點(Corner A)分別旋轉 60° 及 120° 的網格切割圖，網格亦含 668 個元素。參看圖 4.36(a)~(e)~圖 4.38(a)~(e)及圖 4.39(a)~(e)~圖 4.41(a)~(e)所示者，分別為利用網格 sq7(c)與 sq7(d)進行分析之結果，圖中代表各 $\theta=(0°,45°,90°)$ 的方向下，計算各彎矩與剪力分量隨 r 趨近於奇異點之彎矩與剪力無因次分佈；圖 4.42 為奇異點(Corner A)旋轉 90° 的網格 sq7(e)，sq7(e)有限元素切割數為 1008，圖 4.43(a)~(e)~圖 4.45(a)~(e)亦代表在 $\theta=(0°,45°,90°)$ 方向下，計算各彎矩與剪力分量隨 r 趨近於奇異點之彎矩與剪力無因次分佈。詳看以上無因次內力分佈圖中虛線代表以傳統有限元素法分析而得之內力分佈，實線代表由有限元素配合角函數

分析而得之內力分佈，以上兩組內力分佈均跨越Ω_c區域。

總觀上述無因次內力分佈圖可發現，不論Δ及θ如何改變，由傳統有限元素法所得之靜力解，是無法描述奇異點附近的內力情況；反觀在加入角函數後，在雙對數座標之橫軸在r介於-0.5~-1 區間之後很明顯可觀察出，在非對稱之案例中，各θ方向之彎矩與剪力分量在r趨近於奇異點時內力值皆急速增大，同樣在遠離奇異點與Ω_c區域後，所得之內力解也與傳統有限元素所計算之內力一致。

表 4.9(a)、表 4.9(b)與表 4.10(a)、表 4.10(b)所示者，分別代表利用網格 sq7(a)、sq7(b)與網格 sq7(c)、sq7(d)，來作奇異點 Corner A 和 Corner B 的角函數係數收斂性分析。表中亦考慮了使用不同角函數個數之影響，與其分別對應的邊界函數。綜觀上述列表，可發現在角函數個數使用越多的時候角函數最低項位移係數則越逼近收斂解；表 4.11 即列網格 sq7(e)在奇異點 Corner A 的角函數最低項位移係數收斂值。

在裂縫開口角度不變的情況下，已知角函數最低項位移係數收斂解之大小，能表示各θ方向內力趨近無窮大之速率，藉觀察本節所有無因次內力分佈圖，可歸納出在奇異點附近由角函數各係數所計算而得之內力峰值，在θ為零時，均隨遠離支承邊界而增加。再者不論Δ與θ如何改變M_{yy}與Q_y內力峰值亦隨遠離支承邊界而增加。

§4.4.2 四端簡支承且$c/b=0.1$之裂縫厚板

圖 4.46 所示者為網格 sq8 受均佈載重 q 之中間裂縫方形板，網格 sq8 包含 624 個元素來進行有限元素內力分析。分別計算在各 $\theta=(0°,45°,90°)$ 方向上，隨不同角函數個數以橫軸 r 趨近於奇異點之無因次雙對數內力分佈。

網格 sq8 分析結果如圖 4.47(a)~(c)~圖 4.49(a)~(e)所示，在與網格 sq6(c)之內力解相比較之下，在裂長比越大的情況下，所得之角函數最低項係數也越大，亦說明內力越快達到應力無窮大。

圖 4.50 為三種不同寬厚比之示意圖，然而觀察圖 4.51 所示者，網格 sq8 比較不同角函數個數與寬厚比對應力強度M_{yy}收斂性之影響，從圖中可歸納出應力強度M_{yy}值隨著板的厚度增加而變大；且在寬厚比越大的情況下，有限元素的網格也需切割的更細，方能得到可靠與收斂之值。

第五章 結論與建議

§5.1 結論

本研究所發展之電腦程式主要以 Fortran 語言及其 IMSL 函式庫撰寫。利用收斂性分析，個別驗證與探討具不同支承邊界條件、靜載、寬厚比及不同裂縫位置、角度、長度方形厚板之靜力解。以下就針對本論文作一完整結論。

（1）使用較細之網格配合角函數個數之增加，均能使角函數最低項係數收斂。

（2）不論何種裂縫旋轉角(Δ)與內力分析方向(θ)，傳統有限元素所得之內力值皆隨網格之切細而收斂，卻都無法有效描述奇異點附近之奇異性，反觀導入角函數後所得之內力值，各彎矩與剪力分量在 r 趨近於奇異點時皆發生應力值急速增大，在遠離奇異點與Ω_c區域後，也與傳統有限元素所計算之內力一致。

