

國立交通大學  
電控工程研究所

碩士論文

整合 GNSS 與 INS 量測資訊的地平面運動軌跡估測  
Motion Trajectory Estimation on Earth Surface by  
Integrating GNSS and INS Measurements

The logo of National Central University (NCU) is a circular emblem. It features a central figure of a person holding a torch, with a book below. The year '1896' is inscribed at the bottom of the emblem. The entire logo is rendered in a light blue color.

研究生：鄭期元  
指導教授：胡竹生 博士

中華民國一百零二年八月

整合 GNSS 與 INS 量測資訊的  
地平面運動軌跡估測

Motion Trajectory Estimation on Earth Surface by Integrating  
GNSS and INS Measurements

研究生：鄭期元

Student : Chi-Yuan Cheng

指導教授：胡竹生 博士

Advisor : Prof. Jwu-Sheng Hu

國立交通大學  
電機與控制工程研究所  
碩士論文

A Thesis  
Submitted to Institute of Electrical Control Engineering  
College of Electrical and Computer Engineering  
National Chiao-Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master  
In

Electrical and Control Engineering

August 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年八月

# 整合 GNSS 與 INS 量測資訊的 地平面運動軌跡估測

研究生：鄭 期 元

指導教授：胡 竹 生 博士

國立交通大學電控工程研究所碩士班



本論文提出了一套以卡爾曼濾波器整合鬆散耦合之 GNSS/INS 系統應用於軌跡紀錄中，離線適應性估測卡爾曼濾波器量測雜訊的方法。衛星定位系統中，環境會影響衛星訊號的接收，使量測雜訊的標準差隨環境與時間變化，因此估測量測雜訊相當重要。在以往提出的線上估測方法中，利用移動平均法，對過去視窗區間的卡爾曼創新序列估測當下的量測雜訊，僅在雜訊標準差隨時間變化不大的環境有較佳的結果，例如行駛於無遮蔽的高速公路上；但無法應付雜訊標準差變化快的環境，例如行駛於眾多高樓的市區中，接收衛星的數量會受高樓遮蔽影響，造成雜訊的標準差變動程度增加。

本論文利用可調維度的 Savitzky-Golay 濾波器，針對以當下取樣點為視窗區間中心，延遲取樣後所得到卡爾曼創新序列資訊，以可調變維度的局部多項式回歸法做量測雜訊的估測，並以統計學 F 檢定法適應性找出相對應維度，效果優於未經延遲取樣、僅參考過去區間資訊且固定維度的移動平均法，能估測雜訊標準差變化環境下的量測雜訊，在運動軌跡紀錄的結果優於以往線上估測的方法。模擬結果本方法的水平誤差為 0.3m，較其它方法有約 1 倍精準度的提升。

# Motion Trajectory Estimation on Earth Surface by Integrating GNSS and INS Measurements

Student : Chi-Yuan Cheng

Advisor : Prof. Jwu-Sheng Hu

Institute of Electrical and Control Engineering



## Abstract

This thesis proposes a new method which estimates the Kalman filter's measurement noise covariance matrix in a loosely coupled GNSS/INS sensor fusion system. The signals received from the satellites are heavily influenced by the environmental conditions, and will cause the noise variance to change dramatically. Thus, estimating the measurement noise to improve the fusion quality is very important. Most of the proposed methods use the moving average method to estimate the measurement noise online from the innovation sequence of the Kalman filter in the window interval. However, those methods can only have a good performance in a quasi-static environment, e.g., freeway where the signals are rarely blocked. In dynamic environments such as the urban area, the satellite signals are often blocked by the buildings, resulting in a large range of the noise variance. This thesis proposes to use Savitzky-Golay filter with degree adaptation (ADSG) to estimate the measurement noise. The ADSG filter uses local polynomial regression method to fit the delayed-sample innovation sequence in the window interval, and adjust the polynomial order by the statistics F-test. Experiments show that the proposed method's horizontal position error is about 0.3m, which is better than several existing methods.

## 誌 謝

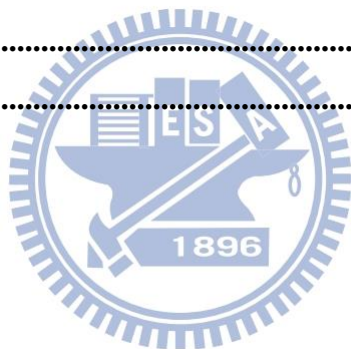
從大三做專題開始進入 xLab 這個大家庭，到現在碩二畢業，轉眼間就過了四年，回頭檢視自己在這四年中著實成長了不少，首先最要感謝的是恩師 胡竹生老師，他對於做研究認真不苟且的態度、面對問題追根究底的精神以及解決問題的邏輯批判能力與方法都深深影響了我，使我在往後的研究能以工程師的角度去解決問題，且老師的研究涉及各個領域，也使得每週實驗室報告的時候常常能有新的斬獲。另外一位恩人是博士班 孫冠群 Judo 學長，從我還是什麼都不會的小專題生開始一路提拔我、照顧我整整四年，想必一定很累吧哈哈。Judo 學長的研究態度完全繼承了胡老師的風格，切入問題總是用最犀利的角度，常常我的疑問被他一句話就點醒了，當場讓我佩服的五體投地，使我往後在面對問題時會在心中假想一個 judo 學長會怎麼反擊我，還滿有幫助的！另外還要感謝不吝於分享與指教的阿吉學長、常關心我近況數學超強的明唐學長，把我綽號意外降級的大師兄學長，還有每次都熱情邀我買便當使我充滿歉意的昭男學長、當助教很貼心又很仁慈打扮又很潮的耕維學長、畫立體機構很帥的德洋學長、有實力又很有魅力，很懂得交際的振華學長，外表看似小孩智慧卻過於常人而且跟我一樣悶騷但我帥很多的阿法學長。另外還有同屆從大學開始一起做專題上來、一起比過漫長龍騰比賽的冠宏、哲宇，最早來實驗室又最認真、硬體能力超強為人又開朗的阿文，我心中做研究的學習對象，兼具各項研究能力也跟我一樣愛看戲劇的鳴遠，交際能力很強很大器、身旁常常圍繞著女生讓人羨慕的小山東，熱愛 3C、電影分析及鋼彈讓我大開眼界的大夢。另外打籃球很狂野的宗翰學長，長的斯斯文文但很幽默的建廷學長，認真求學又認真享受人生，做人體貼的哲鳴學長，好久以前系網就認識的學弟佑軒，跟我同領域也熱衷於球賽與戲劇擁有奇特眼睛的凱翔，很享受人生又滿有實力的凱傑，做事認真負責且個性溫和的小綜，個人風格很強讓人印象深刻的小樂。

最後要特別感謝我的父母從小栽培我念書，使我今日能順利拿到碩士學位，沒有你們就不會有今天的我。另外還有一路相互支持、友誼長存、共同奮鬥的好姐妹冠頭家族，還有陪我渡過最難熬的求學生涯，每次見到都讓我很抒壓，把我照顧的無微不至的品勻，以及讓我在最後的衝刺階段依然能每天充滿活力與歡樂的 Kuri&Kirua。最後感謝交通大學提供充足的學習環境，願將來能盡自己能力，報答母校栽培之恩。

# 目 錄

摘 要.....	I
ABSTRACT .....	II
誌 謝.....	III
目 錄.....	IV
表 列.....	VI
圖 列.....	VII
<b>第一章 緒論.....</b>	<b>1</b>
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究目標.....	1
1.3 文獻回顧.....	2
1.4 論文貢獻.....	4
1.5 論文架構.....	4
<b>第二章 座標系統.....</b>	<b>5</b>
2.1 座標系統定義.....	5
2.1.1 慣性座標系 .....	5
2.1.2 地心地固座標系 .....	6
2.1.3 地理座標系 .....	6
2.1.4 導航座標系 .....	7
2.1.5 附體座標系 .....	7
2.2 座標系旋轉.....	7
2.2.1 方向餘弦法 .....	7
2.2.2 四元數法 .....	8
2.2.3 尤拉角法 .....	9
2.3 座標系間的轉換關係.....	10
2.3.1 地理與地心地固座標系轉換 .....	11
2.3.2 地心地固與導航座標系轉換 .....	12
2.3.3 導航與附體座標系轉換 .....	12
2.4 旋轉矩陣的動態方程式.....	14
<b>第三章 全球導航衛星系統與慣性導航系統之整合.....</b>	<b>15</b>
3.1 全球導航衛星系統.....	15
3.1.1 全球導航衛星系統介紹 .....	16
3.2 慣性導航系統.....	19
3.2.1 慣性導航方程式 .....	19
3.3 慣性導航誤差模型.....	21
3.3.1 慣性導航誤差方程式 .....	21

3.4	以卡爾曼濾波器實現鬆散耦合的 GNSS/INS 系統.....	23
3.4.1	卡爾曼濾波器 .....	24
3.4.2	鬆散耦合的 GNSS/INS 系統 .....	25
<b>第四章</b>	<b>基於適應性調變維度之 SAVITZKY-GOLAY 濾波器的雜訊估測.....</b>	<b>29</b>
4.1	SAVITZKY-GOLAY 濾波器 .....	29
4.2	適應性調變維度之 S-G 濾波器(ADSG).....	32
4.3	基於 ADSG 的雜訊估測法 .....	35
<b>第五章</b>	<b>模擬與實驗結果分析.....</b>	<b>39</b>
5.1	加入已知雜訊的模擬分析 .....	39
5.2	實際道路測試.....	48
5.2.1	iPhone5 與實驗室整合之感測資訊記錄器硬體 xGIC 介紹 .....	48
5.2.2	汽車行駛軌跡估測結果 .....	50
<b>第六章</b>	<b>結論.....</b>	<b>64</b>
6.1	研究成果.....	64
6.2	未來展望.....	64
<b>附錄</b> .....		<b>65</b>
<b>參考文獻</b> .....		<b>68</b>





# 表 列

表 2.2.1 尤拉座標系旋轉序列.....	9
表 3.1.1 全球目前主要的衛星導航系統.....	16
表 5.1.1 系統 OXTS RT3003 硬體規格.....	40
表 5.1.2 模擬中各方法的估測誤差方均根比較(單位：公尺).....	46
表 5.2.1 手機 IPHONE5 慣性儀硬體規格與記錄軟體 APP，SENSOR DATA.....	48
表 5.2.2 慣性儀 ADIS16480 硬體規格.....	49
表 5.2.3 衛星接收模組 GPS-M2 硬體規格.....	50
表 5.2.4 位置誤差方均根比較-IPHONE5(單位：公尺).....	57

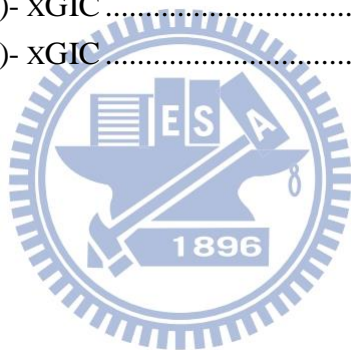




# 圖 列

圖 2.1.1 慣性、地心地固、導航座標系 .....	6
圖 2.2.1 向量與四元數法轉換 .....	9
圖 2.2.2 姿態角名稱介紹 .....	10
圖 2.3.1 導航與附體座標系投影關係 .....	13
圖 3.1.1 衛星系統三角定位法 .....	17
圖 3.4.1 卡爾曼濾波器演算法流程圖 .....	25
圖 3.4.2 鬆散耦合之 GNSS/INS 架構 .....	28
圖 4.1.1 S-G 濾波器原理示意, $M=2, N=2$ .....	30
圖 4.1.2 S-G 濾波器的頻率響應 .....	31
圖 4.1.3 S-G 截止頻率與維度關係圖 .....	31
圖 4.2.1 模擬加入高斯雜訊的 S-G 估測訊號 .....	33
圖 4.2.2 ADSG 法濾高斯雜訊結果與對應維度 .....	33
圖 4.2.3 固定維度 S-G 濾高斯雜訊模擬結果 .....	34
圖 4.3.1 模擬卡方分布訊號做濾波 .....	36
圖 4.3.2 適應性維度與固定維度之 S-G 濾波器估測卡方分部訊號模擬結果 .....	37
圖 4.3.3 ADSG 離線估測量測雜訊流程圖 .....	38
圖 5.1.1 資料包感測器安裝位置圖 .....	39
圖 5.1.2 資料包實驗平台 .....	39
圖 5.1.3 模擬中未經整合之 GNSS 與 INS 軌跡圖 .....	41
圖 5.1.4 模擬中經 GNSS/INS 整合後的軌跡圖 .....	41
圖 5.1.5 模擬中估測的量測雜訊標準差(北) .....	42
圖 5.1.6 模擬中估測的量測雜訊標準差(東) .....	42
圖 5.1.7 模擬中量測雜訊標準差估測誤差(北) .....	43
圖 5.1.8 模擬中量測雜訊標準差估測誤差(東) .....	43
圖 5.1.9 模擬中的位置誤差(北) .....	44
圖 5.1.10 模擬中的位置誤差-以 KNOWNR 為參考基準(北) .....	44
圖 5.1.11 模擬中的位置誤差(東) .....	45
圖 5.1.12 模擬中的位置誤差-以 KNOWNR 為參考基準(東) .....	45
圖 5.1.13 衛星 GNSS 資料偏移之 A 處放大圖 .....	46
圖 5.2.1 實驗平台 XGIC 硬體全圖 .....	49
圖 5.2.2 實驗平台架設圖 .....	50
圖 5.2.3 前進方向加速度濾波前後比較-IPHONE5 .....	51
圖 5.2.4 前進方向加速度濾波前後比較-XGIC .....	51
圖 5.2.5 導航角角速度濾波前後比較-IPHONE5 .....	52
圖 5.2.6 導航角角速度濾波前後比較-XGIC .....	52

圖 5.2.7 交大環校未整合的原始軌跡-IPHONE5.....	53
圖 5.2.8 加入 NHC 與車體僅往前行駛限制的原始軌跡-IPHONE5 .....	53
圖 5.2.9 經整合後的交大環校軌跡圖-IPHONE5.....	54
圖 5.2.10 交大環校軌跡 A 區放大圖-IPHONE5.....	54
圖 5.2.11 交大環校軌跡記錄(北)- IPHONE5 .....	55
圖 5.2.12 交大環校軌跡記錄(東)- IPHONE5 .....	55
圖 5.2.13 量測雜訊估測(北)- IPHONE5 .....	56
圖 5.2.14 量測雜訊估測(東)- IPHONE5 .....	57
圖 5.2.15 加入 NHC 與速度方向的交大環校原始軌跡圖-XGIC .....	58
圖 5.2.16 經整合後的交大環校軌跡圖-XGIC .....	58
圖 5.2.17 交大環校軌跡記錄(北)-XGIC .....	59
圖 5.2.18 交大環校軌跡記錄(東)-XGIC .....	59
圖 5.2.19 交大環校速度記錄(北)-XGIC .....	60
圖 5.2.20 交大環校速度記錄(東)-XGIC .....	60
圖 5.2.21 姿態角記錄結果-XGIC.....	61
圖 5.2.22 量測雜訊估測(北)- XGIC .....	62
圖 5.2.23 量測雜訊估測(東)- XGIC .....	62



# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

行車記錄器(Event Data Recorder, EDR), 擁有類似飛機的黑盒子紀錄器的功能, 可以連續記錄車輛瞬間的行駛速度、行徑軌跡、車輛方向、影像與時間, 在交通意外發生時, 扮演著相當重要的角色。不僅能幫助相關單位能快速釐清事故發生的經過, 同時也保護了駕駛自身的權益。隨著科技的進步與各國政府法規的大力推動下, 行車紀錄器的發展越發蓬勃。

然而目前市面上銷售的行車記錄器中, 絕大多數是以攝影機效能為主打, 強調的是鏡頭拍攝的最大廣角角度與CMOS元件的感光能力, 但在現今的法律中, 行車記錄器的影像畫面僅能做為輔佐證據, 法律規範的效力上相當有限。即便少數產品中有搭載重力計(G-sensor), 其重力計的功能也僅用於偵測碰撞的發生, 並未有任何軌跡記錄的功用。

在未來, 行車記錄器若是能更佳完善地與慣性儀系統整合, 記錄更精準的運動軌跡, 相信能加速推動行車記錄器在法律規範或是交通安全層面上的落實發展, 保障社會上更多人的權益。

## 1.2 研究目標

本論文研究目標為利用 GNSS/INS 整合系統, 進行車輛運動軌跡、速度與車輛姿態的估測。一般來說, GNSS/INS 整合系統都是應用在即時導航上, 所面臨的技術問題是線上估測雜訊的方法, 它影響到導航定位的精準度, 造成導航上的誤差。然而在行車紀錄器的應用中並不講求即時導航, 而是講求更精準的運動

軌跡、速度與姿態估測以還原事發真相。為達此目標，本研究將致力於離線估測雜訊的方法，期望藉由較精準的雜訊估測，達到更精準的運動軌跡紀錄。

### 1.3 文獻回顧

大多數論文使用卡爾曼濾波器時，利用事前的統計，將雜訊的共變異矩陣假設為已知的常數項。在雜訊標準差不太會隨著環境與時間改變的應用下，這個假設是合理的，系統狀態的估測結果也相當不錯。然而在雜訊標準差容易變化的應用中，卡爾曼濾波器必須要有能適應性調變的能力，才能針對其改變做出對系統狀態更佳的修正。本節整理了三種目前常見的基於創新序列(innovation sequence)的適應性調變卡爾曼濾波器演算法以及其它文獻適應性估測雜訊的方法。創新序列為不同取樣時間下，實際量測值減去系統預測之量測值的差量， $v = z - \hat{z}$ ，所累積的一段序列資訊。

第一種為基於調變過程雜訊比例的適應性估測法[7]，加入了一個參數 $S_k$ ，利用當下與統計區間內的創新序列值做比較，可適應性調變卡爾曼濾波器中過程雜訊的共變異矩陣 $Q_k$ 的權重，而影響卡爾曼增益(Kalman Gain)於量測項與系統預測項間的權衡。若 $S_k > 1$ ，則表示系統處於較不穩定的狀態，因此放大過程雜訊，使量測項有更多的權重。 $S_k = 1$ 為一般的卡爾曼濾波器。 $S_k < 1$ 表示系統處於較穩定的狀態，使系統端有更多的權重，[17]也利用類似概念推導適應性調變的強健濾波器。

第二種為基於多個模型的適應性估測法(Multiple Model Adaptive Estimation, MMAE)[10]，此方法早在1965年即被提出，利用了多個不同模型的卡爾曼濾波器同時做平行運算，以不同模型下高斯分布之創新序列的機率密度函數(Probability Density Function)，算出每個時刻該模型被相信的程度後，再與各模

型算出的結果做加權。此方法的優點為在多個模型之中，若其中有一個模型描述較為精準的情形下，該模型的相信機率值會快速的收斂到 1，其它模型的相信機率則收斂至 0，但缺點為若在多個模型之中沒有一個模型能精準描述，則此方法的收斂速度相當的慢。由於此方法運算量相當可觀，且必須對模型有一定程度的了解，因此實用性並不高。在目前介紹的兩個方法中，雖然具有適應性調變的能力，但都未對雜訊共變異矩陣  $\mathbf{Q}_k$  與  $\mathbf{R}_k$  直接估測。

第三種為基於創新序列的適應性雜訊估測法，Mehra[1][2]利用創新序列與其共變異矩陣理論值的一致性，藉由算出創新序列的期望值，能直接對  $\mathbf{Q}_k$  與  $\mathbf{R}_k$  做適應性估測。此方法的基本原理也被延伸應用在許多估測雜訊的論文中，如 Mohamad[3]以最大似然原則推導創新序列期望值，[9]並應用於 GPS/INS 的整合系統中，Odelson[4]、Akesson[5]利用自我共變數矩陣之最小平方方法估測量測雜訊，Adbel-Hafez[6]將其應用於 GPS/INS 整合系統中，[15]利用可調變視窗大小的移動平均法估測變化的量測雜訊。本論文所使用的估測方法也屬於第三種方法的範疇，利用可適應性調變維度的 S-G 濾波器算出創新序列的期望值，再藉由與其共變異矩陣理論值的一致性，估測量測雜訊。

其它非利用創新序列的估測方法如[18]假設衛星雜訊為色雜訊(Color Noise)，並以成形濾波器估測之。[16][27]利用衛星與接收器之間，幾何與誤差的關係參數，精度因子(Dilution of Precision, DOP)，利用精度因子含有時變資訊的特性，對量測雜訊進行估測。

## 1.4 論文貢獻

1. 提出一套 GNSS/INS 整合系統中離線適應性估測卡爾曼濾波器量測雜訊的新方法。
2. 本研究的方法效果優於以往線上估測方法，能估測雜訊標準差隨環境與時間變化下的量測雜訊。

## 1.5 論文架構

本論文架構包含了三個部分，分別為探討 GNSS/INS 系統的基本背景知識、估測量測雜訊演算法的介紹，與軟硬體模擬與實作的驗證。

第一部份：

第二章：座標系統

第三章：全球導航衛星系統與慣性導航系統之整合

第二部份：

第四章：基於適應性調變維度之 Savitzky-Golay 濾波器的雜訊估測。

第三部份：

第五章：軟硬體設計與實驗結果

第六章：結論

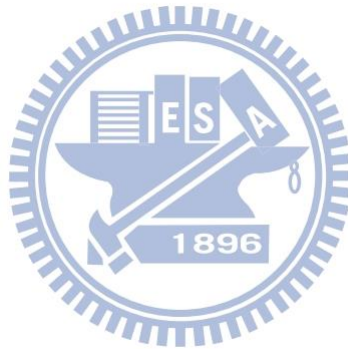




## 第二章 座標系統

在做軌跡紀錄或是導航應用時，根據所設計的系統與所使用感測器不同，會用到各種不同的座標系統。本章將介紹本研究所使用到的座標系的定義，以及座標系與座標系間轉換的方法與旋轉矩陣的動態方程式，對這些座標系從基本去認識。在本研究中使用到的座標系包含：

1. 慣性座標系
2. 地心地固座標系
3. 地理座標系
4. 導航座標系
5. 附體座標系



### 2.1 座標系統定義

在做 GNSS/INS 系統整合之前，必須先把各座標系的意義弄清楚。本節會介紹所用到的五個座標系的定義，並把座標系通用的名詞整理列出。

#### 2.1.1 慣性座標系

慣性座標系(Inertial Frame)是在物體運動行為符合牛頓第一運動定律下所定義的座標系統，該座標系統沒有明確定義出原點的位置，且可以自由定義三個彼此互相垂直的座標軸。一般定義座標原點於地球質心處，Z 軸指向地理北極，即地球自轉的轉軸，另外 X、Y 軸隨意定義，如圖 2.1.1。



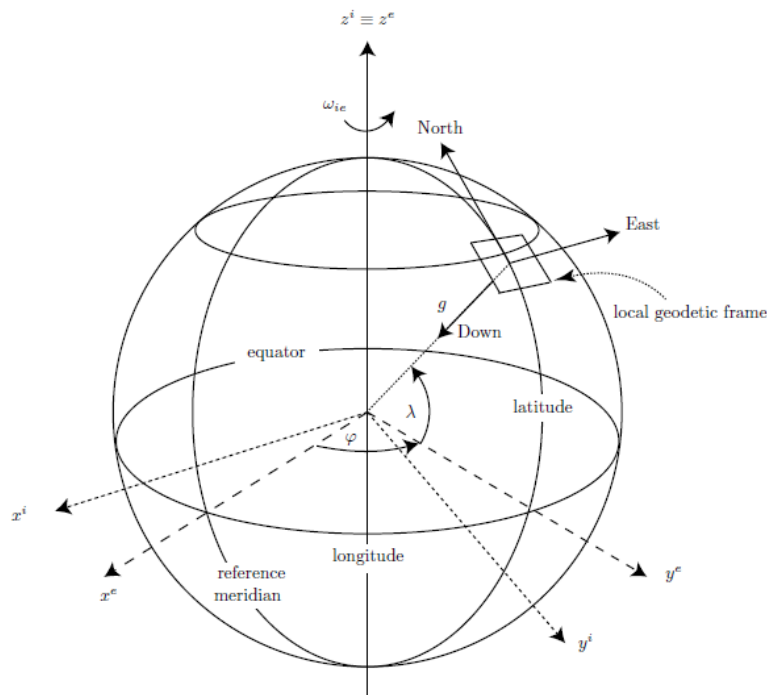


圖 2.1.1 慣性、地心地固、導航座標系

## 2.1.2 地心地固座標系

地心地固座標系 (Earth-centered Earth-fixed Frame) 也常被叫做地球座標系 (Earth Frame)，定義座標原點於地球質心，Z 軸指向地理北極，X 軸指向赤道與本初經線的交點。Y 軸再以 X 與 Z 軸由右手定則得出。也因此地心地固座標系會隨著地球自轉而同步旋轉，如圖 2.1.1。

## 2.1.3 地理座標系

地理座標系 (Geodetic Frame) 因為沒有定義出原點與三個垂直的軸，說起來並不算是一個卡式座標系 (Cartesian Coordinate System)，用的是經度 (Longitude)、緯度 (Latitude)、離地表高度 (Height or Altitude) 來表示物體在地球表面上的位置，也因此也有人稱其為 LLH 或 LLA frame。在衛星定位系統中所取得的位置資訊，即是用地理座標系來表示。

