

功能梯度厚板之應力奇異性分析

研究生：張明儒

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系博士班

中文摘要

功能梯度材料(functionally graded material, 簡稱 FGM)是指由兩種或多種材料經由材料結構、性能與組成的連續變化，來達到所要求的功能性，其材料性質分佈為某一空間座標的函數。材料性質的連續性不僅強化了材料本身的強度、韌性及耐高溫性，亦使其內部界面消除。解決傳統層狀複合材料容易在層與層的界面上產生脫離破壞之現象。因此，在近二十幾年來，功能梯度材料被廣泛應用於各種領域，如電子，化學，光學，生醫科技，航太和機械工程…等等。

各種形狀的板殼元件常被應用在工程結構上，在板結構之設計上，常常會產生尖角或 V 型缺口，而該處即會發生應力奇異之問題。當數值分析具有應力奇異點之結構元件時，該奇異點的特性須被正確之模擬，方能得到準確之解。此論文主要的目的是，推導功能梯度材料厚板的漸

近解並探討板幾何所致的應力奇異性；進而將漸近解引入懸臂斜形板和具邊緣裂縫簡支承矩形板之振動分析中，並用以決定具邊緣裂縫矩形板的應力強度因子。本研究主要有三，分述如下：

首先，本研究基於 Reddy 三階板理論，以特徵函數展開法 (eigenfunction expansion) 求解以位移表示的平衡方程式，建構由於邊界條件不連續或尖角之存在所引致功能梯度材料厚板應力奇異之解析漸近解。由特徵方程式可精確地求解各種不同徑向邊界條件下之應力奇異階數。

將所得之漸近解結合多項式建構 Ritz 法之允許函數，精確地獲得懸臂斜形板與具邊緣裂縫簡支承矩形板之振動頻率。漸近解能正確描述尖角處之應力奇異性並能反應於裂縫處位移場及微分不連續現象，加速數值解之收斂。詳細的收斂性分析驗證了此現象。另外，本研究亦仔細探討材料不均勻性對該等板振動之影響。

最後，本研究依漸近解之型式，簡化漸近解結合多項式當作無元素 Galerkin 法之基底函數，分析具邊緣裂縫矩形板並直接依定義求取應力強度因子。經由詳細收斂性分析，驗證此法之可行性。

Analyses of Functionally Graded Thick Plates with Stress Singularities

Student: Ming-Ju Chang

Adviser: Prof. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering

National Chiao-Tung University

The logo of National Chiao-Tung University is a circular emblem with a gear-like outer border. Inside the circle, there is a stylized building and the year '1896' at the bottom. The word 'Abstract' is centered over the logo.

Abstract

In functionally graded materials (FGMs), the volume fractions of two or more materials vary continuously with a function of position in a particular dimension(s) to achieve a required functionality. The continuous change in the microstructure of functionally graded materials gives the materials better mechanical properties than traditional laminated composite materials, which are prone to debonding along the interfaces of layers because of the abrupt changes in material properties across an interface. The gradual changes of material properties in FGMs can be designed for various applications and working environments. Consequently, over the last two decades, FGMs have been extensively explored in various fields including electron, chemistry, optics, biomedicine, aeronautical engineering, mechanical engineering and others.

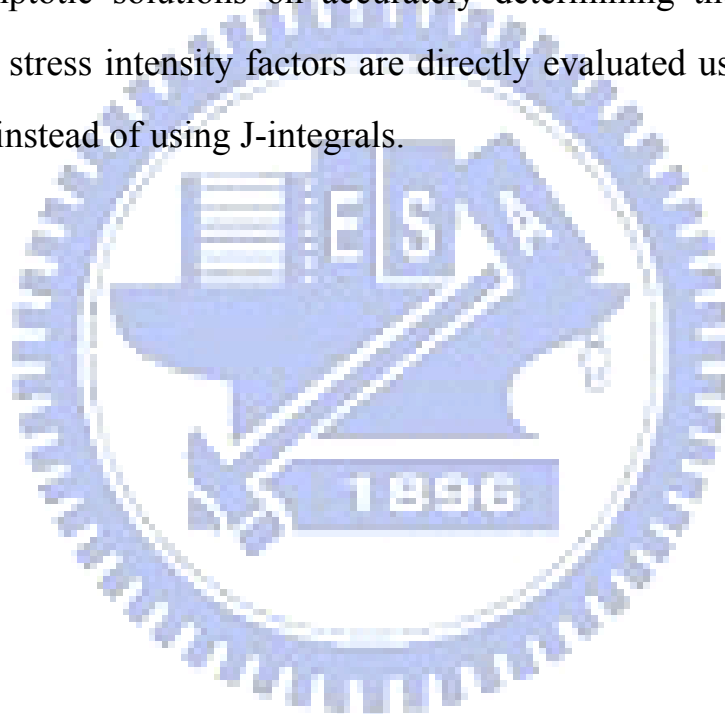
Plates in various geometric forms are commonly employed in practical engineering. Numerous plates of various shapes have a re-entrant corner. Stress singularities are well known to be typically present at the re-entrant corner, and stress singularity behaviors have to be taken into account in order to perform accurate numerical analyses. The main purpose of the dissertation is to develop asymptotic solutions for FGM plates and to investigate the stress singularities induced by geometry of plate. Then, the asymptotic solutions are further employed to analyze the vibrations of cantilevered skewed plates and simply supported plates with side cracks, and to determine stress intensity factors of plates with side cracks.

Asymptotic solutions for FGM plates are first developed to elucidate the stress singularities at a corner of the plate, using third-order shear deformation plate theory. The eigenfunction expansion technique is used to establish the asymptotic solutions by solving the equilibrium equations in terms of displacement functions. The characteristic equations are given explicitly for determining the order of the stress singularity at the vertex of a corner with two radial edges having various boundary conditions.

The asymptotic solutions supplement regular polynomials as the admissible functions in the Ritz method for accurately determining the natural frequencies of cantilevered skewed thick plates and simply supported rectangular plates with side cracks. The asymptotic solutions properly account for the singularities of moments and shear forces at the re-entrant corner and accelerate the convergence of the solution. Detailed convergence studies are carried out for plates of various shapes to elucidate the positive effects of asymptotic solutions on the accuracy of the solution. Frequency parameters

are presented for different aspect ratios, chord ratios, skewed angles, and material nonhomogeneity parameters.

Finally, the asymptotic solutions are used in a mesh free method to determine the stress intensity factors of FGM thick plates with side cracks. A moving least-squares technique with polynomial basis functions and the asymptotic solutions is employed to construct shape functions in a mesh free method. Careful convergence studies are performed to demonstrate the effect of the asymptotic solutions on accurately determining the stress intensity factors. The stress intensity factors are directly evaluated using their original definitions, instead of using J-integrals.



誌謝

今天能夠完成此論文，首先必須感謝恩師 黃炯憲教授於論文研究上之指導，從碩士班的兩年到博士班的五年，在學業和生活各方面之諄諄教誨與照顧。不僅讓我在研究方法與態度上成長許多，更重要的是培養了獨自面對問題的勇氣，以及解決問題的能力。在此，獻上我最誠摯的感謝。於論文口試期間，承蒙 吳致平老師、胡宣德老師、鄭復平老師、劉俊秀老師與洪士林老師對此論文提供諸多寶貴的意見，使此論文更臻完備，在此至上最由衷的敬意。

在學期間，感謝研究室所有的學長、學弟們在生活及學業上的陪伴與勉勵，讓我在面臨不同的難題時，能迎刃而解，僅致衷心謝意。

最後，僅將本論文獻給我最摯愛的父母、哥哥、妹妹及親愛的老婆穎菁，感謝你們於求學歷程上所給予最大的支持與鼓勵，讓我能夠毫無罣礙全心全意的作研究。特別是老婆，從認識到現在已經七年了，雖然我們聚少離多，但妳的關懷與體貼，使我在博士班求學生涯能夠多一份勇氣與堅持。願與你們分享我獲得博士學位這份的榮耀。

明儒 2008.10.13

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	iii
誌謝.....	vi
目 錄.....	vii
表目錄.....	xi
圖目錄.....	xii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.2.1 板理論之幾何應力奇異行為.....	2
1.2.2 懸臂斜形板與具邊緣裂縫矩形板之振動分析.....	5
1.2.3 板之應力強度因子.....	8
1.3 研究方法.....	13
1.4 論文架構.....	13
第二章 角函數與應力奇異性.....	15
2.1 建構平衡方程式.....	15
2.1.1 位移場與應變場.....	15

2.1.2	材料組成律	16
2.1.3	力與位移分量之關係	17
2.1.4	平衡方程式	18
2.2	漸近解推導	22
2.3	特徵方程式與角函數	27
2.4	應力奇異性分析	34
第三章	振動分析	37
3.1	應變能與動能	37
3.2	利用Ritz法求解FGM板之自然振動頻率	41
3.3	允許函數之建構	44
3.3.1	懸臂斜形板	44
3.3.2	具邊緣裂縫簡支承矩形板	48
3.4	收斂性分析	53
3.4.1	均質厚板	54
3.4.2	懸臂斜形板	55
3.4.3	具邊緣裂縫簡支承矩形板	56
3.5	結果與討論	57
3.5.1	懸臂斜形板	57
3.5.2	具邊緣裂縫簡支承矩形板	60

第四章	無元素Galerkin法之應用.....	62
4.1	移動最小平方差法建構形狀函數.....	62
4.1.1	基本原理	62
4.1.2	權重函數	66
4.2	勁度矩陣與外力矩陣.....	67
4.3	應力強度因子.....	68
4.4	收斂分析.....	71
4.4.1	受面內載重	72
4.4.2	受面外載重	73
4.5	數值結果.....	74
4.5.1	受面內載重	74
4.5.2	受面外載重	76
第五章	結論與建議.....	78
5.1	結論.....	78
5.1.1	漸近解與應力奇異性	78
5.1.2	振動分析	78
5.1.3	應力強度因子	79
5.2	建議.....	80
	參考文獻.....	81

附錄 一 90

附錄 二 93



表目錄

表 2.1	各種不同邊界條件之特徵方程式.....	99
表 2.2	各種不同邊界條件之角函數.....	101
表 3.1	近似均質懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析	109
表 3.2	近似均質具邊緣裂縫矩形厚板無因次化頻率($\bar{\Omega}$)之收斂性分析	110
表 3.3	懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析.....	111
表 3.4	懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析.....	112
表 3.5	具邊緣裂縫矩形厚板無因次化頻率($\bar{\Omega}$)之收斂性分析.....	113
表 3.6	懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω).....	114
表 3.7	懸臂梯形厚板無因次化頻率(Ω).....	115
表 3.8	懸臂三角形厚板無因次化頻率(Ω).....	116
表 3.9	具邊緣裂縫矩形厚板無因次化頻率($\bar{\Omega}$).....	117
表 4.1	具邊緣裂縫矩形板受面內載重的 \bar{K}_{N-I} 與 \bar{K}_{M-I} 值.....	118
表 4.2	具邊緣裂縫矩形板受面外載重的 $\bar{\bar{K}}_{N-I}$ 與 $\bar{\bar{K}}_{M-I}$ 值.....	119

圖目錄

圖 1.1 懸臂斜形板幾何圖形及座標系標.....	121
圖 1.2 具邊緣裂縫之矩形板幾何圖形.....	122
圖 2.1 座標系統與扇形板之正位移分量.....	123
圖 2.2 CF-CC-FF特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化.....	124
圖 2.3 S(I)- S(I)特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化.....	125
圖 2.4 S(I)- S(II)特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化.....	127
圖 2.5 S(I)-C特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化.....	128
圖 2.6 S(I)-F特徵值取實部之最小值誤差隨扇形角之變化.....	129
圖 2.7 S(II)-F特徵值取實部之最小值誤差隨扇形角之變化.....	130
圖 3.1 卡氏座標與極座標之轉換關係.....	131
圖 3.2 體積比例參數($V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^m$)隨厚度方向之變化.....	132
圖 4.1 受面內載重之邊緣裂縫矩形板.....	133
圖 4.2 受面外載重之邊緣裂縫矩形板.....	134
圖 4.3a 裂縫破壞型式—張開型.....	135
圖 4.4 節點分佈示意圖.....	136
圖 4.5 $DLI/ALI=0.4$ 近似均質板受面內載重的 K_{N-I} 之收斂性分析.....	137
圖 4.6 $DLI/ALI=0.1$ 近似均質板受面內載重的 K_{N-I} 之收斂性分析.....	138

圖 4.7	具邊緣裂縫矩形板受面內載重的 \bar{K}_{N-I} 之收斂性分析	139
圖 4.8	具邊緣裂縫矩形板受面內載重的 \bar{K}_{M-I} 之收斂性分析	140
圖 4.9	$DL2/AL2=0.5$ 近似均質板受面外載重的 K_{M-I} 之收斂性分析	141
圖 4.10	具邊緣裂縫矩形板受面外載重的 $\bar{\bar{K}}_{N-I}$ 之收斂性分析	142
圖 4.11	具邊緣裂縫矩形板受面外載重的 $\bar{\bar{K}}_{M-I}$ 之收斂性分析	143



第一章 緒論

1.1 研究動機

日本的研究團隊在 1980 年代中期開始發展功能梯度材料 (functionally graded material, 簡稱 FGM), 並提出其製造理論與技術(Niino 和 Maeda 【1990】)。FGM 是一種由不同材料(如陶瓷和金屬)依照不同比例組合而成的複合材料, 其材料組成與結構所呈現的連續性, 不僅強化了材料本身的強度、韌性及耐高溫性, 亦使其內部界面消除。解決傳統層狀複合材料容易在層與層的界面上產生脫離破壞之現象。因此, 在近二十幾年來, 功能梯度材料被廣泛應用於各種工業領域, 如軍事裝甲車, 渦輪機葉片, 內燃機和機械工具等。

功能梯度材料厚板之材料性質可僅沿厚度方向改變, 即在厚度方向上呈現非均質性。板殼元件是工程結構上常見的一種構件, 在板結構之設計上, 常常會產生尖角或 V 型缺口, 而該處即會發生應力奇異之問題。若數值解能正確描述尖角處之應力奇異行為, 將加速該解之收斂性並提高準確度(Leissa 等人 【1993】; Huang 等人 【2005】)。因此, 本研究即首先依 Reddy 三階板理論探討 FGM 厚板因幾何所致之應力奇異行為; 並進而將該成果引入數值分析法, 分析具有應力奇異厚板之振動與靜力反應。

1.2 文獻回顧

1.2.1 板理論之幾何應力奇異行為

在設計板結構時，應力奇異點常是破壞之起點。通常奇異點可能發生於：(1) 幾何形狀不平滑處如邊界條件或厚度之不連續、尖角、或是裂縫；(2) 載重點處如集中力、集中彎矩或載重強度之急遽改變；(3) 材料變化處如材料性質差異過大(England 【1971】；Leissa 【2001】)。

文獻中已有了許多關於均質板由形狀幾何與材料所引起應力奇異之文章，但大多數以古典薄板理論或平面線彈性理論為主。Williams 【1952】首先分析均質等向扇形板，探討由邊界條件所引起之應力奇異解問題；其結果顯示不同邊界條件及扇形角將產生不同應力奇異階數；例如，兩邊徑向皆為自由端(free-free)與固定端(clamped-clamped)之案例，扇形角大於 180° 時將引起應力奇異性；而邊界為固定端-自由端(clamped-free)之情況下，應力奇異性將在扇形角大於 63° 時發生。Williams 及 Chapkis 【1958】擴展 Williams 【1952】之研究至極正向性薄板問題(polarly orthotropic plate)。Hein 和 Erdogan 【1971】，Bogy 和 Wang 【1971】應用 Mellin 轉換，探討雙材料(bi-material)楔形區域之應力奇異行為。Dempsey 和 Sinclair 【1979】以一新 Airy 應力函數求解等向板受拉力所引致之應力奇異解。Ting 和 Chou 【1981】應用 Stroh 【1962】法求解異向性(anisotropic)楔

形板受拉力之應力奇異問題。Ojikutul 等人【1984】則探討層狀複合薄板之應力奇異行為。Ma 和 Hour【1989, 1990】對於不同異向性楔形的反平面(antiplane)應變問題，以 Mellin 轉換計算應力奇異階數，其應力奇異性的階數一定是實數，此結果不同於面內(inplane)的案例。複數函數(complex function)亦可用來解應力奇異問題，如 Chen 和 Norio【1993】便以複數函數解雙材料楔形結構界面之奇異特徵根。Pageau 等人【1995】分析由三種彈性且等向性材料接合的楔形物體之應力奇異階數中，發現不論材料之間是否接合(bonded or disbonded)，三種材料組成的楔形體之應力奇異性都遠比兩種材料者大。Sinclair【2000】求解受彎矩之彈性角板(angular plate)，於各種齊性(homogeneous)與非齊性(inhomogeneous)邊界條下之應力奇異解，此處之應力奇異性含對數項所造成(即 $\ln r$, as $r \rightarrow 0$)者，不同於 Williams【1952】之應力奇異解。Mikhailov 和 Namestnikova【2000】將彈性楔形板接合而成 V-型或 T-型之空間結構的應力奇異問題化簡成一邊界值問題，並以 Kolosov-Muskhelishvili 複數函數為應力奇異漸近解，再利用 Mellin 轉換解之。

探討厚板理論中幾何所引致應力奇異行為之文獻並不多見，其中又以 Mindlin 一階剪力板居多。Burton 和 Sinclair【1986】利用應力位能函數探討由邊界條件所引起之應力奇異解，但此解並沒有考慮剪力造成的奇異性。Huang 等人【1994】針對兩邊徑向簡支撐扇形板，發展出一正

確解析解，其解含有原來及修正後之 Bessel 函數。Huang 【2002a】使用特徵函數展開法進一步推導雙材料楔形複合板之應力奇異解，並探討雙材料界面接合處及尖角處之奇異現象。Marczak 和 Creus 【2002】以解析漸近展開法(analytic asymptotic expansions)推導二維彈性及 Mindlin's 板彎矩問題之基本漸近解，將其解應用於邊界元素法(BEM)之奇異積分，並進一步分析該解奇異階數。Huang 【2003】利用特徵函數展開法求解扇形板各種徑向邊界條件組合之應力奇異解，其奇異解具有彎矩奇異性及剪力奇異性。Huang 【2002b, 2004】進一步擴展其對 Mindlin 板奇異解之探討至 Reddy 三階板理論及更高階板理論。以上解均針對 isotropic 且區域均勻材料。

探討功能梯度材料內部之裂縫問題，絕大部分文獻是以平面或三維彈性理論，但其材料性質的梯度變化是沿平面方向，而非厚度方向;例如，Delale 和 Erdogan 【1983】以及 Erdogan 【1985】以平面彈性原理，利用積分方程式解決因外力載重造成的裂縫問題;Ozturk 和 Erdogan【1992】以奇異積分方程式，探討異向性功能梯度材料的第一型裂縫問題;Noda 和 Jin 【1993】，Jin 和 Noda 【1993】則是考慮熱載重;Ozturk 和 Erdogan 【1995】研究兩均勻介質中黏附一層功能梯度材料，受扭轉作用下的第三型裂縫問題。

過去尚未有文獻考慮功能梯度材料厚板之幾何所引致應力奇異行

為。Huang 和 Chang 【2007】首先以古典薄板理論探討 FGM 薄板之幾何所致應力奇異性。本研究將首次利用 Reddy 三階板理論探討 FGM 厚板由邊界條件及形狀幾何所引致之奇異應力現象。利用特徵函數展開法，求解 FGM 厚板控制方程式之漸近解，推導控制該類板應力奇異階數之特徵方程式。並進一步探討不同邊界條件組成、V 型缺口角度大小及功能梯度材料特性對應力奇異階數之影響。

1.2.2 懸臂斜形板與具邊緣裂縫矩形板之振動分析

懸臂斜板常被應用於航太工業(如飛機翼或導向飛彈之平衡翼)或大眾運輸工具，故懸臂斜板之振動問題是一個相當重要的研究課題。懸臂之邊界條件導致該問題沒有正確解(exact solution)，許多數值方法(如有限元素法、有限差分法及 Ritz 法)常用於分析該類板。依據古典薄板理論，Leissa 【1969, 1977, 1981, 1987】收集並回顧了早期分析探討此類板之文獻，而近期相關研究則可參考 McGee 等人 【1992a, 1992b】之文章。由於奇異應力點之存在，以上文獻用了許多不同的方法，所得到之結果卻有明顯的差異。

古典薄板理論並沒有考慮到剪力變形(shear deformation)及旋轉慣量(rotary inertia)之影響，但此兩因素對厚板或高階振動頻率之薄板而言，卻非常重要。然而，使用考慮剪力變形及旋轉慣量之板理論，於分析斜形

板之文獻並不多見。McGee 和 Butalia 【1992c】利用高階板理論及有限元素法，分析懸臂斜梯形及三角形板之振動。Karunasena 等人 【1996】則以 Mindlin 板理論，利用 pb-2 Rayleigh-Ritz 法分析懸臂斜三角形板。Kanaka 和 Hinton 【1980】及 Liew 等人 【1993】依據 Mindlin 板理論，分別利用有限元素法和 pb-2 Rayleigh-Ritz 法分析懸臂斜平行四邊形板。Huang 等人 【2005】亦依據 Mindlin 板理論，利用 Ritz 法並考慮固定端 reentrant corner 處之應力奇異性，分析懸臂斜板(含平行四邊形、梯形及三角形)之自然振動頻率。McGee 和 Leissa 【1991】以 Ritz 法三維彈性理論，探討懸臂斜平行四邊形板之振動行為。McGee 和 Butalia 【1994】則以三種剪力厚板理論，並使用 9 個節點之 Lagrangian 等參數元素分析斜板振動行為。

利用古典薄板理論，McGee 等人 【1992a, 1992b】為了獲得更精確的懸臂斜形板振動頻率，於數值近似法中引入應力奇異函數。但是，上述關於懸臂斜三角形、梯形、平行四邊形厚板之文獻，均沒有考慮應力奇異性。McGee 和 Butalia 【1994】藉由有限元素法，分析懸臂斜形板之收斂性中發現，數值結果的收斂性有隨斜角的增加變差。另外，Karunasena 等人 【1996】亦承認利用 pb-2 Rayleigh-Ritz 法分析懸臂斜三角形 Mindlin 板所得之結果，在大斜角時並不精確；因為，沒有將應力奇異性考慮進去。因此，實有必要利用更準確之數值法再重新檢驗文獻上有關懸臂斜

形厚板之結果。

利用半解析(semi-analytical)法求解直線裂縫與邊界垂直之簡支承矩形板之振動問題。Lynn 和 Kumbasar【1967】用 Green 函數來表示板之位移分量，可得到齊性 Fredholm 第一型積分方程，而 Stahl 和 Keer【1972】簡化齊性 Fredholm 第二型積分方程來決解同樣的問題。Hirano 和 Okazaki【1980】針對一組相對邊界是簡支承之裂縫矩形板，以 Levy 解的形式發展一方法，且邊界條件利用加權餘數法的方式滿足。Solecki【1983】利用 Navier 解的形式建構一解。

於數值方法中，最常利用有限元素法與 Ritz 法分析具裂縫矩形板之振動問題，而相關文獻有：Qian 等人【1991】為了發展一有限元素的解法，對裂縫尖端的元素，經由對應力強度因子的積分，建構元素的勁度矩陣。Yuan 和 Dickinson【1992】將一矩形板分成幾可區塊，在區塊連接邊界是以加入來彈簧處理；因此，就可用 Ritz 法中的正規允許函數來求解，不必用特別的函數來描述裂縫。Krawczuk【1993】則提出類似 Qian 等人【1991】的解決方式，唯一的是對裂縫尖端元素勁度矩陣，採用封閉形式(closed form)的積分。

以上文獻回顧顯示，尚未有以 Reddy 三階板理論針對等向均質材料，分析懸臂斜形厚板或具邊緣裂縫簡支承矩形厚板之相關研究，更不用論

是針對功能梯度材料板之研究。本研究此部分將針對功能梯度材料厚板，引入第二章漸進解所得之結果於 Ritz 法中，加速數值解之收斂，分析懸臂斜板及具邊緣裂縫簡支承矩形板之振動問題。並進一步探討功能梯度材料板與一般等向均質板振動行為之差異。

1.2.3 板之應力強度因子

應用數值方法求解含裂縫問題，常用之方法有：(1) 有限元素法(Finite Element Method)：例如，Parks 【1974】透過 J-積分來求取能量釋放率 (energy release rate)，再以能量釋放率來計算應力強度因子。Menandro 等人 【1995】設計一裂縫尖端最佳化網格(optimal mesh)，並以位移外插法 (displacement extrapolation)於四種不同案例中，求取開裂模式 I、II 之應力強度因子 K_I 及 K_{II} 。(2) 有限差分法(Finite Difference Method)：例如，Altus 【1984】以一受彎矩且含 Penny 型裂縫之圓板及三種由開裂模式 I 所構成之結構體為例，求解其裂縫問題，並以二項以上的 William 級數計算應力強度因子。Chen 【2000】求取圓柱內外表面周圍裂縫之應力強度因子；其研究中發現計算應力強度因子時，圓柱長短對於實心圓柱影響很大，而空心圓柱則以內外徑比之大小為最重要之因素。Dorogoy 和 Banks-Sills 【2004】針對一承受剪力且考慮磨擦力的界面裂縫(interface crack)，求取應力強度因子，並將其數值結果與解析解(Nemat-Nasser 和

Horii 【1982】)及半解析解(Comninou 和 Dundurs, 【1980】)作比較。(3) 邊界元素法(Boundary Element Method, 簡稱 BEM): 例如 Cisilino 和 Aliabadi 【1999】利用邊界元素法, 以線性與非線性破壞力學為基礎, 分析三維裂縫之成長, 並以 J-積分求得應力強度因子。Castor 和 Telles 【2000】以 Green's function 探討 2-D 及 3-D 的裂縫問題。(4) 無網格法(Mesh free method): 例如, Belytschko 等人 【1995】在無元素 Galerkin (Element Free Galerkin, 簡稱 EFG)法中, 以移動最小平方差法(moving least-square, 簡稱 MLS)和節點為基礎, 計算靜態及動態下的裂縫成長。Lu 等人 【1995】不同於一般無元素 Galerkin 法之處在於使用高階面積公式(higher-order quadrature formulas)積分, 明顯地增加了無元素 Galerkin 法之精確度, 此外, 並利用光滑質點流體動力法(smooth particle hydrodynamics)建構移動最小平方差法之基底函數, 以避開虛的奇異模態(spurious singular modes)。Fleming 等人 【1997】在無元素 Galerkin 中, 加入裂縫漸近解並利用增強基底函數, 分析二維裂縫之問題。

傳統上, 有限元素法較常用於求解裂縫問題, 但是當裂縫長度改變或延伸時, 需將網格及元素重新切割。然而, 重建網格不僅增加工作量, 多切割的網格亦會造成計算量的變大。由於有限元素法處理板問題(依薄板理論或 Reddy 三階板理論)時, 形狀函數需要滿足 C^1 type 連續, 大大增加了形狀函數的複雜性, 而無網格法在建構解之過程, 並沒有如有限元

素法需建立大量之網格數且須注意相鄰元素之連續性(connectivity)要求；因此，使試函數(trial functions)之選取更有多樣性及方便性。另外，於無元素 Galerkin 法中，本研究亦將提出一法使得位移邊界條件可以被滿足，而不須使用傳統常用之 Lagrange multiplier method 或 penalty method。

利用數值分析法得位移及應力場後，進一步求應力強度因子，有下列幾種常用方法：(1) 應力外插(stress extrapolation)：Kim 和 Eberhardt 【1997】提出以線性及二階應力外插求取含邊緣裂縫厚板在二維裂縫模式 I 與模式 II 之應力強度因子 K_I 、 K_{II} ；其數值結果顯示， K_I 和 K_{II} 分別以線性及二階應力外插法可得到最佳值。(2) 位移外插(displacement extrapolation)：以位移外插法估算裂縫開裂模式 I 的應力強度因子 K_I 之文獻可參考 Guinea 等人 【2000】。該文章亦探討元素大小、形狀以及網格配置等三項因素對 K_I 的數值結果所造成的影響。Fujisaki 和 Aliabadi 【1997】依據邊界元素法以修正的位移外插法求取應力強度因子。(3) 路徑無關積分法：Lin 和 Smith 【1999】與 Dolbow 等人 【2000】分別利用二維及三維有限元素分析，以 J 積分求出不同開裂模式的應力強度因子。Lin 和 Smith 【1999】歸納出影響應力強度因子精確度最重要的三個因素，分別為裂縫形狀(crack front shape)，網格的正交性(mesh orthogonality)及路徑無關積分 J-積分。Dolbow 等人 【2000】對於裂縫發

生幾何不連續的現象，以一跳躍函數(jump function)和漸近解來描述，並進一步探討 Mindlin-Reissner 板中裂縫及裂縫成長的問題。(4) 直接定義:Yuan 和 Yang 【2000】根據 Reissner 板理論探討一異向性板(anisotropic plate)受到彎矩，扭轉及橫向剪力時，所產生的漸近解，應力強度因子以及 T-應力，其應力強度因子 K_I 、 K_{II} 及 K_{III} 之定義來自於 Irwin 【1957】所推導的結果。Mohammed 和 Liechti 【2001】以直接定義之 K_I 、 K_{II} ，利用含強化元素之有限元素法結合 Betti's law 分析雙材料界面處應力奇異問題。

目前祇有少許文獻探討具裂縫的功能梯度材料物體，以線彈性理論分析者均假設平面應力、平面應變或三維彈性理論，與本研究非均質板不同處在於材料性質並非在厚度方向呈現非均勻。Erdogan 【1995】於文章中回顧了幾種基本的功能梯度材料物體破壞力學問題，如疲勞、潛變、裂縫腐蝕及不穩定破裂(fracture instability)等對裂縫成長的影響，並對該類問題求解應力強度因子。Ozturk 和 Erdogan 【1997, 1999】利用積分方程式，針對無限大非均質正向性物體(inhomogeneous orthotropic medium)(包括 graded 及 oriented 材料)，分析開裂模式 I 及混合開裂模式之應力強度因子；Ozturk 和 Erdogan 【1999】將邊界值問題簡化成一積分方程式系統，並探討應變能釋放率(strain energy release rate)，應力強度因子及裂縫開孔大小之間的關係。Gu 等人 【1999】利用傳統有限元素