（3）內力分量均隨在Ω_c區域中之有限元網格數目與角函數個數之增加而逼近收斂。而在對稱案例中剪力分量並不具奇異性。應力強度M_{yy}值與各奇異點角函數最低項係數亦隨有限元網格數目與角函數個數增加而趨近收斂。

（4）在裂長比越大的情況下，所得之角函數最低項係數也越大，亦說明內力越快達到應力無窮大。應力強度M_{yy}無因次值隨著板的厚度增加而變大，在寬厚比越大的情況下，有限元素的網格也需切割的更細，方能得到可靠與收斂之值。

（5） 具中間裂縫之四端簡支承及固定支承板， M_{xx}之內力強度隨θ增大而減小， M_{yy}則相反。

（6）懸臂板在裂長比不變之情況下，討論旋轉不同裂縫角度(Δ)與θ在各奇異點附近之內力峰值，在θ為零時，均隨遠離支承邊界而增加。再者不論Δ與θ如何改變M_{yy}與Q_y內力峰值亦隨遠離支承邊界而增加。

§5.2 建議

（1）在建構多種具裂縫之有限元分析模型輸入檔時，需耗費大量時間與精神在驗證網格與節點座標關連之連續性，故建議後人可選擇無網格 Galerkin 法(element free Galerkin method)或是 Ritz 法來求解具有裂縫或是 V 型缺口之厚板靜力問題。

（2）應力奇異點常是破壞之起點，所以在工程結構安全設計中常引用應力強度因子(stress intensity factor)，或是彎矩強度因子

(moment intensity factor)，來評估當裂縫發生時結構之安全性，故建議後人可利用本研究之程式繼續發展出，在不同開裂模式、外載條件及邊界條件下之應力強度因子。

（3）建議後人可採用 J 積分或以能量釋放率(energy release rate)G，求解 FSDT 板具裂縫或 V 型缺口在不同開口角度下所定義之應力強度因子值。

參考文獻

Banks-Sills, L., and Einav, O., (1987), "On singular, nine-noded, distorted, isoparametric elements in linear elastic fracture mechanics", *Computers and Structures*, 25(3), pp.445-449.

Bartholomew, P., (1978), "Solution of elastic crack problems by superposition of finite element and singular field", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 13(4), pp 59 -78.

Burton, W. S. and Sinclair, G. B., (1986), "On the singularities in Reissner's theory for the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 53, pp. 220-222.

Butalia, T. S., Kant, T., and Dixit, V. D. (1990),"Performance of Hterosis element for bending of skew rhombic plates", *Computers and structures*, 34(4), pp.23-49.

Dolbow, J., Moes, N., and Belytschko, T., (2000A), "Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method", *international journal of solids and structures*, 37(48), pp.7161-7183.

Dolbow, J., Moes, N., and Belytschko, T., (2000B), "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method", *Finite Elements in Analysis and Design*, 36(3), pp.235-260.

England, A. H., (1971), "On stress singularities in linear elasticity", *International Journal of Engineering* , 9(6), pp.571-585.

Gifford, L. N. Jr., and Hilton, P. D., (1978), "Stress intensity factors by enriched finite elements", *Engineering Fracture Mechanics*, 10(3), pp.485-496.

Huang, C. S., Leissa, A. W., and McGee, O. G., (1994), "Exact analytical solutions for free vibrations of thick sectorial plates with simply supported radial edges", *International Journal of Solid and Structures*, 31(11), pp. 1609-1631.

Huang, C. S., (2003), "Stress singularities at angular corners in first-order sheardeformation plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(1), pp.1-20.

Igarashi, H. and Honma, T. (1996) "A finite element method for scalar Helmholtz Equation with field singularities", *EICE Trans. Electron.*, E79_C (1), pp. 131-138.

Irwin, B. G., (1957), "Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, 64, pp.449-456.

Leissa, A. W., (2001), “Singularity considerations in membrane, plate and shell behaviors”, *International Journal of Solids and Structures*, 38(19), pp.3341-3353.

Lin, X. B., and Smith, R. A., (1999), “Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates, Part I: the numerical technique”, *Engineering Fracture Mechanics*, 63(5), pp.503-522.

Mind RD., (1951), “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates”, *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31-38.

Parks, D. M., (1974), “Stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors” , *International Journal of Fracture*, 10(4), pp. 487-502.

Reddy, J. N., (1999), “Theory and Analysis of Elastic plates”, Taylor and Francis, London.