## 2.1.4 導航座標系

導航座標系(Navigation Frame)常用在地球表面做區域性的小範圍移動，必需先在地球表面選取一個參考原點，也有人稱做本地地理座標系(Local Geodetic Frame)並以該參考原點對地球做一切平面，因此也有人稱做弦切座標系(Tangent Frame)。導航座標系定義其 N 軸指向地理北極，E 軸指向地理東方，D 軸為切平面的法向量，指向地心，平行於重力方向，因此也稱做 NED 或 ENU 座標系，如圖 2.1.1。

## 2.1.5 附體座標系

附體座標系(Body Frame)定義在移動的載體上，如汽車、飛機。其原點定義在載體質心，X 軸定義為載體運動的前進方向，Y 軸定義於載體的側方向，Z 軸以 X 與 Y 軸由右手定則得出。在應用中，加速規與陀螺儀皆是在附體座標系下表示。



## 2.2 座標系旋轉

關於座標系的旋轉的方法，一般來說有三種常見的表示方法 1.方向餘弦法 2.四元數法 3.尤拉角法。本論文使用尤拉角法，將介紹方向餘弦與四元數法後，對尤拉角法特別討論。

### 2.2.1 方向餘弦法

方向餘弦法(Direct Cosine Method, DCM)利用幾何特性，能得知其單位向量的分量與座標系基底向量夾角為一餘弦關係。轉換關係如式(2.1)所示。

$$\mathbf{p}^b = \mathbf{R}_a^b \mathbf{p}^a$$

$$\mathbf{R}_a^b = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{i_a, i_b}) & \cos(\alpha_{j_a, i_b}) & \cos(\alpha_{k_a, i_b}) \\ \cos(\alpha_{i_a, j_b}) & \cos(\alpha_{j_a, j_b}) & \cos(\alpha_{k_a, j_b}) \\ \cos(\alpha_{i_a, k_b}) & \cos(\alpha_{j_a, k_b}) & \cos(\alpha_{k_a, k_b}) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$\alpha_{i_a, j_b}$  表示 a 座標系中的基底向量  $i$  與 b 座標系中的基底向量  $j$  的夾角

## 2.2.2 四元數法

四元數法(Quaternion)利用複數建立的四維空間運作[29], 利用四維空間描述旋轉過程, 基本代數原則如式 2.2。

$$q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j}\mathbf{i}, \text{ etc}$$

在對向量做座標旋轉時, 可以想像成將一目標向量沿著待轉旋轉軸旋轉某角度的關係, 角度與三維轉軸向量的四維空間可用四元數法描述如式 2.3。  $\theta$  為待轉角度,  $\bar{a}$  為待轉轉軸向量。

$$q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\bar{a}) = (w, x, y, z) \quad (2.3)$$

四元數法把目標向量從三維向量轉換至四維向量  $v$ , 並與四元數描述的待轉旋轉行為  $q$  做運算, 得到旋轉後的四維向量  $w$ , 如式(2.4)

$$w = qvq^* \quad (2.4)$$

運算後的向量再轉換回三維空間, 如圖 2.2.1。式 2.4 能以旋轉矩陣表示如式(2.5), 其中每個元素可以用四元二次項函數來表示, 因此不會有旋轉矩陣遇到奇異值的問題。

$$R_q = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy & 0 \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx & 0 \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

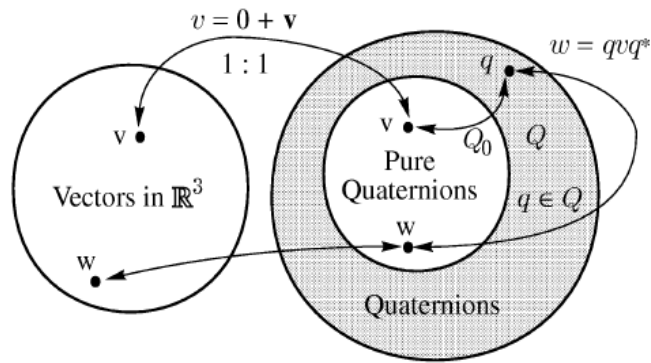


圖 2.2.1 向量與四元數法轉換

### 2.2.3 尤拉角法

根據尤拉角(Euler Angle Rotation)轉換定理[29], 任意兩個獨立且正規化正交的座標系, 可以對座標軸用三次以下的旋轉描述其轉換關係, 並且不限定一個軸只能旋轉一次(但同一個軸不能連續旋轉二次以上, 因為這相當於只旋轉一次)。排列組合的結果一共有 12 種旋轉方式, 如表 2.2.1。本研究使用 Z->Y->X 的旋轉序列。

表 2.2.1 尤拉座標系旋轉序列

三軸 各轉 一次	XYZ	YZX	ZXY
	XZY	YXZ	ZYX
某軸 重複 旋轉	XYX	YZY	ZXZ
	XZX	YXY	ZYZ

依尤拉角定理將 a 座標系轉至 b 轉標系拆成三次旋轉。首先對 Z 軸旋轉  $\alpha$  度

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

再來對 Y' 軸(不是 Y 軸)旋轉  $\beta$  度

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

最後再對 X' 軸(不是 X 軸)旋轉  $\gamma$  度後，向量轉換至 b 座標系

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

由以上三式推導可以得式(2.6)

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = R_a^b \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

$$R_a^b = \begin{bmatrix} c(\beta)c(\alpha) & c(\beta)s(\alpha) & -s(\beta) \\ s(\gamma)s(\beta)c(\alpha) - c(\gamma)s(\alpha) & s(\gamma)s(\beta)s(\alpha) + c(\gamma)c(\alpha) & s(\gamma)c(\beta) \\ c(\gamma)s(\beta)c(\alpha) + s(\gamma)s(\alpha) & c(\gamma)s(\beta)s(\alpha) - s(\gamma)c(\alpha) & c(\gamma)c(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

事實上，當在描述空間中載體的姿態時，會以翻滾角(roll- $\phi$ )、俯視角(pitch- $\theta$ )、航向角(yaw 或 heading- $\psi$ )稱呼之，分別對應到  $\gamma, \beta, \alpha$  角，如圖 2.2.2。

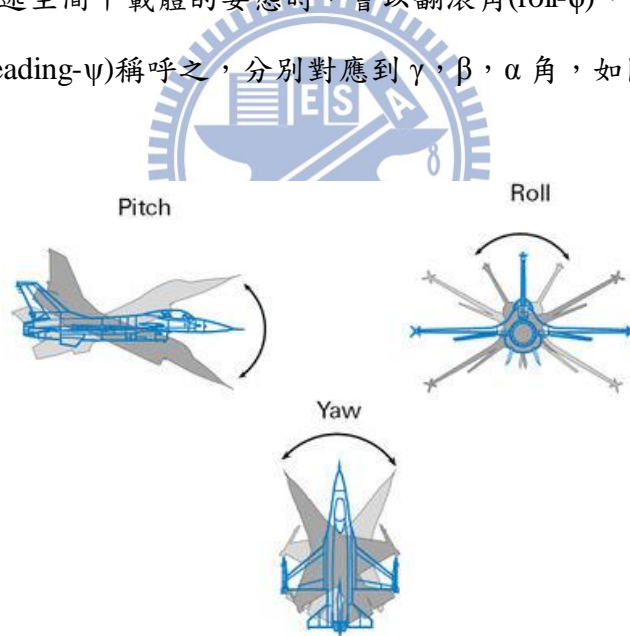


圖 2.2.2 姿態角名稱介紹

## 2.3 座標系間的轉換關係

在做感測器整合時，必須要把所有感測器的座標系轉到同一個座標系上，一般來說都是將感測器的資訊轉到 ECEF 或是 NED 座標系上。在本研究做軌跡

紀錄的應用上，由於是在地表做小範圍的運動，本研究傾向於把所有座標系上的資訊都轉到導航座標系 NED 上運算。

### 2.3.1 地理與地心地固座標系轉換

在把 GNSS 訊號從地理座標系轉換到 NED 座標系時，可以分成兩個步驟，先將 GNSS 訊號由地理座標系轉換到 ECEF 座標系，再由 ECEF 座標系轉至 NED 座標系。地理座標系與 ECEF 的轉換公式如式(2.7)。

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_e + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N_e + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [N_e(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$R_a = 6,378,137.0 \text{ m}$$

$$f = 1/298.257223563$$

$$R_b = R_a(1 - f) = 63567520 \text{ m}$$

$$e = \frac{\sqrt{R_a^2 + R_b^2}}{R_a} = 0.08181919$$

$$M_e = \frac{R_a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$N_e = \frac{R_a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$\varphi$ : 緯度

$\lambda$ : 經度

$h$ : 高度

$e$ : 地球離心率

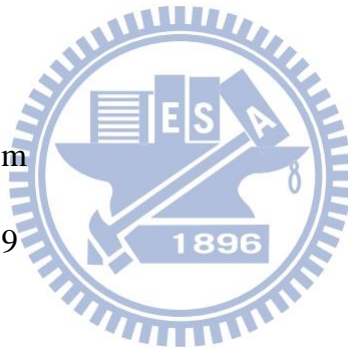
$R_a$ : 地球半長軸長

$R_b$ : 地球半短軸長

$f$ : 地球扁率

$M_e$ : 本初經線曲率半徑

$N_e$ : 卯酉圈曲率半徑



### 2.3.2 地心地固與導航座標系轉換

ECEF 座標系在做座標旋轉至 NED 座標系之前，必需在 ECEF 上先選取一個基準點做為 NED 座標系中的參考原點，轉換公式如式(2.8)所示。由於 NED 座標系的使用條件限制是物體運動必須遵守小範圍移動為前提，因此此座標轉換的旋轉矩陣在本研究的應用中，可以視為常數。

$$\begin{bmatrix} P_n \\ P_e \\ P_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\varphi c\lambda & -s\varphi s\lambda & c\varphi \\ -c\lambda & c\lambda & 0 \\ -c\lambda c\varphi & -c\varphi s\lambda & -s\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p - x_r \\ y_p - y_r \\ z_p - z_r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$\lambda$ : longitude

$\varphi$ : latitude

$c(\cdot)$ : cosine operator

$s(\cdot)$ : sine operator



### 2.3.3 導航與附體座標系轉換

在利用慣性儀做軌跡紀錄時，這一個轉換關係十分的重要。因為在加速規中量到的物理量是加速度，其中包含了物體運動的線性加速度與重力的投影分量，如圖 2.3.1，若這個轉換關係不夠精確，重力分量所造成的偏壓值變成了線性加速度，使在做線性加速度積分與二次積分至速度與位置時的發散。而此座標轉換除了將載體上慣性儀速度與位置資訊轉換到 NED 座標系外，還包含了載體的姿態角資訊，也就是說所有軌跡紀錄的必要資訊都與這個轉換相關。根據尤拉角(2.3)式，可以得知附體-導航座標系的轉換矩陣  $\mathbf{R}_n^b$ ，算出在附體座標系中的加速規所量到的重力分量，式(2.9)。



$$\bar{\mathbf{g}}_b = \mathbf{R}_n^b \cdot \bar{\mathbf{g}}_n = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cdot s\theta \\ g \cdot s\phi c\theta \\ g \cdot c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$\phi$ : roll

$\theta$ : pitch

$\psi$ : yaw

值得注意的是，在利用重力推算姿態時，附體座標系的重力分量中只能從加速規反推得到翻滾角與俯視角的解，在做軌跡紀錄時最重要的航向角資訊無法直接從重力分量求解，因此需要靠陀螺儀與磁力計做感測器結合推算，這也是用慣性儀做姿態偵測的最大挑戰之一。

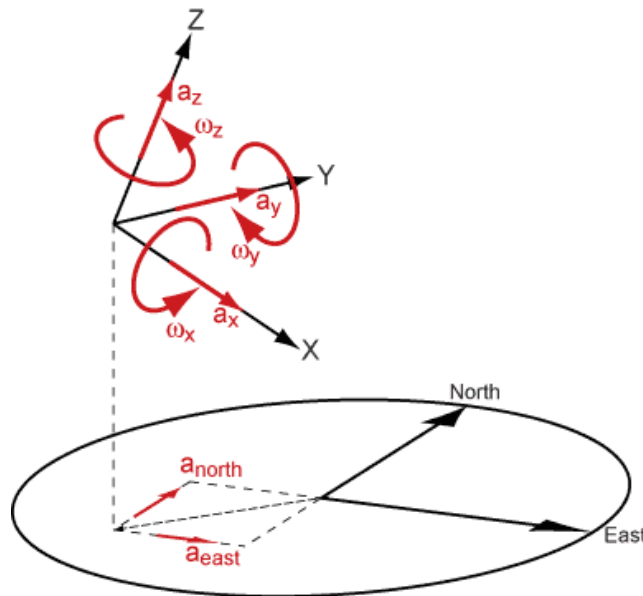


圖 2.3.1 導航與附體座標系投影關係

## 2.4 旋轉矩陣的動態方程式

當載體在做旋轉運動時，其相對於導航座標系的關係也跟著在改變，這與載體姿態的推算相當有關，因此需建立一個動態方程式去描述這個旋轉關係。先觀察尤拉角公式(2.6)，將 a 到 b 座標系的旋轉(a、b 可以代表任意座標系)矩陣從時刻 t 轉至到 t+Δt 做小角度旋轉的假設，對三角函數留下泰勒展開式的一次項做近似( $\sin(x) \approx x$ ,  $\cos(x) \approx 1$ )，且假設旋轉矩陣從 t 轉至得到 t+Δt 的角速度為常數後，得到式(2.10)。

$$R_{smallangle} \approx \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + skew\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\right) \approx \mathbf{I} + \Omega_{ba}^a \Delta t, \Omega_{ba}^a = skew\left(\begin{pmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ \omega_\gamma \end{pmatrix}\right) \quad (2.10)$$

根據微分基本定義，代入式(2.7)，可推導得到旋轉矩陣的動態方程式，式(2.11)。

$$\begin{aligned} R_a^b(t + \Delta t) &= R_a^b(t) \cdot R_{smallangle} \\ \dot{R}_a^b(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_a^b(t + \Delta t) - R_a^b(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_a^b(t) \cdot (I + \Omega_{ba}^a \Delta t) - R_a^b(t)}{\Delta t} \\ &= R_a^b(t) \cdot \Omega_{ba}^a \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 第三章 全球導航衛星系統與慣性導航系統之整合

全球導航衛星系統(Global Navigation Satellite System, GNSS)與慣性導航系統(Inertial Navigation System, INS)兩者的特性正好相反。GNSS 的優點為長時間精準度不受影響,但缺點是取樣頻率太慢且易受環境影響,短時間的精準度不夠。INS 的特性正好相反,優點是取樣頻率快,短時間內精準度夠,但長時間則會有偏壓與準位漂移的缺點。兩者優缺點正好互補,適合做感測器結合,其應用於導航上,至今已有十餘年的歷史,但由於當時慣性導航系統造價昂貴,金額動輒數百萬台幣,因此並未被廣泛地應用。但在今日微機電系統 (Micro Electro Mechanical Systems, MEMS)製程技術發展越來越純熟,低價位的 GNSS/INS 整合應用在近幾年又熱絡了起來。

本章將會簡單介紹全球導航衛星系統後,推導慣性導航方程式,並介紹一般慣性導航系統中,最常見的誤差模型(Error Model)架構[33][34]。最後,介紹慣性導航系統如何透過卡爾曼濾波器(Kalman filter)與全球導航衛星系統做感測器結合,實現本研究所使用的 GNSS/INS 整合系統的完整架構。

### 3.1 全球導航衛星系統

最早衛星系統是用在軍事用途上,但到後來衛星系統所帶來的效益已遠遠經超當初設計的目的,現今被廣泛應用於船隻、車輛與無人飛機的定位上。在本論文中即使用衛星系統做輔助,提升軌跡紀錄的精準度。

### 3.1.1 全球導航衛星系統介紹

在全球導航衛星系統(GNSS)中,最有名也最普及的為美國的 GPS 衛星系統。其它還有近年來修復完善的俄羅斯的 Glonass 衛星系統、歐洲地區的伽利略(Galileo)衛星系統,以及最近發展快速的中國北斗(Beidou)衛星系統,如表 3.1.1 (來源:維基百科)。而近幾年來,由於政治等因素,促成同時使用多個衛星系統的發展,其中就屬 GPS/Glonass 的雙衛星系統最為普及,甚至在 2012 年 6 月以後出產的智慧型手機及平板,都內建 GPS/Glonass 雙衛星系統接收器。使用者可以直接從接收器模組的輸出格式中,得到以 1Hz(視接收器而定,通常即為 1Hz)更新定位點的經、緯、高度資訊。

表 3.1.1 全球目前主要的衛星導航系統

System	GPS	GLONASS	COMPASS	Galileo
Political entity	United States	Russian Federation	China	European Union
Coding	CDMA	FDMA/CDMA	CDMA	CDMA
Orbital height	20,180km(12,540mi)	19,130km(11,890 mi)	21,150km(13,140 mi)	23,220km(14,430mi)
Period	11.97hours(11 h58 m)	11.26hours(11 h16 m)	12.63hours(12 h38 m)	14.08hours(14 h5 m)
Evolution Per sidereal day	2	17/8	36/19	17/10
Number of satellites	At least 24	31, including,24 operational,1 in preparation,2 on maintenance,3 reserve,1 on tests	5geostationary orbit(GEO) satellites, 30medium Earth orbit(MEO) satellites	4test bed satellites in orbit,22operational satellites budgeted
Frequency	1.57542GHz(L1signal) 1.2276 GHz(L2 signal)	Around1.602GHz(SP) Around1.246GHz(SP)	1.561098GHz (B1) 1.589742GHz (B1-2) 1.20714GHz (B2) 1.26852GHz (B3)	1.164–1.215GHz (E5a,E5b) 1.260–1.300GHz (E6) 1.559–1.592GHz (E2-L1-E11)
Status	Status	Operational,CDMA in preparation	Operational CDMA in preparation	In preparation

雖然實作上直接讀取位置資訊就可以做定位，但為了對衛星定位系統的特性有進一步的了解，仍必須探討其特性，從而了解衛星定位系統的優點與缺點。衛星定位系統的原理其實相當簡單[35]，即利用空間中的三角定位法算出一個交叉點(見圖 3.1.1 中 A 點)。理論上在三維空間中，能用三個方程式解三個未知數，因此至少需要 3 個衛星才能做三角定位。但事實上，地面接收器與各衛星間存在著時間誤差，該時間誤差也造成了定位上的不精確，使得定位的結果存在著誤差範圍(見圖 3.1.1 中 B 所圍成的區域)。

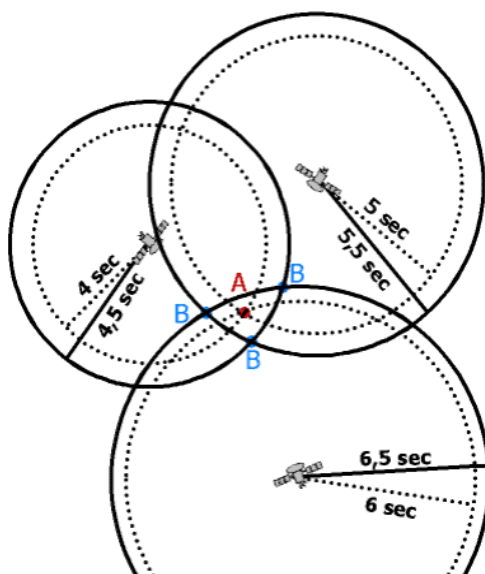


圖 3.1.1 衛星系統三角定位法

這也使得除了原本三維空間的未知數外，還多了一項時間誤差共 4 個未知數  $(X, Y, Z, \Delta t)$ ，因此至少需要 4 顆以上的衛星才能做準確定位，衛星定位的基本定位原理推導如下。首先，定義衛星訊號發送至接收器接收的時間差  $\Delta t_{measured}$  如式(3.1)，與衛星至接收器間的偽距離  $PSR$  (Pseudo Range) 為衛星與接收器間真實距離加上光速移動了誤差時間的錯誤距離，如式(3.2)。

$$\Delta t_{measured} = \Delta t + \Delta t_0 \quad (3.1)$$

$$PSR = \Delta t_{measured} \cdot c = (\Delta t + \Delta t_0) \cdot c = R + \Delta t_0 \cdot c \quad (3.2)$$

從這也可以看出當接收器有 1 微秒的時間誤差，就會造成 300 公尺的錯誤距離。各個衛星至接收器的偽距離可表示如式(3.3)，小標  $sat\_i$  標示為第  $i$  顆衛星， $user$  表示使用者接收器。

$$PSR_i = \sqrt{(X_{sat\_i} - X_{user})^2 + (Y_{sat\_i} - Y_{user})^2 + (Z_{sat\_i} - Z_{user})^2} + \Delta t_0 \cdot c \quad (3.3)$$

現在依式(3.4)定義接收器的空間位置。小標  $est$  表示接收器位置附近隨意選取的一個已知座標點。 $\Delta$  項表示位置誤差向量。

$$\begin{bmatrix} X_{user} \\ Y_{user} \\ Z_{user} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ Y_{est} \\ Z_{est} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

將(3.3)式做一階尤拉的線性化後，得到式(3.5)

$$\begin{aligned} PSR_i &\approx R_{est\_i} + \frac{\partial R_{est\_i}}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial R_{est\_i}}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial R_{est\_i}}{\partial z} \cdot \Delta z + c \cdot \Delta t_0 \\ &= R_{est\_i} + \frac{X_{est} - X_{sat\_i}}{R_{est\_i}} \cdot \Delta x + \frac{Y_{est} - Y_{sat\_i}}{R_{est\_i}} \cdot \Delta y + \frac{Z_{est} - Z_{sat\_i}}{R_{est\_i}} \cdot \Delta z + c \cdot \Delta t_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

最後將 4 個衛星的偽距離寫成 4 條方程式並寫成矩陣後，得到式(3.6)

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{est} - X_{sat\_1}}{R_{est\_1}} & \frac{Y_{est} - Y_{sat\_1}}{R_{est\_1}} & \frac{Z_{est} - Z_{sat\_1}}{R_{est\_1}} & c \\ \frac{X_{est} - X_{sat\_2}}{R_{est\_2}} & \frac{Y_{est} - Y_{sat\_2}}{R_{est\_2}} & \frac{Z_{est} - Z_{sat\_2}}{R_{est\_2}} & c \\ \frac{X_{est} - X_{sat\_3}}{R_{est\_3}} & \frac{Y_{est} - Y_{sat\_3}}{R_{est\_3}} & \frac{Z_{est} - Z_{sat\_3}}{R_{est\_3}} & c \\ \frac{X_{est} - X_{sat\_4}}{R_{est\_4}} & \frac{Y_{est} - Y_{sat\_4}}{R_{est\_4}} & \frac{Z_{est} - Z_{sat\_4}}{R_{est\_4}} & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} PSR_1 - R_{est\_1} \\ PSR_2 - R_{est\_2} \\ PSR_3 - R_{est\_3} \\ PSR_4 - R_{est\_4} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

由於(3.3)式為一非線性的二次函數，有一組極值解，因此可以將算出的誤差項重新帶回(3.4)式，更新已知座標點的位置，用牛頓法的概念重複做遞回式運算至誤差項收斂至小於可接受的誤差值為止。此外，若有  $n > 4$  顆衛星則可以利用最小平方方法算出更正確的誤差，這也是為什麼當接收器觀測到的衛星數量越多，定位準確度會越高的原因。

## 3.2 慣性導航系統

在利用加速規與陀螺儀做運動軌跡的估測應用上，必須了解物體做線性運動或是旋轉運動的物理原理以及其動態變化的關係以推導運動方程式。由於在 ECEF 座標系上能以較精簡且明確的說明各參數的物理意義，將會在 ECEF 座標系推導方程式。但實際在本研究的應用中是於 NED 座標系下操作。

### 3.2.1 慣性導航方程式

首先描述慣性座標系與 ECEF 座標系中的位置向量(3.7)，小標  $i$  與  $e$  分別表示慣性與 ECEF 座標系， $l$  為兩座標系原點間的向量。

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}_e^i \mathbf{r}^e + \mathbf{l}^i \quad (3.7)$$

(3.7)式對時間做二次微分後，可以得出(3.8)

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{R}_e^i \ddot{\mathbf{r}}^e + 2\dot{\mathbf{R}}_e^i \dot{\mathbf{r}}^e + \ddot{\mathbf{R}}_e^i \mathbf{r}^e + \ddot{\mathbf{l}}^i \quad (3.8)$$

而根據 2.4 節所導出的動態方程式(2.8)可以得到(3.9)

$$\dot{\mathbf{R}}_e^i = \mathbf{R}_e^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \quad (3.9)$$

對(3.9)式再做一次微分，得到  $\mathbf{R}_e^i$  的二次微分項(3.10)

$$\ddot{\mathbf{R}}_e^i = \dot{\mathbf{R}}_e^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e + \mathbf{R}_e^i \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e = \mathbf{R}_e^i (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e) \quad (3.10)$$