法，引入一最佳網格於功能梯度材料物體之裂縫尖端附近，並以 J-積分求取應力強度因子；此法之優點即不須輸入材料梯度及材料性質。Anlas 等人 【2000】對於功能梯度材料具有開裂模式 I 的裂縫問題，以傳統有限元素法，利用應變能釋放率與路徑無關 J-積分，解出含邊緣裂縫板之應力強度因子，並與 Erdogan 和 Wu 【1997】解析解作比較。Chen 等人 【2000】利用無網格 Galerkin 法分析具有裂縫的功能梯度材料物體，並探討材料非均勻性對標準 J-積分與修正 J-積分的影響；其文獻中指出以標準 J-積分會失去路徑無關積分的特性，而使用修正 J-積分則可彌補此項缺點，以利得到更高的精確度。Marur 和 Tippur 【2000】以傳統有限元素法分析含邊緣裂縫之平面彈性問題，並探討材料梯度和裂縫位置對複數應力強度因子及能量釋放速率之影響，再將各種破裂力學參數的數值結果與均質材料及雙材料(bi-material)比較。Kim 和 Paulino 【2002】以傳統有限元素法分析正向性(orthotropic)功能梯度材料之裂縫問題，並以二維裂縫開裂模式 I 及混合開裂模式計算應力強度因子。Walters 【2004】在力與熱耦合作用的情況下，利用有限元素法探討 3-D 功能梯度材料表面半橢圓的第一型裂縫問題。

文獻回顧顯示，研究功能梯度材料裂縫問題者，大多局限於二維彈性平面或三維彈性問題，尚未有利用厚板理論探討對具有裂縫功能梯度材料厚板之應力強度因子。本研究將針對 FGM 厚板，發展一無元素

Galerkin 法，其基底函數含第二章之奇異漸近解，分析具裂縫之矩形板，依定義直接求取其應力強度因子(stress intensity factors)。

1.3 研究方法

考慮功能梯度材料厚板，原本有多種厚板理論可供使用，在本研究中將利用 Reddy 三階板理論(Reddy 【1999】)，其理由如下：(1) 若用 Mindlin 一階剪力板理論(Mindlin 和 Deresiewicz 【1954】)至功能梯度材料厚板，則該理論中所需之剪力修正因子(shear correction factor)，將不知取何值為恰當。(2) 若用更高階板理論，則位移函數更多，將增加求解之困難度。

本研究以 Reddy 三階板理論探討功能梯度材料厚板因邊界條件而引起之奇異應力行為；並改進現有數值分析方法分析具有應力奇異點問題之缺點，引入應力奇異解於數值分析，探討懸臂斜形板(Cantilevered skewed plate)(圖 1.1)及具邊緣裂縫簡支承矩形板(A simply supported rectangular plate with a side crack) (圖 1.2)之振動行為及計算具邊緣裂縫矩形板的應力強度因子。

1.4 論文架構

本論文共分為五章，其內容如下：

第一章 說明本研究的動機與目的及其所使用研究方法，並回顧相關文獻。

第二章 闡述應力奇異漸近解之推導，並探討各種不同邊界條件下之應力奇異階數及其對應漸近解函數。

第三章 利用 Ritz 法，將第二章所得之結果引入允許函數中，分析懸臂斜板 (含平行四邊形、三角形、及梯形) 及具邊緣裂縫簡支承矩形板之振動問題。

第四章 發展無元素 Galerkin 法，結合第二章所得之結果，並依定義直接計算具裂縫矩形板之應力強度因子。

第五章 本研究之結論與建議。



第二章 角函數與應力奇異性

本章主要利用 Reddy 【1999】三階板理論，分析功能梯度材料厚板具有幾何應力奇異點之行為，並深入探討非均質材料的材料性質對應力奇異性階數所造成的影響。所獲得結果，將應用至第三章的振動分析與第四章的應力強度因子計算；期使獲得較準確之數值解。

2.1 建構平衡方程式

2.1.1 位移場與應變場

Reddy三階板理論於圓柱座標系統之位移場 (參看圖 2.1)：

$$\bar{u}(r, \theta, z) = u_0(r, \theta) + z[\psi_r(r, \theta) - C_1 z^2(\psi_r(r, \theta) + w_{,r}(r, \theta))] , \quad (2.1)$$

$$\bar{v}(r, \theta, z) = v_0(r, \theta) + z[\psi_\theta(r, \theta) - C_1 z^2(\psi_\theta(r, \theta) + \frac{1}{r} w_{,\theta}(r, \theta))] , \quad (2.2)$$

$$\bar{w} = w(r, \theta) , \quad (2.3)$$

其中， \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 分別為圓柱座標中於 r 、 θ 及 z 方向之位移分量； u_0 、 v_0 、 w 則為平板中平面在圓柱座標中於 r 、 θ 及 z 方向之位移； ψ_r 、 ψ_θ 分別為徑向與環向撓曲造成中平面上之轉角；下標“ β ”代表對自變數 β 之微分； $C_1 = \frac{4}{3h^2}$ ， h 為板之總厚度。

線性應變與位移關係為

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(0)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{r\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{r\theta}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \gamma_{r\theta}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (2.4a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{rz}^{(0)} \\ \gamma_{\theta z}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{rz}^{(2)} \\ \gamma_{\theta z}^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad (2.4b)$$

其中， $\varepsilon_{rr}^{(0)} = u_{0,r}$ ， $\varepsilon_{rr}^{(1)} = \psi_{r,r}$ ， $\varepsilon_{rr}^{(3)} = -C_1(\psi_{r,r} + w_{,rr})$ ， $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{r}(u_0 + v_{0,\theta})$

$\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{r}(\psi_r + \psi_{\theta,\theta})$ ， $\varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} = -C_1 \frac{1}{r}(\psi_{\theta,\theta} + \frac{1}{r}w_{,\theta\theta} + \psi_r + w_{,r})$ ，

$\gamma_{r\theta}^{(0)} = v_{0,r} - \frac{1}{r}v_0 + \frac{1}{r}u_{0,\theta}$ ， $\gamma_{r\theta}^{(1)} = \psi_{\theta,r} + \frac{1}{r}\psi_{r,\theta} - \frac{1}{r}\psi_\theta$ ，

$\gamma_{r\theta}^{(3)} = -C_1 \frac{1}{r}[-\psi_\theta - \frac{2}{r}w_{,\theta} + \psi_{r,\theta} + 2w_{,r\theta} + r\psi_{\theta,r}]$ ， $\gamma_{rz}^{(0)} = \psi_r + w_{,r}$ ，

$\gamma_{rz}^{(2)} = -C_2(\psi_r + w_{,r})$ ， $\gamma_{\theta z}^{(0)} = \psi_\theta + \frac{1}{r}w_{,\theta}$ ， $\gamma_{\theta z}^{(2)} = -C_2(\psi_\theta + \frac{1}{r}w_{,\theta})$ ，

$C_2 = 3C_1$ 。 (2.5)

2.1.2 材料組成律

功能梯度材料參數可依照任意連續函數而變化，但大多數的文獻都以指數函數或冪級數描述。本研究考慮功能梯度材料厚板之材料性質隨著厚度方向改變，且假設該材料性質可表示成

$$P(z) = P_b + V(z)\Delta P, \quad (2.6)$$

其中， $V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^m$ 為體積比例(volume fraction variation)之表示式； z 為厚度方向的座標($-h/2 \leq z \leq h/2$)； m 為體積比例指數(須為非負數值)，用以控制材料性質沿厚度方向的變化程度； P 代表材料性質，如彈性模數

(E)，剪力模數(G)； P_b 定義為板底面之材料性質， ΔP 則為頂面與底面材料性質之差。當 m 或 ΔP 為 0，則代表均質材料(homogeneous material)。

因此，線性應力與應變關係可表示成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\alpha z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\alpha z} \end{Bmatrix}, \quad (2.7)$$

其中，橫向正應力 σ_{zz} 假設為 0， $E(z)$ 和 $G(z)$ 之定義如式 (2.6)， ν 為波松比且令其為常數(0.3)。

2.1.3 力與位移分量之關係

將各方向應力沿著板厚度方向積分可得合力及合力矩，本文中統稱之「力」(Stress resultants)，定義如下：

$$\begin{Bmatrix} Q_\beta \\ R_\beta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta z} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz, \quad (2.8)$$

$$\begin{Bmatrix} N_\beta \\ M_\beta \\ P_\beta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz, \quad (2.9)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{r\theta} \\ M_{r\theta} \\ P_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz, \quad (2.10)$$

式中 σ_{ij} 是各方向應力； M_β 、 Q_β 及 N_β 分別為 β 向之彎矩、剪力與軸力， P_β 與 R_β 分別為高階軸力與剪力， $M_{r\theta}$ 為扭矩， $P_{r\theta}$ 則為高階扭矩。

2.1.4 平衡方程式

考慮無外力作用下，利用漢米爾頓變分原理(Hamilton Variational Principal)：

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_{r\theta} \delta \varepsilon_{r\theta} + \sigma_{rz} \delta \varepsilon_{rz} + \sigma_{\theta z} \delta \varepsilon_{\theta z}) dA dz = 0, \quad (2.11)$$

可以推導出平衡方程式及邊界條件，如下所示：

$$N_{r,r} + N_{r\theta,\theta} / r + (N_r - N_\theta) / r = 0, \quad (2.12)$$

$$N_{r\theta,r} + N_{\theta,\theta} / r + 2N_{r\theta} / r = 0, \quad (2.13)$$

$$C_1 (P_{r,rr} + \frac{2}{r} P_{r,r} + \frac{1}{r^2} P_{\theta,\theta\theta} - \frac{1}{r} P_{\theta,r} + \frac{2}{r} P_{r\theta,r\theta} + \frac{2}{r^2} P_{r\theta,\theta}) + \frac{\bar{Q}_r}{r} + \bar{Q}_{r,r} + \frac{1}{r} \bar{Q}_{\theta,\theta} = 0, \quad (2.14)$$

$$\bar{M}_{r,r} + \frac{\bar{M}_r}{r} - \frac{\bar{M}_\theta}{r} + \frac{1}{r} \bar{M}_{r\theta,\theta} - \bar{Q}_r = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{r} \bar{M}_{\theta,\theta} + \bar{M}_{r\theta,r} + \frac{2\bar{M}_{r\theta}}{r} - \bar{Q}_\theta = 0, \quad (2.16)$$

於 $\theta=0$ or α ：

$$u_0 = 0 \text{ 或 } N_{r\theta} = 0, \quad v_0 = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0,$$

$$\psi_\theta = 0 \text{ 或 } \bar{M}_\theta = 0, \quad \psi_r = 0 \text{ 或 } \bar{M}_{r\theta} = 0,$$

$$w=0 \text{ 或 } \bar{Q}_\theta + C_1 \left(\frac{2}{r} P_{r\theta} + 2P_{r\theta,r} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta} \right) = 0 ,$$

$$\frac{w_{,\theta}}{r} = 0 \text{ 或 } P_\theta = 0 . \quad (2.17)$$

於 $r=R$:

$$u_0 = 0 \text{ 或 } N_r = 0 , \quad v_0 = 0 \text{ 或 } N_{r\theta} = 0 ,$$

$$\psi_\theta = 0 \text{ 或 } \bar{M}_{r\theta} = 0 , \quad \psi_r = 0 \text{ 或 } \bar{M}_r = 0 ,$$

$$w = 0 \text{ 或 } \bar{Q}_r + C_1 \left(\frac{P_r}{r} + P_{r,r} + \frac{2}{r} P_{r\theta,\theta} - \frac{P_\theta}{r} \right) = 0 ,$$

$$w_{,r} = 0 \text{ 或 } P_r = 0 . \quad (2.18)$$

其中， $\bar{M}_{r\theta} = M_{r\theta} - C_1 P_{r\theta}$ ， $\bar{M}_\beta = M_\beta - C_1 P_\beta$ ， $\bar{Q}_\beta = Q_\beta - C_2 R_\beta$ ，下標 β 定義為 r 或 θ 。

將應力-應變關係(式 (2.7))及應變-位移關係(式(2.4))代入式 (2.8)~式 (2.10)，可得力(Stress resultant)與位移函數之關係如下：

$$N_r = \frac{\bar{D}_0}{r} u_0 + \bar{E}_0 u_{0,r} + \frac{\bar{D}_0}{r} v_{0,\theta} - \frac{C_1 \bar{D}_3}{r} w_{,r} - C_1 \bar{E}_3 w_{,rr} - \frac{C_1 \bar{D}_3}{r^2} w_{,\theta\theta}$$

$$+ \frac{1}{r} (\bar{D}_1 - C_1 \bar{D}_3) \psi_r + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \psi_{r,r} + \frac{1}{r} (\bar{D}_1 - C_1 \bar{D}_3) \psi_{\theta,\theta} , \quad (2.19a)$$

$$N_\theta = \frac{\bar{E}_0}{r} u_0 + \bar{D}_0 u_{0,r} + \frac{\bar{E}_0}{r} v_{0,\theta} - \frac{C_1 \bar{E}_3}{r} w_{,r} - C_1 \bar{D}_3 w_{,rr} - \frac{C_1 \bar{E}_3}{r^2} w_{,\theta\theta}$$

$$+ \frac{1}{r} (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \psi_r + (\bar{D}_1 - C_1 \bar{D}_3) \psi_{r,r} + \frac{1}{r} (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \psi_{\theta,\theta} , \quad (2.19b)$$

$$N_{r\theta} = \frac{\bar{G}_0}{r} u_{0,\theta} - \frac{\bar{G}_0}{r} v_0 + \bar{G}_0 v_{0,r} + \frac{2C_1 \bar{G}_3}{r^2} w_{,\theta} - \frac{2C_1 \bar{G}_3}{r} w_{,r\theta}$$

$$+ (\bar{G}_1 - C_1 \bar{G}_3) \left(\frac{1}{r} (\psi_{r,\theta} - \psi_\theta) + \psi_{\theta,r} \right) , \quad (2.19c)$$

$$Q_r = (\bar{G}_0 - C_2 \bar{G}_2)(\psi_r + w_{,r}) , \quad (2.19d)$$

$$Q_\theta = (\bar{G}_0 - C_2 \bar{G}_2)(\psi_\theta + \frac{1}{r} w_{,\theta}) , \quad (2.19e)$$

$$R_r = (\bar{G}_2 - C_2 \bar{G}_4)(\psi_r + w_{,r}) , \quad (2.19f)$$

$$R_\theta = (\bar{G}_2 - C_2 \bar{G}_4)(\psi_\theta + \frac{1}{r} w_{,\theta}) , \quad (2.19g)$$

$$M_r = \frac{\bar{D}_1}{r} u_0 + \bar{E}_1 u_{0,r} + \frac{\bar{D}_1}{r} v_{0,\theta} - \frac{C_1 \bar{D}_4}{r} w_{,r} - C_1 \bar{E}_4 w_{,rr} - \frac{C_1 \bar{D}_4}{r^2} w_{,\theta\theta} \\ + \frac{1}{r} (\bar{D}_2 - C_1 \bar{D}_4) \psi_r + (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) \psi_{r,r} + \frac{1}{r} (\bar{D}_2 - C_1 \bar{D}_4) \psi_{\theta,\theta} , \quad (2.19h)$$

$$M_\theta = \frac{\bar{E}_1}{r} u_0 + \bar{D}_1 u_{0,r} + \frac{\bar{E}_1}{r} v_{0,\theta} - \frac{C_1 \bar{E}_4}{r} w_{,r} - C_1 \bar{D}_4 w_{,rr} - \frac{C_1 \bar{E}_4}{r^2} w_{,\theta\theta} \\ + \frac{1}{r} (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) \psi_r + (\bar{D}_2 - C_1 \bar{D}_4) \psi_{r,r} + \frac{1}{r} (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) \psi_{\theta,\theta} , \quad (2.19i)$$

$$M_{r\theta} = \frac{\bar{G}_1}{r} u_{0,\theta} - \frac{\bar{G}_1}{r} v_0 + \bar{G}_1 v_{0,r} + \frac{2C_1 \bar{G}_4}{r^2} w_{,\theta} - \frac{2C_1 \bar{G}_4}{r} w_{,r\theta} \\ + (\bar{G}_2 - C_1 \bar{G}_4) (\frac{1}{r} (\psi_{r,\theta} - \psi_\theta) + \psi_{\theta,r}) , \quad (2.19j)$$

$$P_r = \frac{\bar{D}_3}{r} u_0 + \bar{E}_3 u_{0,r} + \frac{\bar{D}_3}{r} v_{0,\theta} - \frac{C_1 \bar{D}_6}{r} w_{,r} - C_1 \bar{E}_4 w_{,rr} - \frac{C_1 \bar{D}_6}{r^2} w_{,\theta\theta} \\ + \frac{1}{r} (\bar{D}_4 - C_1 \bar{D}_6) \psi_r + (\bar{E}_4 - C_1 \bar{E}_6) \psi_{r,r} + \frac{1}{r} (\bar{D}_4 - C_1 \bar{D}_6) \psi_{\theta,\theta} , \quad (2.19k)$$

$$P_\theta = \frac{\bar{E}_3}{r} u_0 + \bar{D}_3 u_{0,r} + \frac{\bar{E}_3}{r} v_{0,\theta} - \frac{C_1 \bar{E}_6}{r} w_{,r} - C_1 \bar{D}_6 w_{,rr} - \frac{C_1 \bar{E}_6}{r^2} w_{,\theta\theta} \\ + \frac{1}{r} (\bar{E}_4 - C_1 \bar{E}_6) \psi_r + (\bar{D}_4 - C_1 \bar{D}_6) \psi_{r,r} + \frac{1}{r} (\bar{E}_4 - C_1 \bar{E}_6) \psi_{\theta,\theta} , \quad (2.19l)$$

$$P_{r\theta} = \frac{\bar{G}_3}{r} u_{0,\theta} - \frac{\bar{G}_3}{r} v_0 + \bar{G}_3 v_{0,r} + \frac{2C_1 \bar{G}_6}{r^2} w_{,\theta} - \frac{2C_1 \bar{G}_6}{r} w_{,r\theta} \\ + (\bar{G}_4 - C_1 \bar{G}_6) (\frac{1}{r} (\psi_{r,\theta} - \psi_\theta) + \psi_{\theta,r}) , \quad (2.19m)$$

其中，

$$\bar{G}_i = \int_{-h/2}^{h/2} G(z) z^i dz , \quad \bar{E}_i = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^i dz , \quad \bar{D}_i = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^i dz , \quad (2.20)$$

當考慮 ν 為定值時，可得

$$\bar{D}_i = \nu \bar{E}_i \quad \text{和} \quad \bar{G}_i = \frac{(1-\nu)}{2} \bar{E}_i, \quad (2.21)$$

將式(2.19a)~式(2.19m)代入式(2.12)~式(2.16)中可得到以位移分量所

表示的平衡方程式如下：

$$\begin{aligned} & \bar{E}_0 \left(-\frac{u_0}{r^2} + \frac{u_{0,r}}{r} + u_{0,rr} + \frac{1-\nu}{2r^2} u_{0,\theta\theta} - \frac{3-\nu}{2r^2} v_{0,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} v_{0,r\theta} \right) \\ & + C_1 \bar{E}_3 \left(\frac{w_{,r}}{r^2} - \frac{w_{,rr}}{r} - w_{,rrr} + \frac{3+\nu}{2r^3} w_{,\theta\theta} - \frac{w_{,r\theta\theta}}{r^2} \right) + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(\frac{\psi_r}{r^2} + \frac{\psi_{r,r}}{r} + \psi_{r,rr} \right) \\ & + \frac{1-\nu}{2r^2} \psi_{r,\theta\theta} - \frac{3-\nu}{2r^2} \psi_{\theta,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} \psi_{\theta,r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \bar{E}_0 \left(\frac{3-\nu}{2r^2} u_{0,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} u_{0,r\theta} - \frac{1-\nu}{2r^2} v_0 + \frac{1-\nu}{2r} v_{0,r} + \frac{1-\nu}{2} v_{0,rr} + \frac{v_{0,\theta\theta}}{r^2} \right) \\ & + C_1 \bar{E}_3 \left(-\frac{w_{,r\theta}}{r^2} - \frac{1+\nu}{2r} w_{,rr\theta} - \frac{w_{,\theta\theta\theta}}{r^3} \right) + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(\frac{3-\nu}{2r^2} \psi_{r,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} \psi_{r,r\theta} \right) \\ & - \frac{1-\nu}{2r^2} \psi_{\theta} + \frac{1-\nu}{2r} \psi_{\theta,r} + \frac{1-\nu}{2} \psi_{\theta,rr} + \frac{\psi_{\theta,\theta\theta}}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & C_1 \bar{E}_3 \left(\frac{u_0 + v_{0,\theta}}{r^3} - \frac{u_{0,r} + v_{0,r\theta}}{r^2} + \frac{2u_{0,rr} + v_{0,rr\theta}}{r} + u_{0,rrr} + \frac{u_{0,\theta\theta} + v_{0,\theta\theta\theta}}{r^3} + \frac{u_{0,r\theta\theta}}{r^2} \right) \\ & + C_1^2 \bar{E}_6 \left(-\frac{w_{,r}}{r^3} + \frac{w_{,rr}}{r^2} - \frac{4w_{,\theta\theta}}{r^4} + \frac{2w_{,r\theta\theta}}{r^3} - \frac{2w_{,rrr}}{r} - \frac{w_{,\theta\theta\theta\theta}}{r^4} - \frac{2w_{,rr\theta\theta}}{r^2} - w_{,rrrr} \right) \\ & + \frac{1-\nu}{2} (\bar{E}_0 - 2C_2 \bar{E}_2 + C_2^2 \bar{E}_4) \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} + \frac{\psi_r}{r} + \psi_{r,r} + \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r} \right) \\ & + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) \left(\frac{\psi_r + \psi_{\theta,\theta}}{r^3} - \frac{\psi_{r,r} + \psi_{\theta,r\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{r,\theta\theta} + \psi_{\theta,\theta\theta\theta}}{r^3} \right) \\ & + \frac{2\psi_{r,rr} + \psi_{\theta,rr\theta}}{r} + \frac{\psi_{r,r\theta\theta}}{r^2} + \psi_{r,rrr} = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$(\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(-\frac{u_0}{r^2} + \frac{u_{0,r}}{r} + u_{0,rr} + \frac{1-\nu}{2r^2} u_{0,\theta\theta} - \frac{3-\nu}{2r^2} v_{0,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} v_{0,r\theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) \left(\frac{w_{,r}}{r^2} - \frac{w_{,rr}}{r} + \frac{2w_{,\theta\theta}}{r^3} - w_{,rrr} - \frac{w_{,r\theta\theta}}{r^2} \right) \\
& - \frac{1-\nu}{2} (\bar{E}_0 - 2C_2 \bar{E}_2 + C_2^2 \bar{E}_4) (w_{,r} + \psi_r) + \\
& (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) \left(-\frac{\psi_r}{r^2} + \frac{\psi_{r,r}}{r} + \frac{1-\nu}{2r^2} \psi_{r,\theta\theta} + \psi_{r,rr} - \frac{3-\nu}{2r^2} \psi_{\theta,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} \psi_{\theta,r\theta} \right) = 0 ,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(\frac{3-\nu}{2r^2} u_{0,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} u_{0,r\theta} - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{v_0}{r^2} - \frac{v_{0,r}}{r} - v_{0,rr} \right) + \frac{v_{0,\theta\theta}}{r^2} \right) \\
& - (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) \left(\frac{w_{,r\theta}}{r^2} + \frac{w_{,\theta\theta\theta}}{r^3} + \frac{w_{,rr\theta}}{r} \right) \\
& - \frac{1-\nu}{2} (\bar{E}_0 - 2C_2 \bar{E}_2 + C_2^2 \bar{E}_4) \left(\frac{w_{,\theta}}{r} + \psi_\theta \right) \\
& + (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) \left(\frac{3-\nu}{2r^2} \psi_{r,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} \psi_{r,r\theta} - \frac{1-\nu}{2r^2} \psi_\theta \right) \\
& + \frac{1-\nu}{2r} \psi_{\theta,r} + \frac{\psi_{\theta,\theta\theta}}{r^2} + \frac{1-\nu}{2} \psi_{\theta,rr} = 0 ,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

從式 (2.22)~式 (2.26) 可發現，功能梯度材料板與一般複合材料板類似，面內(in-plane)位移和面外(out-of-plane)位移耦合。

2.2 漸近解推導

利用特徵函數展開法求解平衡方程式 (2.22)~式 (2.26)。首先，將位移分量假設成一級數的形式，令

$$\begin{aligned}
u_0(r, \theta) &= \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n} U_n(\theta, \lambda) , \quad v_0(r, \theta) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n} V_n(\theta, \lambda) , \\
w(r, \theta) &= \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n+1} W_n(\theta, \lambda) , \quad \psi_r(r, \theta) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n} \Psi_n(\theta, \lambda) , \\
\psi_\theta(r, \theta) &= \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n} \Phi_n(\theta, \lambda) ,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

λ 可為一複數；但 λ 之實部必須大於 0，以滿足位移分量的正規情況

(regularity conditions)。所謂的正規情況是指當 r 趨近於 0 時， u_0 、 v_0 、 w 、 ψ_r 、 ψ_θ 和 $w_{,r}$ 是有限的(finite)。

將式 (2.27) 代入式 (2.22)~式 (2.26) 展開，針對不同之 n ，均可得 U_n 、 V_n 、 W_n 、 Ψ_n 與 Φ_n 之一組常微分方程式。為探討具有應力奇異特性的解，祇要考慮 r 的最低階數；故取對應 $n=0$ 之微分方程組求解即可。若 n 大於 1， r 的階數不會導致力 (Stress resultant) 產生奇異性。當 $n=0$ 時，將式 (2.27) 代入式 (2.22)~式 (2.26) 可得

$$\begin{aligned} & \bar{E}_0[-1+\lambda+\lambda(\lambda-1)]U_0 + \frac{1-\nu}{2}\bar{E}_0U_{0,\theta\theta} + \left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)\bar{E}_0V_{0,\theta} \\ & + C_1\bar{E}_3[\lambda+1-\lambda(\lambda+1)-(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)]W_0 + C_1\bar{E}_3[2-(\lambda+1)]W_{0,\theta\theta} \\ & + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)[\lambda-1+\lambda(\lambda-1)]\Psi_0 + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\frac{1-\nu}{2}\Psi_{0,\theta\theta} \\ & + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)\Phi_{0,\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \bar{E}_0\left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)U_{0,\theta} + \bar{E}_0\frac{1-\nu}{2}[\lambda-1+\lambda(\lambda-1)]V_0 + \bar{E}_0V_{0,\theta\theta} + \\ & C_1\bar{E}_3[-(\lambda+1)-2\lambda(\lambda+1)]W_{0,\theta} - C_1\bar{E}_3W_{0,\theta\theta\theta} + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)\Psi_{0,\theta} \\ & + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\frac{1-\nu}{2}[\lambda-1+\lambda(\lambda-1)]\Phi_0 + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\Phi_{0,\theta\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & C_1\bar{E}_3(\lambda-1)^2(\lambda+1)U_0 + C_1\bar{E}_3(\lambda+1)U_{0,\theta\theta} - C_1^2\bar{E}_6(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2W_0 \\ & + C_1^2\bar{E}_6[-4+2(\lambda+1)-2\lambda(\lambda+1)]W_{0,\theta\theta} - C_1^2\bar{E}_6W_{0,\theta\theta\theta\theta} \\ & + (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)(\lambda-1)^2(\lambda+1)\Psi_0 + (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)(\lambda+1)\Psi_{0,\theta\theta} \end{aligned}$$

$$+(C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)(\lambda-1)^2\Phi_{0,\theta} + (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)\Phi_{0,\theta\theta} = 0 , \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} &(\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)(\lambda-1)(\lambda+1)U_0 + \frac{1-\nu}{2}(\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)U_{0,\theta\theta} \\ &+ (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)V_{0,\theta} - (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)(\lambda+1)^2(\lambda-1)W_0 \\ &+ (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)(1-\lambda)W_{0,\theta\theta} + (\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6)(\lambda+1)(\lambda-1)\Psi_0 \\ &+ (\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6)\frac{1-\nu}{2}\Psi_{0,\theta\theta} + \left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)\Phi_{0,\theta}] = 0 , \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} &(\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)U_{0,\theta} + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\frac{1-\nu}{2}(\lambda+1)(\lambda-1)V_0 \\ &+ (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)V_{0,\theta\theta} - (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)(\lambda+1)^2W_{0,\theta} - (C_1\bar{E}_4 - C_1^2\bar{E}_6)W_{0,\theta\theta\theta} \\ &+ (\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6)\left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)\Psi_{0,\theta} \\ &+ (\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6)\left[-\frac{1-\nu}{2} + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2\right]\Phi_0 + \Phi_{0,\theta\theta}] = 0 , \end{aligned} \quad (2.32)$$

欲解式 (2.28)~式 (2.32)，可令 $U_0 = Ae^{p\theta}$ ， $V_0 = Be^{p\theta}$ ， $W_0 = He^{p\theta}$ ， $\Psi_0 = De^{p\theta}$ ， $\Phi_0 = Le^{p\theta}$ 。再代入式 (2.28)~式 (2.32) 中，可建立由 A 、 B 、 H 、 D 與 L 等係數所組成的齊次線性方程組：

$$\begin{aligned} &\bar{E}_0(\lambda-1)(\lambda+1)A + \frac{1-\nu}{2}\bar{E}_0P^2A + \left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)\bar{E}_0PB - \\ &C_1\bar{E}_3(\lambda-1)(\lambda+1)^2H + C_1\bar{E}_3\left[\frac{3+\nu}{2} - (\lambda+1)\right]P^2H + \\ &(\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)(\lambda-1)(\lambda+1)D + (\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\frac{1-\nu}{2}P^2D + \\ &(\bar{E}_1 - C_1\bar{E}_3)\left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)PL = 0 , \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\bar{E}_0\left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\lambda\right)PA + \bar{E}_0\frac{1-\nu}{2}(\lambda-1)(\lambda+1)B + P^2\bar{E}_0B -$$

$$\begin{aligned}
& C_1 \bar{E}_3 (\lambda + 1) \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \lambda \right) PH - C_1 \bar{E}_3 P^3 H + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \right) PD + \\
& (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \frac{1-\nu}{2} (\lambda - 1)(\lambda + 1)L + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) P^2 L = 0 \quad , \quad (2.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_1 \bar{E}_3 (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 A + C_1 \bar{E}_3 (\lambda + 1) P^2 A + C_1 \bar{E}_3 (\lambda - 1)^2 PB \\
& + C_1 \bar{E}_3 P^3 B - C_1^2 \bar{E}_6 (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)^2 H - 2 C_1^2 \bar{E}_6 (\lambda^2 + 1) P^2 H - C_1^2 \bar{E}_6 P^4 H \\
& + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) D + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) (\lambda + 1) P^2 D \\
& + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) (\lambda - 1)^2 PL + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) P^3 L = 0 \quad , \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) (\lambda - 1)(\lambda + 1) A + \frac{1-\nu}{2} (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) P^2 A + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \right) PB \\
& - (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1) H + (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) (1 - \lambda) P^2 H \\
& + (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) \left[(\lambda - 1)(\lambda + 1) + \frac{1+\nu}{2} P^2 \right] D \\
& + (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) \left(-\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \right) PL = 0 \quad , \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \right) PA + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) \frac{1-\nu}{2} (\lambda + 1)(\lambda - 1) B \\
& + (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) PB - (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) (\lambda + 1)^2 PH - (C_1 \bar{E}_4 - C_1^2 \bar{E}_6) P^3 H \\
& + (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) \left(\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \right) PD \\
& + (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) \left(\frac{1+\nu}{2} \right) (\lambda + 1)(\lambda - 1) L \\
& + (\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6) P^2 L = 0 \quad , \quad (2.37)
\end{aligned}$$