Sosa, H. A., and Eischen, J. W., (1986), “Computaton of stress intensity factors for plate bending via a path-independent integral”, *Engineering Fracture Mechanics*, 25(4), pp.451-462.

Sosa, H. A., and Herrmann, G., (1989), “On invariant integrals in the analysis of cracked plates”, *International Journal of Fracture*, 40(2), pp.111-126.

Williams, M. L., (1966), “Stress singularity, adhesion, and fracture”, *Proceeding of 5th U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp. 451-464.

Woo, K. S., and Basu, P. K., (1989), “Analysis of singular cylindrical shells by P-version of FEM”, *International Journal of Solids and Structures*, 25(2), pp.151-165.

Yosibash, Z. and Schiff, B. (1993) “ A superelement for two-dimensional singularity boundary value problems in linear elasticity”, *International Journal of Fracture*, 62, pp. 325-340.

Yuan, F. G., and Yang, S., (2000), “Asymptotic crack-tip fields in an anisotropic plate subjected to bending, twisting moments and transverse shear loads”, *Composites Science and Technology*, 60(12-13), pp. 2489-2502.

林聰悟，林佳慧 (1999) ，「數值方法與程式」，圖文技術服務有限公司。

洪彥斌 (2003)，「利用考慮應力奇異之有限元素法分析具開口或裂縫

之圓厚 板振動」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文。

劉凱明 (2004) ，「具有奇異應力矩形 Mindlin 板之有限元素解」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文。

附錄 A

本文內力分量屬於卡式座標系統，但是 FSDT 所描述之內力分量是建構於極座標系統，所以再使用上必須做下列轉換，在此列出 M_{yy} 與 Q_y 之角函數對稱項公式推導如下

$$\psi_{xc}^{s} = (\Psi_{ri}^{s}\cdot\cos\theta_2 - \Psi_{\theta i}^{s}\cdot\sin\theta_2)\cdot f_{\Gamma c}$$

$$\psi_{yc}^{s} = (\Psi_{ri}^{s}\cdot\sin\theta_2 + \Psi_{\theta i}^{s}\cdot\cos\theta_2)\cdot f_{\Gamma c}$$

$$w_{c}^{s} = W_{i}^{s}$$

將 ψ_{xc}^{s} 與 ψ_{yc}^{s} 分別對 x 與 y 偏維分，與 w_c^s 對 y 之偏微分，整理可得

$$\begin{aligned}\psi_{xc,x}^{s} = &(\Psi_{ri,x}^{s}\cdot\cos\theta_2 + r^{-1}\Psi_{ri}^{s}\cdot\sin\theta_2{}^2 - \Psi_{\theta i,x}^{s}\cdot\sin\theta_2 + r^{-1}\Psi_{\theta i}^{s}\cdot\cos\theta_2\sin\theta_2)\cdot f_{\Gamma c}\\ &+(\Psi_{ri}^{s}\cdot\cos\theta_2 - \Psi_{\theta i}^{s}\cdot\sin\theta_2)\cdot f_{\Gamma c,x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{yc,y}^{s} = &\left(\Psi_{ri,y}^{s}\cdot\sin\theta_2 + r^{-1}\Psi_{ri}^{s}\cdot\cos\theta_2{}^2 + \Psi_{\theta i,y}^{s}\cdot\cos\theta_2 - r^{-1}\Psi_{\theta i}^{s}\cdot\sin\theta_2\cos\theta_2\right)\cdot f_{\Gamma c}\\ &+(\Psi_{ri}^{s}\cdot\sin\theta_2 + \Psi_{\theta i}^{s}\cdot\cos\theta_2)\cdot f_{\Gamma c,y}\end{aligned}$$

$$w_{c,y}^{s} = W_{i,y}^{s}\cdot f_{\Gamma c} + W_{i}^{s}\cdot f_{\Gamma c,y}$$

在 $\theta=\theta_2=0$ 的情況下

$$M_{yy}^{s} = -\overline{D}((\Psi_{\theta i,y}^{s} + r^{-1}\Psi_{ri}^{s} + \nu\Psi_{ri,x}^{s})\cdot f_{\Gamma c} + (\Psi_{ri}^{s}\cdot f_{\Gamma c,x} + \Psi_{\theta i}^{s}\cdot f_{\Gamma c,y}))$$

$$Q_{y}^{s} = \kappa^2 Gh(-\Psi_{\theta i}^{s}\cdot f_{\Gamma c} + W_{i,y}^{s}\cdot f_{\Gamma c} + W_{i}^{s}\cdot f_{\Gamma c,y}) \qquad \text{(A.1)}$$