整理(3.9)(3.10)代入(3.8)式後，可推導出(3.11)式

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{R}_e^i \ddot{\mathbf{r}}^e + 2\mathbf{R}_e^i \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}^e + \mathbf{R}_e^i (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e) \mathbf{r}^e + \ddot{\mathbf{l}}^i \quad (3.11)$$

又由古典力學得知，在慣性座標系中的合力可以拆成重力與慣性力加總的結果，而力除上物體質量即為物體的加速度，即(3.12)。 $\mathbf{g}$  為重力加速度向量， $\mathbf{s}$  為慣性力除上質量的加速度向量，事實上他有個物理名稱叫做比力(specific force)，值得注意的是他的物理量不是力，而是加速度。順帶一提，加速規量到的加速度就是



附體座標系下的比力，可以想像當物體做自由落體運動時，運動加速度即為重力，這時加速規所測得比力值為零。

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{g}^i + \mathbf{s}^i \quad (3.12)$$

結合(3.11)(3.12)式，方程式左右各乘上旋轉矩陣  $\mathbf{R}_i^e$  後，可以推導出 ECEF 座標系中慣性導航方程式的一般式(3.13)

$$\mathbf{g}^e + \mathbf{s}^e = \ddot{\mathbf{r}}^e + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}^e + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e \mathbf{r}^e + \ddot{\mathbf{l}}^e \quad (3.13)$$

其中  $\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e$  為地球自轉向量的反對稱矩陣，且由於 ECEF 座標系是繞著與慣性座標系相同的 Z 軸旋轉，轉速為  $\omega_{ie} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ (rad / s)}$ ，因此可以表示成相當精簡的形式。(3.13)式之中，不考慮右邊第三項地球自轉造成的向心力，與右邊第四項地球自轉的角加速度造成的力(假設地球等速自轉)，又最末項  $\ddot{\mathbf{l}}^e = 0$ 。將(3.13)式簡化後成(3.14)，此式可以解釋成物體的線性加速度為比力補償掉重力加速度，再扣掉科氏力造成的加速度後的結果。

$$\ddot{\mathbf{r}}^e = \mathbf{g}^e + \mathbf{s}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}^e \quad (3.14)$$

本研究的目標是做軌跡紀錄，記錄內容包含位置、速度與姿態的資訊，因此需要想辦法整合這些資訊，用系統方式描述動態方程式如(3.15)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^e \\ \dot{\mathbf{v}}^e \\ \dot{\mathbf{R}}_b^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^e \\ \mathbf{R}_b^e \mathbf{s}^b + \mathbf{g}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{v}^e \\ \mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

其中  $\boldsymbol{\Omega}_{eb}^b$  為  $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$  的反對稱矩陣， $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$  可表示為  $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{R}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e$ 。

在本研究中，加速規可量得  $\mathbf{s}^b$ ，陀螺儀可量得  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 。至此已能初步的利用加速規與陀螺儀做慣性導航。(3.15)式在 NED 推導，可改寫為(3.16)，[32]。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^n \\ \dot{\mathbf{v}}^n \\ \dot{\mathbf{R}}_b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^n \\ \mathbf{R}_b^n \mathbf{s}^b + \mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{v}^n \\ \mathbf{R}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \mathbf{R}_b^n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{R}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = [\omega_{ie} \cos \varphi \quad 0 \quad -\omega_{ie} \sin \varphi]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[ \frac{v_e}{N_e + h} \quad \frac{-v_n}{M_e + h} \quad \frac{-v_e \tan \varphi}{N_e + h} \right]^T$$

### 3.3 慣性導航誤差模型

在 3.1 節中得到慣性導航的方程式，理論上該方程式已可用來做導航。但實際應用上，由於工程技術上並沒有完美的加速規與陀螺儀，必定存在著雜訊與偏壓值，這些缺點經過積分後，對位置、速度與姿態的推算結果會造成相當大的誤差，但若是能對其之間的關係用數學模型來描述，找出誤差結果的雜訊來源做修正，則可以適度的改善其造成的誤差。

#### 3.3.1 慣性導航誤差方程式

此小節的目標是找出位置、速度、與旋轉的誤差應該如何用數學描述，並推導出誤差模型的動態方程式。要推導出動態方程式，必須先討論速度項導函數(加速度)的誤差來源。首先定義誤差為演算法中的理論值減去實際運算值，並將旋轉矩陣  $\mathbf{R}_b^e$  的旋轉誤差如(2.7)方式描述成小角度的旋轉，其中  $\boldsymbol{\Omega}_\varepsilon$  為旋轉誤差向量的反對稱矩陣。

$$\hat{\mathbf{s}}^b = \mathbf{s}^b + \delta \mathbf{s}^b$$

$$\hat{\dot{\mathbf{v}}}^e = \dot{\mathbf{v}}^e + \delta \dot{\mathbf{v}}^e$$

$$\hat{\mathbf{g}}^e = \mathbf{g}^e + \delta \mathbf{g}^e$$

$$\hat{\mathbf{v}}^e = \mathbf{v}^e + \delta \mathbf{v}^e$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b$$

$$\hat{\mathbf{R}}_b^e = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{R}_b^e$$

將上列參數代回(3.15)式，可以重新寫成(3.17)

$$\dot{\mathbf{v}}^e + \delta\dot{\mathbf{v}}^e = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{R}_b^e (\mathbf{s}^b + \delta\mathbf{s}^b) + \mathbf{g}^e + \delta\mathbf{g}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e (\mathbf{v}^e + \delta\mathbf{v}^e) \quad (3.17)$$

若假設(3.17)中誤差的二次項以及重力誤差可以忽略，並利用反對稱矩陣的特性，整理後可以得出速度誤差的動態方程式，如(3.18)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \mathbf{s}^e &= \mathbf{S}^e \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^e &= \mathbf{S}^e \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{R}_b^e \delta\mathbf{s}^b - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta\mathbf{v}^e \end{aligned} \quad (3.18)$$

我們對(3.18)等號右邊造成加速度誤差的原因做討論。右邊第一項為由於旋轉矩陣的誤差，使比力分量不正確而造成線性加速度值的誤差，右邊第二項為加速規本身的誤差造成，包含了偏壓與雜訊。末項則是科氏力的誤差造成。

接著探討旋轉項導函數(角速度)的誤差來源。首先將  $\mathbf{R}_b^e$  改寫為實際運算值

對時間微分後的式子(3.19a) (3.19b)，整理後得到方程式(3.19c)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_b^e &= \hat{\mathbf{R}}_b^e \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{eb}^b \\ \dot{\mathbf{R}}_b^e &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \dot{\mathbf{R}}_b^e - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon \mathbf{R}_b^e \\ (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \dot{\mathbf{R}}_b^e - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon \mathbf{R}_b^e &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\Omega}_{eb}^b + \delta\boldsymbol{\Omega}_{eb}^b) \end{aligned} \quad (3.19)$$

若不考慮(3.19c)中誤差的二次項並消去左右相同項後，得到(3.20)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon \mathbf{R}_b^e = -\mathbf{R}_b^e \delta\boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \quad (3.20)$$

同乘上  $\mathbf{R}_e^b$ ，並利用反對稱矩陣的特性改寫為向量的形式後，得到(3.21)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\mathbf{R}_b^e \delta\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \mathbf{R}_b^e (\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^b - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \quad (3.21)$$

要得到  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$  必須要透過附體-ECEF 座標系的旋轉矩陣，但由於假設這個旋轉存在著誤差，也就是式 3.22

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b = \hat{\mathbf{R}}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \quad (3.22)$$

利用  $\hat{\mathbf{R}}_b^e = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{R}_b^e$  做反矩陣運算，並以泰勒展開做一階近似得到(3.23)

$$\hat{\mathbf{R}}_e^b = \mathbf{R}_e^b (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon)^{-1} \approx \mathbf{R}_e^b (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \quad (3.23)$$

再將(3.22)代入(3.23)式中，得到(3.24)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^b &= \mathbf{R}_e^b (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon^e) \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^b &= \mathbf{R}_e^b \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon^e \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^b \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (3.24)$$

最後由(3.21)與(3.24)得到最終旋轉誤差的動態方程式(3.25)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\mathbf{R}_b^e \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\varepsilon}\quad (3.25)$$

我們同樣對造成角速度誤差的來源做討論。右邊第一項為陀螺儀的誤差造成，包含了準位漂移與雜訊。右邊第二項則由於旋轉矩陣的誤差，使地球自轉分量有誤造成。

觀察加速度與旋轉的誤差來源中，由於地球自轉的轉速極慢，造成的影響不大，可以看出真正影響速度與旋轉誤差的，為加速規與陀螺儀的誤差造成。

最後整理(3.18)(3.25)式，用系統的方式描述位置、速度、旋轉，得到 ECEF 座標系下，9 個狀態的誤差模型(3.26)。

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{r}}^e \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^e \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^e \\ \mathbf{S}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{R}_b^e \delta\mathbf{s}^b - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta\mathbf{v}^e \\ -\mathbf{R}_b^e \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e \end{bmatrix}\quad (3.26)$$

上式若於 NED 下推導，可改寫為(3.27)式，[32]。

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{r}}^n \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^n \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^n - \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \delta\mathbf{r}^n \\ \mathbf{S}^n \boldsymbol{\varepsilon}^n + \mathbf{R}_b^n \delta\mathbf{s}^b - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \delta\mathbf{v}^e \\ -\mathbf{R}_b^n \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \boldsymbol{\varepsilon}^n \end{bmatrix}\quad (3.27)$$

### 3.4 以卡爾曼濾波器實現鬆散耦合的 GNSS/INS 系統

有了 3.2 與 3.3 對慣性系統的認識後，了解到在實際應用上單純用低價的慣性系統做軌跡紀錄是相當困難的一件事。因此在 1990 年代就有許多文獻提出利用全球導航衛星系統的輔助，透過卡爾曼濾波器將這兩種優缺點彼此互補的導航系統做感測器結合。

### 3.4.1 卡爾曼濾波器

卡爾曼濾波器(Kalman filter)為匈牙利數學家 Rudolf E. Kálmán 於 1960 年所提出，由於其實作上的效能相當驚人，迄今仍廣泛應用於各領域，如車輛控制、影像與聲音的處理與太空梭的控制等。只要能用矩陣描述系統狀態的轉換關係及感測器量測值與系統狀態的關係，就能利用遞迴式運算算出系統的預測狀態值，並透過感測器測量值來對預測狀態值做修正，估測出最佳化的系統狀態。其系統模型可以描述如下。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k &\sim N(0, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k &\sim N(0, \mathbf{R}_k)\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{A}$  為系統狀態轉移矩陣(State Transition Matrix)， $\mathbf{B}$  為控制項，本研究因不對系統做控制，此項可以省略， $\mathbf{H}$  為觀測矩陣(Observation Matrix)。

$\mathbf{w}_k$  與  $\mathbf{v}_k$  分別為系統的過程雜訊(Process Noise)與量測雜訊(Measurement Noise)，

若  $\mathbf{w}_k$  與  $\mathbf{v}_k$  與平均值為零的白高斯雜訊(Zero Mean White Gaussian Noise)，此時得

出的狀態是最佳化的估測結果，演算法的流程如圖 3.4.1 所示。

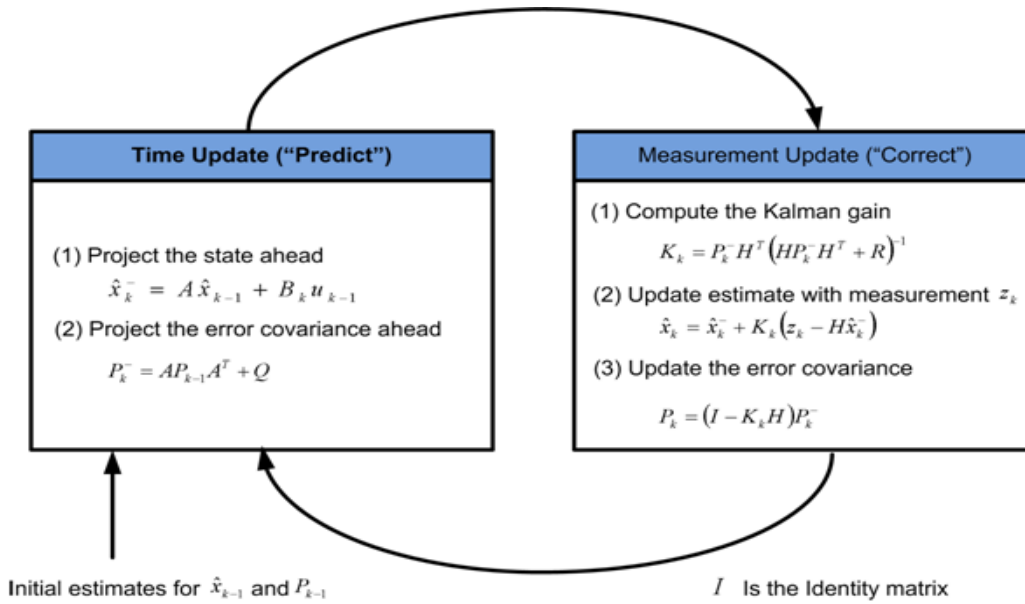


圖 3.4.1 卡爾曼濾波器演算法流程圖

### 3.4.2 鬆散耦合的 GNSS/INS 系統

在 3.27 式中推導了 NED 座標系下，9 個狀態的誤差模型，並說明了加速規與陀螺儀的誤差如何造成影響。在卡爾曼濾波器中，假設雜訊項為平均值為零的白噪聲雜訊，為了滿足這項假設，最常見的方法為對加速規與陀螺儀的誤差建立一階的高斯馬可夫(1<sup>st</sup> order Gauss-Markov)數學模型，對其誤差做白化(Whitening)，把加速規與陀螺儀的漂移值放入模型，從 9 個狀態誤差模型擴增為 15 個，系統的動態方程式描述如下：

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

其中系統狀態  $\delta\mathbf{x}(t)$  與過程雜訊  $\mathbf{w}(t)$  分別為

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{x}(t) &= \left[ \delta r^e \quad \delta v^e \quad \varepsilon \quad \delta b_{acc}^b \quad \delta b_{gyro}^b \right]^T \\ \mathbf{w}(t) &= \left[ w_{acc} \quad w_{gyro} \quad w_{a\_bias} \quad w_{g\_bias} \right]^T\end{aligned}$$

系統狀態矩陣  $\mathbf{F}(t)$  與動態雜訊矩陣  $\mathbf{G}(t)$  分別為

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Omega}_{en}^n & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) & \mathbf{S}^n & \mathbf{R}_b^n & 0 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\Omega}_{in}^n & 0 & -\mathbf{R}_b^n \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_g} \end{pmatrix}_{15 \times 15}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_b^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}_b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}_{15 \times 12}$$

為了要在卡爾曼濾波器下實現演算法，必須對動態方程式以一階的線性尤拉法做離散化(Discretization)[32]，其中  $\mathbf{Q}_w$  為  $\mathbf{w}(t)$  的共變異矩陣， $T_s$  為系統的取樣頻率。

$$\mathbf{A}_k \approx \mathbf{I} + \mathbf{F} \cdot T_s$$

$$\mathbf{Q}_{d,k} \approx \frac{1}{2} [\mathbf{A}_k \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q}_w \cdot \mathbf{G}^T + \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q}_w \cdot \mathbf{G}^T \mathbf{A}_k^T] \cdot T_s$$

離散化後的系統可以用卡爾曼濾波器表示如下

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

現在加入 GNSS 系統的輔助，實現 GNSS/INS 的整合系統架構。首先定義量測向量  $\mathbf{z}_k$  為 INS 用慣性導航方程式得出的三維位置向量，減去 GNSS 測得的三維位置向量。下標 *true* 代表無誤差的理想值， $\mathbf{v}$  代表 GNSS 系統的雜訊。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \mathbf{r}_{ins} - \mathbf{r}_{gnss} \\ &= (\mathbf{r}_{true} + \delta \mathbf{r}_{ins}) - (\mathbf{r}_{true} - \mathbf{v}_{r,gnss}) \\ &= \delta \mathbf{r}_{ins} + \mathbf{v}_{r,gnss} \end{aligned}$$

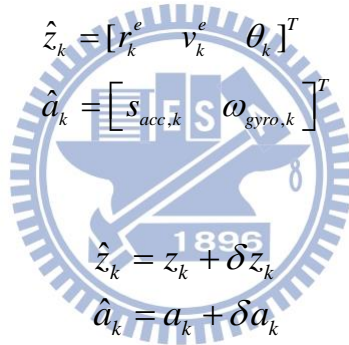


與卡爾曼濾波器的量測方程式做系數比較，可以發現觀測矩陣  $\mathbf{H}_k$  相當精簡，且非時變(time variant)的矩陣，量測雜訊也只跟 GNSS 項的位置雜訊有關，並沒有任何 INS 的參數，與 INS 資訊完全獨立，這也是這個架構廣泛應用於 GNSS/INS 整合的最大原因。

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{I} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{3 \times 15}$$

而事實上，以誤差模型為基礎的此系統，在另一層意義上為擴增式卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)系統，若把導航方程式描述為如(3.28)的非線性函數， $z_k$  為位置、速度、姿態， $a_k$  為量測得到的加速度與角速度值。

$$\hat{z}_{k+1} = f(\hat{z}_k, \hat{a}_k) + w_{z,k} \quad (3.28)$$



$$\hat{z}_k = [r_k^e \ v_k^e \ \theta_k]^T$$

$$\hat{a}_k = [s_{acc,k} \ \omega_{gyro,k}]^T$$

$$\hat{z}_k = z_k + \delta z_k$$

$$\hat{a}_k = a_k + \delta a_k$$

將參數假設如下

並對(3.28)函數微分做線性展開後得到(3.29)

$$z_{k+1} + \delta z_{k+1} \approx f(z_k, a_k) + F_{1,k} \delta z_k + F_{2,k} \delta a_k + w_{z,k} \quad (3.29)$$

$$F_{1,k} = \frac{\partial f(z, a)}{\partial z}, F_{2,k} = \frac{\partial f(z, a)}{\partial a}$$

將  $z_{k+1} = f(z_k, a_k)$  代入後，可以得到與誤差模型同樣的結果如式(3.30)，其中  $F_{1,k}$

與  $F_{2,k}$  分別為狀態轉移矩陣  $\mathbf{A}_k$  的上半部與下半部。

$$\delta z_{k+1} = F_{1,k} \delta z_k + F_{2,k} \delta a_k + w_{z,k} \quad (3.30)$$

也就是說若在導航方程式做 EKF 整合相當於用誤差模型做 CKF 整合。多數 GNSS/INS 的文獻中，宣稱以 EKF 或 CKF 的方法整合，貌似不同方法但實質上是在說明同一件事。

最後，若利用 GNSS 得到的位置、速度值當做量測訊號，並把卡爾曼濾波器估測到的 INS 資訊反饋(Feedback)回加速規、陀螺儀與慣性系統方程式做即時修正，則稱為鬆散耦合(Loosely Coupled)的 GNSS/INS 系統。其架構圖為圖 3.4.2 所示。若 GNSS 量測訊號為偽距離及載波相位(Carrier Phase)未經 GPS 晶片處理過的則稱緊密耦合(Tightly Coupled)系統

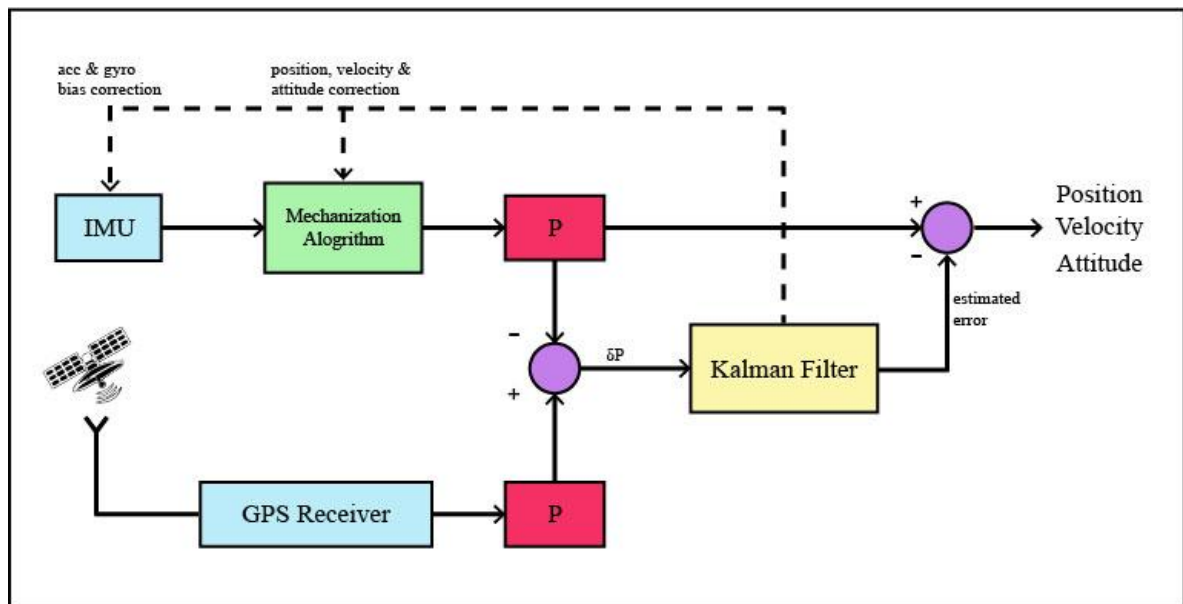


圖 3.4.2 鬆散耦合之 GNSS/INS 架構

## 第四章 基於適應性調變維度之 SAVITZKY-GOLAY

### 濾波器的雜訊估測

要增進 GNSS/INS 的精準度，大致可以分為二個方向。一是對 INS 系統建立更準確的數學模型，二是對過程雜訊與量測雜訊進行估測，本論文研究方向為後者。在 GNSS/INS 整合系統架構中，過程雜訊僅與 INS 的加速規與陀螺儀有關。INS 雜訊特性不易變化，可以藉由事前統計校正出過程雜訊，較沒有做適應性估測的必要性，因此本研究致力於對量測雜訊估測的演算法開發。衛星定位系統中，環境會影響衛星訊號的接收，使量測雜訊的標準差隨環境與時間變化，例如行駛於市區受高樓遮蔽與多路徑傳輸的影響，造成雜訊標準差的變化快速，因此估測量測雜訊相當重要。本論文提出一套離線估測量測雜訊的方法，使用可適應性調變維度的 S-G 濾波器，改善以往線上估測方法中，利用固定維度且未經取樣延遲之移動平均法，無法根據環境變化做適應性調變的缺點。本章將介紹適應性調變維度的 S-G 濾波器，並將其應用在卡爾曼濾波器的量測雜訊估測上。

#### 4.1 Savitzky-Golay 濾波器

Savitzky-Golay(S-G)濾波器為 1964 年由 Abraham Savitzky 與 Marcel J.E.Golay 所提出的局部多項式回歸演算法，在給定視窗大小 $(2M+1)$ 與多項式的維度  $N$  後，以最小平方方法對所選取的視窗取樣點用一個最佳的多項式去做曲線擬合(curve fitting)，式(4.1)，一般用於平滑濾波與微分應用。

$$\mathbf{a} = \arg \min \varepsilon_N$$
$$\varepsilon_N = \sum_{n=-M}^M (p(n) - x[n])^2 = \sum_{n=-M}^M \left( \sum_{k=0}^N a_k n^k - x[n] \right)^2 \quad (4.1)$$

(4.1)式的最小平方解可以用矩陣的方式描述如(4.2)，推導詳見附錄。

$$\tilde{\mathbf{a}} = [a_0 \ \dots \ a_N]^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-M)^0 & (-M)^1 & (-M)^2 & \dots & (-M)^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & \dots & (-1)^N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & \dots & 1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M^0 & M^1 & M^2 & \dots & M^N \end{bmatrix}$$

從上式可知，當 M 與 N 決定後，矩陣 H 為一個常數矩陣，因此可以用查表的方式來簡單完成 H 的運算，不需要每次都做反矩陣運算。最後在移動的視窗中，取視窗中心取樣點( $n=0$ )代表該區間濾波後的結果，即為多項式的參數  $a_0$  式(4.3)，示意圖如圖 4.1.1 所示。

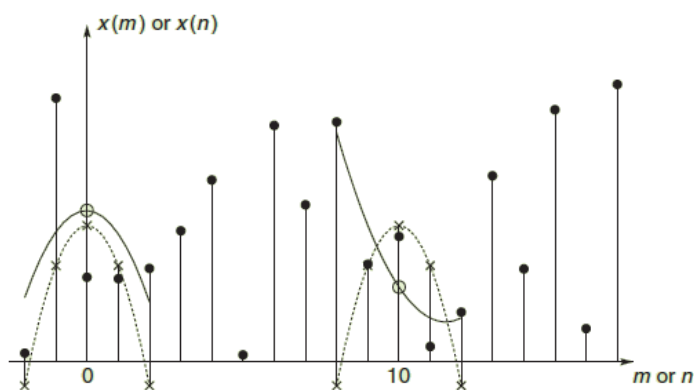


圖 4.1.1 S-G 濾波器原理示意， $M=2$ ， $N=2$

("·" 為輸入訊號，"x" 為多項式取樣點，"o" 為輸出，

實線表示擬合的多項式，虛線為系統脈衝響應)

$$y[n=0] = p(0) = a_0 = \sum_{m=-M}^M h_{0,m} x[m] \quad (4.3)$$

(4.3)式可以解釋為訊號 x 與線性非時變系統做數位摺積(Discrete Convolution)的結果，這也意味著能用訊號系統的方法分析其系統的脈衝響應(Impulse Response)，了解 S-G 濾波器的特性，相關特性整理如下[21][22]。