為了使線性方程組式 (2.33)~式 (2.37) 的 $A \cdot B \cdot H \cdot D$ 與 L 有非零解(nontrivial solution)，其充分必要條件為係數行列式為 0。因此，可得

$$P = \pm i(\lambda + 1) \text{ 與 } P = \pm i(\lambda - 1) \text{。} \quad (2.38)$$

P 值不受體積比例常數之階數 m 之影響。當 $P = \pm i(\lambda + 1)$ ，可得 $B = \pm iA$ ，

$L = \pm iD$ ， H 為未定係數；當 $P = \pm i(\lambda - 1)$ ，可得 $B = \mp i\kappa_2 H \pm i\kappa_1 A$ ，

$L = \mp i\kappa_3 H \pm i\kappa_1 D$ ，

其中， $\kappa_1 = \frac{3 + \lambda - \nu + \lambda\nu}{-3 + \lambda + \nu + \lambda\nu}$ ，

$$\kappa_2 = -\frac{8C_1\lambda(\bar{E}_2\bar{E}_3 - C_1\bar{E}_3\bar{E}_4 + \bar{E}_1(-\bar{E}_4 + C_1\bar{E}_6))}{\bar{E}_1^2 - 2C_1\bar{E}_1\bar{E}_3 + C_1^2\bar{E}_3^2 - \bar{E}_0(\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6)} \quad ,$$

$$\kappa_3 = \frac{8C_1\lambda(\bar{E}_1\bar{E}_3 - C_1\bar{E}_3^2 + \bar{E}_0(-\bar{E}_4 + C_1\bar{E}_6))}{\bar{E}_1^2 - 2C_1\bar{E}_1\bar{E}_3 + C_1^2\bar{E}_3^2 - \bar{E}_0(\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6)} \text{。}$$

因此，從以上推導知，

$$U_0 = e^{i(\lambda+1)\theta} a_{0,1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} a_{0,2} + e^{i(\lambda-1)\theta} a_{0,3} + e^{-i(\lambda-1)\theta} a_{0,4} \text{，}$$

$$V_0 = e^{i(\lambda+1)\theta} b_{0,1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} b_{0,2} + e^{i(\lambda-1)\theta} b_{0,3} + e^{-i(\lambda-1)\theta} b_{0,4} \text{，}$$

$$W_0 = e^{i(\lambda+1)\theta} h_{0,1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} h_{0,2} + e^{i(\lambda-1)\theta} h_{0,3} + e^{-i(\lambda-1)\theta} h_{0,4} \text{，}$$

$$\Psi_0 = e^{i(\lambda+1)\theta} d_{0,1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} d_{0,2} + e^{i(\lambda-1)\theta} d_{0,3} + e^{-i(\lambda-1)\theta} d_{0,4} \text{，}$$

$$\Phi_0 = e^{i(\lambda+1)\theta} \ell_{0,1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \ell_{0,2} + e^{i(\lambda-1)\theta} \ell_{0,3} + e^{-i(\lambda-1)\theta} \ell_{0,4} \text{，} \quad (2.39)$$

其中， $a_{0,1} = -ib_{0,1}$ ， $d_{0,1} = -if_{0,1}$ ， $a_{0,2} = ib_{0,2}$ ， $d_{0,2} = i\ell_{0,2}$ ， $a_{0,3} = -i\kappa_1 b_{0,3}$ ，

$h_{0,3} = \kappa_2 d_{0,3} + i\kappa_3 \ell_{0,3}$ ， $a_{0,4} = i\kappa_1 b_{0,4}$ ， $h_{0,4} = \kappa_2 d_{0,4} - i\kappa_3 \ell_{0,4}$ 。

將式 (2.39) 中指數函數轉換成三角函數，則式 (2.39) 亦可表示成：

$$U_0(\theta, \lambda) = A_1 \cos(\lambda + 1)\theta + A_2 \sin(\lambda + 1)\theta + A_3 \cos(\lambda - 1)\theta + A_4 \sin(\lambda - 1)\theta \text{，} \quad (2.40a)$$

$$V_0(\theta, \lambda) = A_2 \cos(\lambda+1)\theta - A_1 \sin(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 A_4 - \kappa_2 B_4) \cos(\lambda-1)\theta \\ + (-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3) \sin(\lambda-1)\theta, \quad (2.40b)$$

$$W_0(\theta, \lambda) = B_1 \cos(\lambda+1)\theta + B_2 \sin(\lambda+1)\theta + B_3 \cos(\lambda-1)\theta + B_4 \sin(\lambda-1)\theta, \quad (2.40c)$$

$$\Psi_0(\theta, \lambda) = D_1 \cos(\lambda+1)\theta + D_2 \sin(\lambda+1)\theta + D_3 \cos(\lambda-1)\theta + D_4 \sin(\lambda-1)\theta, \quad (2.40d)$$

$$\Phi_0(\theta, \lambda) = D_2 \cos(\lambda+1)\theta - D_1 \sin(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 D_4 - \kappa_3 B_4) \cos(\lambda-1)\theta \\ + (-\kappa_1 D_3 + \kappa_3 B_3) \sin(\lambda-1)\theta, \quad (2.40e)$$

其中， $A_1 = a_{0,1} + a_{0,2}$ ， $A_2 = i(a_{0,1} - a_{0,2})$ ， $A_3 = a_{0,3} + a_{0,4}$ ， $A_4 = i(a_{0,3} - a_{0,4})$ ，
 $B_1 = (h_{0,1} + h_{0,2})$ ， $B_2 = i(h_{0,1} - h_{0,2})$ ， $B_3 = (h_{0,3} + h_{0,4})$ ， $B_4 = i(h_{0,3} - h_{0,4})$ ，
 $D_1 = (d_{0,1} + d_{0,2})$ ， $D_2 = i(d_{0,1} - d_{0,2})$ ， $D_3 = (d_{0,3} + d_{0,4})$ ， $D_4 = i(d_{0,3} - d_{0,4})$ 。這些係
 數(A_i 、 B_i 和 D_i ， $i=1,2,3,4$)以及 λ 決定於徑向邊界條件。

經由以上之推導過程，可以將漸近解簡單的表示成

$$u_0^{(a)} = r^\lambda U_0(\theta, \lambda), \quad v_0^{(a)} = r^\lambda V_0(\theta, \lambda), \\ \psi_r^{(a)} = r^\lambda \Phi_0(\theta, \lambda), \quad \psi_\theta^{(a)} = r^\lambda \Psi_0(\theta, \lambda), \quad w^{(a)} = r^{\lambda+1} W_0(\theta, \lambda), \quad (2.41)$$

此漸近解於本文中稱之為「角函數」。

2.3 特徵方程式與角函數

當 λ 之實部小於1時，將角函數(式(2.41))代入Stress resultant(式(2.19))中，會使 N_r 、 N_θ 、 $N_{r\theta}$ 、 M_r 、 M_θ 、 $M_{r\theta}$ 、 P_r 、 P_θ 和 $P_{r\theta}$ 於 r 趨近0處產生奇異性，但剪力 Q_r 、 Q_θ 、 R_r 及 R_θ 不會有奇異性。

為了獲得特徵值 λ 及角函數中之未定係數 A_i 、 B_i 、 D_i ($i=1,2,3,4$)，將利用角隅處兩邊徑向邊界條件決定之。下列為四種不同支撐情況下之邊界條件($\theta = \alpha$):

$$\text{固定端: } u_0 = v_0 = w = \psi_r = \psi_\theta = \frac{w_{,\theta}}{r} = 0, \quad (2.42a)$$

$$\text{自由端: } N_{r\theta} = N_\theta = \bar{M}_\theta = \bar{M}_{r\theta} = \bar{Q}_\theta + C_1 \left(\frac{2}{r} P_{r\theta} + 2P_{r\theta,r} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta} \right) = P_\theta = 0, \quad (2.42b)$$

$$\text{第一型簡支撐端: } u_0 = v_0 = w = \psi_r = \bar{M}_\theta = P_\theta = 0, \quad (2.42c)$$

$$\text{第二型簡支撐端: } u_0 = v_0 = w = \bar{M}_\theta = \bar{M}_{r\theta} = P_\theta = 0, \quad (2.42d)$$

在以下之討論，固定端、自由端、第一型簡支撐端、第二型簡支撐端分別以 C 、 F 、 $S(I)$ 和 $S(II)$ 來表示。

為了闡述角函數之推導，以兩邊徑向邊界 $S(I)$ 為例說明，於此例中角函數可分成對稱與反對稱兩部分來之推導，此時角度(θ)的範圍為 $-\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha/2$ 。將式 (2.40a)~式(2.40e)分成下列所示的對稱與反對稱的部分：

對稱：

$$U_0(\theta, \lambda) = A_1 \cos(\lambda+1)\theta + A_3 \cos(\lambda-1)\theta, \quad (2.43a)$$

$$V_0(\theta, \lambda) = -A_1 \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3) \sin(\lambda-1)\theta, \quad (2.43b)$$

$$W_0(\theta, \lambda) = B_1 \cos(\lambda+1)\theta + B_3 \cos(\lambda-1)\theta, \quad (2.43c)$$

$$\Psi_0(\theta, \lambda) = D_1 \cos(\lambda+1)\theta + D_3 \cos(\lambda-1)\theta , \quad (2.43d)$$

$$\Phi_0(\theta, \lambda) = -D_1 \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 D_3 + \kappa_3 B_3) \sin(\lambda-1)\theta , \quad (2.43e)$$

反對稱：

$$U_0(\theta, \lambda) = A_2 \sin(\lambda+1)\theta + A_4 \sin(\lambda-1)\theta , \quad (2.44a)$$

$$V_0(\theta, \lambda) = A_2 \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 A_4 - \kappa_2 B_4) \cos(\lambda-1)\theta , \quad (2.44b)$$

$$W_0(\theta, \lambda) = B_2 \sin(\lambda+1)\theta + B_4 \sin(\lambda-1)\theta , \quad (2.44c)$$

$$\Psi_0(\theta, \lambda) = D_2 \sin(\lambda+1)\theta + D_4 \sin(\lambda-1)\theta , \quad (2.44d)$$

$$\Phi_0(\theta, \lambda) = D_2 \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 D_4 - \kappa_3 B_4) \cos(\lambda-1)\theta , \quad (2.44e)$$

將式 (2.43a)~式(2.43e)和式 (2.44a)~式(2.44e)分別代入式(2.42c)可各得到一組六元一次聯立方程式為：

(A) 對稱：

因考慮對稱解，故式 (2.40a)~式(2.40e)中之係數 A_i 、 B_i 及 D_i ($i=2,4$) 為 0。

$$A_1 \cos(\lambda+1) \frac{\alpha}{2} + A_3 \cos(\lambda-1) \frac{\alpha}{2} = 0 , \quad (2.45a)$$

$$-A_1 \sin(\lambda+1) \frac{\alpha}{2} + (-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3) \sin(\lambda-1) \frac{\alpha}{2} = 0 , \quad (2.45b)$$

$$B_1 \cos(\lambda+1) \frac{\alpha}{2} + B_3 \cos(\lambda-1) \frac{\alpha}{2} = 0 , \quad (2.45c)$$

$$D_1 \cos(\lambda+1) \frac{\alpha}{2} + D_3 \cos(\lambda-1) \frac{\alpha}{2} = 0 , \quad (2.45d)$$

$$(\lambda+1) \{-A_1 \bar{E}_1 + D_1 (-\bar{E}_2 + C_1 \bar{E}_4) + B_1 C_1 \bar{E}_4 (\lambda+1)\} \cos(\lambda+1) \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned}
& +(\lambda-1)\{-A_3\kappa_1\bar{E}_1+\kappa_1(-\bar{E}_2+C_1\bar{E}_4)D_3 \\
& +(\kappa_2\bar{E}_1+\kappa_3\bar{E}_4-C_1\bar{E}_4(1+\kappa_3-\lambda)B_3\}\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.45e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda+1)\{-A_1\bar{E}_3+D_1(-\bar{E}_4+C_1\bar{E}_6)+B_1C_1\bar{E}_6(\lambda+1)\}\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2} \\
& +(\lambda-1)\{-A_3\kappa_1\bar{E}_1+\kappa_1(-\bar{E}_4+C_1\bar{E}_6)D_3 \\
& +(\kappa_2\bar{E}_3+\kappa_3\bar{E}_4-C_1\bar{E}_6(1+\kappa_3-\lambda)B_3\}\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.45f}
\end{aligned}$$

(B) 反對稱:

因考慮反對稱解，故式 (2.40a)~式(2.40e)中之係數 A_i 、 B_i 及 D_i ($i=1,3$) 為 0。

$$A_2\text{Sin}(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}+A_4\text{Sin}(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.46a}$$

$$A_2\text{Cos}(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}+(\kappa_1A_4-\kappa_2B_4)\text{Cos}(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.46b}$$

$$B_2\text{Sin}(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}+B_4\text{Sin}(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.46c}$$

$$D_2\text{Sin}(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}+D_4\text{Sin}(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.46d}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda+1)\{-A_2\bar{E}_1+D_2(-\bar{E}_2+C_1\bar{E}_4)+B_2C_1\bar{E}_4(\lambda+1)\}\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2} \\
& +(\lambda-1)\{-A_4\kappa_1\bar{E}_1+\kappa_1(-\bar{E}_2+C_1\bar{E}_4)D_4 \\
& +(\kappa_2\bar{E}_1+\kappa_3\bar{E}_4-C_1\bar{E}_4(1+\kappa_3-\lambda)B_4\}\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0, \tag{2.46e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda+1)\{-A_2\bar{E}_3+D_2(-\bar{E}_4+C_1\bar{E}_6)+B_2C_1\bar{E}_6(\lambda+1)\}\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2} \\
& +(\lambda-1)\{-A_4\kappa_1\bar{E}_1+\kappa_1(-\bar{E}_4+C_1\bar{E}_6)D_4
\end{aligned}$$

$$+(\kappa_2 \bar{E}_3 + \kappa_3 \bar{E}_4 - C_1 \bar{E}_6 (1 + \kappa_3 - \lambda) B_4) \cos(\lambda - 1) \frac{\alpha}{2} = 0, \quad (2.46f)$$

式 (2.45a) ~ 式(2.45f)和式 (2.46a)~式(2.46f)兩聯立方程組內分別有 6 條含有 λ 之齊性方程式；因為 A_i 、 B_i 、 D_i ($i=1,2,3,4$) 有非零解，故式(2.45)和式(2.46)之聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於 0， λ 即為 6×6 行列式等於零之根。此兩部分特徵方程式為：

(A) 對稱：

$$[\cos(\lambda + 1) \frac{\alpha}{2}] [\cos(\lambda - 1) \frac{\alpha}{2}] = 0, \quad (2.47)$$

$$\bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0, \quad (2.48)$$

其中 $\bar{\gamma}_1 = \frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{\kappa}_2}$ ， $\bar{\kappa}_1$ 及 $\bar{\kappa}_2$ 可參看附錄一。

(B) 反對稱：

$$[\sin(\lambda + 1) \frac{\alpha}{2}] [\sin(\lambda - 1) \frac{\alpha}{2}] = 0, \quad (2.49)$$

$$\sin \lambda \alpha - \bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha = 0, \quad (2.50)$$

其餘不同徑向邊界條件組合下之特徵方程式可參閱表 2.1，均列於其中。

將式 (2.47)~式 (2.48)和式 (2.49)~式 (2.50)分別代回式 (2.45a)~式(2.45f)和式 (2.46a)~式(2.46f)可解出 A_i 、 B_i 、 D_i ($i=1,2,3,4$)等係數，接著，可求得具有應力奇異性之角函數，下列僅闡述對稱的角函數(反對稱的角函數可參閱表 2.2)：

根據特徵方程式的組成方式，角函數可分成四種情況來討論：

(a) 當 $\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}=0$ 與 $\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}\neq 0$ ，則式 (2.45a)~式(2.45f)中之係數 A_1 、 A_3 、 B_3 、 D_4 為零，以致於無 $u_0^{(a)}$ 及 $v_0^{(a)}$ 之角函數，則角函數僅為

$$\begin{aligned} w^{(a)} &= B_1 r^{\lambda+1} \{\cos(\lambda+1)\theta\}, \quad \psi_r^{(a)} = D_1 r^\lambda \{\cos(\lambda+1)\theta\}, \\ \psi_\theta^{(a)} &= D_1 r^\lambda \{-\sin(\lambda+1)\theta\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

由此可知，在本情況下 $u_0^{(a)}$ 及 $v_0^{(a)}$ 之 r 的階數遠大於 λ ，因此， u_0 及 v_0 不會造成應力奇異性。

(b) 當 $\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0$ 與 $\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}\neq 0$ 時，係數 A_1 和 $(-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3)$ 為 0，故 $v_0^{(a)}$ 之角函數亦不會導致應力奇異性，其餘的角函數為

$$\begin{aligned} w^{(a)} &= B_1 r^{\lambda+1} \{\cos(\lambda+1)\theta\}, \quad \psi_r^{(a)} = D_1 r^\lambda \{\cos(\lambda+1)\theta\}, \\ \psi_\theta^{(a)} &= D_1 r^\lambda \{-\sin(\lambda+1)\theta\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

(c) 當 $\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}=0$ 與 $\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}=0$ 時，由式(2.45b)可得

$$A_1 = (-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3) \frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}}, \quad (2.53)$$

將 A_1 替換成 A_3 和 B_3 ，而 A_i 、 B_i 和 D_i ($i=1,3$) 為待定係數，故所有的角函數為

$$\begin{aligned} u_0^{(a)} &= r^\lambda \left\{ A_3 \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \kappa_1 \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] + \right. \\ &\quad \left. B_3 \left[\left(\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \kappa_2 \cos(\lambda+1)\theta \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0^{(a)} &= r^\lambda \left\{ (-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3) \left[\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\}, \\
w^{(a)} &= r^{\lambda+1} \{ B_1 \cos(\lambda+1)\theta + B_3 \cos(\lambda-1)\theta \}, \\
\psi_r^{(a)} &= r^\lambda \{ D_1 \cos(\lambda-1)\theta + D_3 \cos(\lambda+1)\theta \}, \\
\psi_\theta^{(a)} &= r^\lambda \{ -D_1 \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 D_3 + \kappa_3 B_3) \sin(\lambda-1)\theta \}. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

(d) 當 $\bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0$ 時，而且 $\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2} \neq 0$ 與 $\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2} \neq 0$ ，則 A_i 、 B_i 、 D_i ($i=1,3$) 有非零解，經由係數矩陣行列式為 0，可得各係數之關係，角函數可表示成

$$\begin{aligned}
u_0^{(a)} &= A_3 r^\lambda \left\{ \frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right\}, \\
v_0^{(a)} &= A_3 r^\lambda \left\{ \frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 + \kappa_2 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right\}, \\
w^{(a)} &= A_3 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_2 \left[\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\}, \\
\psi_r^{(a)} &= A_3 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_1 \left[\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \cos(\lambda-1)\theta + \cos(\lambda+1)\theta \right] \right\}, \\
\psi_\theta^{(a)} &= A_3 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_1 \left[\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 \bar{\eta}_1 + \kappa_3 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\}. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

將上述 2.3 節作一小結。表 2.1 與表 2.2 分別將不同徑向邊界條件組合下之特徵方程式及其對應的角函數列於其中。表 2.2 只列了四種不同邊界條件組合下之角函數，從表中可發現，凡是具有對稱性之問題，其

角函數都較為簡潔精緻，如 $S(I)_S(I)$ ， $S(II)_S(II)$ ， C_C ， F_F 等案例。其他的角函數亦可由 12 條邊界條件所構成之線性方程組推導，但其表示式過於複雜。大部分的角函數都跟非均質材料的材料性質有關聯性。

表 2.1 中列出了八種不同邊界條件組合下之特徵方程式，而 $S(I)_F$ 和 $S(II)_F$ 兩種案例並沒有列在其中，原因是其過於複雜繁多無法列出。若想獲得該等邊界條件下之 λ 值，可以藉由該等邊界條件組成之 12×12 行列式為零時，此非線性方程式之解即為 λ 值。表 2.1 顯示，只要邊界條件中沒有 $S(I)$ 或 $S(II)$ 中之任一種，不論是受到面內拉伸或是面外彎矩，其特徵方程式皆與均質材料者相同。例如， F_F 對稱之特徵方程式為

$$\lambda(-1+\nu)\sin\alpha + (3+\nu)\sin\lambda\alpha = 0 \quad , \quad (2.56)$$

$$\lambda\sin\alpha + \sin\lambda\alpha = 0 \quad , \quad (2.57)$$

式 (2.56) 可以在 Huang 【2002】找到相符合的方程式；而式 (2.57) 在 Williams 【1952】亦也相同的發現。Huang 【2002】探討均質 Reddy 板理論之應力奇異解，Williams 【1952】則探討平面彈性問題之奇異性。

2.4 應力奇異性分析

當 $0 < \text{Re}[\lambda] < 1$ ， N_r 、 N_θ 、 $N_{r\theta}$ 、 M_r 、 M_θ 、 $M_{r\theta}$ 、 P_r 、 P_θ 和 $P_{r\theta}$ 有 $r^{\lambda-1}$ 形式的奇異性。只要角隅兩徑向之邊界條件中沒有 $S(I)$ 或 $S(II)$ ，則特徵方程式中就沒有非均質材料性質相關的參數； λ 值就不會受非均質材料之材料

性質所影響。本小節欲探究當邊界中有 $S(I)$ 或 $S(II)$ ，則材料非均質的特性對 λ 值之影響，以下的數值結果所使用的波松比(ν)為 0.3。

圖 2.3 顯示 $S(I)$ _ $S(I)$ 邊界下，各種不同 $\Delta P/P_b$ ($=0.02, 10, 100$) 和 m ($=2, 5$) 情形下，描繪出特徵值實部之最小值與扇形角(α)之關係。本研究將對稱案例與反對稱案例分開討論。式 (2.48) 與式 (2.50) 之特徵值實部之最小值被材料非均質之性質影響的程度不大，而式 (2.47) 與式 (2.49) 特徵根之奇異性與材料性質無關。當扇形角(α)超過 90° 時，即會發生奇異性，但 180° 例外。特徵值實部之最小值依扇形角度不同，對稱案例與反對稱案例之特徵值實部之最小值亦不同，應取數值較小的一方：當 $90^\circ < \alpha \leq 270^\circ$ 時，應利用式 (2.47)；當 $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ 時，則決定於式 (2.49)。

探討 $S(II)$ _ $S(II)$ 的奇異性問題，不同於 $S(I)$ _ $S(I)$ 的是多了兩條特徵方程式：

$$\lambda \sin \alpha \pm \sin \lambda \alpha = 0 \quad (2.58)$$

Huang【2002】針對均質 Reddy 板理論，研究其奇異性，文中指出式 (2.58) 之特徵值實部之最小值大於式 (2.47) 與式 (2.49)。因此，於 $S(II)$ _ $S(II)$ 之案例，功能梯度材料扇形板之尖角的奇異性，取自式 (2.47) 與式 (2.49) 之特徵值實部之最小值，且與材料性質無關。

圖 2.4 展示了 $S(I)$ _ $S(II)$ 邊界下，非均質的材料性質對特徵值實部之最小值

之影響。該案例有兩條特徵方程式(表 2.1 中，式(T1)、式(T2))，一條與材料性質無關，另一條，則反之。此特徵方程式亦可在Huang【2002】均質板的奇異性研究中發現。考慮非均質材料參數為 $\Delta P/P_b=0.02$ ，10，100 和 $m=2$ ，5 情況下，對特徵方程式(式(T2))最小根之影響很小。 $S(I)$ 、 $S(II)$ 應力奇異階數取決於跟材料參數無關之特徵方程式(式(T1))

圖 2.5 為 $S(I)_C$ 和 $S(II)_C$ 邊界下，特徵值實部之最小值與扇形角之關係。 $S(I)_C$ 和 $S(II)_C$ 各有兩條特徵方程式；一是與材料性質相關，另一則是無材料性質無關。換言之，此兩案例皆有一特徵方程式中含有非均質材料性質(表 2.1 中，式(T4))。另一特徵方程式不受非均質材料性質之影響(表 2.1 中，式(T3)，式(T4))，於Huang【2002】均質板分析中也有出現。非均質材料參數為 $\Delta P/P_b=0.02$ ，10，100 和 $m=2$ ，5 情況下，對應力奇異性之影響很小。該案例在小於 180° 或大於 270° 時，應力奇異性是控制在不受非均質材料性質影響之特徵方程式之根。

圖 2.6 與 圖 2.7 說明特徵值實部之最小值，在非均質材料與均質材料之間的差異，本圖縱軸所表示之相對誤差為

$$\frac{\text{最小值 Re}[\lambda(m \neq 0)] - \text{最小值 Re}[\lambda(m = 0)]}{\text{最小值 Re}[\lambda(m = 0)]}, \quad (2.59)$$

其中， $\lambda(m=0)$ 代表均質板之特徵值。 $\Delta P/P_b=0.02$ ，10，100 和 $m=2$ ，5 之應力奇異階數與均質板差異很小，大約在3%以內。

第三章 振動分析

本章將探討利用 Ritz 法結合前章所得之結果，分析具有應力奇異點之功能梯度材料厚板的振動行為，所考慮之板為懸臂斜形板與具邊緣裂縫簡支撐矩形板。斜形板包括斜三角形、斜平行四邊形及斜梯形板。懸臂斜形板於固定端-自由端(clamped-free)之尖角處(re-entrant corner)及矩形板裂縫尖端，具有應力奇異之現象。於數值方法中，若能正確描述尖角處之應力奇異行為，將加速解之收斂性及準確性。

本章所推導Ritz法所須之應變能、動能、勁度矩陣及質量矩陣均以斜座標系統 (ξ, η) (參看圖 1.1)為主，當斜角 (β) 為 0 時，公式則回至卡氏座標系統 (x, y) 。

3.1 應變能與動能

Reddy 三階板理論之應變能 (U) 及動能 (T) 定義如下：

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}] dz dA \quad , \quad (3.1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho [\dot{u}^{*2} + \dot{v}^{*2} + \dot{w}^{*2}] dz dA \quad , \quad (3.2)$$

其中， u^* 、 v^* 及 w^* 分別為 x 、 y 、 z 方向之位移分量， ρ : 單位體積之質量。

而且

$$u^*(x, y, z, t) = u_{x0}(x, y, t) + z[\psi_x(x, y, t)] - \frac{4z^3}{3h^2}(\psi_x + w_{0,x}) , \quad (3.3a)$$

$$v^*(x, y, z, t) = v_{y0}(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2}(\psi_y + w_{0,y}) , \quad (3.3b)$$

$$w^*(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) , \quad (3.3c)$$

其中， u_{x0} 、 v_{y0} 、 w_0 、 ψ_x 與 ψ_y 分別為 x - y 座標系統中，板中平面之位移與轉角函數，下標“ 0 ”代表對自變數 x 或 y 之微分。

有鑒於所分析之案例為斜形板，故須將卡氏座標 (x, y) 轉換成斜座標 (ξ, η) (參看圖 1.1)，其中 (x, y) 與 (ξ, η) 滿足

$$x = \xi \cos \beta , \quad y = \eta + \xi \sin \beta , \quad (3.4)$$

其中， β 定義為 x 軸與 ξ 軸之夾角。因此，一函數 f 對 x 或 y 微分與對 ξ 或 η 微分之關係為

$$f_{,x} = \frac{1}{\cos \beta} f_{,\xi} - \tan \beta f_{,\eta} , \quad (3.5a)$$

$$f_{,y} = f_{,\eta} , \quad (3.5b)$$

$$f_{,xx} = \frac{1}{\cos^2 \beta} f_{,\xi\xi} - 2 \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} f_{,\xi\eta} + \tan^2 \beta f_{,\eta\eta} , \quad (3.5c)$$

$$f_{,yy} = f_{,\eta\eta} , \quad (3.5d)$$

$$f_{,xy} = \frac{1}{\cos \beta} f_{,\xi\eta} - \tan \beta f_{,\eta\eta} , \quad (3.5e)$$

下標“ j ”為對任一獨立變數 j 取偏微分。透過兩座標之幾何關係，可將卡

氏座標之位移場以 $\xi - \eta$ 者表示成

$$u^*(x, y, z, t) = \cos \beta u_{\xi 0}(\xi, \eta, t) + z[\psi_{\xi}(\xi, \eta, t) - \sin \beta \psi_{\eta}(\xi, \eta, t)] - \frac{4z^3}{3h^2}(\psi_{\xi} - \sin \beta \psi_{\eta} + \sec \beta \frac{\partial w_0}{\partial \xi} - \tan \beta \frac{\partial w_0}{\partial \eta}) , \quad (3.6)$$

$$v^*(x, y, z, t) = v_{\eta 0}(\xi, \eta, t) + \sin \beta u_{\xi 0}(\xi, \eta, t) + z \cos \beta \psi_{\eta}(\xi, \eta, t) - \frac{4z^3}{3h^2}(\cos \beta \psi_{\eta} + \frac{\partial w_0}{\partial \eta}) , \quad (3.7)$$

$$w^*(x, y, z, t) = w_0(\xi, \eta, t) , \quad (3.8)$$

其中， $u_{\xi 0}$ 、 $v_{\eta 0}$ 、 w_0 、 ψ_{ξ} 與 ψ_{η} 分別為 $\xi - \eta$ 座標系統中，板中平面之位移與轉角函數。