再將 Ψ_{ri}^{s} 與 $\Psi_{\theta i}^{s}$ 分別對 x 與 y 偏維分與 W_i^s 對 y 偏微分可得

$$\Psi_{ri,x}^{s} = \Psi_{ri,ri}^{s}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \Psi_{ri,\theta i}^{s}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\Psi^{s}_{\theta i,y} = \Psi^{s}_{\theta i,ri} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \Psi^{s}_{\theta i,\theta i} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$W^{s}_{i,y} = W^{s}_{i,ri} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + W^{s}_{i,\theta i} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

參考式(4.5)可得 $\Psi^{s}_{ri,x} = \Psi^{s}_{ri,ri}$、$\Psi^{s}_{\theta i,y} = r^{-1}\Psi^{s}_{\theta i,\theta i}$ 及 $W^{s}_{i,y} = r^{-1}W^{s}_{i,\theta i}$ 代回式（A.1）

$$M^{s}_{yy} = -\overline{D}((r^{-1}(\Psi^{s}_{\theta i,\theta i} + \Psi^{s}_{ri}) + \nu\Psi^{s}_{ri,ri}) \cdot f_{\Gamma c} + (\Psi^{s}_{ri} \cdot f_{\Gamma c,x} + \Psi^{s}_{\theta i} \cdot f_{\Gamma c,y})) \quad \text{(A.2a)}$$

$$Q^{s}_{y} = \kappa^{2}Gh(-\Psi^{s}_{\theta i} \cdot f_{\Gamma c} + r^{-1}W^{s}_{i,\theta i} \cdot f_{\Gamma c} + W^{s}_{i} \cdot f_{\Gamma c,y}) \quad \text{(A.2b)}$$

反對稱項推導過程相同，結果表示如下

$$M^{a}_{yy} = -\overline{D}((r^{-1}(\Psi^{a}_{\theta i,\theta i} + \Psi^{a}_{ri}) + \nu\Psi^{a}_{ri,ri}) \cdot f_{\Gamma c} + (\Psi^{a}_{ri} \cdot f_{\Gamma c,x} + \Psi^{a}_{\theta i} \cdot f_{\Gamma c,y})) \quad \text{(A.3a)}$$

$$Q^{a}_{y} = \kappa^{2}Gh(-\Psi^{a}_{\theta i} \cdot f_{\Gamma c} + r^{-1}W^{a}_{i,\theta i} \cdot f_{\Gamma c} + W^{a}_{i} \cdot f_{\Gamma c,y}) \quad \text{(A.3b)}$$

由於本文之模擬裂縫角度 α 為 0.5 度，代入式(2.20)和式(2.21)，計算對稱與反對稱彎矩與反對稱剪力角函數特徵值為 $(\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \hat{\lambda}_1) = 0.5$ 帶入式（A.2）及式（A.3），在 $r \to 0$ 之情況下，$f_{\Gamma c}$ 對 x 與 y 偏微之項可視為零，所以透過破壞力學之理論與利用角函數最低階係數 a^{s}_{1}、b^{s}_{1}、c^{s}_{1}、a^{a}_{1}、b^{a}_{1} 及 c^{a}_{1}，配合邊界函數 $f(x,y)$，即可直接定義精確奇異應力值 $M_{yy} = M^{s}_{yy} + M^{a}_{yy}$ 與 $Q_{y} = Q^{s}_{y} + Q^{a}_{y}$，如式：

$$M_{yy} = M_{\theta} = -\overline{D}(r^{-1}(b^{s}_{1}\Psi^{s}_{\theta 1,\theta 1} + a^{s}_{1}\Psi^{s}_{r1}) + a^{s}_{1}\nu\Psi^{s}_{r1,r1} + r^{-1}(b^{a}_{1}\Psi^{a}_{\theta 1,\theta 1} + a^{a}_{1}\Psi^{a}_{r1})$$
$$+ a^{a}_{1}\nu\Psi^{a}_{r1,r1}) \cdot f_{\Gamma c} \quad \text{(A.4a)}$$

$$Q_{y} = Q_{\theta} = \kappa^{2}Gh(-b^{s}_{1}\Psi^{s}_{\theta 1} + r^{-1}c^{s}_{1}W^{s}_{1,\theta 1} - b^{a}_{1}\Psi^{a}_{\theta 1} + r^{-1}c^{a}_{1}W^{a}_{1,\theta 1}) \cdot f_{\Gamma c} \quad \text{(A.4b)}$$