➤ 平滑濾波特性( $a_0$ )

為 Type-1 濾波器(低通濾波器)，如圖 4.1.2，於維度 0/1,2/3,...有相同的平滑濾波結果。

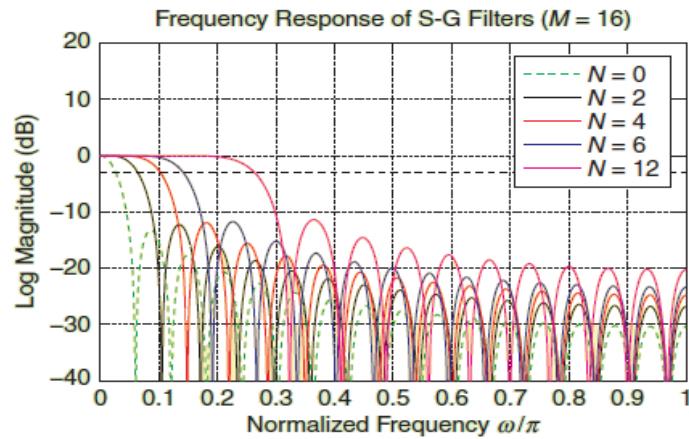


圖 4.1.2 S-G 濾波器的頻率響應

➤ 微分特性( $a_1$ )

為 Type-3 濾波器(帶通濾波器)，與一般微分器為高通濾波器不同，具有壓抑高頻的效果，且於維度 1/2,3/4,...有相同的微分結果。根據平滑濾波與微分的維度特性，在決定維度時會以奇數做挑選[25]。

➤ 3dB 點的截止頻率關係

$f_c = (N+1)/(3.2M-4.6)$   $M > 25$  且  $N < M$ ，圖 4.1.3，N 越大(或 M 越小)，頻寬也越大，平滑濾波的结果與原訊號越像，也因此較不平滑，反之亦然。

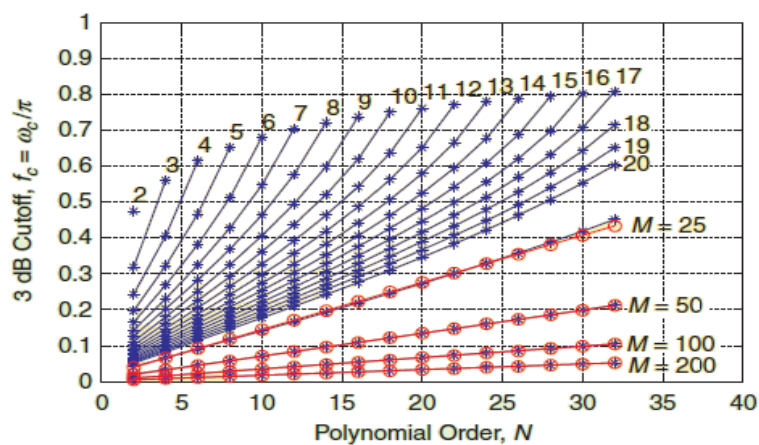


圖 4.1.3 S-G 截止頻率與維度關係圖

➤ 為永久延遲系統，且移動平均法為多項式維度  $N=0$  的特例

## 4.2 適應性調變維度之 S-G 濾波器(ADSG)

若要做適應性調變的 S-G 濾波器(Adaptive-degree SG filter, ADSG)有兩個方向。一是改變視窗大小做適應性調變，另一方向為改變維度做適應性調變，本論文方法屬後者。根據曲線擬合後的殘差的平方和，利用統計學的 F 檢定得到多項式的維度[23]。F 檢定常被用來比較低維度的簡化模型(Reduced Model)與原始模型的必要性。簡化模型的殘差平方和一定會比原始模型的還要大，但若這兩個模型的殘差平方和相差不多，則我們傾向於使用較低維度的簡化模型，而這個差異程度的比較準則就是透過 F 檢定來判斷。

$$F = \frac{(RSS_R - RSS) / v1}{RSS / v2}$$

$RSS$  為原始模型的殘差平方和， $RSS_R$  為簡化模型的殘差平方和， $n1$ 、 $n2$  為模型多項式的維度， $v1 = n2 - n1$ ， $v2 = L - n2 - 1$ 。虛擬程式碼如下：

```
k=1;
while k<k_max
    F_alpha=finv(1-alpha,v1,v2);
    Fx=((RSS_R-RSS)/v1)/(RSS/v2);
    k=k+2;
    if Fx<F_alpha
        break;
    end
end
order=k-2;
```

為了比較 ADSG 與固定維度的 SG 濾波器在訊號時變下的效能，以加入高斯雜訊於不同變化頻率訊號模擬，如圖 4.2.3。

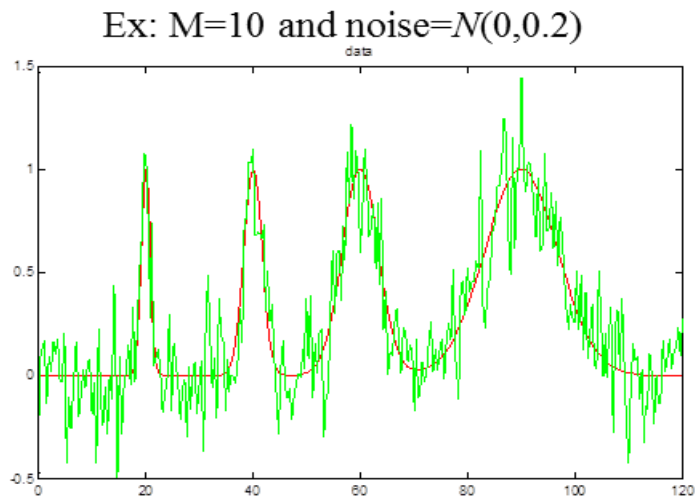


圖 4.2.1 模擬加入高斯雜訊的 S-G 估測訊號

濾波結果圖 4.2.2，可看出 ADSG 在會拉高維度適應高頻，低頻變化時則維持在低維度，適應性調變維度能力也使得結果上能滿足低頻與高頻處的濾波表現。

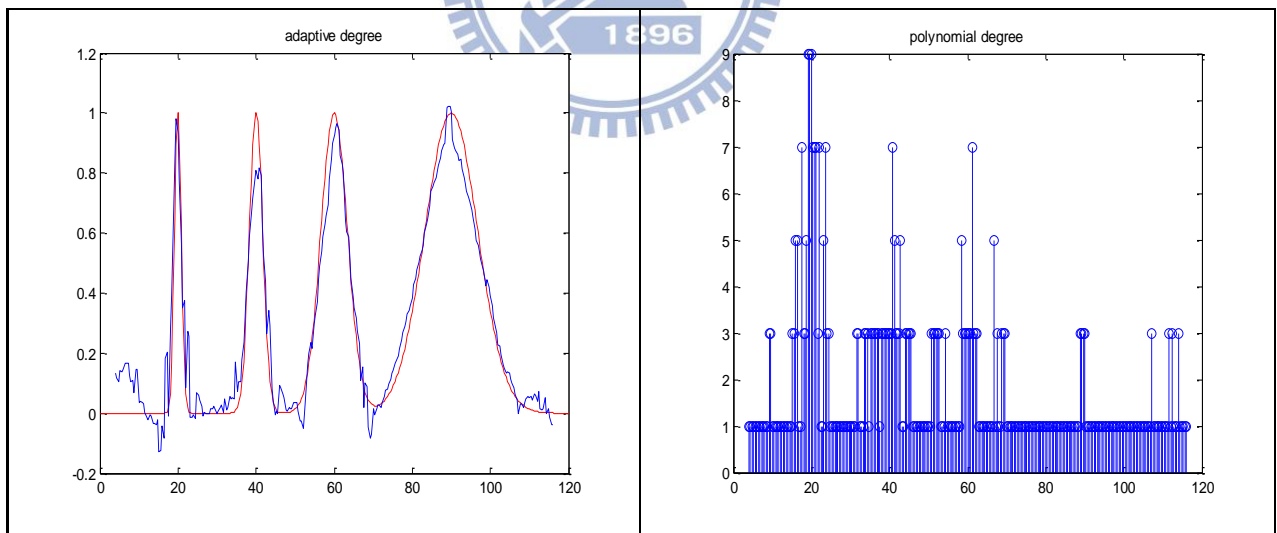


圖 4.2.2 ADSG 法濾高斯雜訊結果與對應維度



反觀固定維度的 S-G 濾波器則沒有調適的功能，如圖 4.2.3。N=1 中，因為頻帶最窄，高頻訊號被濾掉後無法滿足訊號濾波表現，N=7 的結果則因有較高的高頻成份，在原訊號低頻處有不平滑的波形，表現皆不如 ADSG 法。

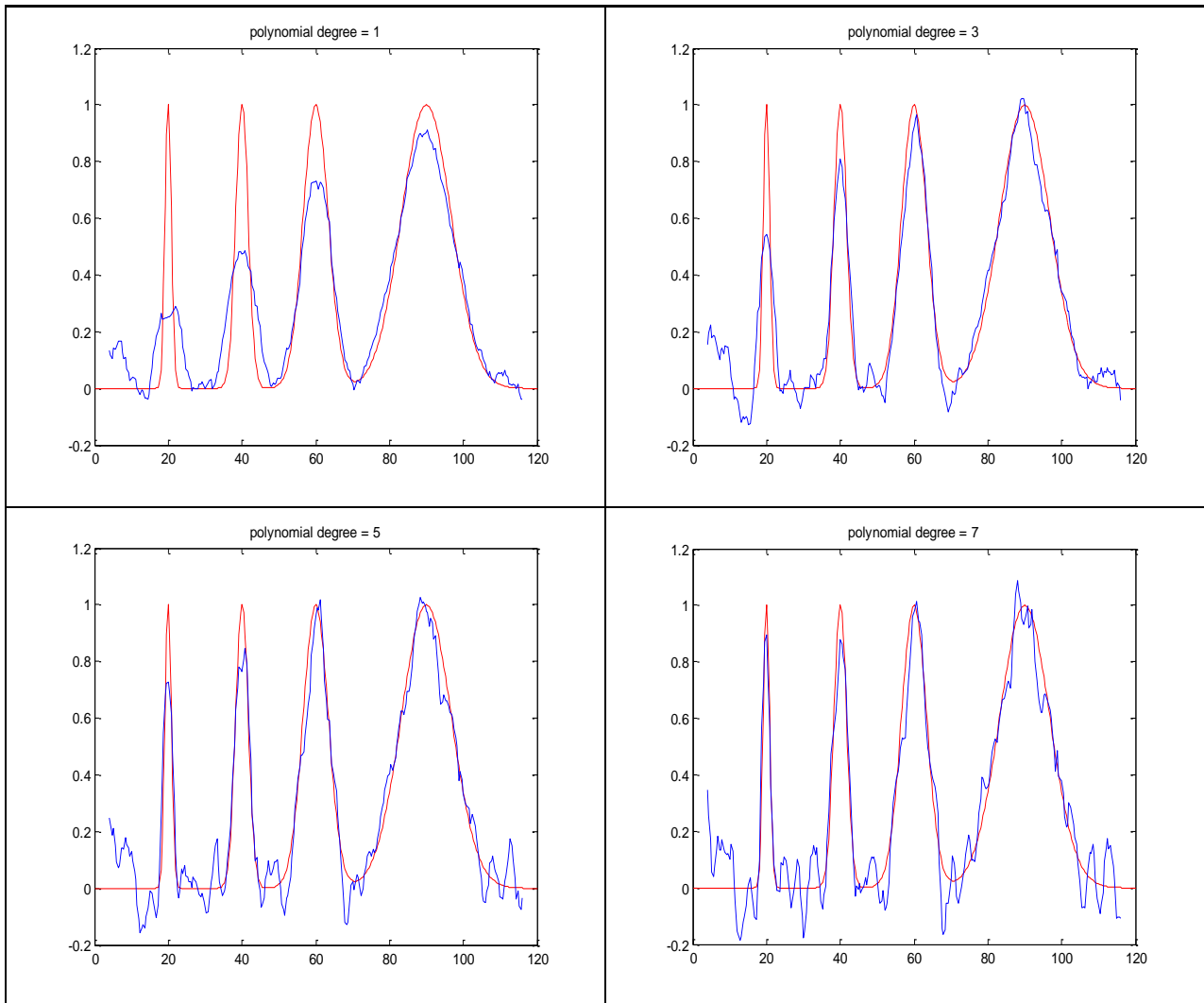


圖 4.2.3 固定維度 S-G 濾濾高斯雜訊模擬結果

### 4.3 基於 ADSG 的雜訊估測法

在卡爾曼濾波器實現 GNSS/INS 中，GNSS 訊號的取樣頻率較 INS 慢，因此演算法在有 GNSS 訊號時才能做系統狀態修正，如下所示。

```

if (GNSS data available)
    x_est = x_pre + K(z - z_pre);
    P_est = (I - KH)P_pre;
else
    x_est = x_pre;
    P_est = P_pre;

```

其中實際量測值減去系統預測之量測值的差量， $v = z - \hat{z}^-$ ，其累積的序列稱之為卡爾曼創新序列(Innovation Sequence)。創新序列有個特性是，它每次取樣所帶來的都是新的資訊，跟之前的資訊無關，為一白高斯訊號。而其共變異矩陣  $C_{v_k}$  恰為卡爾曼增益(Kalman Gain)的分母項，式(4.4)，因此影響了系統狀態做修正時，分配多少比重在相信系統預測與實際量測值之間，造成最佳化系統狀態的不同。

$$\begin{aligned}
 C_{v_k} &= E[vv^T] \\
 &= E[(z - \hat{z}^-)(z - \hat{z}^-)^T] \\
 &= E[(Hx + v - H\hat{x}^-)(Hx + v - H\hat{x}^-)^T] \\
 &= E[H(x - \hat{x}^-)(x - \hat{x}^-)^T H^T + 2(Hx - H\hat{x}^-)v^T + vv^T] \\
 &= HP^-H^T + R
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

在 Mohamed[3]的研究中，假設  $C_{v_k}$  為常數不變，並利用最大似然原則

(Maximum Likelihood, ML)估測量測雜訊共變異矩陣  $\hat{R}_k$ ，其結論如下。

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_{v_k} &= \frac{1}{L} \sum_{j=k-L+1}^k v_j v_j^T \\
 \hat{R}_k &= \hat{C}_{v_k} - H_k P_k^- H_k^T
 \end{aligned}$$

卡爾曼濾波器經過幾次遞迴後， $P_k^-$  會收斂到某個定值，因此  $\hat{C}_{v_k}$  為真正影響  $\hat{R}_k$  的估測因素。 $\hat{C}_{v_k}$  估測的越準， $\hat{R}_k$  也就估的越準。上式中，算出  $\hat{C}_{v_k}$  的解為  $v_j v_j^T$  做移動平均法的結果，事實上在目前所有基於創新序列線上估測  $\hat{C}_{v_k}$  的方法中，皆以未經延遲且固定維度的移動平均法做期望值的估測，沒有能根據變化調適的能力。

本論文提出使用 ADSG 方法估測  $\hat{C}_{v_k}$  (或  $\hat{R}_k$ )，改善其無法根據環境變化做適應性調變的缺點。在 4.2 節中模擬了 ADSG 應用在估測摻有高斯雜訊的訊號上，但在估測  $\hat{C}_{v_k}$  時所處理的訊號為  $v_j v_j^T$ 。在本研究中，以估測創新序列標準差的期望值為目標。由於創新序列可視為白高斯訊號，且每個維度的訊號彼此無相關 (Uncorrelated)，共變異矩陣除了對角線項以外的值皆為 0，故僅針對其對角線項的訊號做估測，而其標準差分部實質上為卡方分布 (Chi-squared Distribution)。

圖 4.3.1 模擬卡方分部訊號，方法為將已知標準差訊號(紅線)的白高斯雜訊，平方後產生的序列做為卡方分部訊號。

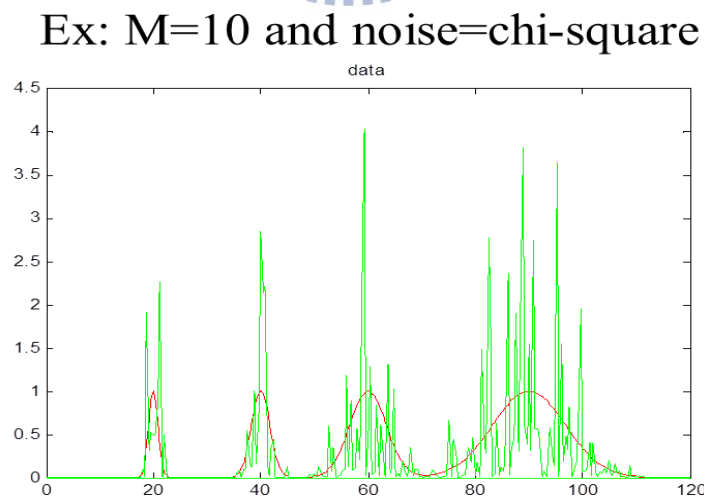


圖 4.3.1 模擬卡方分布訊號做濾波

模擬結果圖 4.3.2 可看出卡方分布的雜訊要比高斯雜訊還要難以估測，但經過 ADSG 濾波器後的效果仍優於固定維度的 S-G 濾波器。在  $N=1$  時(即移動平均法)對高頻變化反應不及，在  $N=7$  時低頻變化處有較多原訊號的高頻成份而顯的雜亂。

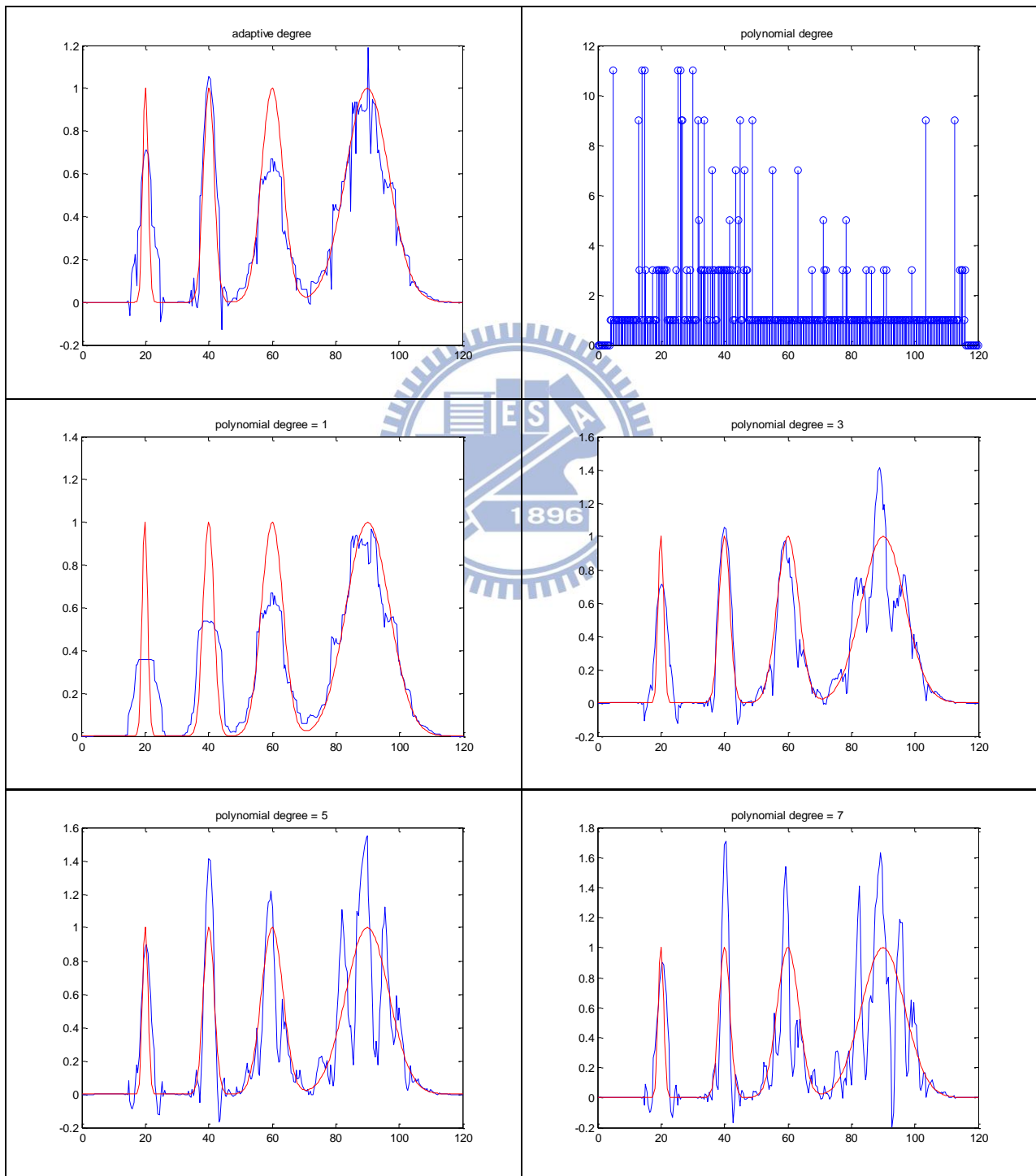


圖 4.3.2 適應性維度與固定維度之 S-G 濾波器估測卡方分部訊號模擬結果

在  $k$  時刻用 ADSG 濾波器做估測時，可以在延遲  $M$  筆取樣點後 ( $k+M$ )，對創新序列即時估測出  $\hat{R}_k$ 。在卡爾曼濾波器中， $\hat{R}_k$  扮演了卡爾曼增益的分母角色，目的就是決定  $k$  時刻系統狀態的修正，其修正結果會再影響  $k$  時刻的創新序列。但由於估測結果本來就是用了創新序列的資訊，因此會形成一種雞生蛋，蛋生雞的議題。然而在軌跡紀錄的應用中，並不需要對  $\hat{R}_k$  做即時的線上估測。本研究利用第  $i$  次程式執行估測得到的  $\hat{R}_{k,i}$ ，當作是第  $i+1$  次程式執行的先驗矩陣(a Priori Matrix)，並同時估測第  $i+1$  時刻的  $\hat{R}_{k,i+1}$ ，以做為第  $i+2$  次程式執行的先驗矩陣，如此不斷循環至收斂為止，演算法的流程圖如圖 4.3.3 所示。

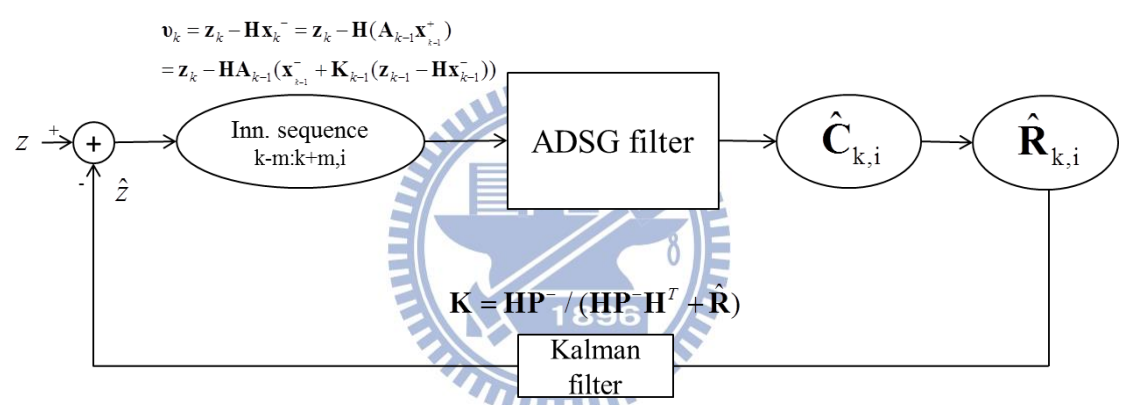


圖 4.3.3 ADSG 離線估測量測雜訊流程圖

總結 ADSG 方法應用於估測卡爾曼濾波器的量測雜訊如下：

- 一般線上估測的方法為移動平均法，其為 ADSG 的估測法中，未經延遲且使用維度為  $N=0$  之多項式的一個特例。
- 使用 ADSG 可以即時估測一個量測雜訊的共變異矩陣  $\hat{R}_k$ ，但僅能應用在下一次的程式執行中，因此本方法僅能用於離線估測。
- 若假設在  $M$  筆取樣後的共變異矩陣  $\hat{R}_k$  為常數不變，則 ADSG 可以用於線上的量測雜訊即時估測。