依位移—應變線性關係，可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & (u_{\xi 0, \xi} - \sin \beta u_{\xi 0, \eta}) + (z - C_1 z^3)(\psi_{\xi, \xi} \sec \beta - \tan \beta \psi_{\xi, \eta}) \\ & + (z - C_1 z^3)(-\tan \beta \psi_{\eta, \xi} + \sin \beta \tan \beta \psi_{\eta, \eta}) \\ & - C_1 z^3(\sec^2 \beta w_{0, \xi \xi} - 2 \sec \beta \tan \beta w_{0, \xi \eta} + \tan^2 \beta w_{0, \eta \eta}) , \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{yy} = \sin \beta u_{\xi 0, \eta} + v_{\eta 0, \eta} + (z - C_1 z^3)\psi_{\eta, \eta} + (-C_1 z^3)w_{0, \eta \eta} , \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & (\cos \beta - \sin \beta \tan \beta)u_{\xi 0, \eta} + \tan \beta u_{\xi 0, \xi} + [\sec \beta v_{\eta 0, \xi} - \tan \beta v_{\eta 0, \eta}] \\ & + (z - C_1 z^3)\psi_{\xi} + (z - C_1 z^3)(\psi_{\eta, \xi} - 2 \sin \beta \psi_{\eta, \eta}) \\ & - 2C_1 z^3(\sec \beta w_{0, \xi \eta} - \tan \beta w_{0, \eta \eta}) , \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\gamma_{yz} = \cos \beta \psi_{\eta} (1 - C_1 z^2) + (1 - C_2 z^2) w_{0,\eta} , \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xz} = (1 - C_2 z^2) \psi_{\xi} - (1 - C_2 z^2) \sin \beta \psi_{\eta} + (1 - C_2 z^2) (\sec \beta w_{0,\xi}) - \tan \beta w_{0,\eta} , \quad (3.13)$$

式(3.9)~式(3.13)結合等向性材料(isotropic material)之組成律，式(3.1)

可表示成

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \iint_A \{ & [\bar{E}_0 \hat{u}_0 + \bar{K}_1 \hat{\phi}_1 - C_1 \bar{E}_3 \hat{w}_1 + \bar{D}_0 v_{0,\eta} + \bar{J}_1 (\cos \beta \psi_{\eta,\eta}) - \bar{D}_3 C_1 w_{0,\eta\eta}] \hat{u}_0 \\ & + [\bar{K}_1 \hat{u}_0 + (\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) \hat{\phi}_1 - C_1 \bar{K}_4 \hat{w}_1 + \bar{J}_1 v_{0,\eta} \\ & + (\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) \cos \beta \psi_{\eta,\eta} - C_1 \bar{J}_4 w_{0,\eta\eta}] \hat{\phi}_1 \\ & - C_1 [\bar{E}_3 \hat{u}_0 + \bar{K}_4 \hat{\phi}_1 - C_1 \bar{E}_6 \hat{w}_1 + \bar{D}_3 v_{0,\eta} + \bar{J}_4 \cos \beta \psi_{\eta,\eta} - C_1 \bar{D}_6 w_{0,\eta\eta}] \hat{w}_1 \\ & + [\bar{D}_0 \hat{u}_0 + \bar{J}_1 \hat{\phi}_1 - C_1 \bar{D}_3 \hat{w}_1 + \bar{E}_0 v_{0,\eta} + \bar{K}_1 \cos \beta \psi_{\eta,\eta} - C_1 \bar{E}_3 w_{0,\eta\eta}] v_{0,\eta} \\ & + [\bar{J}_1 \hat{u}_0 + (\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) \hat{\phi}_1 - C_1 \bar{J}_4 \hat{w}_1 + \bar{K}_1 v_{0,\eta} \\ & + (\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) \psi_{\eta,\eta} \cos \beta - C_1 \bar{K}_4 w_{0,\eta\eta}] \psi_{\eta,\eta} \cos \beta \\ & - C_1 [\bar{D}_3 \hat{u}_0 + \bar{J}_4 \hat{\phi}_1 + \bar{K}_4 \psi_{\eta,\eta} \cos \beta - C_1 (\bar{D}_0 \hat{w}_1 + \bar{E}_6 w_{0,\eta\eta}) + \bar{E}_3 v_{0,\eta}] w_{0,\eta\eta} \\ & + [\bar{G}_0 \hat{u}_1 + \bar{L}_1 \hat{\phi}_2 - 2C_1 \bar{G}_3 \hat{w}_2] \hat{u}_1 + [\bar{L}_1 \hat{u}_1 + (\bar{L}_2 - C_1 \bar{L}_4) \hat{\phi}_2 - 2C_1 \bar{L}_4 \hat{w}_2] \hat{\phi}_2 \\ & - 2C_1 [\bar{G}_3 \hat{u}_1 + \bar{L}_4 \hat{\phi}_2 - 2C_1 \bar{G}_6 \hat{w}_2] \hat{w}_2 \\ & + (\bar{L}_0 - C_2 \bar{L}_2) [(\psi_{\xi} - \sin \beta \psi_{\eta}) + (\sec \beta w_{0,\xi} - \tan \beta w_{0,\eta})]^2 \\ & + (\bar{L}_0 - C_2 \bar{L}_2) (\psi_{\eta} \cos \beta + w_{0,\eta})^2 \} dA , \quad (3.14) \end{aligned}$$

其中，

$$\hat{\phi}_1 = \sec \beta (\psi_{\xi,\xi} - \sin \beta \psi_{\xi,\eta} - \sin \beta \psi_{\eta,\xi} + \sin^2 \beta \psi_{\eta,\eta}) , \quad (3.15)$$

$$\hat{\phi}_2 = (\psi_{\xi,\eta} - 2 \sin \beta \psi_{\eta,\eta}) + \psi_{\eta,\xi} \quad , \quad (3.16)$$

$$\hat{u}_0 = u_{\xi 0,\xi} - \sin \beta u_{\xi 0,\eta} \quad , \quad (3.17)$$

$$\hat{u}_1 = \sec \beta (v_{\eta 0,\xi} - \sin \beta v_{\eta 0,\eta}) + \tan \beta (u_{\xi 0,\xi} - \sin \beta u_{\xi 0,\eta}) \quad , \quad (3.18)$$

$$\hat{w}_1 = \sec^2 \beta w_{0,\xi\xi} - 2 \tan \beta \sec \beta w_{0,\eta\xi} + \tan^2 \beta w_{0,\eta\eta} \quad , \quad (3.19)$$

$$\hat{w}_2 = (\sec \beta w_{0,\xi} - \tan \beta w_{0,\eta})_{,\eta} \quad , \quad (3.20)$$

$$\bar{K}_i = \bar{E}_i - C_1 \bar{E}_{i+2} \quad , \quad \bar{J}_i = \bar{D}_i - C_1 \bar{D}_{i+2} \quad , \quad \bar{L}_i = \bar{G}_i - C_1 \bar{G}_{i+2} \quad , \quad \bar{M}_i = \bar{G}_i - C_2 \bar{G}_{i+2} \quad , \quad (3.21)$$

將式 (3.6)~式 (3.8) 代入式 (3.2)，可獲得以 ξ - η 座標表示之動能

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_V \left\{ \left[\dot{u}_{\xi 0} \cos \beta + z(\dot{\psi}_{\xi} - \sin \beta \dot{\psi}_{\eta}) - C_1 z^3 \left((\dot{\psi}_{\xi} - \sin \beta \dot{\psi}_{\eta}) + (\sec \beta \dot{w}_{0,\xi} - \tan \beta \dot{w}_{0,\eta}) \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[(\dot{v}_{\eta 0} + \dot{u}_{\xi 0} \sin \beta) + z \dot{\psi}_{\eta} \cos \beta - C_1 z^3 (\dot{\psi}_{\eta} \cos \beta + \dot{w}_{0,\eta}) \right]^2 + \dot{w}_0^2 \right\} dV \quad , \quad (3.22)$$

3.2 利用 Ritz 法求解 FGM 板之自然振動頻率

利用 Ritz 法解自然振動頻率，須定義一能量函數

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} \quad , \quad (3.23)$$

其中， T_{\max} ：一振動週期內最大動能； U_{\max} ：一振動週期內最大應變能。

令

$$u_{\xi 0}(\xi, \eta, t) = U_{\xi 0}(\xi, \eta) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (3.24a)$$

$$v_{\eta 0}(\xi, \eta, t) = V_{\eta 0}(\xi, \eta) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (3.24b)$$

$$\psi_{\xi}(\xi, \eta, t) = \Psi_{\xi}(\xi, \eta) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (3.24c)$$

$$\psi_{\eta}(\xi, \eta, t) = \Psi_{\eta}(\xi, \eta) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (3.24d)$$

$$w_0(\xi, \eta, t) = W(\xi, \eta) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (3.24e)$$

其中， ω 為自然振動頻率，依式 (3.14) 及式 (3.22)

$$\begin{aligned}
U_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_A \{ [\bar{E}_0 \tilde{u}_0 + \bar{K}_1 \tilde{\phi}_1 - C_1 \bar{E}_3 \tilde{w}_1 + \bar{D}_0 V_{\eta 0, \eta} + \bar{J}_1 (\cos \beta \Psi_{\eta, \eta}) - \bar{D}_3 C_1 W_{, \eta \eta}] \tilde{u}_0 \\
& + [\bar{K}_1 \tilde{u}_0 + (\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) \tilde{\phi}_1 - C_1 \bar{K}_4 \tilde{w}_1 + \bar{J}_1 V_{\eta 0, \eta} \\
& + (\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) \cos \beta \Psi_{\eta, \eta} - C_1 \bar{J}_4 W_{, \eta \eta}] \tilde{\phi}_1 \\
& - C_1 [\bar{E}_3 \tilde{u}_0 + \bar{K}_4 \tilde{\phi}_1 - C_1 \bar{E}_6 \tilde{w}_1 + \bar{D}_3 V_{\eta 0, \eta} + \bar{J}_4 \cos \beta \Psi_{\eta, \eta} - C_1 \bar{D}_6 W_{, \eta \eta}] \tilde{w}_1 \\
& + [\bar{D}_0 \tilde{u}_0 + \bar{J}_1 \tilde{\phi}_1 - C_1 \bar{D}_3 \tilde{w}_1 + \bar{E}_0 V_{\eta 0, \eta} + \bar{K}_1 \cos \beta \Psi_{\eta, \eta} - C_1 \bar{E}_3 W_{, \eta \eta}] V_{\eta 0, \eta} \\
& + [\bar{J}_1 \tilde{u}_0 + (\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) \tilde{\phi}_1 - C_1 \bar{J}_4 \tilde{w}_1 + \bar{K}_1 V_{\eta 0, \eta} \\
& + (\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) \Psi_{\eta, \eta} \cos \beta - C_1 \bar{K}_4 W_{, \eta \eta}] \Psi_{\eta, \eta} \cos \beta \\
& - C_1 [\bar{D}_3 \tilde{u}_0 + \bar{J}_4 \tilde{\phi}_1 + \bar{K}_4 \Psi_{\eta, \eta} \cos \beta - C_1 (\bar{D}_0 \tilde{w}_1 + \bar{E}_6 W_{, \eta \eta}) + \bar{E}_3 V_{\eta 0, \eta}] W_{, \eta \eta} \\
& + [\bar{G}_0 \tilde{u}_1 + \bar{L}_1 \tilde{\phi}_2 - 2C_1 \bar{G}_3 \tilde{w}_2] \tilde{u}_1 + [\bar{L}_1 \tilde{u}_1 + (\bar{L}_2 - C_1 \bar{L}_4) \tilde{\phi}_2 - 2C_1 \bar{L}_4 \tilde{w}_2] \tilde{\phi}_2 \\
& - 2C_1 [\bar{G}_3 \tilde{u}_1 + \bar{L}_4 \tilde{\phi}_2 - 2C_1 \bar{G}_6 \tilde{w}_2] \tilde{w}_2 \\
& + (\bar{L}_0 - C_2 \bar{L}_2) [(\Psi_{\xi} - \sin \beta \Psi_{\eta}) + (\sec \beta W_{, \xi} - \tan \beta W_{, \eta})]^2 \\
& + (\bar{L}_0 - C_2 \bar{L}_2) (\Psi_{\eta} \cos \beta + W_{, \eta})^2 \} dA \quad , \quad (3.25)
\end{aligned}$$

其中，

$$\tilde{\phi}_1 = \sec \beta (\Psi_{\xi, \xi} - \sin \beta \Psi_{\xi, \eta} - \sin \beta \Psi_{\eta, \xi} + \sin^2 \beta \Psi_{\eta, \eta}) \quad , \quad (3.26a)$$

$$\tilde{\phi}_2 = (\Psi_{\xi, \eta} - 2 \sin \beta \Psi_{\eta, \eta}) + \Psi_{\eta, \xi} \quad , \quad (3.26b)$$

$$\tilde{u}_0 = U_{\xi 0, \xi} - \sin \beta U_{\xi 0, \eta} \quad , \quad (3.26c)$$

$$\tilde{u}_1 = \sec \beta (V_{\eta 0, \xi} - \sin \beta V_{\eta 0, \eta}) + \tan \beta (U_{\xi 0, \xi} - \sin \beta U_{\xi 0, \eta}) \quad , \quad (3.26d)$$

$$\tilde{w}_1 = \sec^2 \beta W_{,\xi\xi} - 2 \tan \beta \sec \beta W_{,\eta\xi} + \tan^2 \beta W_{,\eta\eta} \quad , \quad (3.26e)$$

$$\tilde{w}_2 = (\sec \beta W_{,\xi} - \tan \beta W_{,\eta})_{,\eta} \quad , \quad (3.26f)$$

最大動能為

$$T_{\max} = \frac{\rho \omega^2}{2} \iint_V \left\{ [U_{\xi 0} \cos \beta + z(\Psi_{\xi} - \sin \beta \Psi_{\eta}) - C_1 z^3 ((\Psi_{\xi} - \sin \beta \Psi_{\eta}) + (\sec \beta W_{,\xi} - \tan \beta W_{,\eta}))]^2 \right. \\ \left. + [(V_{\eta 0} + U_{\xi 0} \sin \beta) + z \Psi_{\eta} \cos \beta - C_1 z^3 (\Psi_{\eta} \cos \beta + W_{,\eta})]^2 + W^2 \right\} dV \quad , \quad (3.27)$$

以具完備性之允許函數序列表示 $U_{\xi 0}$ 、 $V_{\eta 0}$ 、 Ψ_{ξ} 、 Ψ_{η} 、 W ：

$$U_{\xi 0}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ai} \bar{U}_{\xi 0i}(\xi, \eta) \quad , \quad (3.28a)$$

$$V_{\eta 0}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} N_{bi} \bar{V}_{\eta 0i}(\xi, \eta) \quad , \quad (3.28b)$$

$$\Psi_{\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ci} \bar{\Psi}_{\xi i}(\xi, \eta) \quad , \quad (3.28c)$$

$$\Psi_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} N_{di} \bar{\Psi}_{\eta i}(\xi, \eta) \quad , \quad (3.28d)$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ei} \bar{W}_i(\xi, \eta) \quad , \quad (3.28e)$$

其中， N_{ai} 、 N_{bi} 、 N_{ci} 、 N_{di} 、 N_{ei} 為待定係數， $\bar{U}_{\xi 0i}$ 、 $\bar{V}_{\eta 0i}$ 、 $\bar{\Psi}_{\xi i}$ 、 $\bar{\Psi}_{\eta i}$ 、 \bar{W}_i 為滿足幾何邊界條件之允許函數。

對於所有滿足幾何邊界條件之 $U_{\xi 0}$ 、 $V_{\eta 0}$ 、 Ψ_{ξ} 、 Ψ_{η} 與 W 函數，使得 Π 最小，即為所欲求之解；而此時所對應之 ω 即為自然振動頻率。將式

(3.25)、式 (3.27) 與式 (3.28) 代入式 (3.23)，依據最小勢能原理得：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_{ai}} = \frac{\partial \Pi}{\partial N_{bi}} = \frac{\partial \Pi}{\partial N_{ci}} = \frac{\partial \Pi}{\partial N_{di}} = \frac{\partial \Pi}{\partial N_{ei}} = 0 \quad , \quad (3.29)$$

整理可得一組特徵方程式

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} & K^{15} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} & K^{25} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} & K^{34} & K^{35} \\ K^{41} & K^{42} & K^{43} & K^{44} & K^{45} \\ K^{51} & K^{52} & K^{53} & K^{54} & K^{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{ai} \\ N_{bi} \\ N_{ci} \\ N_{di} \\ N_{ei} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} & M^{14} & M^{15} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} & M^{24} & M^{25} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} & M^{34} & M^{35} \\ M^{41} & M^{42} & M^{43} & M^{44} & M^{45} \\ M^{51} & M^{52} & M^{53} & M^{54} & M^{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{ai} \\ N_{bi} \\ N_{ci} \\ N_{di} \\ N_{ei} \end{Bmatrix}, \quad (3.30)$$

勁度矩陣 $[K]$ 與質量矩陣 $[M]$ 為對稱矩陣，詳細的公式可參閱附錄二。

3.3 允許函數之建構

3.3.1 懸臂斜形板

本章所探討之懸臂斜形功能梯度材料厚板，幾何圖形如圖 1.1 所示；其斜角為 β ，懸臂上緣長為 a ，固定端寬度為 b ，自由端弦長為 c ，厚度 h 。當 $c=0$ ，則為三角形板；若 $c=b$ ，則為平行四邊形板。動能(式(3.27))與應變能(式(3.25))中之允許函數以 ξ - η 座標表示，首先，須配合傳統滿足幾何邊界條件之完整函數序列，再加上一組角函數，故將允許函數假設為

$$U_{\xi_0}(\xi, \eta) = U_{\xi_p}(\xi, \eta) + U_{\xi_c}(r, \theta), \quad (3.31a)$$

$$V_{\eta_0}(\xi, \eta) = V_{\eta_p}(\xi, \eta) + V_{\eta_c}(r, \theta), \quad (3.31b)$$

$$\Psi_{\xi}(\xi, \eta) = \Psi_{\xi_p}(\xi, \eta) + \Psi_{\xi_c}(r, \theta), \quad (3.31c)$$

$$\Psi_{\eta}(\xi, \eta) = \Psi_{\eta_p}(\xi, \eta) + \Psi_{\eta_c}(r, \theta), \quad (3.31d)$$

$$W(\xi, \eta) = W_p(\xi, \eta) + W_c(r, \theta), \quad (3.31e)$$

其中，下標 ” p ” 表示滿足傳統幾何邊界條件之多項式函數(polynomial functions)，下標 ” c ” 則為角函數。

懸臂斜形板之邊界條件為一端固定端，其他端為自由端；所假設之形狀函數必須滿足下列之邊界條件

$$U_{\xi_0}(0,\eta) = 0, V_{\eta_0}(0,\eta) = 0, \Psi_{\xi}(0,\eta) = 0, \Psi_{\eta}(0,\eta) = 0, W(0,\eta) = 0, W_{,\xi}(0,\eta) = 0。$$

故令多項式形狀函數如下：

$$U_{\xi p}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.32a)$$

$$V_{\eta p}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J b_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.32b)$$

$$\Psi_{\xi p}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.32c)$$

$$\Psi_{\eta p}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.32d)$$

$$W_p(\xi,\eta) = \sum_{i=2}^I \sum_{j=1}^J e_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.32e)$$

上式中之 a_{ij} 、 b_{ij} 、 c_{ij} 、 d_{ij} 與 e_{ij} 為任意參數； (I, J) 為式(3.32a)~式(3.32e)之上限，其值並無任何限制，此處為簡化其複雜性，假設 I 與 J 之值相同。

由於式(3.32a)~式(3.32e)之多項式函數無法確實描述出尖角處(corner)所產生的應力奇異性；因此，加入之角函數可以滿足該處應力奇異性。第二章求得FGM厚板在 C_F (固定端_自由端)邊界下之角函數過於複雜，但其應力奇異性為 $r^{-1/2}$ ，與均勻板相同。因此，為了簡化計算過程，本研究懸臂斜形板採用等向均勻板之角函數。面外角函數是利用Huang

【2002】 建構於Reddy三階板理論的漸近解，而面內角函數是根據平面

彈性理論推導得之。令

$$U_{\xi c} = \sum_{k=1}^K [B_k \operatorname{Re}(u_{\xi c}(r, \theta, \bar{\lambda}_k)) + \tilde{B}_k \operatorname{Im}(u_{\xi c}(r, \theta, \bar{\lambda}_k))] , \quad (3.33a)$$

$$V_{\eta c} = \sum_{k=1}^K [C_k \operatorname{Re}(v_{\eta c}(r, \theta, \bar{\lambda}_k)) + \tilde{C}_k \operatorname{Im}(v_{\eta c}(r, \theta, \bar{\lambda}_k))] , \quad (3.33b)$$

$$\Psi_{\xi c} = \sum_{k=1}^K [D_k \operatorname{Re}(\psi_{\xi c}(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{D}_k \operatorname{Im}(\psi_{\xi c}(r, \theta, \lambda_k))] , \quad (3.33c)$$

$$\Psi_{\eta c} = \sum_{k=1}^K [F_k \operatorname{Re}(\psi_{\eta c}(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{F}_k \operatorname{Im}(\psi_{\eta c}(r, \theta, \lambda_k))] , \quad (3.33d)$$

$$W_c = \sum_{k=1}^K [E_k \operatorname{Re}(w(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{E}_k \operatorname{Im}(w(r, \theta, \lambda_k))] , \quad (3.33e)$$

其中，面外角函數為：

$$\begin{aligned} \psi_r(r, \theta) = B_3 r^{\lambda_k} & \left\{ \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k - 1} \cos(\lambda_k + 1)\theta - \eta_2 \sin(\lambda_k + 1)\theta \right. \\ & \left. + \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k - 1} \cos(\lambda_k - 1)\theta + \eta_1 \sin(\lambda_k - 1)\theta \right\} , \end{aligned} \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} \psi_\theta(r, \theta) = B_3 r^{\lambda_k} & \left\{ -\frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k - 1} \sin(\lambda_k + 1)\theta - \eta_2 \cos(\lambda_k + 1)\theta \right. \\ & \left. + \sin(\lambda_k - 1)\theta + \eta_2 \cos(\lambda_k - 1)\theta \right\} , \end{aligned} \quad (3.34b)$$

$$\begin{aligned} w(r, \theta) = B_3 r^{\lambda_k + 1} & \left\{ \left(\frac{\tilde{k}_1(1 + \lambda_k)}{\lambda_k - 1} - \tilde{k}_2 \right) \cos(\lambda_k + 1)\theta + \frac{(1 - \lambda_k)}{\lambda_k + 1} (\tilde{k}_1 \eta_1 - \tilde{k}_2 \eta_2) \sin(\lambda_k + 1)\theta \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{k}_1(1 + \lambda_k)}{\lambda_k - 1} + \tilde{k}_2 \right\} \cos(\lambda_k - 1)\theta + (\tilde{k}_1 \eta_1 - \tilde{k}_2 \eta_2) \sin(\lambda_k - 1)\theta \} , \end{aligned} \quad (3.34c)$$

$$\tilde{k}_1 = \frac{17}{16\lambda_k} \left(\frac{(1 + \nu)\lambda_k}{2} + \frac{(3 - \nu)}{2} \right) , \quad \tilde{k}_2 = \frac{17}{16\lambda_k} \left(\frac{(1 + \nu)\lambda_k}{2} - \frac{(3 - \nu)}{2} \right) ,$$

$$\eta_1 = \frac{(\lambda_k + 1)[(3 + \nu + \nu\lambda_k - \lambda_k) \cos(\lambda_k - 1)\alpha + (1 + \lambda_k)(1 - \nu) \cos(\lambda_k + 1)\alpha]}{(\lambda_k - 1)[(3 + \nu + \nu\lambda_k - \lambda_k) \sin(\lambda_k - 1)\alpha - (1 - \lambda_k)(1 - \nu) \sin(\lambda_k + 1)\alpha]} ,$$

$$\eta_2 = \frac{(3 + \nu + \nu\lambda_k - \lambda_k) \cos(\lambda_k - 1)\alpha + (1 + \lambda_k)(1 - \nu) \cos(\lambda_k + 1)\alpha}{(3 + \nu + \nu\lambda_k - \lambda_k) \sin(\lambda_k - 1)\alpha - (1 - \lambda_k)(1 - \nu) \sin(\lambda_k + 1)\alpha} .$$

λ_k 為下列面外模態特徵方程式之第 k 個根

$$\sin^2 \alpha \lambda_k = \frac{4 - \lambda_k^2 (1 - \nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3 + \nu)(1 - \nu)} \quad \text{或} \quad \sin^2 \alpha \lambda_k = \frac{4 - \lambda_k^2 (1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3 - \nu)(1 + \nu)} \quad \circ$$

而面內角函數則為

$$u_0(r, \theta) = B_3 r^{\bar{\lambda}_k} \{-\cos(\bar{\lambda}_k + 1)\theta + \delta_1 \sin(\bar{\lambda}_k + 1)\theta + \cos(\bar{\lambda}_k - 1)\theta + \delta_2 \sin(\bar{\lambda}_k - 1)\theta\} \quad , \quad (3.35a)$$

$$v_0(r, \theta) = B_3 r^{\bar{\lambda}_k} \{\delta_1 \cos(\bar{\lambda}_k + 1)\theta + \sin(\bar{\lambda}_k + 1)\theta + \delta_3 \delta_2 \cos(\bar{\lambda}_k - 1)\theta - \delta_3 \sin(\bar{\lambda}_k - 1)\theta\} \quad , \quad (3.35b)$$

其中，

$$\delta_1 = \frac{[(\bar{\lambda}_k^2 - 1)(\nu - 1) - \bar{\lambda}_k(-3 + \bar{\lambda}_k + \nu + \nu \bar{\lambda}_k) \cos 2\alpha + (-3 + \bar{\lambda}_k + \nu + \nu \bar{\lambda}_k) \cos 2\bar{\lambda}_k \alpha]}{(-3 + \bar{\lambda}_k + \nu + \nu \bar{\lambda}_k)(\sin 2\bar{\lambda}_k \alpha - \bar{\lambda}_k \sin 2\alpha)} \quad ,$$

$$\delta_2 = \frac{[3 - \bar{\lambda}_k - \nu - \nu \bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_k(\nu + 1) \cos 2\alpha + (\nu + 1) \cos 2\bar{\lambda}_k \alpha]}{(\nu + 1)(\bar{\lambda}_k \sin 2\alpha - \sin 2\bar{\lambda}_k \alpha)} \quad ,$$

$$\delta_3 = \frac{3 + \bar{\lambda}_k - \nu + \bar{\lambda}_k \nu}{-3 + \bar{\lambda}_k + \nu + \bar{\lambda}_k \nu} \quad \circ$$

$\bar{\lambda}_k$ 為下列面內模態特徵方程式之第 k 個根

$$\sin^2 \alpha \bar{\lambda}_k = \frac{4 - \bar{\lambda}_k^2 (1 - \nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3 + \nu)(1 - \nu)} \quad \circ$$

因為漸近解 u_0 、 v_0 、 ψ_r 、 ψ_θ 及 w 定義於極座標系統，懸臂斜形板之計算須將其從極座標系統轉換到 $\xi - \eta$ 座標系統。經轉換後(參看圖 1.1、圖 3.1)，

可得

$$u_{\xi c}(r, \theta, \bar{\lambda}_k) = (\cos \theta \sec \beta) v_0(r, \theta, \bar{\lambda}_k) + (\sin \theta \sec \beta) u_0(r, \theta, \bar{\lambda}_k) \quad , \quad (3.36a)$$

$$v_{\eta c}(r, \theta, \bar{\lambda}_k) = (\sin \theta - \tan \beta \cos \theta) v_0(r, \theta, \bar{\lambda}_k) + (-\cos \theta - \tan \beta \sin \theta) u_0(r, \theta, \bar{\lambda}_k) \quad , \quad (3.36b)$$

$$\psi_{\xi c}(r, \theta, \lambda_k) = (\tan \beta \sin \theta - \cos \theta) \psi_r(r, \theta, \lambda_k) - (\sin \theta + \tan \beta \cos \theta) \psi_\theta(r, \theta, \lambda_k) \quad , \quad (3.36c)$$

$$\psi_{\eta c}(r, \theta, \lambda_k) = \sec \beta \sin \theta \psi_r(r, \theta, \lambda_k) - \sec \beta \cos \theta \psi_\theta(r, \theta, \lambda_k) \quad , \quad (3.36d)$$

其中，

$$r = \left[\left(\frac{b}{2} - \eta \right)^2 + \xi^2 - 2\xi \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \sin \beta \right]^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\xi \cos \beta}{\left(\frac{b}{2} - \eta \right) - \xi \sin \beta} \quad (3.36e)$$

3.3.2 具邊緣裂縫簡支承矩形板

圖 1.2 所繪製之具邊緣裂縫簡支承矩形板， AL 為矩形板之長度， BL 為矩形板之寬度， DL 為裂縫長度， Cy 為裂縫位置， α_c 為裂縫傾斜角度。取允許函數為：

$$U_{x0}(x, y) = U_{xp}(x, y) + U_{xc}(r, \theta), \quad (3.37a)$$

$$V_{y0}(x, y) = V_{yp}(x, y) + V_{yc}(r, \theta), \quad (3.37b)$$

$$\Psi_x(x, y) = \Psi_{xp}(x, y) + \Psi_{xc}(r, \theta), \quad (3.37c)$$

$$\Psi_y(x, y) = \Psi_{yp}(x, y) + \Psi_{yc}(r, \theta), \quad (3.37d)$$

$$W(x, y) = W_p(x, y) + W_c(r, \theta), \quad (3.37e)$$

其中，下標 "p" 表示滿足傳統幾何邊界條件之多項式函數 (polynomial functions)，下標 "c" 則為角函數。

當考慮具邊緣裂縫簡支承矩形板，形狀函數須滿足

$$U_{x0}(0, y) = 0, \quad V_{y0}(0, y) = 0, \quad \Psi_y(0, y) = 0, \quad W(0, y) = 0, \quad (3.38a)$$

$$U_{x0}(AL, y) = 0, \quad V_{y0}(AL, y) = 0, \quad \Psi_y(AL, y) = 0, \quad W(AL, y) = 0, \quad (3.38b)$$

$$U_{x0}(x, 0) = 0, \quad V_{y0}(x, 0) = 0, \quad \Psi_x(x, 0) = 0, \quad W(x, 0) = 0, \quad (3.38c)$$

$$U_{x0}(x, BL) = 0, \quad V_{y0}(x, BL) = 0, \quad \Psi_x(x, BL) = 0, \quad W(x, BL) = 0, \quad (3.38d)$$

由於考慮矩形板；因此，很容易建構滿足邊界條件之正交多項式函數。

故令：

$$U_{xp}(x, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) , \quad (3.39a)$$

$$V_{yp}(x, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J b_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) , \quad (3.39b)$$

$$\Psi_{xp}(x, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{ij} \tilde{\phi}_i(x) \psi_j(y) , \quad (3.39c)$$

$$\Psi_{yp}(x, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J d_{ij} \phi_i(x) \tilde{\psi}_j(y) , \quad (3.39d)$$

$$W_p(x, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J e_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) , \quad (3.39e)$$

其中， $\phi_i(x)$ ， $\tilde{\phi}_i(x)$ ， $\psi_j(y)$ 和 $\tilde{\psi}_j(y)$ 是經由 Gram-Schmidt 的演算程序(Bhat

【1985】)所獲得之正交多項式函數。以建構 $\phi_i(x)$ 為例：

取

$$\phi_0(x) = x(AL - x) , \quad (3.40a)$$

$$\phi_1(x) = (x - \beta_1)\phi_0(x) , \quad (3.40b)$$

$$\phi_i(x) = (x - \beta_i)\phi_{i-1}(x) - C_i\phi_{i-2}(x) , \quad (3.40c)$$

其中， $\beta_i = \frac{\int_0^{AL} x \phi_{i-1}^2(x) dx}{\int_0^{AL} \phi_{i-1}^2(x) dx}$ ， $C_i = \frac{\int_0^{AL} x \phi_{i-1}(x) \phi_{i-2}(x) dx}{\int_0^{AL} \phi_{i-2}^2(x) dx}$ ， $\phi_i(x)$ 需滿足

$\int_0^{AL} \phi_k(x) \phi_l(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ a_{kl}, & k = l \end{cases}$ ，使用正交多項式可改善使用多項式造成病態

矩陣之現象。

若祇使用式(3.39a)~式(3.39e)之允許函數於Ritz法中，Ritz法將不知裂縫之存在與否。因此，為讓Ritz法知道裂縫之存在，須於允許函數引入於裂縫處函數不連續且函數微分不連續的函數。另外，函數亦須能準確描

述裂縫尖端處之應力奇異行為。從第二章所推導之漸近解中可知，裂縫

尖端之漸近解為：

(A) 對稱：

$$u_0^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin \alpha + \sin \lambda \alpha) \right) \cos(\lambda+1)\theta - \bar{\eta}_8 \cos(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.41a)$$

$$v_0^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ - \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin \alpha + \sin \lambda \alpha) \right) \sin(\lambda+1)\theta \right. \\ \left. + \left(-\kappa_1 \bar{\eta}_8 - \kappa_2 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.41b)$$

$$w^{(a)} = D_3 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_9 \left[\frac{\bar{\eta}_{10}}{C_1(\lambda+1)} \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta - \frac{1}{C_1(\lambda+1)} \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\}, \quad (3.41c)$$

$$\psi_r^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ -\bar{\eta}_{10} \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda-1)\theta + \cos(\lambda+1)\theta \right\}, \quad (3.41d)$$

$$\psi_\theta^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_{10} \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \left(-\kappa_1 - \kappa_3 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.41e)$$

(B) 反對稱：

$$u_0^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ - \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin \alpha - \sin \lambda \alpha) \right) \sin(\lambda+1)\theta - \bar{\eta}_8 \sin(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.42a)$$

$$v_0^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ - \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin \alpha - \sin \lambda \alpha) \right) \cos(\lambda+1)\theta \right. \\ \left. + \left(-\kappa_1 \bar{\eta}_8 - \kappa_2 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.42b)$$

$$w^{(a)} = D_4 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_9 \left[\frac{\bar{\eta}_{10}}{C_1(\lambda+1)} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta - \frac{1}{C_1(\lambda+1)} \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\}, \quad (3.42c)$$

$$\psi_r^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ -\bar{\eta}_{10} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.42d)$$

$$\psi_\theta^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ -\bar{\eta}_{10} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \left(\kappa_1 - \kappa_3 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}, \quad (3.42e)$$

其中， $\bar{\eta}_8 \sim \bar{\eta}_{10}$ 詳列於附錄一， $\lambda = \frac{n}{2}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。此解除了滿足於裂

縫尖端處之應力奇異時，亦符合於裂縫處位移與轉角不連續的特性，但

是由於式(3.41)及式(3.42)之表示式過於複雜，因此，取

$$U_{xc}(r, \theta) = f_u(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_1} \sum_{l=0}^n B_{nl} r^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_2} \sum_{l=0}^n \tilde{B}_{nl} r^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \right\}, \quad (3.43a)$$

$$V_{yc}(r, \theta) = f_v(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_1} \sum_{l=0}^n C_{nl} r^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_2} \sum_{l=0}^n \tilde{C}_{nl} r^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \right\}, \quad (3.43b)$$

$$\Psi_{xc}(r, \theta) = f_x(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_1} \sum_{l=0}^n D_{nl} r^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_2} \sum_{l=0}^n \tilde{D}_{nl} r^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \right\}, \quad (3.43c)$$

$$\Psi_{yc}(r, \theta) = f_y(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_1} \sum_{l=0}^n F_{nl} r^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_2} \sum_{l=0}^n \tilde{F}_{nl} r^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \right\}, \quad (3.43d)$$

$$W_c = f_w(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_1} \sum_{l=0}^n E_{nl} r^{(2n+1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_2} \sum_{l=0}^n \tilde{E}_{nl} r^{(2n+1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \right\}, \quad (3.43e)$$

其中，

$$f_u(x, y) = xy(AL - x)(BL - y), \quad (3.44a)$$

$$f_v(x, y) = xy(AL - x)(BL - y), \quad (3.44b)$$

$$f_x(x, y) = y(BL - y), \quad (3.44c)$$

$$f_y(x, y) = x(AL - x) , \quad (3.44d)$$

$$f_w(x, y) = xy(AL - x)(BL - y) , \quad (3.44e)$$

式(3.43)中大括弧所含之函數集明顯包含式(3.41)及式(3.42)者，並稱大括弧內之函數為“修正角函數”。式 (3.44a)~式(3.44e)所示之函數則為使式(3.43a)~式(3.43e)滿足幾何邊界條件。



3.4 收斂性分析

當從完備允許函數取用足夠多項時，由 Ritz 法所獲得之頻率應準確地從上限收斂至真解。而本研究所分析之案例皆具有應力奇異點，於允許函數中引入能描述應力奇異性之角函數。針對收斂性分析之研究，本節主要探討的重點為角函數是否能有效的加速數值解收斂之速度，並且在不良矩陣(ill-conditioning matrix)發生前，求得準確的自然振動頻率？

將允許函數式(3.32)、式(3.33)、式(3.39)、式(3.43)代入勁度矩陣與質量矩陣中，經數值積分後，可得到式 (3.30)之特徵方程式。本研究利用“IMSL”程式庫中之副程式一“DGVCSF”來求解特徵值問題，不僅可以獲得自然振動頻率，亦可得到相對應的模態。

本章的數值結果以無因次化頻率 Ω ($\omega l^2 \sqrt{12(1-\nu^2)\rho_b/(E_b h^2)}$) 或 $\bar{\Omega}$ ($\omega(AL)^2 \sqrt{12(1-\nu^2)\rho_b/(E_b h^2)}$) 表示。取波松比(ν)為 0.3。本章所使用之程式是以 FORTRAN 程式言語來撰寫，並將其於 64 位元的作業系統中執行，採用四倍精確度之變數進行運算。

表 3.1~表 3.5 為懸臂斜形板與具邊緣裂縫簡支承矩形板之收斂性分析。表 3.1 中(I, J)為式 (3.32a)~式(3.32e)多項式函數之項數所使用之個數，而角函數數目 \bar{N}_c (No. of Corner Functions) 則代表式 (3.33a)~ (3.33e)中各角函數之個數(即 $U_{\xi c}$ 、 $V_{\eta c}$ 、 $\Psi_{\xi c}$ 、 $\Psi_{\eta c}$ 、 W_c 個別之數目)，故所使用允許函數之

總項數為 $5 \times [(I-1) \cdot J + I] - 1 + 5\bar{N}_c$ 。表 3.2 中 (I, J) 為式 (3.39a)~式(3.39e) 多項式函數之項數所使用之個數，而 \bar{N}_1 、 \bar{N}_2 則代表式 (3.43a)~ (3.43e) 中各角函數控制 r 階數之參數，故所引用之總項數為

$$5 \left(I \times J + \frac{\bar{N}_1(\bar{N}_1 + 3)}{2} + \frac{\bar{N}_2(\bar{N}_2 + 3)}{2} \right)。$$

3.4.1 均質厚板

為驗證程式之正確性，先進行近似均質板之收斂性分析並與文獻中均質板之結果相比較(參看表 3.1 和表 3.2)。為考慮類似均質板，取體積比例階數(m)為 0.0001，板頂、底面材料性質比 E_t/E_b 、 ρ_t/ρ_b 為 1.0001。表 3.1 考慮斜角 60° ，寬厚比(h/b)為 0.2、長寬比(a/b)為 1 之懸臂平行四邊形功能梯度材料厚板，並與 McGee 和 Butalia 【1992c】之結果比較。McGee 和 Butalia 【1992c】利用高階板理論及有限元素法，分析懸臂斜平行四邊形、梯形及三角形板之振動。表 3.1 中觀察每一振態在各多項式與角函數項數($(I, J) + \bar{N}_c$)為 $(9, 9) + 5$ 、 $(9, 9) + 10$ 與 $(10, 10) + 10$ 所得之頻率值，可發現項數 $(10, 10) + 10$ 所得前五個振態之頻率值具至少 3 位有效位數收斂之精確度，與 McGee 和 Butalia 【1992】文獻中之結果相當接近，故可確認本研究所使用之程式的正確性。

表 3.2 則考慮一具邊緣裂縫簡支承矩形板，其寬厚比(h/BL)為 0.01，長寬比(AL/BL)為 2，裂縫長度與矩形長邊比(DL/AL)為 0.8，裂縫位於

$Cy/BL=0.5$ ，同樣地，亦將其結果Stahl和Keer 【1972】相比較。Stahl和Keer 【1972】利用Fredholm 積分，求解具裂縫簡支承矩形薄板之自然振動頻率。表 3.2 中觀察每一振態發現，當多項式和角函數項數 $((I,J)+\bar{N}_1+\bar{N}_2)$ 為 $(9,9)+8+8$ 、 $(9,9)+10+10$ 和 $(10,10)+8+8$ 時，無因次化頻率值亦可收斂至 3 位有效位數，收斂的數值結果皆低於Stahl和Keer 【1972】解析解，因為Stahl和Keer 【1972】探討之問題是架構在薄板理論，相對於Reddy三階板理論會有高估自然振動頻率的現象。表 3.2 近似均質板無因次化頻率，除了收斂至三位有效位數外，亦相當接近Stahl和Keer 【1972】文獻之結果，故本研究所使用之程式應是正確無誤的。

3.4.2 懸臂斜形板

表 3.3 及表 3.4 所示者分別為斜角 60° 和 75° 懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析。表中列出前五個模態之振動頻率，此兩案例的幾何及材料參數皆是寬厚比(h/b)為 0.5、長寬比(a/b)為 1，取 E_t/E_b 、 ρ_t/ρ_b 和 m 均為 5。表 3.3 及表 3.4 所使用多項式之項數(I,J)從 $(6,6)$ ， $(7,7)$ ， \dots ，增加至 $(11,11)$ ，而角函數項數(\bar{N}_c)從 0, 1, \dots ，增加至 10 個。從表 3.3 及表 3.4 發現到當只使用多項式函數時，收斂性較差。然而，在數學理論上，使用一完整多項式之集合，或說是使用無限多個多項式，同樣可使自然振動頻率收斂至精確值；但在數值計算過程，卻會產生不

良(ill-conditioning)之情況。在多項式項數之使用上有其限制時，加入角函數，便成了立即且有效達到收斂之方式。表 3.3 及 表 3.4 之結果顯示：

- (a) 以第一振態為例，比較各位移分量($U_{\xi 0}$ 、 $V_{\eta 0}$ 、 Ψ_{ξ} 、 Ψ_{η} 及 W)中多項式和角函數項數($(I,J)+\bar{N}_c$)為(6,6)+0、(11,11)+0 和(6,6)+5 之頻率值。表 3.3 中以(6,6)+0 所得之頻率值 0.969 為基準，(11,11)+0 所得之頻率值 0.939，降低了 3.09%；而(6,6)+5 所得之頻率值 0.933，降低了 3.7%。同樣地，表 3.4 中從(6,6)+0 至(6,6)+5 所得之頻率值降低了 6.67%，而從(6,6)+0 至(11,11)+0 所得之頻率則只降低了 4.84%。角函數對於收斂速度之影響明顯比多項式來的大。從(6,6)+0 至(6,6)+5，允許函數只增加了 25 個角函數，而從(6,6)+0 至(11,11)+0 則增加了 400 個多項式。
- (b) 當斜角角度愈大時，角函數之效果更加顯著。例如，表 3.3 中斜角 60° 時，(11,11)+0 與(11,11)+5 頻率值之差異小於 0.9%；而表 3.4 中斜角 75° 時，(11,11)+0 與(11,11)+5 頻率值之平均差異大約 1.9%。
- (c) 觀察(10,10)+5，(11,11)+5 與(10,10)+10 每一個振態所得之頻率值，可發現大部分之頻率值皆可收斂至少三位有效位數。

3.4.3 具邊緣裂縫簡支承矩形板

表 3.5 所列者為裂縫長度與長邊比 $DL/AL=0.5$ 的具邊緣裂縫簡支承矩形板

之無因次化頻率($\bar{\Omega}$)之收斂性分析，其厚寬比 $h/BL = 0.1$ ，長寬比 $AL/BL=2$ ，裂縫位置與寬邊比 $Cy/BL=0.5$ ；取體積比例階數 $m = 10$ ，板頂面與底面楊氏模數比 $E_t/E_b = 5$ ，密度比 $\rho_t/\rho_b = 10$ 。表 3.5 中所使用多項式之項數 (I,J) 從 $(6,6)$ ， $(7,7)$ ， \dots ，增加至 $(10,10)$ ，而角函數項數 (\bar{N}_1, \bar{N}_2) 為 $0, 1, 5, 7$ 個。從表 3.5 中發現到幾個值得注意的現象：

- (a) 只使用多項式函數時，無因次化頻率已經可以收斂，但對本研究的案例而言，卻無任何意義，因為此收斂值在沒有加入角函數的情況下，只是一般“無裂縫”矩形板的收斂頻率。因此，面對裂縫問題時，修正角函數扮演了一個絕對重要的角色。
- (b) 觀察每一振態發現，當多項式和角函數項數 $((I,J) + \bar{N}_1 + \bar{N}_2)$ 為 $(8,8)+5+5$ 、 $(8,8)+7+7$ 和 $(9,9)+5+5$ 時，無因次化頻率值皆可收斂至 3 位有效位數。

3.5 結果與討論

3.5.1 懸臂斜形板

本節主要研究之重點，在於對不同材料性質 E_t/E_b 、 ρ_t/ρ_b 與不同體積比例階數 m ，以及不同幾何參數 a/b 、 h/b 、 c/b 、 β (參看圖 1.1)之情況下，探討這些參數對三種不同形狀(平行四邊形、梯形和三角形)之懸臂功

能梯度材料厚板振動頻率之影響。本節數值分析所使用的項數 $((I,J)+\bar{N}_c)$ 分別為，斜角 0° 、 30° 、 45° 皆採用 $(9,9)+5$ ，而斜角 60° 和 75° 則採用 $(9,9)+10$ ，根據表 3.3 及表 3.4 收斂性分析之結果，這些項數足以達到四位有效位數的收斂值。

表 3.6、表 3.7 及表 3.8 分別為三種不同形狀的懸臂功能梯度材料厚板之無因次化頻率 (Ω) ：平行四邊形 $(h/b=0.5, c/b=1)$ 、梯形 $(h/b=0.5, c/b=0.5)$ 和三角形 $(h/b=0.2, c/b=0)$ ；取波松比 $\nu=0.3$ 、 $\rho_t/\rho_b=10$ 。表 3.6 與表 3.7 所列者針對不同的斜角 $(\beta=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ)$ 、材料參數 $(E_t/E_b=2, 5)$ 及體積比例階數 $(m=0, 0.5, 5)$ 之前五個振態進行探討，而表 3.8 所列者不同於表 3.6 與表 3.7 之處在於體積比例階數為 0、5 和 10。表 3.6、表 3.7 及表 3.8 中密度比 (ρ_t/ρ_b) 皆固定為 10，相關現象如下顯示：

- (a) 當體積比例階數 $m=0$ ，楊氏模數比從 $E_t/E_b=2$ 增加至 5 時，無因次化振動頻率值會隨之增加。此現象與均質板勁度增加，頻率值並不會改變的情形有所不同，主要的原因是無因次化頻率 $\Omega = \omega l^2 \sqrt{12(1-\nu^2)\rho_b/(E_b h^2)}$ 其中的 E_b 不是真實均質板之楊氏模數所致。
- (b) 不論幾何形狀是平行四邊形、梯形或三角形，當體積比例階數 (m) 、楊氏模數比 (E_t/E_b) 和密度比 (ρ_t/ρ_b) 固定時，無因次化振動頻率值會隨著斜角 (β) 增加而變小。例如，表 3.6 所列者，當 $m=5$ ，

$E_t/E_b=2$ 且 $\rho_t/\rho_b=10$ ，斜角為 0° 、 30° 、 45° 、 60° 及 75° 時，第一振態之頻率值分別為 2.025、1.641、1.188、0.617 和 0.103，由此可看出頻率與斜角大小成反比之趨勢。

- (c) 當體積比例階數(m)和斜角(β)固定，而楊氏模數比(E_t/E_b)從 2 變成 5 時，無因次化振動頻率值也會隨之增加，並且發現其彼此之間有一倍數關係。所列者，當 $m=10$ 且斜角為 0° ，觀察第一振態之變化，發現 $E_t/E_b=5$ 的頻率值 5.279 與 $E_t/E_b=2$ 的頻率值 4.593 之比約為 1.1 倍，第二~第五振態也有相同的倍數關係，對於其他斜角也有一樣的特性。
- (d) 於表 3.7，當斜角為 0° 、 30° 、 45° 時，第一、三、五振態是以面外振動為主的振態，而第二、四振態則是以面內振動為主的振態。以 $m=5$ 為例，第一、三、五振態之 $E_t/E_b=5$ 的頻率值大約為 $E_t/E_b=2$ 的 1.18 倍，第二、四振態之 $E_t/E_b=5$ 的頻率值大約為 $E_t/E_b=2$ 的 1.23 倍。此處所謂以面外振動或面內振動為主是根據特徵向量來判定。
- (e) 當楊氏模數比(E_t/E_b)和斜角(β)固定之情況下，增加體積比例階數(m)將會造成無因次化振動頻率值的增加；從圖 3.2 體積比例參數($V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^m$)隨厚度方向之變化情形可發現，當 m 增加時，勁度與質量會逐漸遞減，但是質量降低的速度比勁度快，故形成頻率值增加的趨勢。表 3.7 所列者，當 $E_t/E_b=2$ ，探究斜角為 0° 、 30° 、 45° 、 60° 及 75° 時， $m=5$ 與 $m=0.5$ 之頻率值比：以面外

振動為主的振態大約為 1.43 倍，以面內振動為主的振態大約為 1.35 倍。表 3.8 中，取 $E_t/E_b=2$ ，比較斜角為 0° 、 30° 時， $m=10$ 與 $m=0$ 無因次化振動頻率值之比；以面外振動為主的振態(第一、三、四振態)大約為 1.77 倍，而以面內振動為主的振態(第二、五振態)大約為 1.71 倍。

3.5.2 具邊緣裂縫簡支承矩形板

本節主要針對具邊緣裂縫簡支承矩形板，探討不同的裂縫長度、不同的體積比例階數與楊氏模數比之情況下，具邊緣裂縫簡支承矩形板無因次化頻率($\bar{\Omega}$)改變的趨勢。根據收斂性分析的結果，本節之數值分析所採用的項數($(I,J)+\bar{N}_1+\bar{N}_2$)為 $(9,9)+7+7$ ，此項數已能達到三位有效位數的收斂值。表 3.9 所列者為厚寬比 $h/BL=0.1$ ，長寬比 $AL/BL=2$ ，裂縫位置與寬邊比 $Cy/BL=0.5$ ，密度比 $\rho_t/\rho_b=10$ ，不同裂縫長度與長邊比 $DL/AL=0.1, 0.5$ 和 0.7 、不同的體積比例階數 $m=2, 5$ 和 10 與不同的楊氏模數比 $E_t/E_b=2, 5$ 和 20 之前五個振態無因次化頻率。由表 3.9 可觀察到：

- (a) 不論材料參數($E_t/E_b, \rho_t/\rho_b$)的組成為何，增加裂縫長度導致無因次化頻率值之降低。此乃裂縫開的愈大，板之勁度就愈小所致。
- (b) 與懸臂斜形板較不一樣的地方是，具邊緣裂縫之矩形板前五個振態皆是面外模態，而不像懸臂斜形板面內模態與面外模態交錯。可能

是厚寬比較小造成的，懸臂斜形板所用的厚寬比是 0.2 和 0.5，而具邊緣裂縫之矩形板用的厚寬比是 0.1。

(c) 在材料性質對無因次化頻率值的影響方面，與懸臂斜形板類似；當固定 E_t/E_b 與 DL/AL 時，體積比例階數 m 的增加會使無因次化頻率值跟著增加。例如，取 $E_t/E_b = 5$ 、 $DL/AL = 0.1$ 時， $m = 10$ 和 $m = 5$ 之頻率值比約為 1.25 倍。

(d) 當 m 與 DL/AL 固定時，改變楊氏模數比 E_t/E_b ，亦會使板勁度變大，造成無因次化頻率值的增加。例如， $m = 5$ 、 $DL/AL = 0.5$ 時， $E_t/E_b = 20$ 和 5 之頻率值比約為 1.42 倍。



第四章 無元素 Galerkin 法之應用

本章第二章之結果應用於無元素 Galerkin 法(Element-free Galerkin Method)之基底函數，求解具邊緣裂縫矩形功能梯度材料厚板之應力強度因子(stress intensity factors)。無元素 Galerkin 法採用移動最小平方差法(Moving Least Square Method)建立近似的位移函數，進而代入勁度及外力矩陣中，於無元素法(mesh free method)中以無元素 Galerkin 法的計算最穩定，精度較高，為無元素法中較為成熟的一種方法。本研究直接利用應力強度因子的基本定義來估算應力強度因子，經由應力與應力強度因子之關係，利用應力奇異項次，即可求得。

4.1 移動最小平方差法建構形狀函數

4.1.1 基本原理

在移動最小平方差法中，定義域內任意一點(X)之近似位移場 $(u_{x_0}, v_{y_0}, \psi_x, \psi_y, w)$ 中任一分量 $\tilde{u}^\alpha(X)$ 可用數學完備函數集(例如多項式)表示成

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\alpha(X) &= a_0 + a_1x + a_2y + \dots \\ &= [1, x, y, \dots] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{p}^T(X) \mathbf{a}^\alpha(X),\end{aligned}\quad (4.1)$$

其中， $\mathbf{p}(X)$ 為線性獨立且具完整性的基底函數向量； $\mathbf{a}^\alpha(X)$ 則為待定係數向量； α 代表其位移分量， $\alpha=1, 2, 3, 4, 5$ 分別代表 u_{x0} 、 v_{y0} 、 ψ_x 、 ψ_y 和 w 。

本研究分析之兩種案例為具邊緣裂縫矩形板，分別受面內載重和面外載重作用(如圖 4.1 及圖 4.2 所示)。為精確描述裂縫尖端處之奇異應力場，如同前章所述理由，於式 (4.1) 中之 $\mathbf{p}(X)$ 再加入適當之函數：位移分量 u_{x0} 、 v_{y0} 、 ψ_x 和 ψ_y 之基底函數取為

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, G_I(r, \theta)] , \quad (4.2)$$

另外， w 之基底函數取為

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, F_I(r, \theta)] , \quad (4.3)$$

其中，

$$G_I(r, \theta) = \left[\sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right] , \quad (4.4)$$

$$F_I(r, \theta) = \left[r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3\theta}{2}, r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\theta}{2}, r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \right] , \quad (4.5)$$

由於移動最小平方差法之特性，基底函數不須如前章之 Ritz 法用許多項之允許函數。本研究祇取 6 項多項式及 4 項修正角函數。因此，式 (4.1) 中，相對應的待定係數則為

$$\mathbf{a}^\alpha = [a_1^\alpha(X), a_2^\alpha(X), a_3^\alpha(X), \dots, a_8^\alpha(X), a_9^\alpha(X), a_{10}^\alpha(X)]^T , \quad (4.6)$$

式 (4.6) 中之待定係數可利用權重平方差法決定之。

為了定義一誤差函數 J 如下

$$J(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{\hat{n}} \widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_l) [\mathbf{p}^T(\mathbf{X}_l) \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{X}) - u_l^\alpha]^2, \quad (4.7)$$

其中， u_l^α 為 \mathbf{X} 點處之真正位移分量值； $\widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_l)$ 為權重，為讓取樣點 \mathbf{X}_l 對 \mathbf{X} 點有不一樣之權重，取 $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_l|$ 值愈小，則 $\widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_l)$ 值愈大； \hat{n} 為權重函數定義域內之節點數目。使誤差達最小值 $\frac{\partial J}{\partial (\mathbf{a}^\alpha)} = 0$ 時，可得一組線性關係式

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{\hat{n}} \mathbf{B}(\mathbf{X}) u_l^\alpha, \quad (4.8)$$

其中，

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{\hat{n}} \widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_l) \mathbf{p}(\mathbf{X}_l) \mathbf{p}^T(\mathbf{X}_l), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = [\widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1) \mathbf{p}(\mathbf{X}_1), \widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_2) \mathbf{p}(\mathbf{X}_2), \dots, \widehat{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\hat{n}}) \mathbf{p}(\mathbf{X}_{\hat{n}})], \quad (4.10)$$

因此，由式 (4.8) 可得

$$\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{\hat{n}} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) u_l^\alpha, \quad (4.11)$$

再將式 (4.11) 代回式 (4.1)，得

$$\tilde{u}^\alpha(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{\hat{n}} \mathbf{p}^T(\mathbf{X}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) u_l^\alpha = \sum_{l=1}^{\hat{n}} \psi_l^\alpha(\mathbf{X}) u_l^\alpha, \quad (4.12)$$

其中，

$$\psi_l^\alpha(\mathbf{X}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{X}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}), \quad (4.13)$$

$\psi_l^\alpha(\mathbf{X})$ 為類似傳統有限元素法中之形狀函數，同理，根據式 (4.12)，五個

位移函數可表示如下成：

$$\begin{Bmatrix} u_{x0}(x,y) \\ v_{y0}(x,y) \\ \psi_x(x,y) \\ \psi_y(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{\hat{n}} \begin{bmatrix} \psi_I^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_I^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_I^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_I^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_I^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I^1 \\ u_I^2 \\ u_I^3 \\ u_I^4 \\ u_I^5 \end{Bmatrix}, \quad (4.14)$$

由於處理矩陣微分之方式，不像是一般對函數微分那樣直接，須透過一種間接的過程，輾轉才能達到矩陣微分的目的。演算過程如下：

令 $\gamma(X) = \mathbf{p}^T(X)\mathbf{A}^{-1}(X)$ ，則式 (4.13) 可表示成

$$\psi_I^\alpha(X) = \gamma(X)\mathbf{B}(X), \quad (4.15)$$

且

$$\mathbf{A}(X)\gamma(X) = \mathbf{p}^T(X), \quad (4.16)$$

接著，式 (4.16) 中對 $\gamma(X)$ 的偏微分可以表示成

$$\mathbf{A}\gamma_{,x} = \mathbf{p}_{,x}^T - \mathbf{A}_{,x}\gamma, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{A}\gamma_{,y} = \mathbf{p}_{,y}^T - \mathbf{A}_{,y}\gamma, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{A}\gamma_{,xx} = \mathbf{p}_{,xx}^T - (\mathbf{A}_{,xx}\gamma + 2\mathbf{A}_{,x}\gamma_{,x}), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{A}\gamma_{,yy} = \mathbf{p}_{,yy}^T - (\mathbf{A}_{,yy}\gamma + 2\mathbf{A}_{,y}\gamma_{,y}), \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A}\gamma_{,xy} = \mathbf{p}_{,xy}^T - (\mathbf{A}_{,xy}\gamma + \mathbf{A}_{,x}\gamma_{,y} + \mathbf{A}_{,y}\gamma_{,x}), \quad (4.21)$$

將式 (4.17)~式 (4.21) 等號左右兩邊同時乘上 $\mathbf{A}^{-1}(X)$ ，即可得 $\gamma(X)$ 的偏微分公式。再將 $\gamma(X)$ 的偏微分公式代回式 (4.15)，即可獲得式 (4.13) 形狀函數的偏微分

$$\psi_{I,x}^\alpha = \gamma_{,x}\mathbf{B}_I + \gamma\mathbf{B}_{I,x}, \quad (4.22)$$

$$\psi_{I,y}^{\alpha} = \gamma_{,y} \mathbf{B}_I + \gamma \mathbf{B}_{I,y} , \quad (4.23)$$

$$\psi_{I,xx}^{\alpha} = \gamma_{,xx} \mathbf{B}_I + 2\gamma_{,x} \mathbf{B}_{I,x} + \gamma \mathbf{B}_{I,xx} , \quad (4.24)$$

$$\psi_{I,yy}^{\alpha} = \gamma_{,yy} \mathbf{B}_I + 2\gamma_{,y} \mathbf{B}_{I,y} + \gamma \mathbf{B}_{I,yy} , \quad (4.25)$$

$$\psi_{I,xy}^{\alpha} = \gamma_{,xy} \mathbf{B}_I + \gamma_{,x} \mathbf{B}_{I,y} + \gamma_{,y} \mathbf{B}_{I,x} + \gamma \mathbf{B}_{I,xy} , \quad (4.26)$$