## 第五章 模擬與實驗結果分析

本章將分別以模擬與道路實測比較本論文方法與不同演算估測雜訊法，實際應用於 GNSS/INS 軌跡紀錄上的效能，並對結果進行分析。

### 5.1 加入已知雜訊的模擬分析

本論文使用網路上，德國研究團隊與日本豐田汽車共同合作錄製的資料包”The KITTI Vision Benchmark”進行模擬。資料包的感測器規格包含：

- 1 組慣性導航系統(GPS/IMU):OXTS RT3003
- 1 組雷射掃描儀：Velodyne HDL-64E
- 2 組灰階攝影機：1.4Megapixels:Point Grey Flea 2(FL2-14S3M-C)
- 2 組彩色攝影機：1.4Megapixels:Point Grey Flea 2(FL2-14S3C-C)
- 4 組可變焦鏡頭：4-8 mm:Edmund Optics NT59-917

感測器安裝位置與實驗平台分別如圖 5.1.1 與圖 5.1.2 所示。

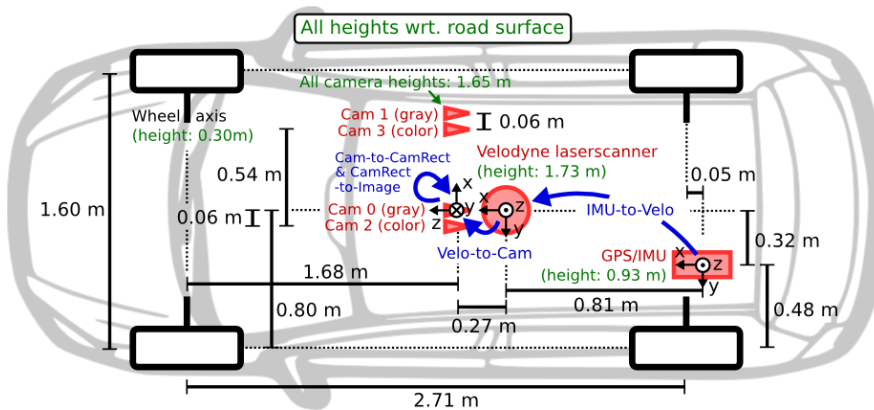


圖 5.1.1 資料包感測器安裝位置圖

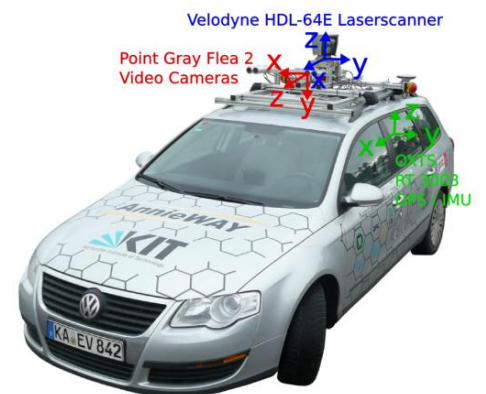


圖 5.1.2 資料包實驗平台

GPS/INS 的系統為 OXTS RT3003，其硬體規格如表 5.1.1。

表 5.1.1 系統 OXTS RT3003 硬體規格

Parameter	RT3003	Parameter	RT3003	Parameter	RT3003
Positioning	L1/L2 Kinematic	Angular Rate – Bias – Scale Factor – Range	0.01°/s 1s 0.1% 1s 100°/s (Optional 300°/s)	Power	10–18Vdc, 20W
Positioning Accuracy	2cm open sky			Dimensions (mm)	234 x 120 x 80
Velocity Accuracy	0.05km/h RMS			Weight	2.4 kg
Acceleration – Bias – Linearity – Scale Factor – Range	10 mm/s <sup>2</sup> 0.01% 0.10% 100 m/s <sup>2</sup> (Optional 30G)	Track (at 50km/h)	0.07° RMS	Operating Temperature	-10 to 50°C
		Slip Angle (at 50km/h)	0.15° RMS	Shock Survival	100G, 11ms
		Lateral Velocity	0.20%	Internal Storage	~2 GB
				Dual-Antenna	Yes
Roll/Pitch	0.03°	Update Rate	100Hz	Upgradeable GPS	No
Heading	0.1°	Calculation Latency	3.5ms		

此資料包中，GPS/INS 為 100Hz。但由於實際狀況上，INS 的取樣頻率要比 GPS 快的多，因此模擬過程特意將 GPS 降取樣為較慢的 2Hz，並加入標準差為  $10+8\sin(0.1t)$  的白高斯雜訊做為假想的 GPS 輸出資料，以每 50 筆 INS 資料進行一次 GPS 資料更新，整包資料原長度 537 秒，總路徑長為 4490m。最後再分別以未加入雜訊與加入已知雜訊做整合後的結果當作 ground truth 進行模擬。由於研究方向是地平面的運動，可以加入非完整約束的假設(Non-Holonomic Constraint, NHC)[14][19]，限制載體的側向速度與上下速度為零，即載體無打滑且貼著路面行駛，這有助於衛星訊號受阻時，系統仍能維持一定的精準度。飛機與船隻因為易受風與海浪影響不適合做此假設。此模擬將會比較不同的估測量測雜訊演算法的精準度，以及其對於軌跡記錄的影響，整合前軌跡如圖 5.1.3。之



後在整合中以不同的演算法估測，其中 ADSG #1 至 #5 表示使用 ADSG 法第一次遞回至第五次遞回，#1 的  $\hat{R}_k$  使用 AKF 的創新序列估測，#2 的  $\hat{R}_k$  使用 #1 的...，以此類推。整合後的軌跡如圖 5.1.4

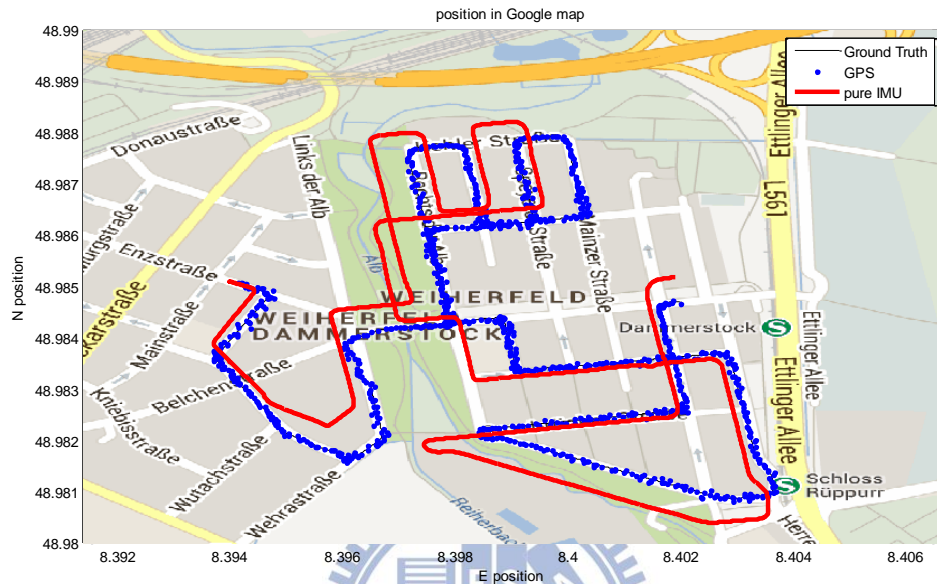


圖 5.1.3 模擬中未經整合之 GNSS 與 INS 軌跡圖

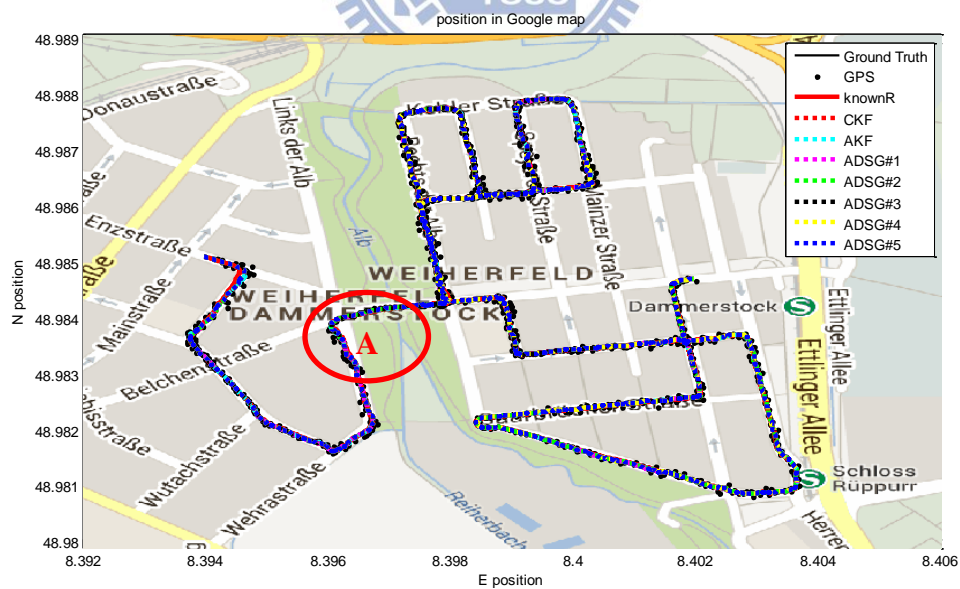


圖 5.1.4 模擬中經 GNSS/INS 整合後的軌跡圖

量測雜訊標準差估測結果如圖 5.1.5、圖 5.1.6，分別表示北方與東方。由於創新序列的標準差為卡方分布，估測結果略顯不平滑。CKF 法的常數值特意選在已知雜訊標準差之正弦波的平均值，使 CKF 量測雜訊的估測誤差之方均根達最小值，以表示 CKF 最佳的估測結果。

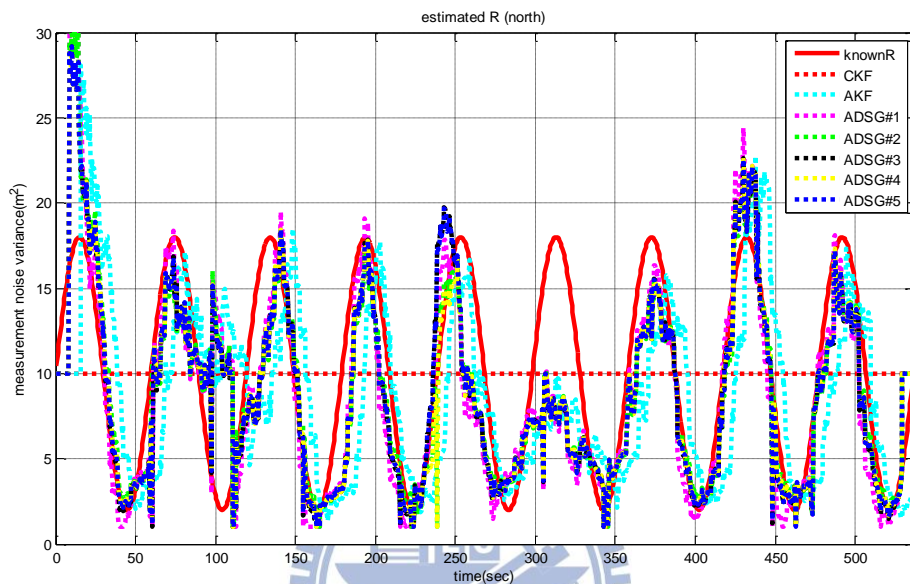


圖 5.1.5 模擬中估測的量測雜訊標準差(北)

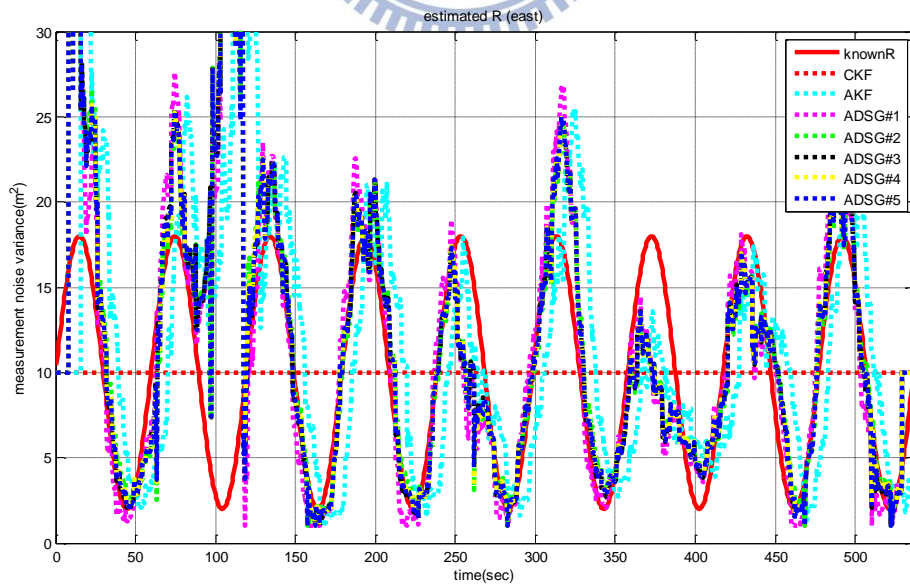


圖 5.1.6 模擬中估測的量測雜訊標準差(東)

估測誤差取絕對值後如圖 5.1.7、圖 5.1.8，分別為北方與東方，可看出 AD SG 方法的誤差普遍來說皆小於 CKF 與 AKF 方法。

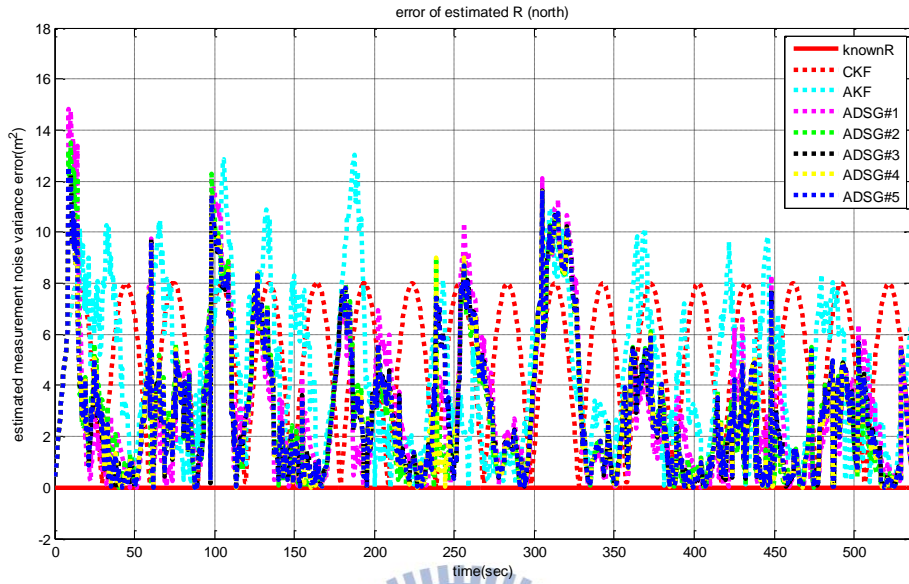


圖 5.1.7 模擬中量測雜訊標準差估測誤差(北)

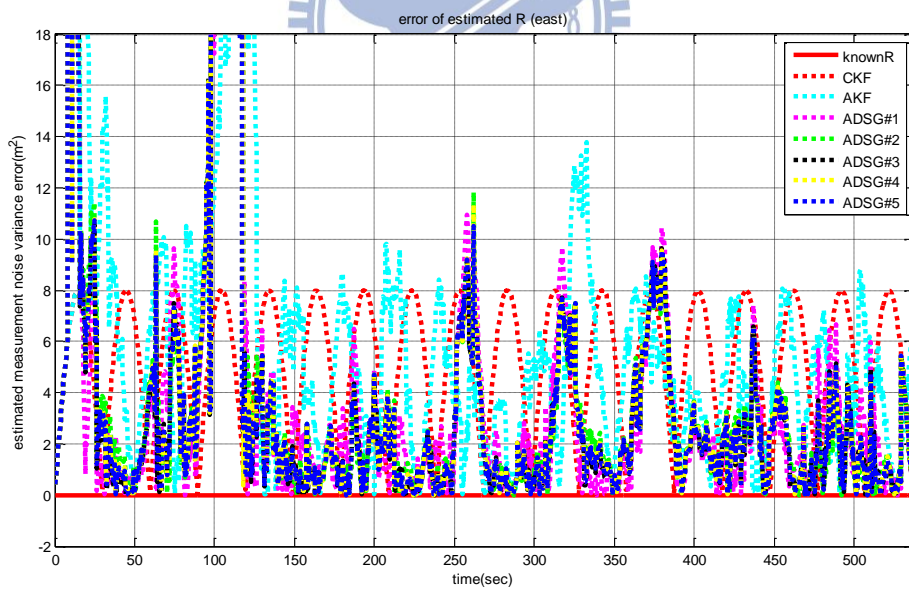


圖 5.1.8 模擬中量測雜訊標準差估測誤差(東)

北方軌跡記錄的誤差如圖 5.1.9、圖 5.1.10，分別以未加雜訊的軌跡與 knownR 估測的軌跡做為計算誤差的參考基準。

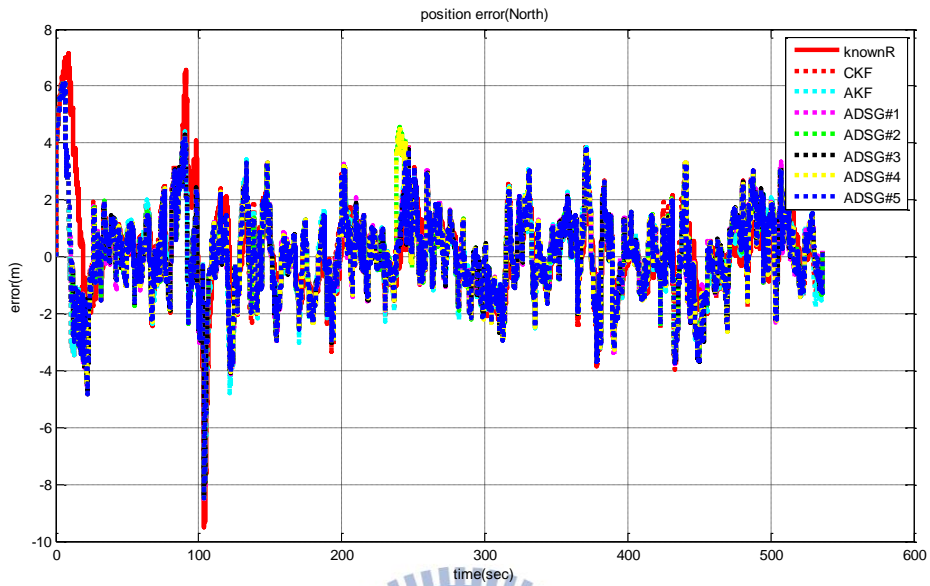


圖 5.1.9 模擬中的位置誤差(北)

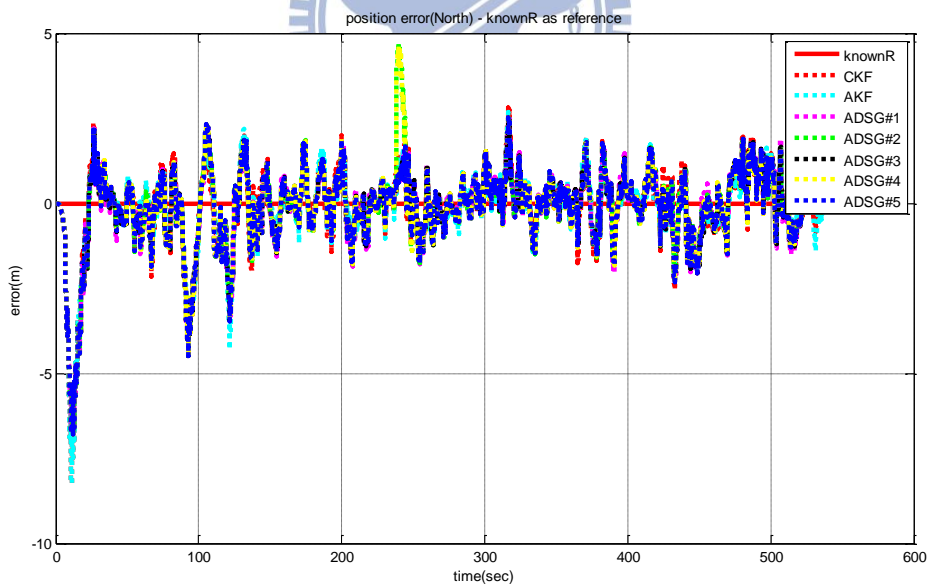


圖 5.1.10 模擬中的位置誤差-以 knownR 為參考基準(北)

東方軌跡記錄的誤差如圖 5.1.11、圖 5.1.12，分別以未加雜訊的軌跡與 knownR 估測的軌跡做為計算誤差的參考基準。

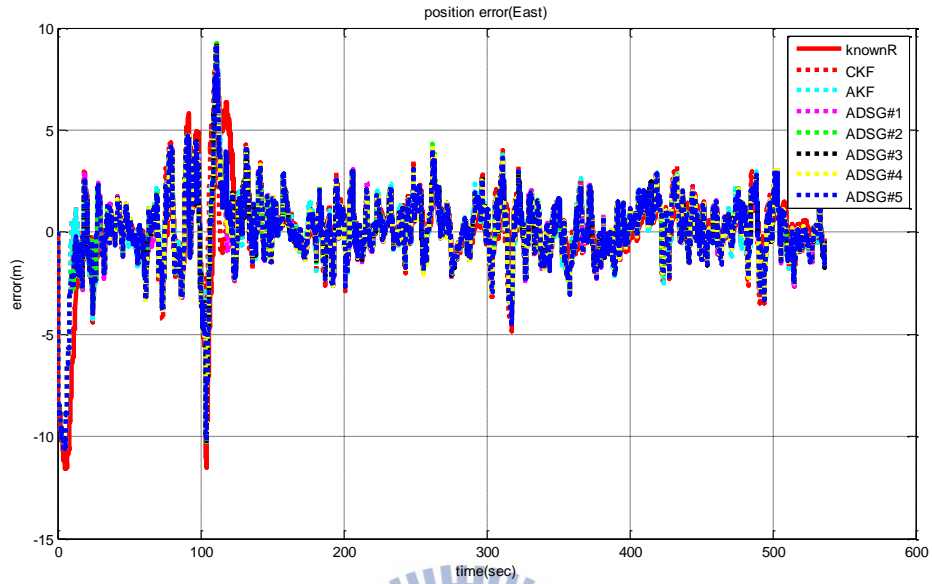


圖 5.1.11 模擬中的位置誤差(東)

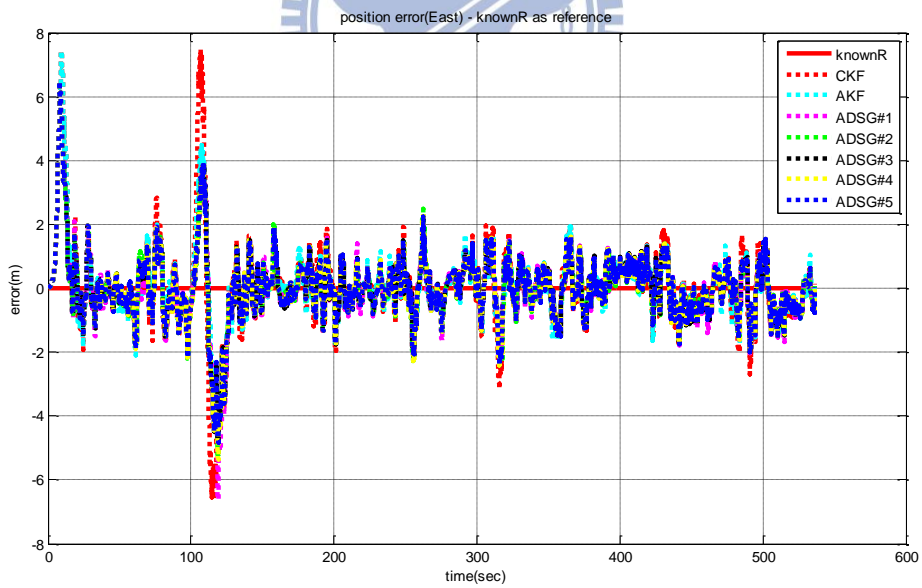


圖 5.1.12 模擬中的位置誤差-以 knownR 為參考基準(東)