4.1.2 權重函數

權重函數(weight function)的選擇決定了節點對取樣點的影響程度；以節點為中心，取樣點距離節點愈遠，則其受節點的影響愈小。一般而言，選取權重函數的原則有下列三點：

- (1) 為了確保待定係數 $\mathbf{a}^{\alpha}(X)$ 是唯一解，權重函數值必須為正，才能使得 $A^{-1}(X)$ 存在。
- (2) 權重函數對各變數(x 或 y)的微分必須存在。
- (3) 權重函數須能反應出節點與取樣點之間的影响力：距離節點愈近者，權重愈大；愈遠者，權重愈小。

在移動最小平方差法中，常用的權重函數有四次(三次)多項式權重函數、指數權重函數、圓錐形權重函數以及修正之指數權重函數(Belytschko 等人【1994】)等。本研究選擇修正之指數權重函數為

$$\widehat{W}(X - X_I) \equiv \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{e^{-(\bar{d}/C_w)^2} - e^{-(d_m/C_w)^2}}{(1 - e^{-(d_m/C_w)^2})} & \text{for } \bar{d} \leq d_m, \\ 0 & \text{for } \bar{d} > d_m \end{cases}, \quad (4.27)$$

其中， d_m 為節點(X_I)之影響區域， $\bar{d} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ 是取樣點(X)與節點(X_I)之距離。 C_w 為控制權重函數相對權重的參數，而且是最重要的一個參數，但該值的大小並無統一之規定，端視所分析之案例而定。此權函數具有 n 階微分連續的性質，因此由移動最小平方差法所建構之形狀函數($\psi_i^\alpha(X)$)及其微分後之結果亦具有連續性。

當任意取樣點(X)被節點(X_I)的影響範圍所涵蓋，此節點對該取樣點會產生影響，則該節點會被納入建構近似函數之計算。值得注意的是，移動最小平方差法計算過程中，權重函數所含蓋節點數(N)必須大於等於待定係數($\mathbf{a}^\alpha(X)$)的數目；如此才能確保求解時不會有奇異矩陣產生。

4.2 勁度矩陣與外力矩陣

先定義一總势能函數為

$$\Pi = U - W, \quad (4.28)$$

其中， U 與式 (3.25) 中之 U_{\max} 相同，祇是其定義於 (x, y) 座標系統。故於式 (3.25) 中之 $\beta = 0$ 即可得式 (4.28) 之 U ； W 為外力所做之功。將式 (4.14) 之位移函數代入總势能函數中，可得外力所做之功為

$$W = \int_{\Gamma_t} \left((n_x \hat{N}_{nn} - n_y \hat{N}_{ns}) u_{x0} + (n_y \hat{N}_{nn} + n_x \hat{N}_{ns}) v_{y0} + (n_x \hat{M}_{nn} + n_y \hat{M}_{ns}) \mu_x \right. \\ \left. + (n_y \hat{M}_{nn} + n_x \hat{M}_{ns}) \mu_y + \hat{Q}_n w \right) ds + \int_{\Omega} (qw) dA, \quad (4.29)$$

其中， Γ_t 代表描述外力之邊界； (n_x, n_y) 為邊界法線向量； \hat{N}_{nn} 和 \hat{N}_{ns} ， \hat{M}_{nn} 和 \hat{M}_{ns} ， \hat{Q}_n 為作用在邊界上的外力， q 為板上方的均佈載重。

依據最小勢能原理，使式 (4.28) 之總勢能函數極小，即 Π 對式 (4.14)

中之未知係數 u_i^α 微分等於零。可得一組線性代數方程式：

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}\}, \quad (4.30)$$

其中， $[\mathbf{K}]$ 為板結構之勁度矩陣，且 $[\mathbf{K}]$ 之公式與第三章者類似； $\{\mathbf{f}\}$ 為外力向量，表示作用於任意取樣點之外力； $\{\mathbf{d}\}$ 為由 u_i^α 所構成之向量，將 $\{\mathbf{d}\}$ 代回式 (4.14) 中，即可求得取樣點受外力作用下之近似位移場。

4.3 應力強度因子

應力強度因子於破壞力學中相當重要。因為在裂縫尖端處應力已經是無限大，再用應力來代表強度已無任何意義；而相對地，應力強度因子是有限量(finite)，可用來表示裂縫尖端應力奇異性的大小。傳統上，計算應力強度因子之方式有很多種，較常使用的有 J-積分法(J-integrals)、位移外插法、應力外插法…等等。本研究於基底函數中加入角函數，故應能準確得尖端處之應力分佈，並進一步依應力強度因子之基本定義，即可求得該因子。

在破壞力學中，根據裂縫受力情況不同，會產生三種不同的相對位移。一般可將裂縫分成三種形式(如圖 4.3a~圖 4.3c所示)：(1) 開裂型 (Opening model)，(2) 滑開型 (In-plane Shear model)，(3) 撕開型 (Out-of-plane Shear model)。不同類型的裂縫相對應不同的應力強度因子。因為功能梯度材料面外位移與面內位移耦合的關係，每一種裂縫形式會同時產生面外彎矩和面內拉伸的應力強度因子。

本研究採用板理論，利用 Stress resultants 定義應力強度因子較為適當，而 Reddy 三階板理論之剪力 Q_r 、 Q_θ 、 R_r 及 R_θ 不會有奇異性(第二章已證明)。因此，本研究所考慮之應力強度因子定義為：

(1) 張開型

$$K_{N-I} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} N_{yy} |_{\theta=0}, \quad K_{M-I} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} M_{xy} |_{\theta=0}, \quad (4.31)$$

(2) 滑開型

$$K_{N-II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} N_{xy} |_{\theta=0}, \quad K_{M-II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} M_{xy} |_{\theta=0} \quad (4.32)$$

數值分析所用的無因次化應力強度因子依受力形式可分為

(一) 受面內載重 N_0 作用

$$\bar{K}_{N-I} = \frac{K_{N-I}}{N_0 \sqrt{DL1}}, \quad \bar{K}_{N-II} = \frac{K_{N-II}}{N_0 \sqrt{DL1}}, \quad (4.33)$$

$$\bar{K}_{M-I} = \frac{K_{M-I}}{N_0 h \sqrt{DL2}}, \quad \bar{K}_{M-II} = \frac{K_{M-II}}{N_0 h \sqrt{DL2}} \quad (4.34)$$

(二) 受面外載重 M_0 作用

$$\bar{\bar{K}}_{N-I} = \frac{K_{N-I}}{(M_0/h)\sqrt{DL1}} , \bar{\bar{K}}_{N-II} = \frac{K_{N-II}}{(M_0/h)\sqrt{DL1}} , \quad (4.35)$$

$$\bar{\bar{K}}_{M-I} = \frac{K_{M-I}}{M_0\sqrt{DL2}} , \bar{\bar{K}}_{M-II} = \frac{K_{M-II}}{M_0\sqrt{DL2}} \quad (4.36)$$



4.4 收斂分析

本研究節點分佈方式如圖 4.4 所示，第一層採均勻佈點(例如， 2×2 、 $3 \times 3 \dots$)，第二層則在裂縫尖端附近局部均勻加密佈點，且第一層與第二層的節點不會重複。第二層加密佈點的範圍是以裂縫尖端為中心，加密區域邊長分別為原來板的長與寬的十分之二。由於無元素 Galerkin 法中節點與積分網格是脫勾的，並無關聯性，背景網格祇為方便數值積分。無元素 Galerkin 法計算離散化的積分(Belytschko【1996】)常用的方式有三種：(1) 節點積分法；(2) 網格積分法(Cell quadrature)；(3) 元素積分法(Element quadrature)。第(2)種和第(3)種方法都是以高斯積分來進行，兩者主要不同點在於前者物理邊界與積分網格不一致。本研究使用的是第(3)種方式，元素積分法是以有限元素網格作為積分網格。本研究採用高斯積分法來作數值積分，積分網格是以均勻切割的方式(例如， 2×2 、 $3 \times 3 \dots$)，將一個板分成 64 個(8×8)矩形積分網格，每一個矩形網格內取 36 個高斯積分點。所以，每一個分析案例總共利用了 2304 個高斯積分點。圖 4.5~圖 4.6 收斂性分析中，節點增加的方式為 10×10 、 $11 \times 11 \dots$ 、 30×30 、 31×31 ，再加上局部加密的 36 個節點，就是每一組分析所用的總節點數。

為了確認本研究所發展之程式的正確性，不論是受面內載重或面外載重之案例，均首先以求解近似均質板之 FGM 厚板，並與均質板之數值

結果相比較，以確定程式之正確。然後，再進行FGM厚板在不同材料性質與裂縫長度的收斂性分析。本研究之面內載重是指均勻受每單位長度的軸力 N_0 作用(參看 圖 4.1)，而面外載重是指均勻受每單位長度的彎矩 M_0 (參看 圖 4.2)。

4.4.1 受面內載重

考慮如圖 4.1 所示之板，取厚寬比 $h/BL1 = 0.1$ ，長寬比 $AL1/BL1 = 1$ ，裂縫位置與寬邊比 $Cy1/BL1 = 0.5$ ，體積比例階數 $m = 1 \times 10^{-4}$ ，板頂面與底面楊氏模數比 $E_t/E_b = 1.0001$ ，邊界條件為完全自由端。圖 4.5 與 圖 4.6 所示者分別為裂縫長度與長邊比 $DL1/AL1 = 0.1$ 與 0.4 應力強度因子 K_{N-I}/N_0 收斂性分析，取 $d_m = 0.5AL1$ ， $C_w = AL1/12$ 。圖 4.5 與 圖 4.6 亦示 Freese 【1971】分析均勻板所得結果。Freese 【1971】利用保角映射(conformal mapping)法結合邊界配置(boundary collocation)法，分析二維平面應力問題，依定義直接計算應力強度因子。圖 4.5 與 圖 4.6 中水平虛線代表 Freese 【1971】所得之結果，其值分別為 0.1467 與 0.0389 ，跟圖中節點增加與否無關。

圖 4.5 與 圖 4.6 中實線代表 FGM 厚板於近似均質板時，隨節點增加所獲得之結果。本研究所得結果隨著節點之增加，振盪收斂於真值。當節點數從 $676+36$ (第一層佈點+加密佈點)、 $729+36$ 、...到 $961+36$ ，圖 4.5 與 圖 4.6 K_{N-I}/N_0 之收斂值分別約為 0.1463 與 0.039 ，與 Freese 【1971】所得

者甚為接近。

FGM厚板的第一型裂縫無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} 之收斂性分析，分別顯示於圖4.7與圖4.8，其裂縫位於板邊緣的中間($Cy1/BL1=0.5$)，厚寬比 $h/BL1=0.1$ ，長寬比 $AL1/BL1=1$ 。於圖4.7中發現，虛線的振盪幅度比實線小，收斂較快。圖4.7與圖4.8中虛線所代表的案例為 $DL1/AL1=0.5$ ，體積比例階數 $m=10$ ，楊氏模數比 $E_t/E_b=5$ ，所得到的收斂值 $\bar{K}_{N-I}=0.313$ 和 $\bar{K}_{M-I}=0.000419$ ，而實線所代表的案例為 $DL1/AL1=0.3$ ，體積比例階數 $m=5$ ，楊氏模數比 $E_t/E_b=10$ ，其收斂值為 $\bar{K}_{N-I}=0.254$ 和 $\bar{K}_{M-I}=0.000771$ 。

4.4.2 受面外載重

圖4.9中探討 $DL2/AL2=0.5$ 受面外載重 M_0 作用之矩形板(如圖4.2所示)的第一型裂縫應力強度因子 K_{M-I}/M_0 ，其它幾何條件為厚寬比 $h/BL2=0.5$ ，長寬比 $AL2/BL2=0.5$ ，裂縫長度與長邊比 $DL2/AL2=0.5$ ，裂縫位置與寬邊比 $Cy2/BL2=0.5$ ，取 $d_m = AL2$ ， $C_w = AL2/12$ 。近似均質板之材料性質與圖4.5相同($m=1 \times 10^{-4}$ ， $E_t/E_b=1.0001$)。

圖4.9中的虛線表示Liu and Jiang【2000】以一種近似方程和近似解法，依應力強度因子的定義，求解Reissner板之應力強度因子，所獲得的值為18.89；而實線則表示FGM厚板於近似齊性板之結果，雖然曲線在中段的

振盪較大，但當節點數超過 729+36(第一層佈點+加密佈點)點以後， K_{M-I}/M_0 值大約可收斂至 18.9。

圖 4.10 與 圖 4.11 所繪製的曲線分別呈現出 FGM 厚板的第一型裂縫無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} 之收斂情形，影響半徑(d_m)及相對權重參數(C_w)為 圖 4.9 所用之值，其幾何性質為 $DL2/AL2=0.5$ ， $h/BL2=0.1$ ， $AL2/BL2=1$ ， $Cy2/BL2=0.5$ ，材料性質為 $E_t/E_b=10$ ， $m=5$ 。從 圖 4.10 與 圖 4.11 中觀察到，雖然曲線在收斂的過程中有些需振盪，但最終仍趨於緩和，收斂至某一個值；收斂值 $\bar{K}_{N-I}=1.014$ 和 $\bar{K}_{M-I}=0.734$ 。

4.5 數值結果

本節考慮一具邊緣裂縫矩形板，上下邊界分別承受均勻軸力 N_0 和均勻彎矩 M_0 之兩種案例，在不同材料參數 E_t/E_b 和 m ，不同的裂縫長度與長邊比 $DL1/AL1$ 、 $DL2/AL2$ 下，探討 FGM 厚板裂縫之無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 、 \bar{K}_{M-I} 、 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} 的變化。數值分析中所採用的節點數目為 820 個(28×28+36) (第一層佈點+加密佈點)，而積分網格則與收斂性分析相同(64 個網格，2304 個高斯積分點)。

4.5.1 受面內載重

表 4.1 為 $h/BL1=0.1$ ， $AL1/BL1=1$ ， $Cy1/BL1=0.5$ 的具邊緣裂縫矩形板，且

$d_m = 0.5AL1$ ， $C_w = AL1/12$ ，對應不同楊氏模數比 $E_t/E_b = 2$ 和 5 、體積比例階數 $m = 0、5、10、20$ 、裂縫長度與長邊比 $DL1/AL1 = 0.3、0.5、0.7$ 之第一型裂縫無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} 。由表 4.1 觀察到的數值結果，簡潔地歸納出下列四點：

- (a) 於均質板($m = 0$)時，祇有軸力所產生無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} ，而彎矩所造成的無因次化應力強度因子 $\bar{K}_{M-I} = 0$ 。當 $m \neq 0$ ，因為面內位移與面外位移耦合的關係，會存在 \bar{K}_{M-I} 值。
- (b) 考慮 E_t/E_b 和 m 兩參數固定不變的情形下，無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} 會隨著裂縫長度的增加而變大。
- (c) 當 E_t/E_b 和 $DL1/AL1$ 固定時，可發現無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} ，除了 $m = 0$ 之情形下，會隨著體積比例階數 m 的增加而減少。而 $m = 0$ 的無因次化應力強度因子皆小於 $m = 5、10、20$ 時的值。
- (d) 若固定 m 和 $DL1/AL1$ ，比較 $E_t/E_b = 2$ 和 5 對無因次化應力強度因子的影響，發現 E_t/E_b 變大時，會使得勁度上升，故 \bar{K}_{N-I} 和 \bar{K}_{M-I} 會隨之增加。
- (e) 本案例中 M_{xy} 及 N_{xy} 並無應力奇異性項次，故無第二型裂縫無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-II} 和 \bar{K}_{M-II} ，表示此案例承受均勻軸

力 N_0 的作用，故破壞模式還是由第一型裂縫的無因次化應力強度因子所控制。

4.5.2 受面外載重

本節主要針對 $h/BL2 = 0.1$ ， $AL2/BL2 = 1$ ， $Cy2/BL2 = 0.5$ 受面外載重 M_0 作用之矩形板，令 $d_m = AL2$ ， $C_w = AL2/12$ ，探討不同楊氏模數比 $E_t/E_b = 2$ 、5、10 及 20、體積比例階數 $m = 0$ 、5、10、20、裂縫長度與長邊比 $DL2/AL2 = 0.5$ 、0.7 之應力強度因子 $\bar{\bar{K}}_{N-I}$ 和 $\bar{\bar{K}}_{M-I}$ 所有數值結果都詳列於表 4.2 中。由表 4.2 觀察得到的結果整理如下：

- (a) 因耦合效應的關係，當 $m \neq 0$ 時，除了彎矩所致的無因次化應力強度因子 $\bar{\bar{K}}_{M-I}$ 外，亦會有於均質板 ($m = 0$) 不會存在的軸力所致之無因次化應力強度因子 $\bar{\bar{K}}_{N-I}$ 。
- (b) 將參數 E_t/E_b 和 m 保持固定，改變裂縫長度與長邊比 $DL2/AL2$ 時，無因次化應力強度因子 $\bar{\bar{K}}_{N-I}$ 與 $\bar{\bar{K}}_{M-I}$ 會隨著裂縫長度 ($DL2$) 的增加而增加。
- (c) 固定 E_t/E_b 和 $DL2/AL2$ 之情況下，體積比例階數 m 與無因次化應力強度因子 $\bar{\bar{K}}_{N-I}$ 與 $\bar{\bar{K}}_{M-I}$ 的變化呈現反比的現象。但 $m = 0$ 是例外， $m = 0$ 的無因次化應力強度因子皆小於 $m = 5$ 、10、

20 時的值。

- (d) 當 m 和 $DL2/AL2$ 皆固定之情況下， E_t/E_b 增加，則勁度變大，相對的，無因次化應力強度因子 \bar{K}_{N-I} 與 \bar{K}_{M-I} 也會跟著增加。
- (e) 本案例與表 4.1 相同， M_{xy} 及 N_{xy} 並無應力奇異性項次，雖然此案例承受面外的彎矩 M_0 作用，但仍是由第一型裂縫的無因次化應力強度因子主導了整個板的破壞模式



第五章 結論與建議

5.1 結論

5.1.1 漸近解與應力奇異性

本研究基於 Reddy 三階板理論，利用特徵函數展開法求解扇形板平衡方程式(以位移表示)之漸近解；並求得各種不同邊界條件下，FGM 厚板在角隅處之特徵方程式，此特徵方程式決定彎矩奇異性階數。

當尖角徑向邊界沒有 S(I)或 S(II)之邊界條件時，其特徵方程式與均質板是相同的。在徑向邊界條件為 S(I)或 S(II)之任一種的情況下，材料非均質($\Delta P/P_b=0.02, 10, 100$ 和 $m=2, 5$)的特性對應力奇異階數的影響很小。但是，角函數卻與均質板的部分有著很大的差異；大部分的案例，FGM 厚板的角函數都具有面內與面外位移耦合的特性，也就是說，角函數中蘊含了非均質材料性質的材料參數。

5.1.2 振動分析

(一) 本研究利用 Ritz 法配合含多項式及角函數之允許函數準確分析了懸臂斜形板(平行四邊形、梯形和三角形)及具邊緣裂縫簡支承矩形板。在不同材料性質($E_t/E_b, m$)的情形下，提供了詳細的數值結果

(至少具三位有效位數之準確度)。可為其他分析方法(例如：有限元素法，邊界元素法或微分數值法)的比較。

(二) 收斂性分析驗證了將角函數引入允許函數中，對於 Ritz 法中決定板振動頻率之影響。只增加多項式允許函數無法使數值解快速收斂至精確解，特別是面臨裂縫問題時(多項式函數無法描述裂縫之存在)，但加入角函數不只加速解之收斂；並能令吾人了解每一模態於奇異點附近之應力奇異行為。

(三) FGM 之體積比例階數 m 與楊氏模數比 E_t/E_b 直接改變 FGM 厚板材料參數的分布狀況及板的勁度。由數值分析的結果發現，不論改變 E_t/E_b 或者 m 都會使無因次化振動頻率值約略呈一倍數之變化。

5.1.3 應力強度因子

(一) 經由收斂性分析顯示，不論是受面內載重或面外載重的具邊緣裂縫矩形板之應力強度因子，隨節點數之增加而振盪收斂至真值。

(二) 當 FGM 厚板之 E_t/E_b 增加時，會使得勁度提高，以致應力強度因子隨之增加。但應力強度因子會隨著體積比例階數 m 的增加而減少(了 $m=0$ 例外)。

(三) 針對本研究之兩種案例，不論是受面內載重或面外載重，當 $m=0$ ，

祇會存在軸力或彎矩所產生之應力強度因子；相對地，當 $m \neq 0$ ，因為面內位移與面外位移耦合的關係，軸力或彎矩所致之應力強度因子會同時存在。

5.2 建議

本研究發現針對具應力奇異性的 FGM 厚板之動力或靜力分析，加入角函數能夠獲得更精確的數值結果。例如，利用 Ritz 法分析具應力奇異點之懸臂斜形板及具邊緣裂縫簡支承矩形板，於允許函數中加入角函數，可使 Ritz 法更精確的分析應力奇異問題；利用無元素 Galerkin 法，於基底函數中加入角函數，亦能準確求取應力強度因子。利用本研究之方法可繼續研究不同邊界條件下具應力奇異點之力學行為(靜力或動力)，亦可將角函數應用至有限元素法或其他的無網格法中。

由於功能梯度材料的材料性質隨厚度(z)呈非線性連續變化，增加分析過與數值結果的複雜性，與均質材料的力學行為有很大的差異。例如，振動分析中，受面內位移與面外位移耦合的影響很大；而靜力分析中，裂縫尖端的應力強度因子受材料梯度的影響，使得原本在均質材料所使用的應力強度因子，必須考慮到面內位移與面外位移耦合所造成的部分。

參考文獻

- Altus, E., (1984), "Finite difference technique for solving crack problems", *Engineering Fracture Mechanics*, 19(5), pp.947-957.
- Anlas, G., Santare, M. H. and Lambros, J., (2000), "Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials", *International Journal of Fracture*, 104(2), pp.131-143.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., (1994), "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), pp.229-256.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., (1995), "Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture", *International Journal of Solids and Structures*, 32(17-18), pp.2547-2570.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D. and Fleming, M., (1996), "Meshless methods: an overview and recent developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4), pp.3-47.
- Bogy, D. B. and Wang, K. C., (1971), "Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials", *International Journal of Solids and Structures*, 7(10), pp.993-1005.
- Burton, W. S. and Sinclair, G. B., (1986), "On the singularities in Reissner's theory for the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 53(1), pp.220-222.
- Castor, G. S. and Telles, J. C. F., (2000), "3-D BEM implementation of a numerical Green's function for fracture mechanics applications", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(8), pp. 1199-1214.
- Chen, Y. Z. and Norio, H., (1993), "Singularity eigenvalue analysis of a crack along a wedge-shaped interface", *Journal of Applied Mechanics*, 60(3), pp. 781-782.
- Chen, Y. Z., (2000), "Stress intensity factors in a finite length cylinder with a circumferential crack", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 77(8), pp.439-444.
- Chen, J., Wu, L. and Du, S., (2000), "Modified J integral for functionally graded materials", *Mechanics Research Communications*, 27(3), pp.301-306.
- Cisilino, A. P. and Aliabadi, M. H., (1999), "Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear

- fracture problems”, *Engineering Fracture Mechanics*, 63(6), pp.713-733.
- Comninou, M. and Dundurs, J., (1980), “Effect of friction on the interface crack loaded in shear”, *Journal of Elasticity*, 10(2), pp.203-212.
- Delale, F. and Erdogan, F., (1983), “The crack problem for a nonhomogeneous plane”, *Journal of Applied Mechanics*, 50, pp.609-614.
- Dempsey, J. P. and Sinclair, G. B., (1979), “On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge”, *Journal of Elasticity*, 9(4), pp.373-391.
- Dolbow, J., Moës, N. and Belytschko, T., (2000), “Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 36(3), pp.235-260.
- Dorogoy, A. and Banks-Sills, L., (2004), “Shear loaded interface crack under the influence of friction: A finite difference solution”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(13), pp. 1749-1780.
- England, A. H., (1971), “On stress singularities in linear elasticity”, *International Journal of Engineering*, 9(6), pp.571-585.
- Erdogan, F., (1985), “The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under Antiplane shear loading”, *Journal of Applied Mechanics*, 64, pp.449-456.
- Erdogan, F., (1995), “Fracture mechanics of functionally graded materials”, *Composites Engineering*, 5(7), pp.753-770.
- Erdogan, F. and Wu, B. H., (1997), “The surface crack problem for a plate with functionally graded properties”, *Journal of Applied Mechanics*, 64, pp.449-456.
- Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., (1997), “Enriched Element-Free Galerkin methods for crack tip fields”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(8), pp.1483-1504.
- Freese, C. E., (1971), Private communication.
- Fujisaki, W. and Aliabadi, M.H., (1997), “Application of modified distance extrapolation method for calculation of stress intensity factors using BEM”, *Proceedings of the International Conference on Boundary Element Method*, Rome, Italy, pp. 287-296.
- Gu, P., Dao, M. and Asaro, R. J., (1999), “Simplified method for calculating the crack-tip field of functionally graded materials using the domain integral”, *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 66(1), pp.101-108.

- Guinea, G. V., Planas, J. and Elices, M., (2000), “ K_I evaluation by the displacement extrapolation technique”, *Engineering Fracture Mechanics*, 66(3), pp.243-255.
- Hein, V. L. and Erdogan, F., (1971), “Stress singularities in a two-material wedge”, *International Journal of Fracture Mechanics*, 7(3), pp.317-330.
- Hirano, Y. and Okazaki, K., (1980), “Vibration of cracked rectangular plate”, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23(179), pp.732-740.
- Horii, H. and Nemat-Nasser, S., (1982), “Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst”, *Journal of Geophysical Research*, 87(B8), pp. 6805-6821.
- Huang, C. S., McGee, O. G. and Leissa, A. W., (1994), “Exact analytical solutions for free vibrations of thick sectorial plates with simply supported radial edges”, *International Journal of Solids and Structures*, 56(3), pp.315-327.
- Huang, C. S., (2002a), “Corner singularities in bi-material Mindlin plates”, *Composite Structures*, 56(3), pp.315-327.
- Huang, C. S., (2002b), “On the singularity induced by boundary conditions in a third-order thick plate theory”, *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 69(6), pp.800-810.
- Huang, C. S., (2003), “Stress singularities at angular corners in first-order shear deformation plate theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(1), pp.1-20.
- Huang, C. S., (2004), “Corner stress singularities in a high-order plate theory”, *Composite Structures*, 82(20-21), pp.1657-1669.
- Huang, C. S., Leissa, A. W. and Chang, M. J., (2005), “Vibrations of skewed cantilevered triangular, trapezoidal and parallelogram Mindlin plates with considering corner stress singularities”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(13), pp.1789-1806.
- Huang, C. S. and Chang, M. J., (2007), “Corner stress singularities in an FGM thin plate”, *International Journal of Solids and Structures*, 44(9), pp. 2802-2819.
- Irwin, B. G., (1957), “Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate”, *Journal of Applied Mechanics*, 64, pp.449-456.
- Jin, Z. H. and Noda, N., (1993), “Minimization of thermal stress intensity factors for a crack in a metal-ceramic mixture. Ceramic Transactions 34: Functionally Gradient Materials”, J. B. Holt et al., eds., The American Ceramic Society, Westerville, OH, 47-54.

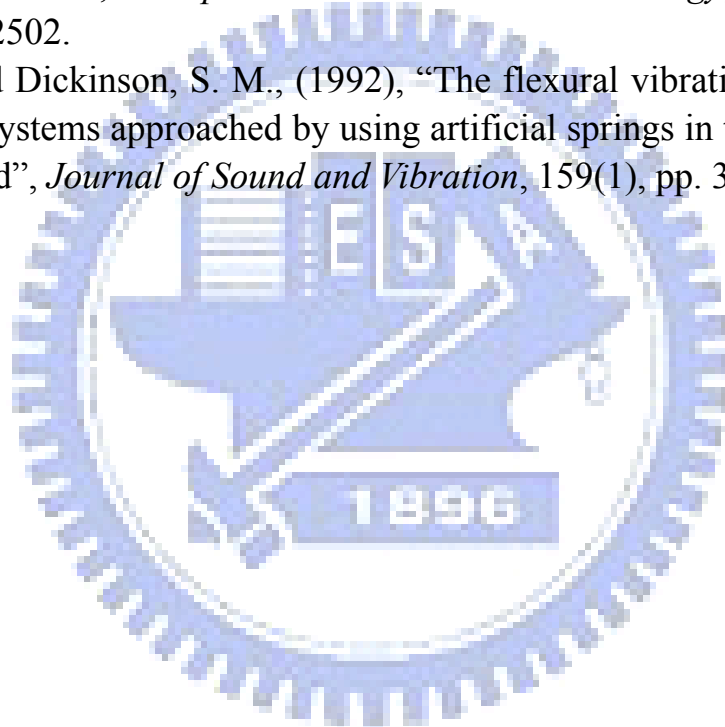
- Kanaka, R. K. and Hinton, E., (1980), "Natural frequencies and modes of rhombic Mindlin plates", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8(1), pp.55-62.
- Karunasena, W., Kitipornchai, S. and AL-Bermani, F. G. A., (1996), "Free vibration of cantilevered arbitrary triangular Mindlin plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(4), pp.431-442.
- Kim, B. S. and Eberhardt, A. W., (1997), "First and second order stress extrapolation for mode I and mode II edge cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 57(6), pp.715-720.
- Kim, J. H. and Paulino, G. H., (2002), "Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method", *Engineering Fracture Mechanics*, 69(14-16), pp.1557-1586.
- Krawczuk, M., (1993), "Natural vibrations of rectangular plates with a through crack", *Journal of Applied Mechanics*, 63(7), pp.491-504.
- Leissa, A. W., (1969), *Vibration of plates*, NASA SP-160, U.S. Government Printing Office, (reprinted by The Acoustical Society of America, 1993)
- Leissa, A. W., (1977), "Recent research in plate vibrations, 1973-1976: classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, 9(10), pp.13-24.
- Leissa, A. W., (1981), "Plate vibration research, 1976-1980: classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, 13(9), pp.11-22.
- Leissa, A. W., (1987), "Recent studies in plate vibrations: 1981-1985. Part I. Classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, 19(2), pp.11-18.
- Leissa, A. W., McGee, O. G. and Huang, C. S., (1993), "Vibrations of sectorial plates having corner stress singularities", *Journal of Applied Mechanics*, 60, pp.134-140.
- Leissa, A. W., (2001), "Singularity considerations in membrane, plate and shell behaviors", *International Journal of Solids and Structures*, 38(19), pp.3341-3353.
- Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Wang, C. M., (1993), "Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory", *Journal of Sound and Vibration*, 168(1), pp.39-69.
- Lin, X. B. and Smith, R. A., (1999), "Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates, Part I: the numerical technique", *Engineering Fracture Mechanics*, 63(5), pp.503-522.
- Liu, C. T. and Jiang, C. P., (2000), *Fracture Mechanics for Plate and Shell*, NDIP, Beijing, China, pp.202-210.
- Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Tabbara, M., (1995), "Element-free Galerkin

- methods for wave propagation and dynamic fracture”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1-2), pp. 131-153.
- Lynn, P. P. and Kumbasar, N., (1967), “Free vibrations of thin rectangular plates having narrow crack with simply supported edges”, *Developments in Mechanics, 4, Proc. 10th Midwestern Mechanics Conference*, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, August 21-23, pp.911-928.
- Ma, C. C. and Hour, B. L., (1989), “Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 25(11), pp. 1295-1309.
- Ma, C. C. and Hour, B. L., (1990), “Antiplane problems in composite anisotropic materials with an inclined crack terminating at a bimaterial interface”, *International Journal of Solids and Structures*, 26(12), pp. 1387-1400.
- Marur, P. R. and Tippur, H. V., (2000), “Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient”, *International Journal of Solids and Structures*, 37(38), pp.5353-5370.
- Marczak, R. J. and Creus, G. J., (2002), “Direct evaluation of singular integrals in boundary element analysis of thick plates”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(8), pp.653-665.
- McGee, O. G. and Leissa, A. W., (1991), “Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilevered plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 144(2), pp.305-322.
- McGee, O. G., Leissa, A. W. and Huang, C. S., (1992a), “Vibrations of cantilevered skewed plates with corner stress singularities”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(2), pp.409-424.
- McGee, O. G., Leissa, A. W. and Huang, C. S., (1992b), “Vibrations of cantilevered skewed trapezoidal and triangular plates with corner stress singularities”, *International Journal of Mechanical Sciences* , 34(1), pp.63-84.
- McGee, O. G. and Butalia, T. S., (1992c), “Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew trapezoidal and triangular thick plates”, *Computer Structures*, 45(5/6), pp.1033-1059.
- McGee, O. G. and Butalia, T. S., (1994), “Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew thick plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 176(3), pp.351-376.