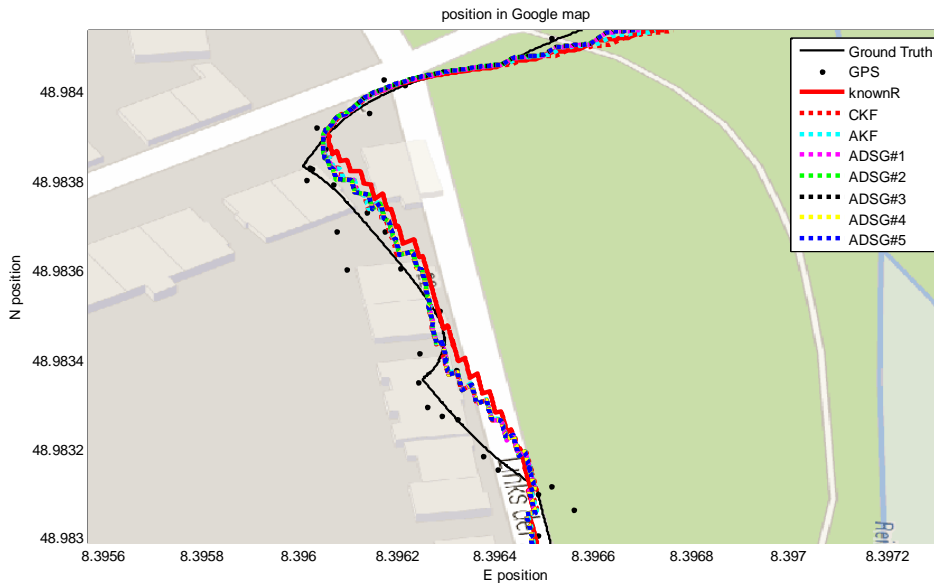


圖 5.1.13 衛星 GNSS 資料偏移之 A 處放大圖

在圖 5.1.13 中亦可看出於約 100 秒附近時，A 區段 GNSS 的位置發生錯誤的偏移時，藉由與 INS 做感測器整合，能將偏移造成的位置誤差減小，形成較正確的軌跡。在計算誤差時，由於 A 區段沒有真正的 ground truth，將計算從 120 秒至 400 秒，共 280 秒，總距離約 2224 公尺的區段來計算誤差，軌跡記錄結果的誤差比較如表 5.1.2 所示。

表 5.1.2 模擬中各方法的估測誤差方均根比較(單位：公尺)

method	R(north)	R(east)	P(north)	P(east)	horizontal error	P(north) knownR	P(east) knownR	horizontal error knownR
knownR	0	0	1.7709	1.5262	2.3378	0	0	0
CKF	5.5984	5.5984	1.8751	1.6748	2.5142	0.4130	0.3656	0.5516
AKF	4.9976	4.8952	1.8158	1.6052	2.4236	0.4871	0.3653	0.6089
ADSG#1	4.7436	4.0521	1.9082	1.6386	2.5152	0.3667	0.2321	0.434
ADSG#2	3.9478	3.7159	1.8238	1.5499	2.3934	0.2374	0.1869	0.3021
ADSG#3	3.7585	3.5989	1.8312	1.5680	2.4108	0.2508	0.2038	0.3232
ADSG#4	3.8427	3.6286	1.8186	1.5544	2.3924	0.2229	0.1825	0.2881
ADSG#5	3.7473	3.6123	1.8238	1.5587	2.3991	0.2441	0.1960	0.3131



CKF 在量測雜訊標準差較大的環境下會過度相信量測值，標準差較小的環境會不相信量測資訊而造成軌跡估測的偏差。反觀在有適應性雜訊估測的方法中，能隨著創新序列的變化做估測，進而調整量測值被相信的比例。其中  $P(\text{north})$  為以未加入雜訊的軌跡為 ground truth 比較， $P(\text{north})_{\text{knownR}}$  為與已知雜訊分布的軌跡為 ground truth 做比較。ADSG#1 與 AKF 使用相同的創新序列做估測，但結果優於 AKF 法，而 ADSG#2~#5 在重複遞回中，創新序列與估測  $\hat{R}_k$  值的關係收斂，結果相當接近。以未加入已知雜訊的訊號為比較基準的水平誤差結果來說，CKF 為 2.51m，AKF 為 2.42m，而 ADSG#5 為 2.40m 最小。若以 knownR 為比較基準的水平誤差結果來說，AKF 最差約為 0.61m，其次 CKF 約為 0.55m，本論文方法 ADSG 約為 0.3m。CKF 在此模擬中結果較 AKF 佳，但這並不能表示在實作中亦是如此，畢竟在此模擬中我們以最佳的常數值當做 CKF 量測雜訊值。





## 5.2 實際道路測試

本節將實際進行道路測試，實驗平台為 iPhone5 與實驗室整合之感測資訊記錄器，兩者同時記錄汽車繞行交通大學校園一圈的軌跡，最後分析與檢驗各演算法的效果。

### 5.2.1 iPhone5 與實驗室整合之感測資訊記錄器硬體 xGIC 介紹

實際測試的硬體之一使用蘋果公司生產的智慧型手機 iPhone5[39]，具備了雙衛星系統 GNSS/GPS，與九軸的慣性儀：3 軸加速規、軸陀螺儀、3 軸磁力計。儘管其慣性儀硬體規格不出色(見表 5.2.1)，且參數不穩定性高，難以建立適當模型，因此不適合拿來做導航相關的應用[12]，但經由事後校正與 GNSS 的結合，仍能有一定程度的導航與軌跡記錄的功用。本論文使用 Wavefront Labs 於 App store 開發之感測器資料記錄軟體 Sensor Data，分別以取樣頻率 1Hz 與 50Hz 記錄衛星與慣性儀的資料。

表 5.2.1 手機 iPhone5 慣性儀硬體規格與記錄軟體 app，sensor data

	Gyro	Accelerometer
	L3G4200D	LIS331DLH
measurement range	$\pm 2000$ deg/s	$\pm 2g$
scale factor	0.07 deg/s/digit	1mg/digit
scale factor error	N/A	$\pm 10\%$
scale factor change vs. temperature	$\pm 2\%$	$\pm 0.01\%/^{\circ}C$
bias error	$\pm 75$ deg/s	$\pm 20mg$
bias change vs. temperature	$\pm 0.04$ deg/s/ $^{\circ}C$	$\pm 0.1mg/^{\circ}C$
non-linearity	0.2% FS	N/A
noise density	0.03 deg/s/sqrt(Hz)	278 $\mu g$ /sqrt(Hz)



實際測試的硬體之二(以下簡稱 xGIC)使用由嵌入式系統實驗室陳鳴遠同學開發，以 FPGA 板整合如圖 5.2.1，包含十軸的慣性儀(ADIS16480)、GPS/Glonass

雙衛星接收器模組(GPS-M2)與攝影機模組(MT9V034)。各感測器間的時序也經過同步。本論文研究方向為 INS 與 GNSS 系統的整合，因此以下僅列出慣性儀 ADIS16480 與衛星接收器 GPS-M2 的規格。

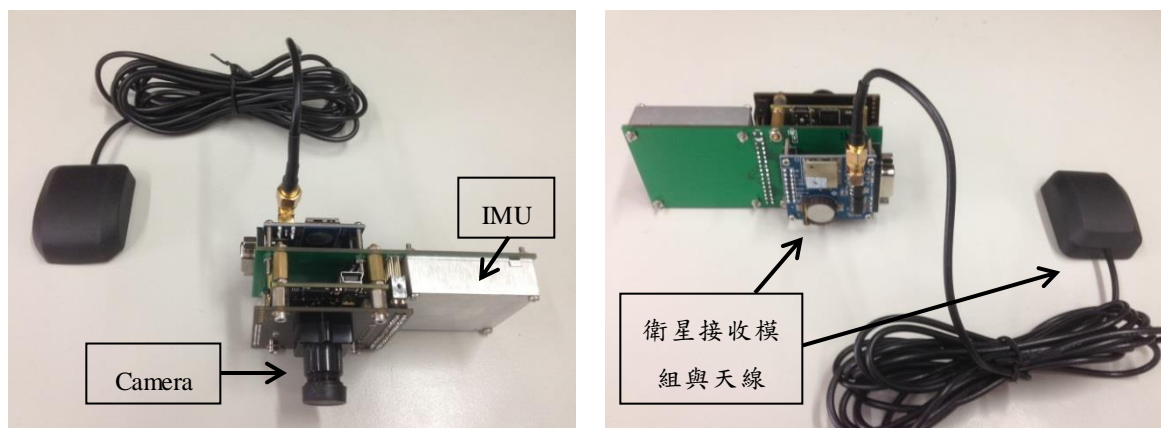


圖 5.2.1 實驗平台 xGIC 硬體全圖

由 Analog Device 公司開發的 ADIS16480 為具有十個自由度的慣性儀[40]，包含 3 軸加速規、3 軸陀螺儀、3 軸磁力計與 1 個氣壓感測計。取樣頻率最高為 2.46kHz，感測器出廠時已經過校正，包含感測器間的 lever arm 與敏感度校正。通訊協定為 SPI 與 FPGA 板溝通，硬體規格如表 5.2.2，本實驗 INS 取樣率為 1.6kHz，GNSS 為 1Hz。

表 5.2.2 慣性儀 ADIS16480 硬體規格

Sensor	ADIS 16480
Type	MEMS
Size	47 mm x 44 mm x 14 mm
Gyroscope	triaxial, $\pm 450^\circ/\text{sec}$
Accelerometer	triaxial, $\pm 10\text{ g}$
Magnetometer	triaxial, $\pm 2.5\text{ gauss}$
Dynamic angle outputs	$0.1^\circ$ (pitch, roll) and $0.3^\circ$ (yaw) static accuracy
Factory-calibrated	yes
Communication interface	SPI-compatible
Sample rate	up to 2.4kHz
Programmable operation and control	yes
Supply voltage	3.3V
I/O Interface	3.3V LVTTTL

衛星接收器使用微控科技[38]整合的 GPS-M2 雙衛星接收模組，可同時接收 GPS 與 Glonass 衛星訊號，水平位置誤差為 2.5m，都卜勒位移速度誤差為 0.1m/sec，硬體規格如表 5.2.3：

表 5.2.3 衛星接收模組 GPS-M2 硬體規格

Sensor	GPS-M2
Type	GPS+GLONASS
Size	38 mm x 38 mm x 12 mm
Horizontal position accuracy	2.5m CEP (Circular Error of Probability)
Velocity accuracy	0.1 m/sec
Time accuracy	±15 ns
Communication interface	RS232
Sample rate	1 Hz
Supply voltage	5 V
I/O Interface	3.3V LVTTTL

## 5.2.2 汽車行駛軌跡估測結果

實驗平台 xGIC 架設如圖 5.2.2，iPhone5 置於車內，並以止滑毛巾鋪墊於下以防止手機滑動。總路徑長 2198 公尺，總時間 265.625 秒。

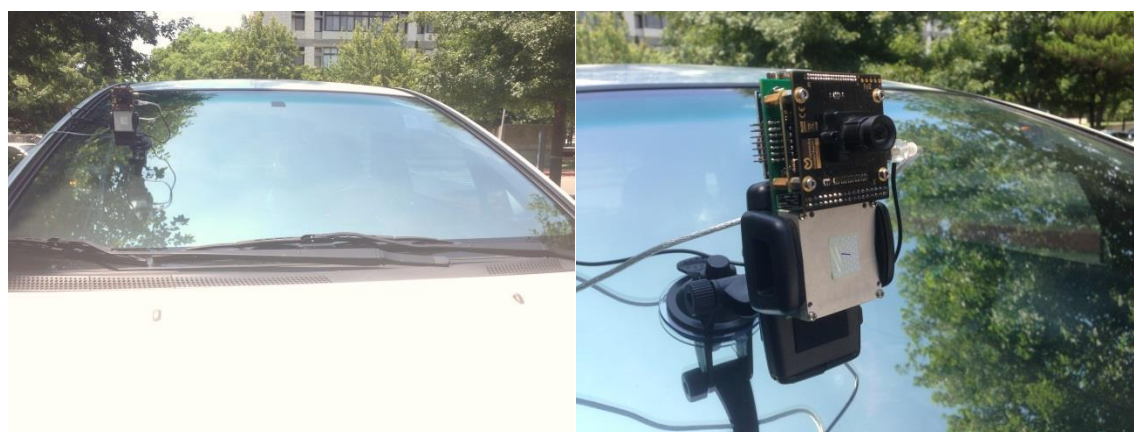


圖 5.2.2 實驗平台架設圖

S-G 濾波器在本應用中除了用做估雜訊外，如 4.1 節介紹，濾波器本身為一低通濾波器，實作上 xGIC 與 iPhone5 的慣性儀資料皆先經過 S-G 濾波器濾除高

頻雜訊，做訊號的前處理。以前進方向加速規與導航角旋轉陀螺儀訊號為例，其濾波後的結果分別如圖 5.2.3 至圖 5.2.6，濾波後能保留汽車運動的低頻訊號，濾除車子震動或是其它因素的高頻雜訊：