- Menandro, F. C. M., Moyer, E. T. Jr. and Liebowitz, H., (1995), "A near optimal crack tip mesh", *Engineering Fracture Mechanics*, 50(5-6), pp.703-711.
- Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H., (1954), "Thickness-shear and flexural vibrations of a circular disk", *Journal of Applied Physics*, 25, pp.1329-1332.
- Mikhailov, S. E. and Namestnikova, I. V ., (2000)," Stress-singularity analysis in space junctions of thin plates" , *Journal of Engineering Mathematics*, 37(4), pp. 327-341.
- Mohammed, I. and Liechti, K. M., (2001), "The effect of corner angles in biomaterial structures", *International Journal of Solids and Structures*, 38(24-25), pp.4375-4394.
- Nemat-Nasser, S. and Horii, H., (1982), "Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting", *Journal of Geophysical Research*, 87(B8), pp. 6805-6821.
- Niino, M. and Maeda, S., (1990), "Recent development status of functionally gradient materials", *The Iron and Steel of Institute of Japan International*, 30(9), pp. 699-703.
- Noda, N. and Jin, Z. H., (1993), "Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally gradient material", *International Journal of Solids and Structures*, 30, pp.1039-1056.
- Ojikutu, I. O., Low, R. D. and Scott, R. A., (1984), "Stress singularities in laminated composite wedges", *International Journal of Solids and Structures*, 20(8), pp.777-790.
- Ozturk, M. and Erdogan, F., (1992), "Diffusion problem in bonded nonhomogeneous materials with an interface cut", *International Journal of Engineering Science*, 30(10), pp.1507-1523.
- Ozturk, M. and Erdogan, F., (1995), "An axisymmetric crack in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone under torsion", *Journal of Applied Mechanics*, 62(1), pp.116-125.
- Ozturk, M. and Erdogan, F., (1997), "Mode I crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium", *International Journal of Engineering Science*, 35(9), pp.869-883.
- Ozturk, M. and Erdogan, F., (1999), "Mixed mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium", *International Journal of Fracture*, 98(3-4), pp.243-261.
- Parks, D. M., (1974), "Stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors" , *International Journal of*

- Fracture*, 10(4), pp. 487-502.
- Pageau, S. S., Joseph, P. F. and Biggers, S. B. Jr., (1995), "Singular antiplane stress fields for bonded and debonded three-material junctions" , *Engineering Fracture Mechanics*, 52(5), pp. 821-832.
- Qian, G. L., Gu, S. N. and Jiang, J. S., (1991), "A finite element model of cracked plates and application to vibration problems", *Computers and Structures*, 39(5), pp.483-487.
- Reddy, J. N., (1999), *Energy and variational methods in applied mechanics*, John Wiley, New York.
- Sinclair, G. B., (2000), "Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending", *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 67(1), pp.219-223.
- Sladek, V. and Sladek, J., (1987), "Computation of the stress intensity factor in 2-D stationary thermoelasticity using the bem", *Acta Technica CSAV (Ceskoslovensk Akademie Ved)*, 32(2), pp. 217-229.
- Sladek, J. and Dadek, V., (1993), "Computation of strip yield lengths for a crack in 2-d stationary thermoelasticity using the BEM", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11(3), pp. 189-193.
- Solecki, R., (1983), "Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge", *Engineering Fracture Mechanics*, 18(6), pp.1111-1118.
- Sosa, H. A. and Eischen, J. W., (1986), "Computaton of stress intensity factors for plate bending via a path-independent integral", *Engineering Fracture Mechanics*, 25(4), pp.451-462.
- Sosa, H. A. and Herrmann, G., (1989), "On invariant integrals in the analysis of cracked plates", *International Journal of Fracture*, 40(2), pp.111-126.
- Stahl, B. and Keer, L. M., (1972), "Vibration and stability of cracked rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, 8(1), pp.69-91.
- Stroh, A. N., (1962), "Steady state problems in anisotropic elasticity", *Journal of Mathematics and Physics*, 41(2), pp.77-103.
- Ting, T. C. T. and Chou, S. C., (1981), "Edge singularities in anisotropic composites", *International Journal of Solids and Structures*, 17(11), pp.1057-1068.
- Vojta, A., Bahr, H.-A., Bahr, U., Maschke, H. and Schaeuble, R., (1994), "2-d crack pattern simulation by means of BEM - from linear to ramified cracks", *Computational Materials Science*, 3(2), pp. 286-292.
- Walters, M. C., Paulino, G. H. and Dodds Jr. R. H., (2004), "Stress-intensity

- factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading”, *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp.1081-1118.
- Williams, M. L., (1952), “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending”, *Proceeding of 1st U.S. National congress of Applied Mechanics*, pp.325-329.
- Williams, M. L. and Chapkis, R. L., (1958), “Stress singularities for a sharp-notched polarly orthotropic plate”, *Proceeding of 3rd U.S. National congress of Applied Mechanics*, pp.281-286.
- Yuan, F. G. and Yang, S., (2000), “Asymptotic crack-tip fields in an anisotropic plate subjected to bending, twisting moments and transverse shear loads”, *Composites Science and Technology*, 60(12-13), pp. 2489-2502.
- Yuan, J. and Dickinson, S. M., (1992), “The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method”, *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), pp. 39-55.



歷年著作

(A) Refereed Papers

1. Huang, C.S., Leissa, A.W., and **Chang, M.J.**, (2005) “Vibrations of skewed cantilevered triangular, trapezoidal and parallelogram Mindlin plates with considering corner stress singularities”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v 62, n 13, p 1789-1806
2. Huang, C. S., **Chang, M. J.**, and Leissa, A.W., (2006) “Vibrations of Mindlin sectorial plates using the Ritz method considering stress singularities”, *Journal of Vibration and Control*, v 12, n 6, p 635-657
3. Leissa , A. W., Huang, C. S., and **Chang, M. J.** , (2007), “Accurate frequencies and mode shapes for moderately thick, cantilevered, skew plates”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v 7, n 3, p 425-440
4. Huang, C. S., and **Chang, M. J.** , (2007), “Corner stress singularities in an FGM thin plate”, *International Journal of Solids and Structures*, v 44, n 9, p 2802-19
5. Huang, C. S., and **Chang, M. J.**, “Geometrically Induced Stress Singularities of a Thick FGM Plate Based on the Third-order Shear Deformation Theory”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (accepted with revision) (2008)

(B) Conference Papers

1. Huang, C. S., and **Chang, M. J.** , (2007), “Vibrations of sectorial and skew Mindlin plates with corner stress singularities”, 6th International Symposium on Vibration of Continuous Systems, Squaw Valley,

附錄 一

$$\bar{\kappa}_1 = [-C_1\bar{E}_4(-\kappa_2\bar{E}_3 + 2(1+\kappa_1)\bar{E}_4) + \kappa_2\bar{E}_1(\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6) + \bar{E}_2(-\kappa_2\bar{E}_3 + 2C_1(1+\kappa_1)\bar{E}_6)] ,$$

$$\bar{\kappa}_2 = [C_1\bar{E}_4(-\kappa_2\bar{E}_3 + 2(-1+\kappa_1)\lambda_m\bar{E}_4) - \kappa_2\bar{E}_1(\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6) - \bar{E}_2(-\kappa_2\bar{E}_3 + 2C_1(-1+\kappa_1)\lambda_m\bar{E}_6)] ,$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_3 = & -[2C_1\bar{E}_1\bar{E}_3\bar{E}_4((3+\nu)\bar{E}_4 - 2C_1\bar{E}_6) + \bar{E}_2^2(2\bar{E}_3^2 - (1+\nu)\bar{E}_0\bar{E}_6) + \bar{E}_1^2(-(\nu-1)\bar{E}_4^2 - 4C_1\bar{E}_4\bar{E}_6 + 2C_1^2\bar{E}_6^2) \\ & + C_1\bar{E}_4^2(C_1(1-\nu)\bar{E}_3^2 - (1+\nu)\bar{E}_0(2\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6)) + \bar{E}_2((1+\nu)\bar{E}_1^2\bar{E}_6 \\ & - 2\bar{E}_1\bar{E}_3(2\bar{E}_4 + C_1(-1+\nu)\bar{E}_6) + C_1\bar{E}_3^2(-4\bar{E}_4 + C_1(1+\nu)\bar{E}_6)] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_4 = & [-2C_1\bar{E}_1\bar{E}_3\bar{E}_4((-5+\nu)\bar{E}_4 + 2C_1\bar{E}_6) + \bar{E}_2^2(2\bar{E}_3^2 + (-3+\nu)\bar{E}_0\bar{E}_6) + \bar{E}_1^2((\nu-1)\bar{E}_4^2 - 4C_1\bar{E}_4\bar{E}_6 + 2C_1^2\bar{E}_6^2) \\ & + C_1\bar{E}_4^2(C_1(-1+\nu)\bar{E}_3^2 + (-3+\nu)\bar{E}_0(2\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6)) - \bar{E}_2((-3+\nu)\bar{E}_1^2\bar{E}_6 \\ & + C_1\bar{E}_3^2(4\bar{E}_4 + C_1(-3+\nu)\bar{E}_6) + 2\bar{E}_1\bar{E}_3(2\bar{E}_4 - C_1(-1+\nu)\bar{E}_6) \\ & + (-3+\nu)\bar{E}_0(\bar{E}_4^2 + 2C_1\bar{E}_4\bar{E}_6 - C_1^2\bar{E}_6^2)]^2 , \end{aligned}$$

$$\bar{\kappa}_5 = \bar{E}_1^2 - 2C_1\bar{E}_1\bar{E}_3 + C_1^2\bar{E}_3^2 - \bar{E}_0(\bar{E}_2 - 2C_1\bar{E}_4 + C_1^2\bar{E}_6) ,$$

$$\bar{\kappa}_6 = [-\bar{E}_2\bar{E}_3 + C_1\bar{E}_3\bar{E}_4 + \bar{E}_1(\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6)]$$

$$\begin{aligned} & [\lambda^3(1+\nu)\sin 4\alpha - 2\lambda\sin 2\alpha(\lambda^2(1+\nu) + 2(-5+3\nu)\sin^2 \lambda\alpha) \\ & + 4(\lambda^2(-1+3\nu)\sin^2 \alpha + (-3+\nu)\sin^2 \lambda\alpha)\sin 2\lambda\alpha] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 = & [(\kappa_3(\lambda-1)\bar{E}_2 + C_1(\kappa_3 - 4\lambda - \kappa_3\lambda)\bar{E}_4)(\kappa_1 - \cot(\lambda-1)\alpha/2 \tan(\lambda+1)\alpha/2) \\ & + \kappa_2\bar{E}_1(1+\lambda - (\lambda-1)\cot(\lambda-1)\alpha/2 \tan(\lambda+1)\alpha/2)] \end{aligned}$$

$$/[\kappa_2(-1+\kappa_1(\lambda-1) - \lambda)(\bar{E}_2 - C_1\bar{E}_4)] ,$$

$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{\kappa_2} [\kappa_1 - \cot(\lambda-1)\alpha/2 \tan(\lambda+1)\alpha/2] ,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_3 &= \frac{1}{\kappa_2} \left[\kappa_1 - \cot(\lambda + 1) \alpha/2 \tan(\lambda - 1) \alpha/2 \right], \\
\bar{\eta}_4 &= -\frac{\kappa_1(-1 + \lambda) \bar{E}_1}{\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4} + \frac{(1 + \lambda) \bar{E}_1}{\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4} + \frac{C_1(1 + \lambda)^2 \bar{E}_4 \bar{\eta}_2}{(-\bar{E}_2 + C_1 \bar{E}_4)} + \\
&\quad \frac{1}{(\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4)} \left((-1 + \lambda)(\kappa_2 \bar{E}_1 + \kappa_3 \bar{E}_2 + C_1(-1 - \kappa_3 + \lambda) \bar{E}_4) \bar{\eta}_2 \right), \\
\bar{\eta}_5 &= \left\{ (-1 + \lambda)(-1 + \nu) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3) (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] + \right. \\
&\quad 2\kappa_1(-1 + \lambda) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] \bar{E}_1 (\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)) \sin[(1 + \lambda) \alpha/2] \\
&\quad - (1 + \lambda) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] (C_1(-1 + \nu) \bar{E}_3 (-\bar{E}_2 + C_1 \bar{E}_4) + \\
&\quad \bar{E}_1((1 + \nu) \bar{E}_2 + C_1(-3 + \nu) \bar{E}_4 + 2C_1 \bar{E}_6)) \sin[(1 + \lambda) \alpha/2] - \\
&\quad ((-2C_1(1 + \lambda) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] ((-1 + \nu) (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) (\bar{E}_4 - C_1 \bar{E}_6) \\
&\quad - (1 + \lambda) \bar{E}_4 (\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6))) \\
&\quad \sin[(1 + \lambda) \alpha/2] + (-1 + \lambda)((-1 + \nu) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) \\
&\quad (-\kappa_3 \bar{E}_2 + C_1(2(1 + \kappa_3) \bar{E}_4 - C_1(2 + \kappa_3) \bar{E}_6)) \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] - \\
&\quad 2 \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] (\kappa_2 \bar{E}_1 + \kappa_3 \bar{E}_2 + C_1(-1 + \kappa_3 + \lambda) \bar{E}_4) \\
&\quad (\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)) \\
&\quad \left. \sin[(1 + \lambda) \alpha/2] \bar{\eta}_2) \right) / ((\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) (\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)) \\
&\quad ((1 + \kappa_1)(-1 + \lambda)(-1 + \nu) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] - \\
&\quad 2(1 + \kappa_1 - \kappa_1 \lambda + \lambda \nu) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] \sin[(1 + \lambda) \alpha/2]) \left. \right\}, \\
\bar{\eta}_6 &= -\frac{\kappa_1(-1 + \lambda) \bar{E}_1}{\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4} + \frac{(1 + \lambda) \bar{E}_1}{\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4} + \frac{C_1(1 + \lambda)^2 \bar{E}_4 \bar{\eta}_3}{(-\bar{E}_2 + C_1 \bar{E}_4)} + \\
&\quad \frac{1}{(\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4)} \left((-1 + \lambda)(\kappa_2 \bar{E}_1 + \kappa_3 \bar{E}_2 + C_1(-1 - \kappa_3 + \lambda) \bar{E}_4) \bar{\eta}_3 \right), \\
\bar{\eta}_7 &= -\left\{ (-2\kappa_1(-1 + \lambda) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] \bar{E}_1 (\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)) \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + \lambda) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] (C_1(-1 + \nu) \bar{E}_3(-\bar{E}_2 + C_1 \bar{E}_4) + \\
& \bar{E}_1((1 + \nu) \bar{E}_2 + C_1(-3 + \nu) \bar{E}_4 + 2C_1 \bar{E}_6)) \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] + \\
& (-1 + \lambda)(-1 + \nu) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] (\bar{E}_1 - C_1 \bar{E}_3)(-\bar{E}_2 + C_1 \bar{E}_4) \sin[(1 + \lambda) \alpha/2] + \\
& -((2(-1 + \lambda) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] (\kappa_2 \bar{E}_1 + \kappa_3 \bar{E}_2 + C_1(-1 - \kappa_3 + \lambda) \bar{E}_4) \\
& (\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)) \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] - 2C_1(1 + \lambda) \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] \\
& ((-1 + \nu)(\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4)(-\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6) + (1 + \lambda) \bar{E}_4(\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6))) \\
& \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] + (1 - \lambda)(-1 + \nu) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] (\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4) \\
& - \kappa_3 \bar{E}_2 + C_1(2(1 + \kappa_3) \bar{E}_4 - C_1(2 + \kappa_3) \bar{E}_6)) \sin[(1 + \lambda) \alpha/2] \bar{\eta}_3)) / \\
& ((\bar{E}_2 - C_1 \bar{E}_4)(\bar{E}_2 + C_1(-2\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6))(2(1 + \kappa_1 - \kappa_1 \lambda + \lambda \nu) \\
& \cos[(1 + \lambda) \alpha/2] \sin[(-1 + \lambda) \alpha/2] - \\
& (1 + \kappa_1)(-1 + \lambda)(-1 + \nu) \cos[(-1 + \lambda) \alpha/2] \sin[(1 + \lambda) \alpha/2]) \} , \\
\bar{\eta}_8 &= \frac{\bar{E}_2 \bar{E}_3 - C_1 \bar{E}_3 \bar{E}_4 + \bar{E}_1(-\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)}{\bar{E}_1 \bar{E}_3 - C_1 \bar{E}_3^2 + \bar{E}_0(-\bar{E}_4 + C_1 \bar{E}_6)} , \\
\bar{\eta}_9 &= \frac{\bar{E}_1^2 - 2C_1 \bar{E}_1 \bar{E}_3 + C_1^2 \bar{E}_3^2 - \bar{E}_0(\bar{E}_2 - 2C_1 \bar{E}_4 + C_1^2 \bar{E}_6)}{(-\bar{E}_1 \bar{E}_3 + C_1 \bar{E}_3^2 + \bar{E}_0(\bar{E}_4 - C_1 \bar{E}_6))} , \\
\bar{\eta}_{10} &= \frac{(3 + \lambda(\nu - 1) + \nu)}{(\lambda + 1)(\nu - 1)} ,
\end{aligned}$$

附錄 二

各勁度矩陣為：

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{11} &= \int_A \left\{ \bar{E}_0 (\bar{U}_{\xi 0i,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) (\bar{U}_{\xi 0j,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0j,\eta}) \right. \\
 &\quad + \bar{D}_0 (\bar{U}_{\xi 0i,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) (\sin \beta \bar{U}_{\xi 0j,\eta}) \\
 &\quad + \bar{D}_0 (\sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) (\bar{U}_{\xi 0j,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0j,\eta}) \\
 &\quad + \bar{E}_0 \bar{U}_{\xi 0i,\eta} \bar{U}_{\xi 0j,\eta} \sin^2 \beta \\
 &\quad \left. + \bar{G}_0 [(\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{U}_{\xi 0i,\eta} + \tan \beta \bar{U}_{\xi 0i,\xi}] \right. \\
 &\quad \left. [(\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{U}_{\xi 0j,\eta} + \tan \beta \bar{U}_{\xi 0j,\xi}] \right\} dA, \\
 K_{ij}^{12} &= \int_A \left\{ \bar{D}_0 (\bar{U}_{\xi 0i,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) \bar{V}_{\eta 0j,\eta} + \bar{E}_0 \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta} \bar{V}_{\eta 0j,\eta} \right. \\
 &\quad + \bar{G}_0 [(\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{U}_{\xi 0i,\eta} + \tan \beta \bar{U}_{\xi 0i,\xi}] \\
 &\quad \left. [\sec \beta \bar{V}_{\eta 0j,\xi} - \tan \beta \bar{V}_{\eta 0j,\eta}] \right\} dA, \\
 K_{ij}^{13} &= \int_A \left\{ \bar{K}_1 (\bar{U}_{\xi 0i,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) (\sec \beta \bar{\Psi}_{\xi j,\xi} - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi j,\eta}) \right. \\
 &\quad + \bar{J}_1 (\sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) (\sec \beta \bar{\Psi}_{\xi j,\xi} - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi j,\eta}) \\
 &\quad \left. + \bar{L}_1 [(\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{U}_{\xi 0i,\eta} + \tan \beta \bar{U}_{\xi 0i,\xi}] \bar{\Psi}_{\xi j,\eta} \right\} dA, \\
 K_{ij}^{14} &= \int_A \left\{ (\bar{U}_{\xi 0i,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) [\bar{K}_1 (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta j,\xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta j,\eta}) \right. \\
 &\quad + \bar{J}_1 (\cos \beta \bar{\Psi}_{\eta j,\eta})] + \bar{J}_1 (\sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta j,\xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta j,\eta}) \\
 &\quad \left. + \bar{K}_1 \bar{U}_{\xi 0i,\eta} \bar{\Psi}_{\eta j,\eta} \sin \beta \cos \beta \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \bar{L}_1 [(\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{U}_{\xi 0i,\eta} + \tan \beta \bar{U}_{\xi 0i,\xi}] (\bar{\Psi}_{\eta,\xi} - 2 \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta,\eta}) \} dA \quad ,$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{15} = & \int_A \{ (\bar{U}_{\xi 0i,\xi} - \sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) \\ & [-C_1 \bar{E}_1 (\sec^2 \beta \bar{W}_{j,\xi\xi} - 2 \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j,\xi\eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j,\eta\eta}) - C_1 \bar{D}_3 \bar{W}_{j,\eta\eta}] \\ & + (\sin \beta \bar{U}_{\xi 0i,\eta}) [-C_1 \bar{D}_3 (\sec^2 \beta \bar{W}_{j,\xi\xi} - 2 \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j,\xi\eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j,\eta\eta}) \\ & - C_1 \bar{E}_3 \bar{W}_{j,\eta\eta}] - 2C_1 \bar{G}_3 (\sec \beta \bar{W}_{j,\xi\eta} - \tan \beta \bar{W}_{j,\eta\eta}) \\ & [(\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{U}_{\xi 0i,\eta} + \tan \beta \bar{U}_{\xi 0i,\xi}] \} dA \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{22} = & \int_A \{ \bar{E}_0 \bar{V}_{\eta 0i,\eta} \bar{V}_{\eta 0j,\eta} + \bar{G}_0 (\sec \beta \bar{V}_{\eta 0i,\xi} - \tan \beta \bar{V}_{\eta 0i,\eta}) \\ & (\sec \beta \bar{V}_{\eta 0j,\xi} - \tan \beta \bar{V}_{\eta 0j,\eta}) \} dA \quad , \end{aligned}$$

$$K_{ij}^{23} = \int_A \bar{J}_1 (\sec \beta \bar{\Psi}_{\xi,\xi} - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi,\eta}) \bar{V}_{\eta 0i,\eta} + \bar{L}_1 [\sec \beta \bar{V}_{\eta 0i,\xi} - \tan \beta \bar{V}_{\eta 0i,\eta}] \bar{\Psi}_{\xi,\eta} \} dA \quad ,$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{24} = & \int_A \bar{J}_1 \bar{V}_{\eta 0i,\eta} (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta,\xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta,\eta}) + \bar{K}_1 (\cos \beta \bar{\Psi}_{\eta,\eta} \bar{V}_{\eta 0i,\eta}) \\ & + \bar{L}_1 (\sec \beta \bar{V}_{\eta 0i,\xi} - \tan \beta \bar{V}_{\eta 0i,\eta}) (\bar{\Psi}_{\eta,\xi} - 2 \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta,\eta}) \} dA \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{25} = & \int_A \{ -C_1 \bar{D}_3 \bar{V}_{\eta 0i,\eta} (\sec^2 \beta \bar{W}_{j,\xi\xi} - 2 \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j,\xi\eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j,\eta\eta}) \\ & - C_1 \bar{E}_3 \bar{V}_{\eta 0i,\eta} \bar{W}_{j,\eta\eta} \\ & - 2C_1 \bar{G}_3 (\sec \beta \bar{V}_{\eta 0i,\xi} - \tan \beta \bar{V}_{\eta 0i,\eta}) (\sec \beta \bar{W}_{j,\xi\eta} - \tan \beta \bar{W}_{j,\eta\eta}) \} dA \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{33} = & \int_A \{ (\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) (\bar{\Psi}_{\xi,\xi} \sec \beta - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi,\eta}) (\bar{\Psi}_{\xi,\xi} \sec \beta - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi,\eta}) \\ & + (\bar{L}_2 - C_1 \bar{L}_4) \bar{\Psi}_{\xi,\eta} \bar{\Psi}_{\xi,\eta} + (\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2) \bar{\Psi}_{\xi,\eta} \bar{\Psi}_{\xi,\eta} \} dA \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{34} = \int_A \{ & [(\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) \\
& + (\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) \cos \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}] \\
& (\sec \beta \bar{\Psi}_{\xi_i, \xi} - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi_i, \eta}) + (\bar{L}_2 - C_1 \bar{L}_4) \bar{\Psi}_{\xi_i, \eta} (\bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} - 2 \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) \\
& + (\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2) \bar{\Psi}_{\xi_i} (-\sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i}) \} dA \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{35} = \int_A \{ & (\sec \beta \bar{\Psi}_{\xi_i, \xi} - \tan \beta \bar{\Psi}_{\xi_i, \eta}) \\
& [-C_1 \bar{K}_4 (\sec^2 \beta \bar{W}_{j, \xi \xi} - 2 \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j, \eta \eta}) \\
& - C_1 \bar{J}_4 \bar{W}_{j, \eta \eta}] - 2C_1 \bar{L}_4 \bar{\Psi}_{\xi_i, \eta} (\sec \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} - \tan \beta \bar{W}_{j, \eta \eta}) \\
& + (\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2) \bar{\Psi}_{\xi_i} (\sec \beta \bar{W}_{j, \xi} - \tan \beta \bar{W}_{j, \eta}) \} dA \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{44} = \int_A \{ & (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) \\
& [(\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) \\
& + (\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) \cos \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}] + \cos \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta} \\
& [(\bar{J}_2 - C_1 \bar{J}_4) (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) + (\bar{K}_2 - C_1 \bar{K}_4) \cos \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}] \\
& + (\bar{L}_2 - C_1 \bar{L}_4) (\bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} - 2 \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) (\bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} - 2 \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) \\
& + (\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2) (-\sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i}) (-\sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i}) + (\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2) \bar{\Psi}_{\eta_i} \bar{\Psi}_{\eta_i} \cos^2 \beta \} dA \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{45} = \int_A \{ & (-\tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta}) \\
& [-C_1 \bar{K}_4 (\sec^2 \beta \bar{W}_{j, \xi \xi} - \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j, \eta \eta}) - C_1 \bar{J}_4 \bar{W}_{j, \eta \eta}] \\
& - C_1 \bar{J}_4 \cos \beta \bar{\Psi}_{\eta_i, \eta} (\sec^2 \beta \bar{W}_{j, \xi \xi} - \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j, \eta \eta})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - C_1 \bar{K}_4 \cos \beta \bar{\Psi}_{\eta, \eta} \bar{W}_{j, \eta \eta} \\
& - 2 C_1 \bar{L}_4 \left(\bar{\Psi}_{\eta, \xi} - 2 \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta, \eta} \right) \left(\sec \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} - \tan \beta \bar{W}_{j, \eta \eta} \right) \\
& + \left(\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2 \right) \left(- \sin \beta \bar{\Psi}_{\eta} \right) \left(\sec \beta \bar{W}_{j, \xi} - \tan \beta \bar{W}_{j, \eta} \right) \\
& + \left(\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2 \right) \left(\cos \beta \bar{\Psi}_{\eta} \right) \bar{W}_{j, \eta} \} dA \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{55} = \int_A \{ & C_1^2 \bar{E}_6 \left(\sec^2 \beta \bar{W}_{i, \xi \xi} - \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{i, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{i, \eta \eta} \right) \\
& \left(\sec^2 \beta \bar{W}_{j, \xi \xi} - \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j, \eta \eta} \right) \\
& + C_1^2 \bar{D}_6 \left(\sec^2 \beta \bar{W}_{i, \xi \xi} - \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{i, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{i, \eta \eta} \right) \bar{W}_{j, \eta \eta} \\
& + C_1^2 \bar{D}_6 \bar{W}_{i, \eta \eta} \left(\sec^2 \beta \bar{W}_{j, \xi \xi} - \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} + \tan^2 \beta \bar{W}_{j, \eta \eta} \right) \quad , \\
& + C_1^2 \bar{E}_6 \bar{W}_{i, \eta \eta} \bar{W}_{j, \eta \eta} \\
& + 4 C_1^2 \bar{G}_6 \left(\sec \beta \bar{W}_{i, \xi \eta} - \tan \beta \bar{W}_{i, \eta \eta} \right) \left(\sec \beta \bar{W}_{j, \xi \eta} - \tan \beta \bar{W}_{j, \eta \eta} \right) \\
& + \left(\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2 \right) \left(\sec \beta \bar{W}_{i, \xi} - \tan \beta \bar{W}_{i, \eta} \right) \left(\sec \beta \bar{W}_{j, \xi} - \tan \beta \bar{W}_{j, \eta} \right) \\
& + \left(\bar{M}_0 - C_2 \bar{M}_2 \right) \bar{W}_{i, \eta} \bar{W}_{j, \eta} \} dA \quad ,
\end{aligned}$$