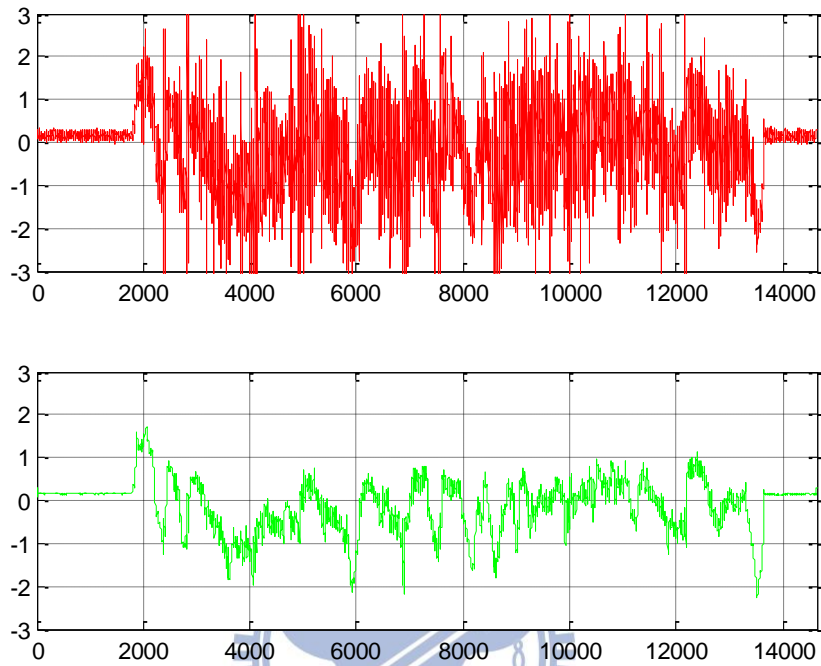


圖 5.2.3 前進方向加速度濾波前後比較-iPhone5

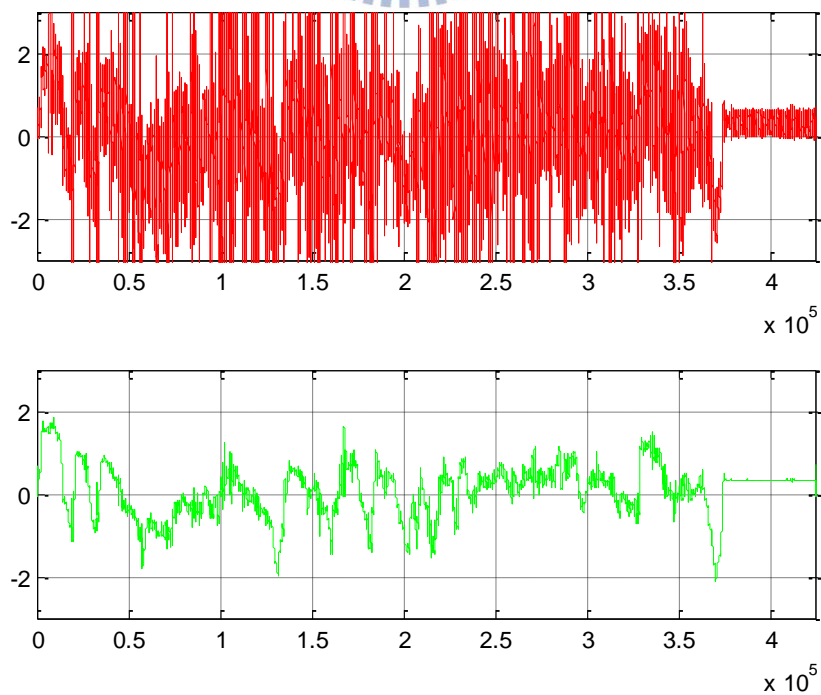


圖 5.2.4 前進方向加速度濾波前後比較-xGIC

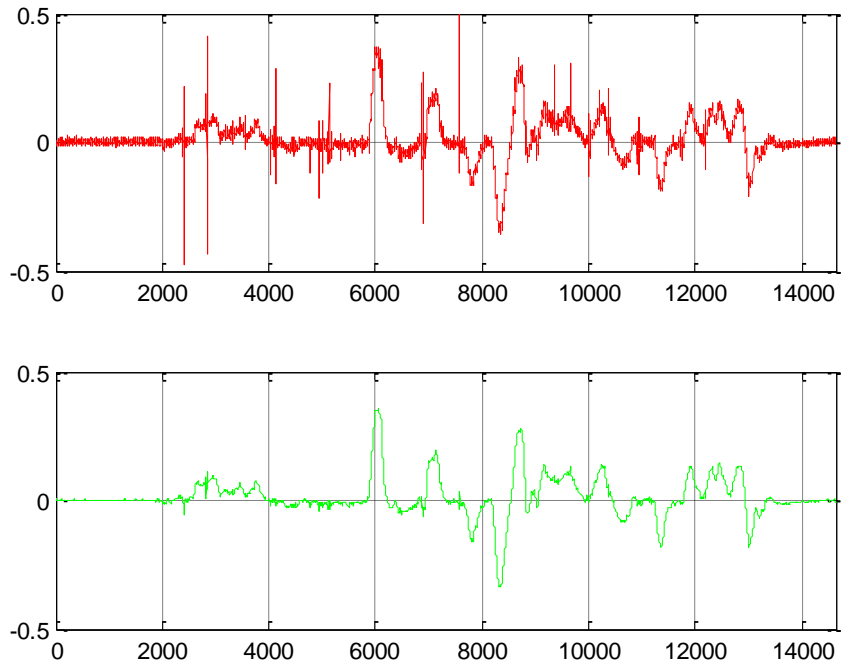


圖 5.2.5 導航角角速度濾波前後比較-iPhone5

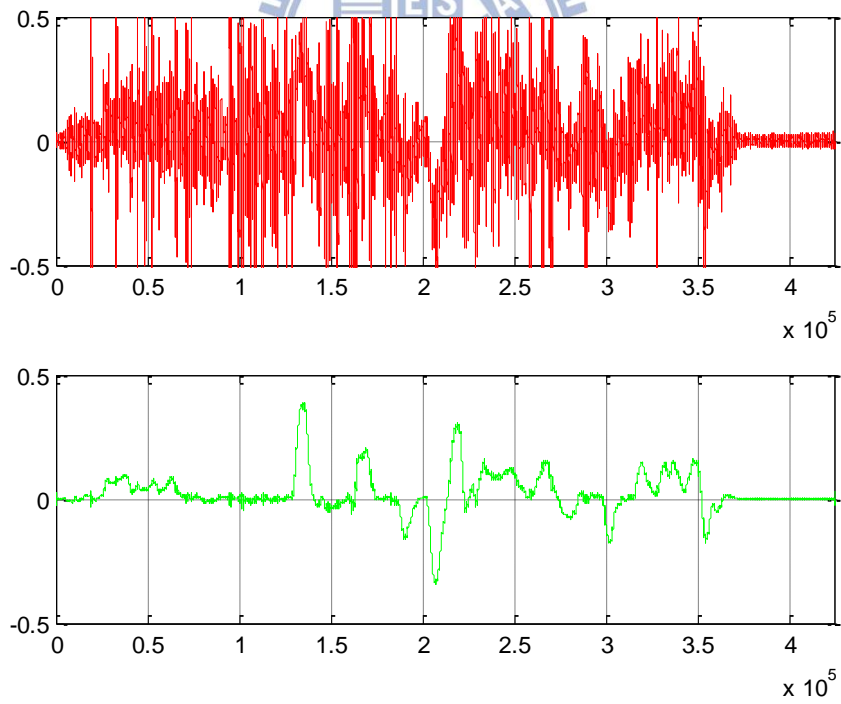


圖 5.2.6 導航角角速度濾波前後比較-xGIC



● 使用 iPhone5 做軌跡估測

iPhone5 經 GNSS/INS 整合前的交大環校原始軌跡記錄如圖 5.2.7

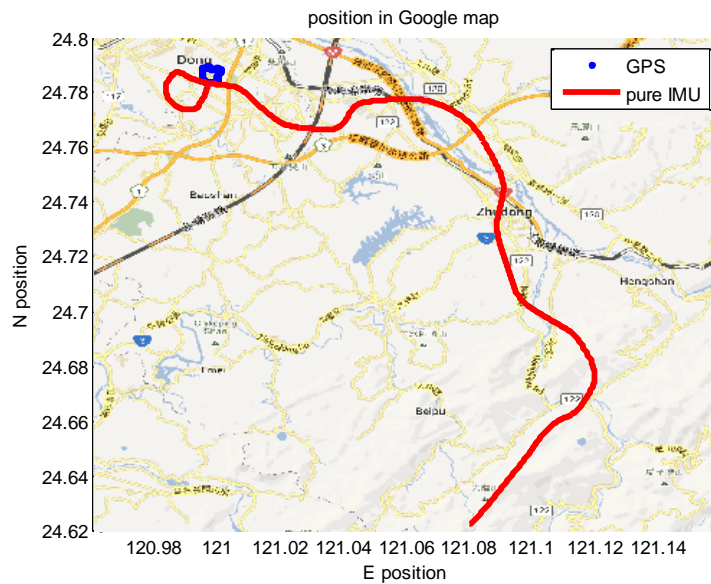


圖 5.2.7 交大環校未整合的原始軌跡-iPhone5

加入了地面運動的 NHC 限制，以及假設車子不會倒退行駛的速度方向限制後，原始交大環校軌跡記錄如圖 5.2.8。

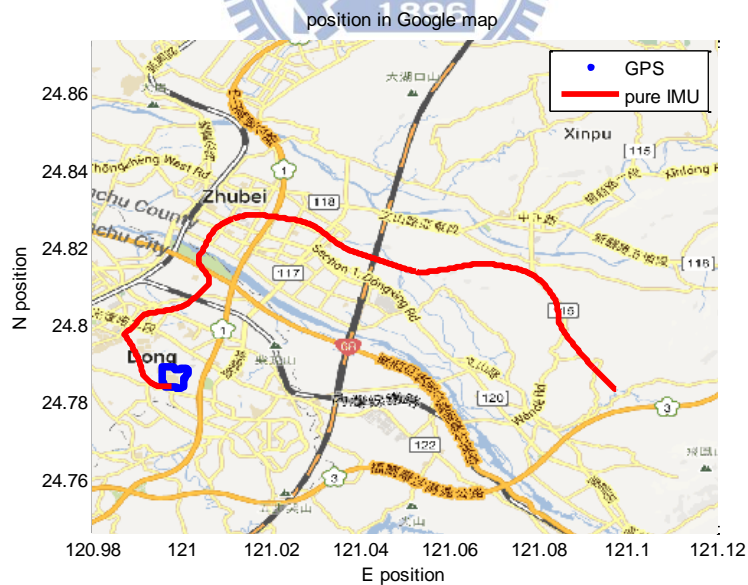


圖 5.2.8 加入 NHC 與車體僅往前行駛限制的原始軌跡-iPhone5

經卡爾曼濾波器整合的估測結果如圖 5.2.9，以不同的量測雜訊估測方法估測交大環校軌跡，各估測方法有一定程度的導航效果。

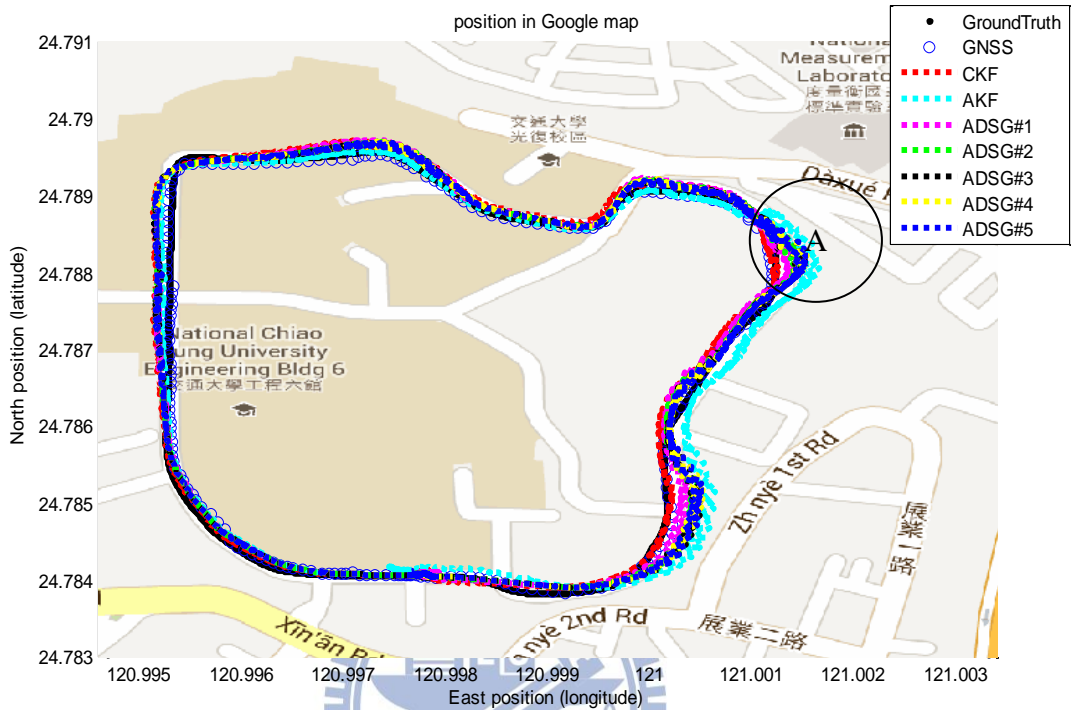


圖 5.2.9 經整合後的交大環校軌跡圖-iPhone5

圖 5.2.10 為交大環校 A 區的軌跡放大圖，圖中鋸齒狀及與 GNSS 軌跡偏離的原因於稍後探討。

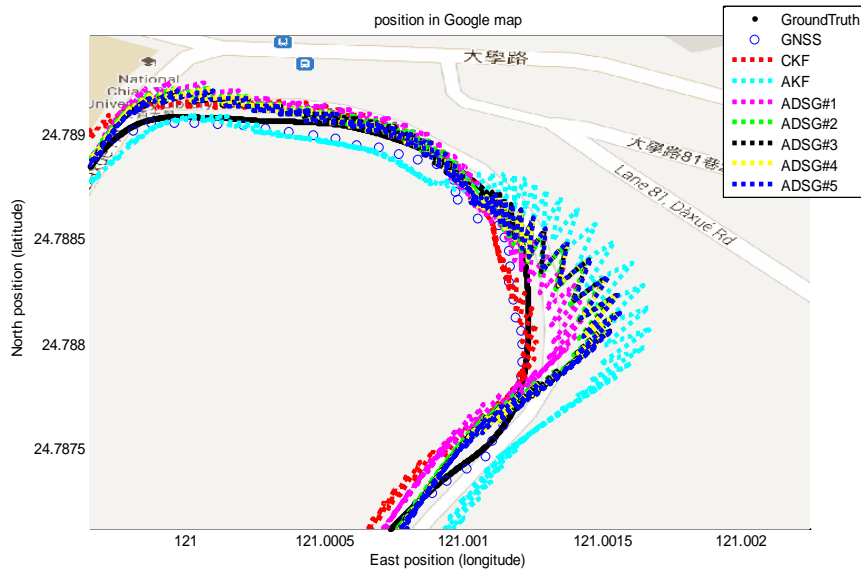


圖 5.2.10 交大環校軌跡 A 區放大圖-iPhone5



圖 5.2.11 圖 5.2.12 為交大環校北方與東方軌跡，可看出 INS 系統在加入 GNSS 輔助後，修正了 INS 誤差積分放大的問題

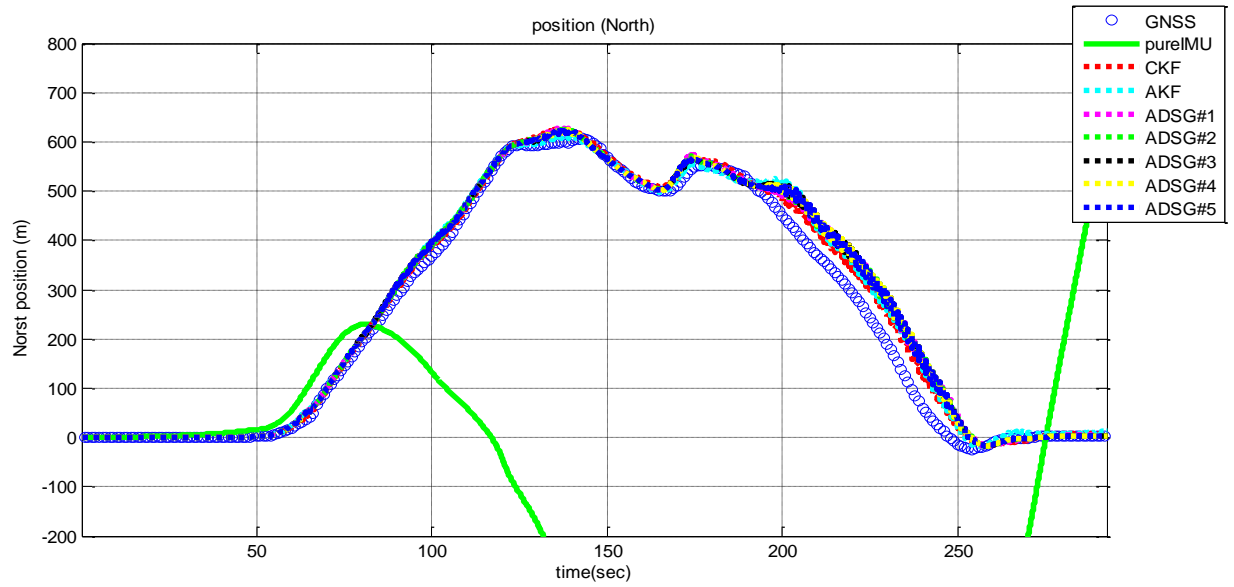


圖 5.2.11 交大環校軌跡記錄(北)- iPhone5

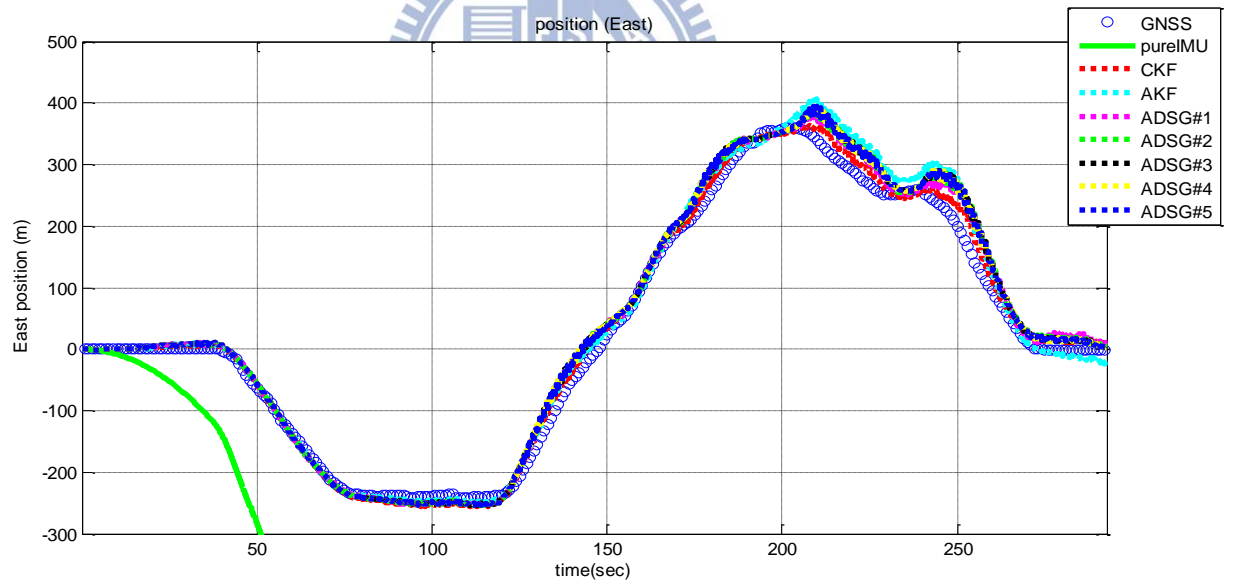


圖 5.2.12 交大環校軌跡記錄(東)- iPhone5

圖 5.2.13 圖 5.2.14 為量測雜訊的估測結果，為了使估測出的 R 穩定不發散，且 R 為正定矩陣，對 R 矩陣的元素加入上下限的條件限制。然而可以看到在許多時間，估測的結果易達上限值。在本論文估測方法中， $\hat{R}_k = \hat{C}_{v_k} - H_k P_k^- H_k^T$ ，這表示創新序列的值很大，意味著 INS 與 GNSS 估測的位置相差很大，此相差值的來源有二個，一為 GNSS 衛星的雜訊，二為 INS 位置的誤差。先從兩種導航系統特性來看，GNSS 為 INS 分別扮演長期與短期精準的角色，若 INS 在短期內的誤差大於 GNSS，在  $P_k^-$  已收斂下會使得我們將此誤差來源錯誤歸類於 GNSS 的誤差，導致系統不信任 GNSS，這又造成 INS 系統無法適當修正，形成惡性循環，結果就如圖 5.2.10 中，估測軌跡為鋸齒狀，且 INS 與 GNSS 間的位置誤差類似 non-zero mean 的訊號，造成 R 的估測容易達上限，也就是說，當 INS 短期的精準度還遜於 GNSS 時，發揮不了整合的效果，這與 INS 硬體規格、硬體表現的穩定度及 INS 的取樣頻率有關。

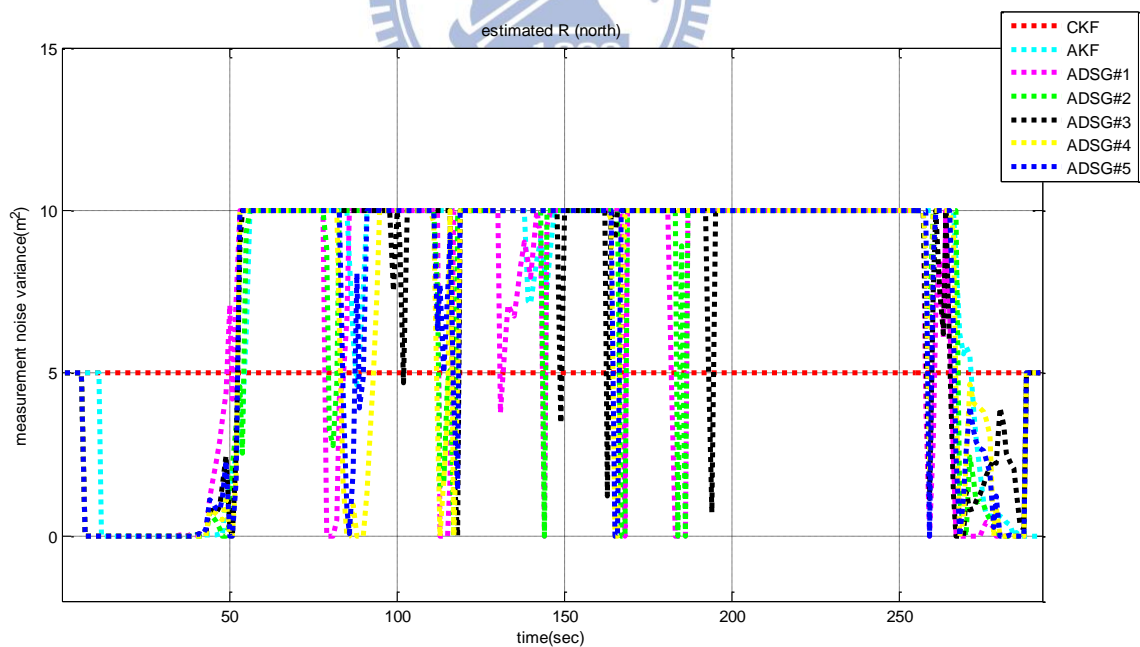


圖 5.2.13 量測雜訊估測(北)- iPhone5

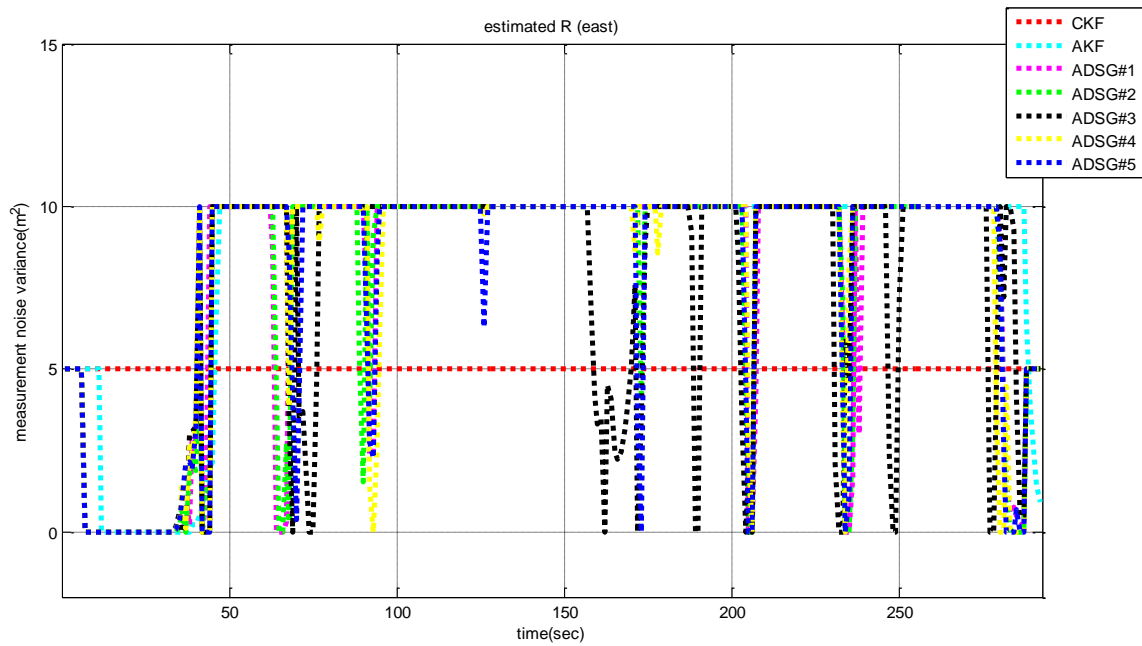


圖 5.2.14 量測雜訊估測(東)- iPhone5

若以 xGIC 的 GPS 值內插後當 ground truth, iPhone5 算出的位置誤差如下表 5.2.4, 結果以 CKF 的效果最好, 因為 CKF 是之中最信任 GNSS 量測資訊的方法, 其它適應性估測方法則因為上述的惡性循環造成的 non-zero mean 誤差, 導致較差的結果, 也說明了當 INS 短期的精準度還遜於 GNSS 時, 使用適應性估測的結果甚至會更差。

表 5.2.4 位置誤差方均根比較-iPhone5(單位: 公尺)

method	Pos err(N)	Pos err(E)	Pos err(hor.)
CKF	6.647	9.610	11.684
AKF	11.295	15.299	19.017
ADSG#1	13.694	14.982	20.298
ADSG#2	8.462	11.270	14.092
ADSG#3	13.107	14.270	19.376
ADSG#4	14.744	13.934	20.287
ADSG#5	13.949	14.585	20.182

- 使用 xGIC 做軌跡估測

xGIC 經 GNSS/INS 整合前，加入 NHC 限制的原始交大環校軌跡記錄如圖

5.2.15，相較於 iPhone5，xGIC 單純用 INS 系統估測的軌跡誤差相對小非常多。



圖 5.2.15 加入 NHC 與速度方向的交大環校原始軌跡圖-xGIC

xGIC 經整合的軌跡估測結果如圖 5.2.16，以不同量測雜訊估測方法估測交大環校軌跡，結果相當接近，用 xGIC 做軌跡記錄目前沒有 ground truth 能比較各方法的優劣，但能肯定的是本論文提出的方法確實能應用在軌跡記錄應用上。

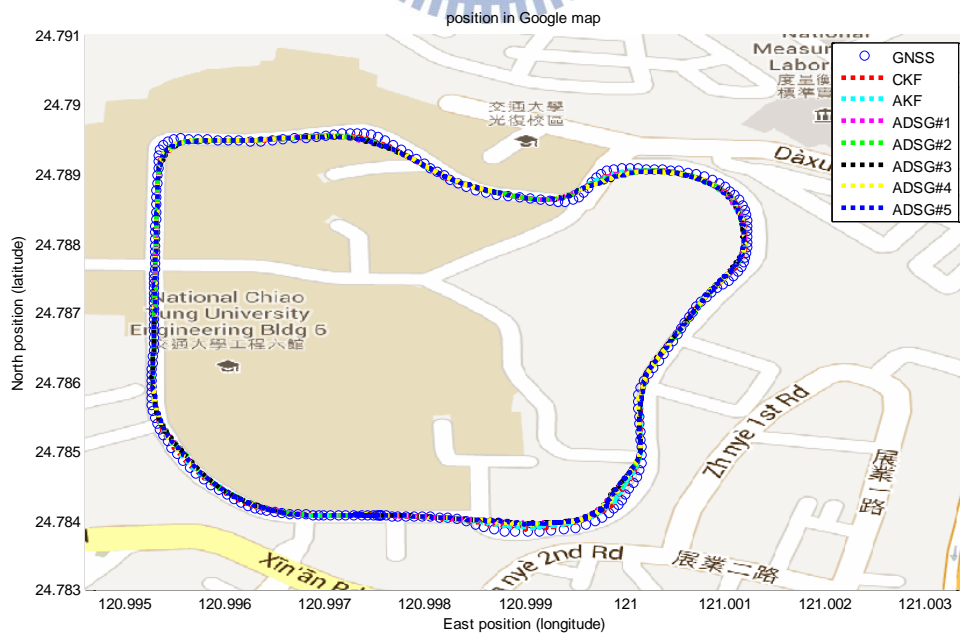


圖 5.2.16 經整合後的交大環校軌跡圖-xGIC

本論文的研究目標，即記錄位置、速度、姿態資料，圖 5.2.17 圖 5.2.18 為 xGIC 估測的交大環校北方與東方軌跡，在加入 GNSS 輔助整合後，能修正加速規、陀螺儀的偏壓值與 INS 軌跡資訊，成為結合了 GNSS 與 INS 優點的高取樣率及高準度之軌跡記錄結果。

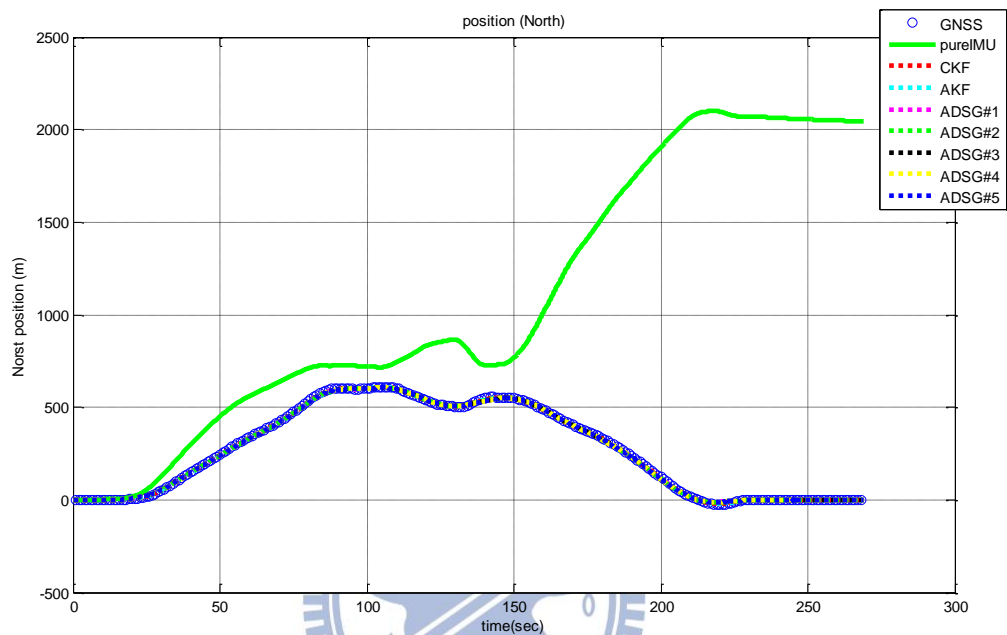


圖 5.2.17 交大環校軌跡記錄(北)-xGIC

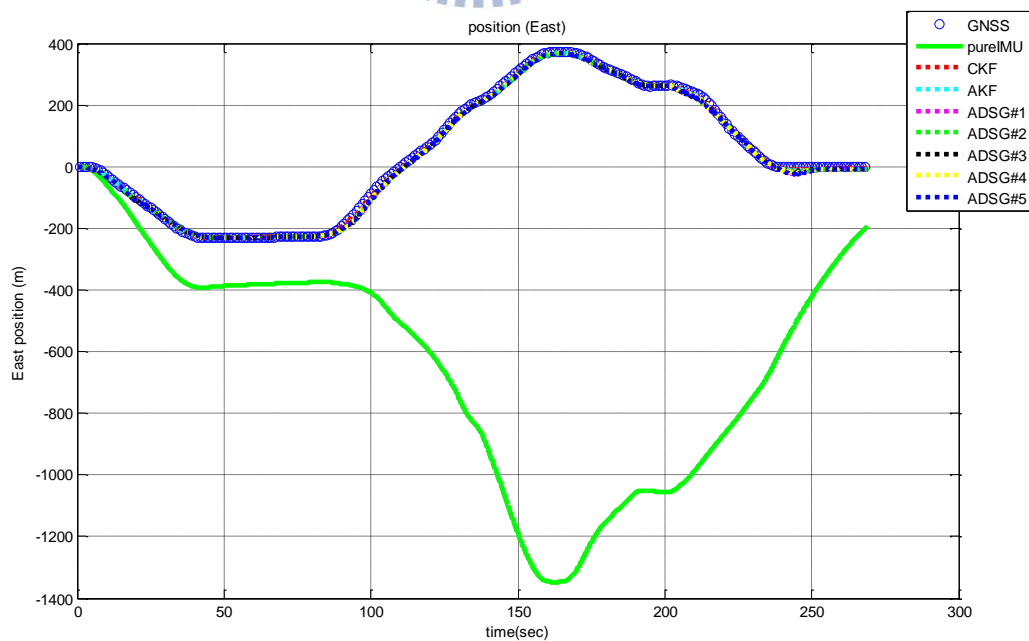


圖 5.2.18 交大環校軌跡記錄(東)-xGIC

圖 5.2.19 圖 5.2.20 為 xGIC 經整合後，估測汽車繞行交大環校的速度記錄，藉由 GNSS 的輔助，改善 IMU 積分不穩定的問題。

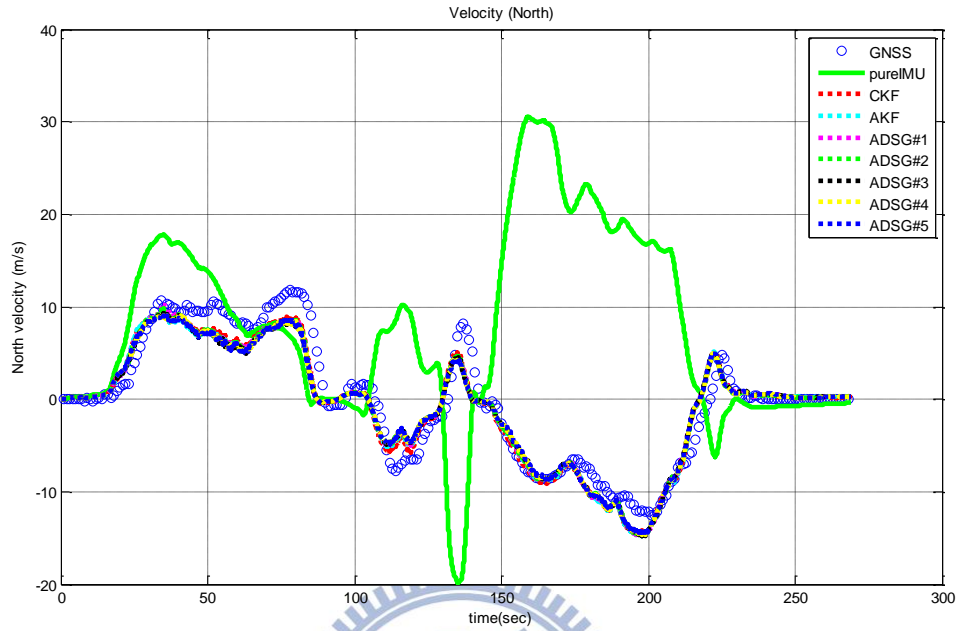


圖 5.2.19 交大環校速度記錄(北)-xGIC

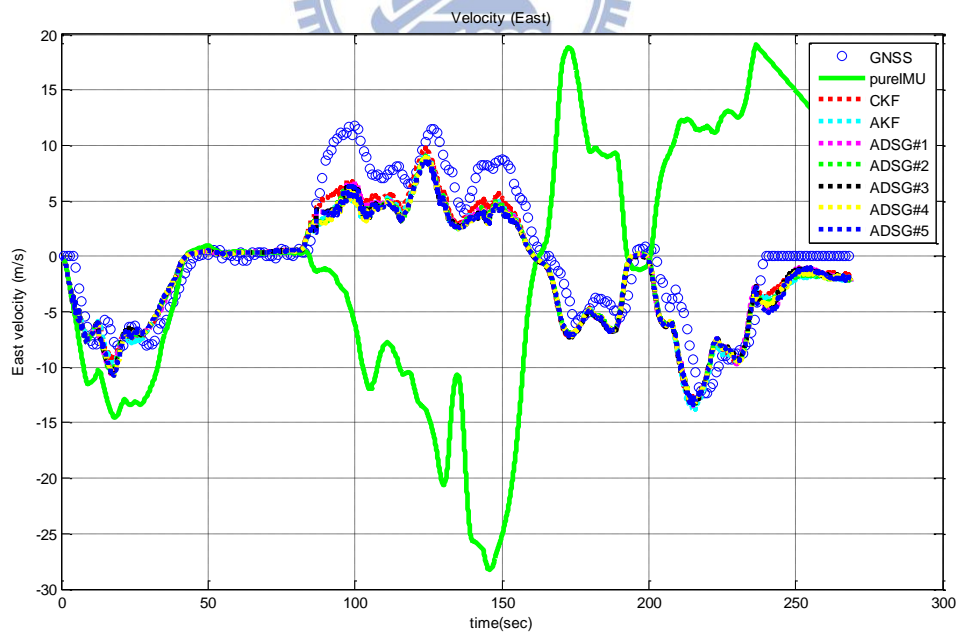


圖 5.2.20 交大環校速度記錄(東)-xGIC

圖 5.2.21 上至下分別為翻滾角、俯視角、導航角記錄，轉換方法請見附錄 III。

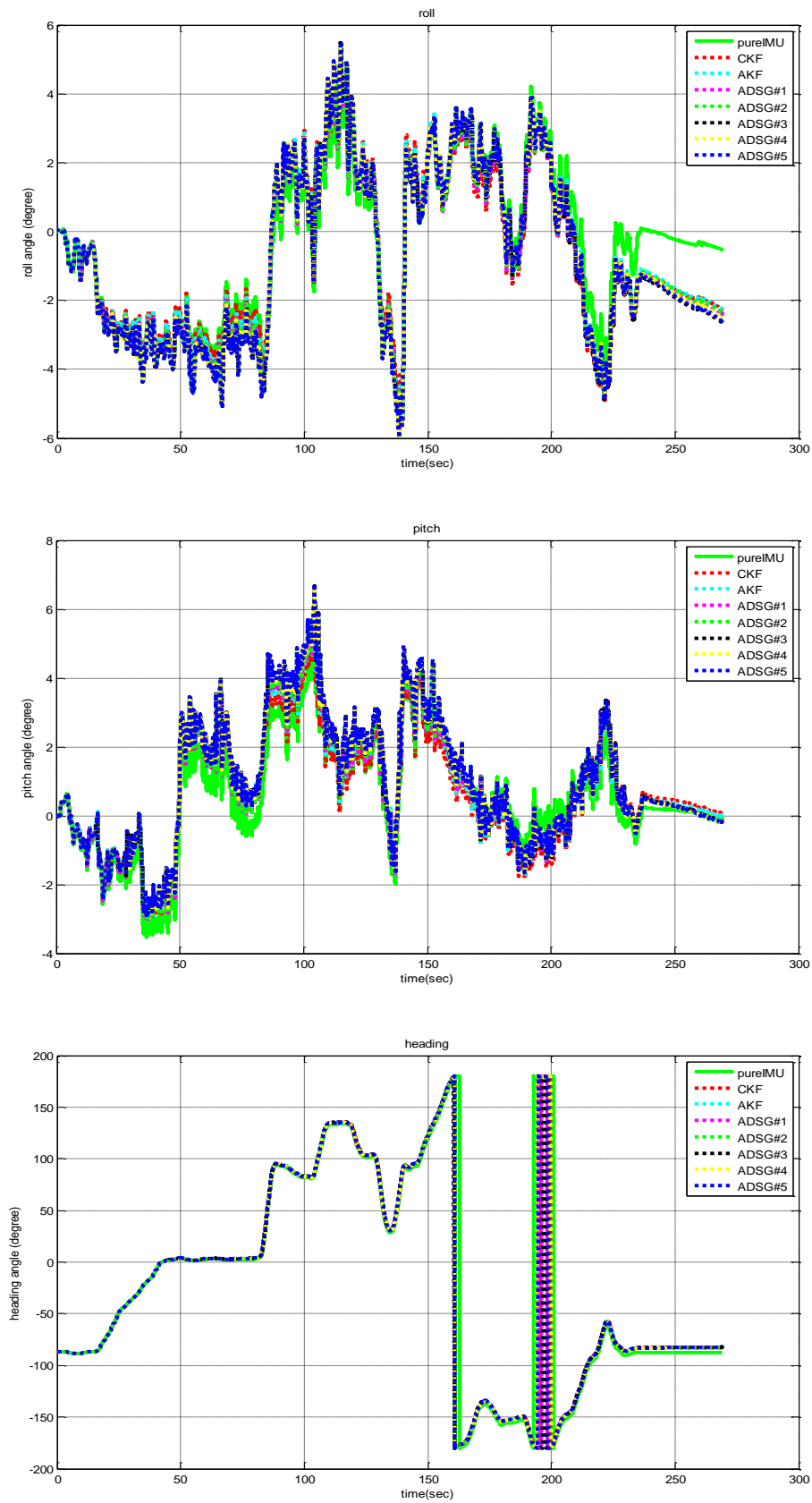


圖 5.2.21 姿態角記錄結果-xGIC



圖 5.2.22 圖 5.2.23 為使用 xGIC 估測量測雜訊的結果，CKF 的參數值與模擬一樣選在上限的一半值，而本論文提出的 ADSG 確實能應用在適應性估測量測雜訊上。

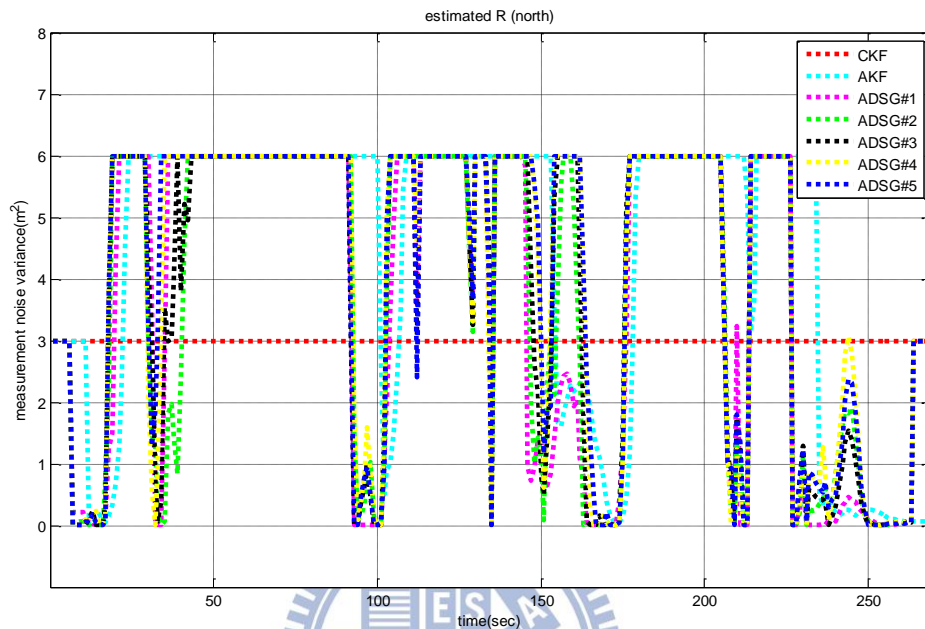


圖 5.2.22 量測雜訊估測(北)- xGIC

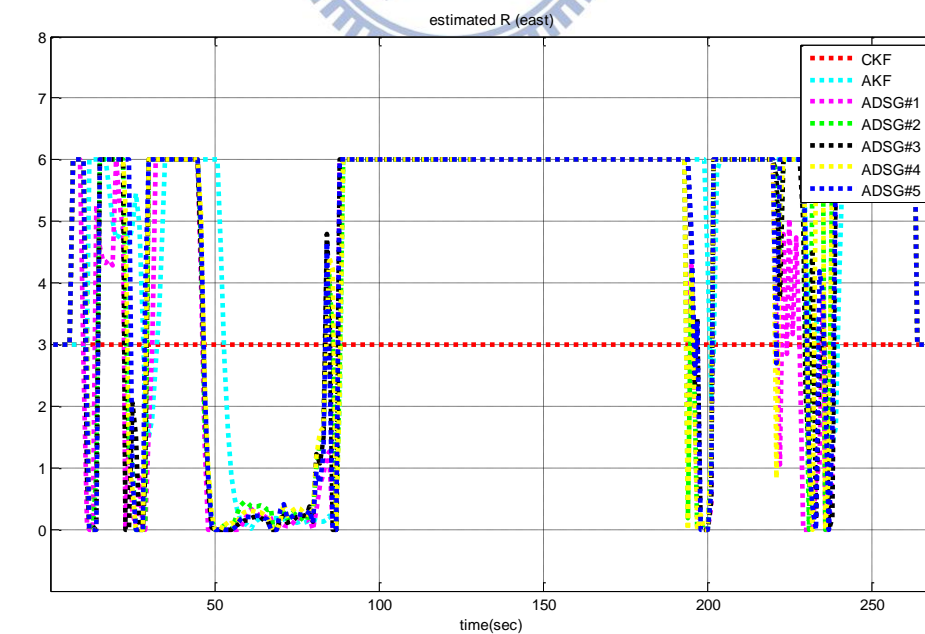


圖 5.2.23 量測雜訊估測(東)- xGIC

本研究利用創新序列估測量測雜訊的共變異矩陣  $R$ ，其中創新序列可以表示為  $\nu = He + v$ ， $e$  為系統預測誤差， $v$  為 GNSS 量測雜訊，這兩者在卡爾曼濾波器中皆假設是平均值為零的白高斯訊號。實作中， $e$  受誤差模型精準度影響，在使用低階的 iPhone5 慣性儀為平台下，不穩定的 INS 訊號使其運動行為難以被模型精準描述，與使用 iPhone5 的雜訊估測結果相比，使用 xGIC 估測雜訊相對較優，也說明了在 GNSS/INS 做適應性雜訊估測時，INS 的硬體規格要有一定的水準，否則當 INS 短期內的估測誤差仍大於 GNSS 的雜訊時，適應性估測雜訊的方法會把該誤差錯誤的認為是 GNSS 的雜訊，造成量測雜訊矩陣  $R$  的值變大，表示對 GNSS 較不信任，造成如 iPhone5 的 INS 軌跡更加無法由 GNSS 修正的惡性循環，效果反而比僅用 GNSS 做軌跡記錄還要差。

而除了 INS 的影響外，另一個影響雜訊估測的因素就是 GNSS 的雜訊分布，也就是本研究要估測的量測雜訊。若  $v$  為 non-zero mean 的訊號，這會使得理論上為卡方分布的創新序列，變成期望值相當大的序列，這同樣也會造成估測的量測雜訊矩陣  $R$  的值變大，但這個結果相較於上述 INS 的誤差是可以被接受的，因為此誤差的確是因為 GNSS 所造成，此時系統會選擇相信 INS 多一點進行軌跡估測。因此如何建立更精準的運動模型，與關於 non-zero mean 的量測雜訊估測方法都是未來可以努力的方向。

## 第六章 結論

### 6.1 研究成果

本論文提出以 ADSG，離線估測 GNSS/INS 整合系統中，卡爾曼濾波器量測雜訊的方法，並以模擬與實驗比較各個不同的估測演算法。模擬過程在衛星訊號中加入已知白高斯雜訊進行雜訊估測，模擬結果以本論文提出的方法效能最為優越，水平誤差 CKF 為 2.51m，AKF 為 2.42m，ADSG#5 最小為 2.40m。若以 knownR 為比較基準，水平誤差 AKF 最差約為 0.61m，其次 CKF 約為 0.55m，本論文方法 ADSG 約為 0.3m。於實作上，由於真正的衛星量測雜訊並非白高斯雜訊或受 INS 硬體規格及誤差模型不夠精確影響，使得創新序列的分布並非卡爾曼濾波器假設的白高斯訊號，估測的量測雜訊結果會因此受影響。於使用 xGIC 記錄的交大環校估測結果上，雖然目前沒有 ground truth 驗證本論文方法的效能，但本論方法的結果也能整合出具有高度精準且高取樣率的軌跡記錄。

### 6.2 未來展望

在未來希望能找個方法驗證本論文提出方法的效果，並以更嚴謹的數學理論證明本論文方法在變化的環境下能優於其它方法。此外，也期許藉由政府與法律的努力，加速推廣行車記錄器的技術發展，落實每部車皆加裝設行車記錄器的理念。近年來，國內酒駕事故頻繁，已造成多個家庭破碎，但目前行車記錄器仍只能做為輔佐證據，法律效益有限。希望將來能藉科技的進步，精準地記錄意外過程，還原事發真相以保障受害者的權益，並期許這項科技對自私與存有僥倖心態的酒駕者能有一定程度的遏阻效果，於道路安全的品質才能從根本提升，這一切需要靠台灣人民、政府與科技發展的我們共同努力，有責任地為未來和平的社會盡一份心力。

## 附錄

I.  $x^* = (A^T A)^{-1} (A^T b)$  為  $Ax=b$  的最小平方誤差解之證明

Let  $x^* = (A^T A)^{-1} (A^T b)$

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|^2 &= \|A(x - x^*) + Ax^* - b\|^2 \\ &= (A(x - x^*) + (Ax^* - b))^T (A(x - x^*) + (Ax^* - b)) \\ &= \|A(x - x^*)\|^2 + \|Ax^* - b\|^2 + 2[A(x - x^*)]^T (Ax^* - b)\end{aligned}$$

and

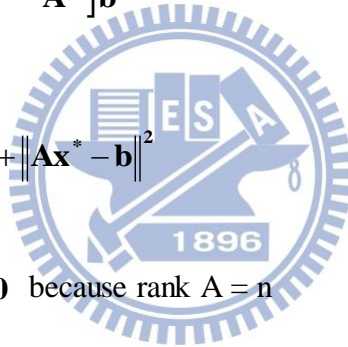
$$\begin{aligned}& [A(x - x^*)]^T (Ax^* - b) \\ &= (x - x^*)^T A^T [A(A^T A)^{-1} A^T - I] b \\ &= (x - x^*)^T [A^T A(A^T A)^{-1} A^T - A^T] b \\ &= (x - x^*)^T [A^T - A^T] b \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Ax - b\|^2 = \|A(x - x^*)\|^2 + \|Ax^* - b\|^2$$

If  $x \neq x^* \Rightarrow \|A(x - x^*)\|^2 > 0$  because  $\text{rank } A = n$

so  $\|Ax - b\|^2 > \|Ax^* - b\|^2$

$\Rightarrow x^* = (A^T A)^{-1} (A^T b)$  is minimize of  $\|Ax - b\|^2$



## II. AKF 最大似然法則估測量測雜訊

假設其機率密度函數為高斯分布

$$p(z|a)_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |C_{v_k}|}} e^{-\frac{1}{2} v_k C_{v_k}^{-1} v_k^T}$$

its logarithmic form:

$$\ln p(z|a)_k = -\frac{1}{2} \{ m \ln(2\pi) + \ln(|C_{v_k}|) + v_k C_{v_k}^{-1} v_k^T \}$$

Maximum likelihood condition:

$$\sum_{j=k-L+1}^k \ln(|C_{v_j}|) + \sum_{j=k-L+1}^k v_j C_{v_j}^{-1} v_j^T = \min$$

take the derivative

$$\frac{\partial P}{\partial C_v} = 0$$

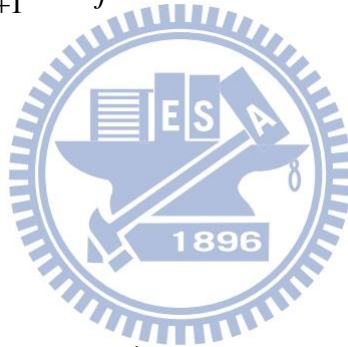
$$\Rightarrow \hat{C}_{v_k} = \frac{1}{L} \sum_{j=k-L+1}^k v_j v_j^T$$

$$\left( \text{note that } \frac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{A})^{-1}, \frac{\partial \mathbf{x}' \mathbf{B} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{x} \mathbf{y}' \right)$$

matrices Q/R are then adapted as follows:

$$\hat{R}_k = \hat{C}_{v_k} - H_k P_k H_k^T$$

$$\hat{Q}_k = K_k \hat{C}_{v_k} K_k^T$$



### III. 從旋轉矩陣計算尤拉角[37]

*if* ( $R_{31} \neq \pm 1$ )

$$\theta_1 = -\text{asin}(R_{31})$$

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

$$\phi_1 = \text{atan2}\left(\frac{R_{32}}{\cos \theta_1}, \frac{R_{33}}{\cos \theta_1}\right)$$

$$\phi_2 = \text{atan2}\left(\frac{R_{32}}{\cos \theta_2}, \frac{R_{33}}{\cos \theta_2}\right)$$

$$\psi_1 = \text{atan2}\left(\frac{R_{21}}{\cos \theta_1}, \frac{R_{11}}{\cos \theta_1}\right)$$

$$\psi_2 = \text{atan2}\left(\frac{R_{21}}{\cos \theta_2}, \frac{R_{11}}{\cos \theta_2}\right)$$

*else*

$\psi = \text{anything}$

*if* ( $R_{31} = -1$ )

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi = \psi + \text{atan2}(R_{12}, R_{13})$$

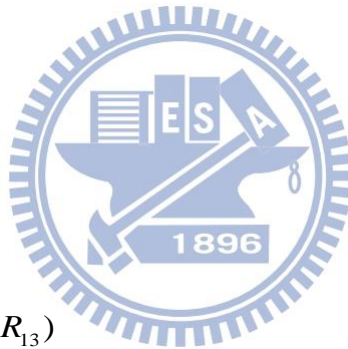
*else*

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi = -\psi + \text{atan2}(-R_{12}, -R_{13})$$

*end*

*end*



## 参考文献

- [1] Raman Mehra, "Approaches to Adaptive filtering, " *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 5, pp. 693-698, Oct. 1972.
- [2] Raman Mehra, "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman filtering," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no. 2, pp. 175-184, Apr. 1970.
- [3] A. H. Mohamed and K. P. Schwarz, "Adaptive Kalman filtering for INS/GPS," *Journal of Geodesy*, vol. 73, no. 4, 193-203, 1999.
- [4] B. J. Odelson, Murali R. Rajamani, and James B. Rawlings, "A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances," *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 303-308, 2006.
- [5] B. M. Åkesson, et al, "A Generalized Autocovariance Least-Squares Method for Kalman filter Tuning," *Journal of Process control*, vol. 18, no. 7, pp. 769-779, 2008.
- [6] M.F. Abdel-Hafez, "The Autocovariance Least-Squares Technique for GPS Measurement Noise Estimation," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 59, no. 2, pp. 574-588, Feb 2010.
- [7] Christopher Hide, Terry Moore, and Martin Smith, "Adaptive Kalman filtering for Low-Cost INS/GPS," *Journal of navigation*, vol. 56, no. 1, pp. 143-152, 2003.
- [8] Christopher Hide, Terry Moore, "GPS and Low Cost INS Integration for Positioning in the Urban Environment," *ION GPS/GNSS*, 2005.
- [9] Yuquan Wang, et al, "Vehicle State Estimation Using GPS/IMU Integration." *IEEE Sensors*, pp. 1815-1818, Oct. 2011.



- [10] Congwei Hu, et al, "Adaptive Kalman filtering for Vehicle Navigation," *Journal of Global Positioning Systems*, vol. 2, no. 1, pp. 42-47, 2003.
- [11] F. X. Cao, et al, "Low Cost SINS/GPS Integration for Land Vehicle Navigation," *Proceedings of the IEEE 5th International Conference on Intelligent Transportation Systems*, pp. 910-913, 2002.
- [12] Xiaoji Niu, et al, "Using Inertial Sensors of iPhone 4 for Car Navigation," *IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, pp. 555-561, Myrtle Beach, SC, Apr. 2012.
- [13] Ali Almagbile, Jinling Wang, and Weidong Ding, "Evaluating the Performances of Adaptive Kalman filter Methods in GPS/INS Integration," *Journal of Global Positioning Systems*, vol. 9, no. 1, pp. 33-40, 2010.
- [14] Le Nhat Hieu, and Vinh Hao Nguyen, "Loosely Coupled GPS/INS Integration with Kalman filtering for Land Vehicle Applications," *IEEE International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS)*, pp. 90-95, Ho Chi Minh City, Nov. 2012.
- [15] YanLing Hao, et al, "Adaptive Extended Kalman filtering for SINS/GPS Integrated Navigation Systems," *IEEE International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization(CSO)*, vol. 2, pp. 192-194, Apr. 2009.
- [16] Qingsheng Kong, Shenglei Xu, and Sang-sun Lee, "Using PDOP to Estimate Kalman Filter's Measurement Noise Covariance for GPS Positioning," *International Conference on Traffic and Transportation Engineering(ICTTE)*, 2012
- [17] Yuan-Xi Yang, Hai-bo He, and Guo-chang Xu, "Adaptively Robust filtering for Kinematic Geodetic Positioning," *Journal of Geodesy*, vol.75, no. 2-3, pp. 109-116, 2001.

- [18] Heiner Kuhlmann, "Kalman-filtering with Coloured Measurement Noise for Deformation Analysis." *Proceedings of the 11th FIG Symposium on Deformation Measurements*, Santorini, Greece, 2003.
- [19] S. Godha and M. E. Cannon, "Integration of DGPS with a Low Cost MEMS-based Inertial Measurement Unit (IMU) for Land Vehicle Navigation Application," *ION GPS-05*, Sep. 2005.
- [20] Sunder Ram Krishnan and Chandra Sekhar Seelamantula, "On the Selection of Optimum Savitzky-Golay filters," *IEEE transactions on signal processing*, vol 61, no. 1-4, pp. 380-391, 2013.
- [21] Ronald W Schafer, "What is a Savitzky-Golay filter?," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 28, no. 4, pp.111-117, 2011.
- [22] Ronald W Schafer, "On the Frequency-Domain properties of Savitzky-Golay filters," *Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop (DSP/SPE)*, 2011.
- [23] Phillip Barak, "Smoothing and Differentiation by an Adaptive-degree Polynomial filter," *Analytical Chemistry*, vol. 67, no. 17, pp. 2758-2762, 1995.
- [24] Katkovnik Vladimir, "Adaptive local Polynomial Periodogram for Time-varying Frequency Estimation." *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 329-332, Paris, Jun. 1996.
- [25] Jianwen Luo, et al, "Properties of Savitzky-Golay Digital Differentiators," *Journal of Digital Signal Processing*, vol 15, no. 2, pp. 122-136, 2005.
- [26] L. Li and H. Kuhlmann, "A Study on the Comparison of Colored Noise Reduction Performance in the GPS Real-time Series Based on FIR filter, Kalman filter with Shaping filter and Sequential Algorithm," *International conference on*

- engineering surveying*, Bratislava, Slovakia, 2008.
- [27] Xiaochuan Zhao, et al, "An Improved Adaptive Kalman filtering Algorithm for Advanced Robot Navigation System Based on GPS/INS," *International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, Beijing, Aug. 2011.
- [28] Yuanxi Yang and Weiguang Gao, "An Optimal Adaptive Kalman filter," *Journal of Geodesy*, vol. 80, no. 4, pp.177-183, 2006.
- [29] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton university press, 1999.
- [30] Eduardo Nebot and S. Scheduling, *Navigation System Design*, Lecture Notes, May 2005.
- [31] Salah Sukkariéh, *Low cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles*, Diss. The University of Sydney, 2000.
- [32] Eun-Hwan Shin, *Estimation Techniques for Low-cost Inertial Navigation*, UCGE report 20219, 2005.
- [33] Isaac Skog, *A Low-cost GPS Aided Inertial Navigation System for Vehicular Applications*, Master's thesis, Royal Institute of Technology, Sweden, Mar. 2005, IR-SB-EX-0506.
- [34] Adrian Schumacher, *Integration of a GPS aided Strapdown Inertial Navigation System for Land Vehicles*, Master's thesis, Royal Institute of Technology, Sweden, Mar 2006, XR-EE-SB 2006:006.
- [35] Jean-Marie Zogg, *GPS:Essentials of Satellite Navigation : Compendium : Theorie and Principles of Satellite Navigation, Overview of GPS/GNSS Systems and Applications*, 2009.
- [36] J. Fan, *Local Polynomial Modelling and its Applications*, CRC Press, vol. 66, 1996.

- [37] Gregory G. Slabaugh, *Computing Euler angles from a Rotation Matrix*, 1999,  
available from [http://home.comcast.net/~greg\\_slabaugh/publications/euler.pdf](http://home.comcast.net/~greg_slabaugh/publications/euler.pdf)
- [38] 微控科技 <http://www.waveconn.com.tw/front/bin/home.phtml>
- [39] 蘋果公司 iPhone5 規格 <http://www.apple.com/tw/iphone/specs.html>
- [40] Analog device 公司十軸慣性儀 ADIS 16480 規格  
[http://www.analog.com/static/imported-files/data\\_sheets/ADIS16480.pdf](http://www.analog.com/static/imported-files/data_sheets/ADIS16480.pdf)