各質量矩陣為：

$$M_{ij}^{11} = \bar{\rho}_0 \int_A \{ \bar{U}_{\xi 0i} \bar{U}_{\xi 0j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{12} = \bar{\rho}_0 \sin \beta \int_A \{ \bar{U}_{\xi 0i} \bar{V}_{\eta 0j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{13} = (\bar{\rho}_1 - C_1 \bar{\rho}_3) \cos \beta \int_A \{ \bar{U}_{\xi 0i} \bar{\Psi}_{\xi j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{14} = 0 ,$$

$$M_{ij}^{15} = (-C_1 \bar{\rho}_3) \int_A \{ \bar{U}_{\xi 0i} \bar{W}_{j,\xi} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{22} = \bar{\rho}_0 \int_A \{ \bar{V}_{\eta 0i} \bar{V}_{\eta 0j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{23} = 0 ,$$

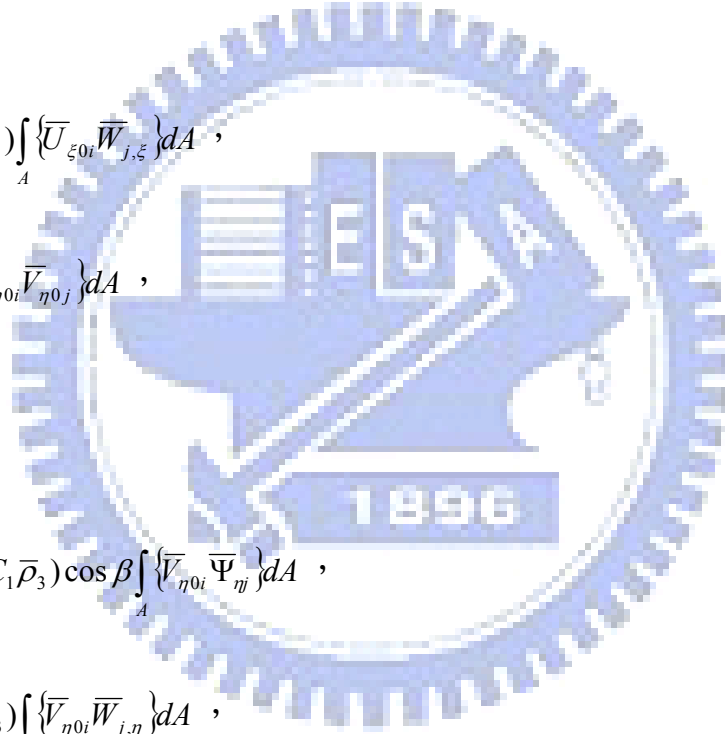
$$M_{ij}^{24} = (\bar{\rho}_1 - C_1 \bar{\rho}_3) \cos \beta \int_A \{ \bar{V}_{\eta 0i} \bar{\Psi}_{\eta j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{25} = (-C_1 \bar{\rho}_3) \int_A \{ \bar{V}_{\eta 0i} \bar{W}_{j,\eta} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{33} = (\bar{\rho}_2 - 2C_1 \bar{\rho}_4 + C_1^2 \bar{\rho}_6) \int_A \{ \bar{\Psi}_{\xi i} \bar{\Psi}_{\xi j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{34} = -(\bar{\rho}_2 - 2C_1 \bar{\rho}_4 + C_1^2 \bar{\rho}_6) \int_A \{ \sin \beta \bar{\Psi}_{\xi i} \bar{\Psi}_{\eta j} \} dA ,$$

$$M_{ij}^{35} = (-C_1 \bar{\rho}_4 + C_1^2 \bar{\rho}_6) \int_A \{ \bar{\Psi}_{\xi i} (\sec \beta \bar{W}_{j,\xi} - \tan \beta \bar{W}_{j,\eta}) \} dA ,$$



$$M_{ij}^{44} = (\bar{\rho}_2 - 2C_1\bar{\rho}_4 + C_1^2\bar{\rho}_6) \int_A \{\bar{\Psi}_{\eta_i} \bar{\Psi}_{\eta_j}\} dA ,$$

$$M_{ij}^{45} = (C_1\bar{\rho}_4 - C_1^2\bar{\rho}_6) \int_A \{\sin \beta \bar{\Psi}_{\eta_i} (\sec \beta \bar{W}_{j,\xi} - \tan \beta \bar{W}_{j,\eta})\} dA \\ + (-C_1\bar{\rho}_4 + C_1^2\bar{\rho}_6) \cos \beta \int_A \{\bar{\Psi}_{\eta_i} \bar{W}_{j,\eta}\} dA ,$$

$$M_{ij}^{55} = \int_A \{C_1^2\bar{\rho}_6 (\sec \beta \bar{W}_{i,\xi} - \tan \beta \bar{W}_{i,\eta}) (\sec \beta \bar{W}_{j,\xi} - \tan \beta \bar{W}_{j,\eta}) \\ + C_1^2\bar{\rho}_6 \bar{W}_{i,\eta} \bar{W}_{j,\eta} + \bar{\rho}_0 \bar{W}_i \bar{W}_j\} dA ,$$

其中， $\bar{\rho}_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^i dz$ ， $\rho(z)$ 與式 (2.6) 之定義一樣



表 2.1 各種不同邊界條件之特徵方程式

邊界條件	特徵方程式
<p>S(I) - S(I)</p>	<p>對稱案例: $\cos \alpha + \cos \lambda \alpha = 0^* ; \quad \bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0 ; \quad \text{其中, } \bar{\gamma}_1 = \frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{\kappa}_2} ;$ </p> <p>反對稱案例: $\cos \alpha - \cos \lambda \alpha = 0^* ; \quad \sin \lambda \alpha - \bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha = 0 .$ </p>
<p>S(II) - S(II)</p>	<p>對稱案例: $\cos \alpha + \cos \lambda \alpha = 0^* ; \quad \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0^* ;$ $\bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0 ;$ </p> <p>反對稱案例: $\cos \alpha - \cos \lambda \alpha = 0^* ; \quad \lambda \sin \alpha - \sin \lambda \alpha = 0^* ;$ $\sin \lambda \alpha - \bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha = 0 .$ </p>
<p>S(I) - S(II)</p>	<p>$(\cos 2\alpha - \cos 2\lambda \alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha) = 0^* ; \dots\dots (T1)$ $\bar{\gamma}_2 \lambda^2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \lambda \alpha = 0 ; \dots\dots (T2)$ <p>其中, $\bar{\gamma}_2 = \frac{\bar{\kappa}_3}{\bar{\kappa}_4} .$</p> </p>
<p>F - F</p>	<p>對稱案例: $\lambda(-1+\nu)\sin \alpha + (3+\nu)\sin \lambda \alpha = 0^* ; \quad \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0^{*,\#} ;$ </p> <p>反對稱案例: $-\lambda(-1+\nu)\sin \alpha + (3+\nu)\sin \lambda \alpha = 0^* ; \quad -\lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0^{*,\#} .$ </p>
<p>C - C</p>	<p>對稱案例: $\lambda(1+\nu)\sin \alpha + (-3+\nu)\sin \lambda \alpha = 0^{*,\#} ; \quad \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0^* ;$ </p> <p>反對稱案例: $\lambda(1+\nu)\sin \alpha - (-3+\nu)\sin \lambda \alpha = 0^{*,\#} ; \quad -\lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0^* .$ </p>
<p>C - F</p>	<p>$4 - \lambda^2(1+\nu)^2 \sin^2 \alpha + (-3+\nu)(1+\nu)\sin^2 \lambda \alpha = 0^{*,\#} ;$</p>

	$4 - \lambda^2(1 - \nu)^2 \sin^2 \alpha + (3 + \nu)(-1 + \nu) \sin^2 \lambda \alpha = 0^* .$
S(II) - C	$4 - \lambda^2(1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha + (-3 + \nu)(1 + \nu) \sin^2 \lambda \alpha = 0^* ; \dots\dots\dots(T3)$ $\{ [2\bar{E}_1(\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6) \frac{\bar{\kappa}_6}{\bar{\kappa}_5}]$ $+ \bar{E}_4 [4\bar{E}_4(\lambda^2(1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha - (-3 + \nu)^2 \sin^2 \lambda \alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha) + 2C_1\bar{E}_3 \frac{\bar{\kappa}_6}{\bar{\kappa}_{5_1}}]$ $- \bar{E}_2 [4\bar{E}_6(\lambda^2(1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha - (-3 + \nu)^2 \sin^2 \lambda \alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha) + 2\bar{E}_3 \frac{\bar{\kappa}_6}{\bar{\kappa}_5}] \} = 0 .$ <p style="text-align: right;">\dots\dots\dots(T4)</p>
S(I) - C	$- \lambda(1 + \nu) \sin 2\alpha + (-3 + \nu) \sin 2\lambda \alpha = 0^* ; \dots\dots\dots(T5)$ $\{ [2\bar{E}_1(\bar{E}_4 - C_1\bar{E}_6) \frac{\bar{\kappa}_6}{\bar{\kappa}_{5_1}}]$ $+ \bar{E}_4 [4\bar{E}_4(\lambda^2(1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha - (-3 + \nu)^2 \sin^2 \lambda \alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha) + 2C_1\bar{E}_3 \frac{\bar{\kappa}_6}{\bar{\kappa}_5}]$ $- \bar{E}_2 [4\bar{E}_6(\lambda^2(1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha - (-3 + \nu)^2 \sin^2 \lambda \alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha) + 2\bar{E}_3 \frac{\bar{\kappa}_6}{\bar{\kappa}_5}] \} = 0 .$ <p style="text-align: right;">\dots\dots\dots(T4)</p>

註記: * 代表均質板受面外彎矩時之特徵方程式，

代表均質板受面內拉伸時之特徵方程式，

$\bar{\kappa}_1 \sim \bar{\kappa}_6$ 詳列於附錄一。

表 2.2 各種不同邊界條件之角函數

邊界條件	角函數
<p>S(I)- S(I) $(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2})$</p>	<p>(1) 對稱案例:</p>
	<p>當 $\cos(\lambda-1)\alpha/2 = 0$ & $\cos(\lambda+1)\alpha/2 \neq 0$,</p>
	$u_0^{(a)} = A_3 r^\lambda \{\cos(\lambda-1)\theta\}, \quad w^{(a)} = A_3 r^{\lambda+1} \left\{ \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cos(\lambda-1)\theta \right\},$
	$\psi_r^{(a)} = r^\lambda \{D_3 \cos(\lambda-1)\theta\}, \quad \psi_\theta^{(a)} = r^\lambda \left\{ \left(-\kappa_1 D_3 + \kappa_3 A_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}.$
	<p>當 $\cos(\lambda+1)\alpha/2 = 0$ & $\cos(\lambda-1)\alpha/2 \neq 0$,</p>
$w^{(a)} = B_1 r^{\lambda+1} \{\cos(\lambda+1)\theta\}, \quad \psi_r^{(a)} = D_1 r^\lambda \{\cos(\lambda+1)\theta\}, \quad \psi_\theta^{(a)} = D_1 r^\lambda \{-\sin(\lambda+1)\theta\}.$	
<p>當 $\cos(\lambda-1)\alpha/2 = 0$ & $\cos(\lambda+1)\alpha/2 = 0$,</p>	
$u_0^{(a)} = r^\lambda \left\{ A_3 \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \kappa_1 \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] + B_3 \left[\left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \kappa_2 \cos(\lambda+1)\theta \right] \right\},$	
$v_0^{(a)} = r^\lambda \left\{ (-\kappa_1 A_3 + \kappa_2 B_3) \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\},$	
$w^{(a)} = r^{\lambda+1} \{B_1 \cos(\lambda+1)\theta + B_3 \cos(\lambda-1)\theta\},$	
$\psi_r^{(a)} = r^\lambda \{D_1 \cos(\lambda-1)\theta + D_3 \cos(\lambda+1)\theta\},$	
$\psi_\theta^{(a)} = r^\lambda \{-D_1 \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 D_3 + \kappa_3 B_3) \sin(\lambda-1)\theta\}.$	
<p>當 $\bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0$,</p>	
$u_0^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \left(-\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right\},$	

表 2.2 (續上頁)

<p>S(I)- S(I) $(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2})$</p>	$v_0^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \left[\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right] \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 + \kappa_2 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right\},$ $w^{(a)} = A_3 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_2 \left[\left[-\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right] \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$ $\psi_r^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_1 \left[\left[-\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right] \cos(\lambda-1)\theta + \cos(\lambda+1)\theta \right] \right\},$ $\psi_\theta^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_1 \left[\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right] \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 \bar{\eta}_1 + \kappa_3 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right\}.$ <p>(2) 反對稱案例:</p> <p>當 $\sin(\lambda-1)\alpha/2 = 0$ & $\sin(\lambda+1)\alpha/2 \neq 0$,</p> $u_0^{(a)} = A_4 r^\lambda \{ \sin(\lambda-1)\theta \}, \quad w^{(a)} = A_4 r^{\lambda+1} \left\{ \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sin(\lambda-1)\theta \right\},$ $\psi_r^{(a)} = r^\lambda \{ D_4 \sin(\lambda-1)\theta \}, \quad \psi_\theta^{(a)} = r^\lambda \left\{ \left(\kappa_1 D_4 - \kappa_3 A_4 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}$ <p>當 $\sin(\lambda+1)\alpha/2 = 0$ & $\sin(\lambda-1)\alpha/2 \neq 0$,</p> $w_0^{(a)} = B_2 r^{\lambda+1} \{ \sin(\lambda+1)\theta \}, \quad \psi_r^{(a)} = D_2 r^\lambda \{ \sin(\lambda+1)\theta \},$ $\psi_\theta^{(a)} = D_2 r^\lambda \{ \cos(\lambda+1)\theta \}.$
--	--

表 2.2 (續上頁)

當 $\sin(\lambda-1)\alpha/2 = 0$ & $\sin(\lambda+1)\alpha/2 = 0$,

$$u_0^{(a)} = r^\lambda \left\{ A_4 \left[- \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \kappa_1 \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right] + \right.$$

$$\left. B_4 \left[\left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \kappa_2 \sin(\lambda+1)\theta \right] \right\},$$

$$v_0^{(a)} = r^\lambda \left\{ (\kappa_1 A_4 - \kappa_2 B_4) \left[- \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$w^{(a)} = r^{\lambda+1} \{ B_2 \sin(\lambda+1)\theta + B_4 \sin(\lambda-1)\theta \},$$

$$\psi_r^{(a)} = r^\lambda \{ D_2 \sin(\lambda-1)\theta + D_4 \sin(\lambda+1)\theta \},$$

$$\psi_\theta^{(a)} = r^\lambda \{ D_2 \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 D_4 - \kappa_3 B_4) \cos(\lambda-1)\theta \}.$$

S(I)- S(I)

$(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2})$

當 $\sin \lambda \alpha - \bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha = 0$,

$$u_0^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ \left[- \frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right] \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$v_0^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ \left[- \frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right] \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 - \kappa_2 \bar{\eta}_3) \cos(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$w^{(a)} = A_4 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_3 \left[- \frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right] \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$\psi_r^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_1 \left[- \frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right] \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$\psi_\theta^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_1 \left[- \frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right] \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 \bar{\eta}_1 - \kappa_3 \bar{\eta}_3) \cos(\lambda-1)\theta \right\}.$$

表 2.2 (續上頁)

<p>S(II)-S(II) $(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2})$</p>	<p>(1) 對稱案例:</p> <p>當 $\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2} = 0$ 和 $\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2} = 0$, 此處之漸近解與 S(I)-S(I)。</p> <p>當 $\bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0$ 或 $\lambda \sin \alpha + \sin \lambda \alpha = 0$,</p> $u_0^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \left(-\frac{\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right\},$ $v_0^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \left(\frac{\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 + \kappa_2 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right\},$ $w^{(a)} = A_3 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_2 \left[\left(-\frac{\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$ $\psi_r^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ -\frac{1}{\lambda(\nu-1)} \left(-\frac{\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) (\bar{\eta}_4 - (1 + \kappa_1 - \kappa_1 \lambda + \lambda \nu) \bar{\eta}_5) \right. \\ \left. \cos(\lambda-1)\theta - \bar{\eta}_5 \cos(\lambda+1)\theta \right\},$ $\psi_\sigma^{(a)} = A_3 r^\lambda \left\{ \frac{1}{\lambda(\nu-1)} \left(-\frac{\cos(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\cos(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) (\bar{\eta}_4 - (1 + \kappa_1 - \kappa_1 \lambda + \lambda \nu) \bar{\eta}_5) \right. \\ \left. \sin(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 \bar{\eta}_5 + \kappa_3 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right\}.$
---	--

表 2.2 (續上頁)

<p>S(II)-S(II) $(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2})$</p>	<p>(2) 反對稱案例:</p> <p>當 $\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2} = 0$ 和 $\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2} = 0$, 此處之漸近解與 S(I)_ S(I) 。</p> <p>當 $\lambda \sin \alpha - \sin \lambda \alpha = 0$ 或 $\sin \lambda \alpha - \bar{\gamma}_1 \lambda \sin \alpha = 0$,</p> $u_0^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ \left(-\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\},$ $v_0^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ \left(-\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 - \kappa_2 \bar{\eta}_3) \cos(\lambda-1)\theta \right\},$ $w^{(a)} = A_4 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_3 \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\},$ $\psi_r^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ -\frac{1}{\lambda(\nu-1)} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) (\bar{\eta}_6 - (1 + \kappa_1 - \kappa_1 \lambda + \lambda \nu) \bar{\eta}_7) \sin(\lambda+1)\theta - \bar{\eta}_7 \sin(\lambda-1)\theta \right\},$ $\psi_\theta^{(a)} = A_4 r^\lambda \left\{ -\frac{1}{\lambda(\nu-1)} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin(\lambda+1)\frac{\alpha}{2}} \right) (\bar{\eta}_6 - (1 + \kappa_1 - \kappa_1 \lambda + \lambda \nu) \bar{\eta}_7) \cos(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 \bar{\eta}_7 - \kappa_3 \bar{\eta}_3) \cos(\lambda-1)\theta \right\}.$
---	---

表 2.2 (續上頁)

(1) 對稱案例:

當 $\lambda(-1+\nu)\sin\alpha+(3+\nu)\sin\lambda\alpha=0$ 或 $\lambda\sin\alpha+\sin\lambda\alpha=0$,

$$u_0^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin\alpha + \sin\lambda\alpha) \right) \cos(\lambda+1)\theta - \bar{\eta}_8 \cos(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$v_0^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ - \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin\alpha + \sin\lambda\alpha) \right) \sin(\lambda+1)\theta \right. \\ \left. + \left(-\kappa_1 \bar{\eta}_8 - \kappa_2 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$w^{(a)} = D_3 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_9 \left[\frac{\bar{\eta}_{10}}{C_1(\lambda+1)} \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta - \frac{1}{C_1(\lambda+1)} \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$\psi_r^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ -\bar{\eta}_{10} \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda-1)\theta + \cos(\lambda+1)\theta \right\},$$

$$\psi_\theta^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \bar{\eta}_{10} \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \left(-\kappa_1 - \kappa_3 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}.$$

(2) 反對稱案例:

當 $-\lambda(-1+\nu)\sin\alpha+(3+\nu)\sin\lambda\alpha=0$ 或 $-\lambda\sin\alpha+\sin\lambda\alpha=0$,

$$u_0^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ - \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin\alpha - \sin\lambda\alpha) \right) \sin(\lambda+1)\theta - \bar{\eta}_8 \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$v_0^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ - \left(\frac{\bar{\eta}_{10} \bar{\eta}_8}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} (\sin\alpha - \sin\lambda\alpha) \right) \cos(\lambda+1)\theta \right. \\ \left. + \left(-\kappa_1 \bar{\eta}_8 - \kappa_2 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$w^{(a)} = D_4 r^{\lambda+1} \left\{ \bar{\eta}_9 \left[\frac{\bar{\eta}_{10}}{C_1(\lambda+1)} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta - \frac{1}{C_1(\lambda+1)} \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

F-F

$$\left(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\psi_r^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ -\bar{\eta}_{10} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$\psi_\theta^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ -\bar{\eta}_{10} \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \left(\kappa_1 - \kappa_3 \frac{\bar{\eta}_9}{C_1(\lambda+1)} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}.$$



表 2.2 (續上頁)

(1) 對稱案例:

當 $\lambda(1+\nu)\sin\alpha + (-3+\nu)\sin\lambda\alpha = 0$ 或 $\lambda\sin\alpha + \sin\lambda\alpha = 0$,

$$u_0^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \left[\left(-\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$v_0^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \left[\left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 + \kappa_2 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$w_0^{(a)} = D_3 r^{\lambda+1} \left\{ \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \bar{\eta}_2 \left[\left(-\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$\psi_r^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \left(-\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda-1)\theta + \cos(\lambda+1)\theta \right\},$$

$$\psi_\theta^{(a)} = D_3 r^\lambda \left\{ \left(\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + (-\kappa_1 + \kappa_2 \bar{\eta}_2) \sin(\lambda-1)\theta \right\}.$$

C-C

$$\left(-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}\right)$$

(2) 反對稱案例:

當 $\lambda(1+\nu)\sin\alpha - (-3+\nu)\sin\lambda\alpha = 0$ 或 $-\lambda\sin\alpha + \sin\lambda\alpha = 0$,

$$u_0^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$v_0^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 - \kappa_2 \bar{\eta}_3) \cos(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$w_0^{(a)} = D_4 r^{\lambda+1} \left\{ \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \bar{\eta}_3 \left[\left(-\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right] \right\},$$

$$\psi_r^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ -\left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\},$$

$$\psi_\theta^{(a)} = D_4 r^\lambda \left\{ \left(\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda+1)\theta + (\kappa_1 - \kappa_2 \bar{\eta}_3) \cos(\lambda-1)\theta \right\}.$$

註記: $\bar{\eta}_1 \sim \bar{\eta}_{10}$ 詳列於附錄一。

表 3.1 近似均質懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析

($\beta=60^\circ$, $h/b=0.2$, $a/b=1$, $m=1\times 10^{-4}$, $E_t/E_b=1.0001$, $\rho_t/\rho_b=1.0001$)

Mode No.	No. of Corner Functions (\bar{N}_c)	(I,J) in Equations (3.32a)-(3.32e)					McGee and Butalia 【1992c】
		(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)	
1	0	1.227	1.212	1.203	1.198	1.194	1.187
	1	1.196	1.193	1.190	1.187	1.185	
	5	1.193	1.187	1.185	1.183	1.183	
	10	1.186	1.185	1.184	1.183	1.183	
2	0	2.421	2.392	2.374	2.362	2.354	2.377*
	1	2.370	2.355	2.344	2.332	2.331	
	5	2.354	2.341	2.330	2.328	2.328	
	10	2.340	2.330	2.329	2.327	2.326	
3	0	3.361	3.343	3.332	3.324	3.319	3.325
	1	3.317	3.313	3.308	3.306	3.305	
	5	3.313	3.305	3.303	3.301	3.300	
	10	3.303	3.303	3.300	3.300	3.300	
4	0	5.685	5.644	5.618	5.601	5.589	5.552
	1	5.557	5.551	5.547	5.543	5.543	
	5	5.550	5.548	5.540	5.540	5.540	
	10	5.545	5.545	5.543	5.538	5.535	
5	0	5.914	5.800	5.738	5.700	5.676	5.625*
	1	5.717	5.697	5.647	5.642	5.638	
	5	5.700	5.633	5.613	5.602	5.603	
	10	5.625	5.620	5.608	5.603	5.600	

* : 表示面內模態。

表 3.2 近似均質具邊緣裂縫矩形厚板無因次化頻率($\bar{\Omega}$)之收斂性分析

$$(h/BL=0.01, AL/BL=2, DL/AL=0.8, C_y/BL=0.5, m=1 \times 10^{-4},$$

$$E_t/E_b=1.0001, \rho_t/\rho_b=1.0001, \alpha_c=0)$$

Mode No.	\bar{N}_1, \bar{N}_2 in Eq. (3.43a)-(3.43e)	(I,J) in Equations (3.39a)-(3.39e)					Stahl and Keer 【1972】
		(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)	
1	0	49.34	49.34	49.34	49.34	49.34	29.90
	1	43.41	39.40	39.38	36.42	36.41	
	5	29.89	29.87	29.86	29.86	29.86	
	8	29.86	29.85	29.83	29.83	29.83	
	10	29.85	29.83	29.83	29.82	29.82	
2	0	79.03	78.93	78.93	78.93	78.93	39.53
	1	78.36	77.95	77.95	77.76	77.76	
	5	39.70	39.69	39.68	39.67	39.65	
	8	39.51	39.50	39.47	39.47	39.45	
	10	39.50	39.46	39.45	39.44	39.43	
3	0	129.5	129.5	128.2	128.2	128.2	68.20
	1	127.8	127.2	127.1	126.9	126.8	
	5	68.17	68.15	68.14	68.14	68.13	
	8	68.14	68.13	68.11	68.11	68.10	
	10	68.12	68.10	68.10	68.10	68.09	
4	0	168.3	167.7	167.7	167.7	167.7	94.50
	1	166.5	165.9	165.5	165.5	165.0	
	5	95.48	95.38	95.31	95.22	95.16	
	8	94.54	94.53	94.34	94.34	94.32	
	10	94.51	94.33	94.33	94.31	94.29	
5	0	197.8	197.2	197.2	197.2	197.2	120.2
	1	196.7	196.1	195.8	195.8	195.6	
	5	121.5	120.5	120.5	120.4	120.4	
	8	120.3	120.2	120.2	120.1	120.1	
	10	120.3	120.1	120.1	120.1	120.0	

表 3.3 懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析

($\beta=60^\circ$, $h/b=0.5$, $a/b=1$, $m=5$, $E_t/E_b=5$, $\rho_t/\rho_b=5$)

Mode No.	No. of Corner Functions (\bar{N}_C)	(I,J) in Equations (3.32a)-(3.32e)					
		(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)	(11,11)
1 [#]	0	0.9685	0.9567	0.9495	0.9448	0.9416	0.9394
	1	0.9453	0.9438	0.9430	0.9410	0.9400	0.9378
	5	0.9325	0.9319	0.9316	0.9314	0.9313	0.9313
	10	0.9318	0.9315	0.9315	0.9314	0.9313	0.9313
2	0	0.9786	0.9667	0.9596	0.9550	0.9519	0.9497
	1	0.9628	0.9560	0.9548	0.9503	0.9480	0.9473
	5	0.9465	0.9447	0.9441	0.9441	0.9435	0.9434
	10	0.9450	0.9443	0.9438	0.9433	0.9433	0.9433
3	0	1.9478	1.9313	1.9217	1.9151	1.9106	1.9074
	1	1.9293	1.9135	1.9123	1.9103	1.9075	1.9063
	5	1.9025	1.8987	1.8975	1.8974	1.8961	1.8958
	10	1.8998	1.8975	1.8973	1.8957	1.8958	1.8958
4 [#]	0	2.2742	2.2576	2.2473	2.2404	2.2355	2.2320
	1	2.2473	2.2410	2.2355	2.2235	2.2223	2.2203
	5	2.2188	2.2167	2.2165	2.2164	2.2164	2.2163
	10	2.2170	2.2165	2.2165	2.2164	2.2163	2.2163
5	0	2.6529	2.6398	2.6325	2.6271	2.6236	2.6211
	1	2.6375	2.6300	2.6275	2.6225	2.6212	2.6200
	5	2.6195	2.6153	2.6141	2.6135	2.6133	2.6131
	10	2.6163	2.6140	2.6138	2.6129	2.6130	2.6130

#：表示以面內模態為主。

表 3.4 懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)之收斂性分析

($\beta=75^\circ$, $h/b=0.5$, $a/b=1$, $m=5$, $E_t/E_b=5$, $\rho_t/\rho_b=5$)

Mode No.	No. of Corner Functions (\bar{N}_C)	(I,J) in Equations (3.32a)-(3.32e)					
		(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)	(11,11)
1 [#]	0	0.1651	0.1617	0.1597	0.1584	0.1575	0.1569
	1	0.1611	0.1604	0.1585	0.1574	0.1562	0.1560
	5	0.1544	0.1543	0.1542	0.1542	0.1542	0.1542
	10	0.1543	0.1542	0.1541	0.1541	0.1541	0.1541
2	0	0.3227	0.3117	0.3049	0.3002	0.2970	0.2946
	1	0.3057	0.3049	0.2987	0.2950	0.2923	0.2912
	5	0.2874	0.2872	0.2860	0.2858	0.2857	0.2857
	10	0.2870	0.2869	0.2857	0.2857	0.2856	0.2856
3	0	0.3947	0.3894	0.3863	0.3844	0.3831	0.3822
	1	0.3875	0.3853	0.3828	0.3812	0.3800	0.3809
	5	0.3804	0.3796	0.3791	0.3790	0.3789	0.3787
	10	0.3793	0.3790	0.3788	0.3787	0.3786	0.3786
4 [#]	0	0.4549	0.4432	0.4375	0.4338	0.4312	0.4293
	1	0.4416	0.4404	0.4349	0.4316	0.4288	0.4281
	5	0.4216	0.4216	0.4215	0.4215	0.4214	0.4214
	10	0.4216	0.4214	0.4213	0.4212	0.4212	0.4212
5	0	0.7652	0.7441	0.7347	0.7294	0.7260	0.7237
	1	0.7328	0.7321	0.7253	0.7207	0.7205	0.7198
	5	0.7201	0.7189	0.7164	0.7146	0.7147	0.7148
	10	0.7188	0.7182	0.7145	0.7147	0.7142	0.7141

#：表示以面內模態為主。

表 3.5 具邊緣裂縫矩形厚板無因次化頻率($\bar{\Omega}$)之收斂性分析

$(h/BL = 0.1, AL/BL = 2, DL/AL = 0.5, Cy/BL = 0.5,$

$m = 10, E_t/E_b = 5, \rho_t/\rho_b = 10)$

Mode No.	\bar{N}_1, \bar{N}_2 in Eq. (3.43a)-(3.43e)	(I,J) in Equations (3.39a)-(3.39e)				
		(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)
1	0	64.17	64.16	64.16	64.16	64.16
	1	50.73	50.51	50.45	50.26	50.04
	5	50.10	50.07	50.05	50.01	49.99
	7	50.05	50.02	49.99	49.98	49.98
2	0	101.4	101.4	101.4	101.4	101.4
	1	90.48	90.42	90.40	90.33	90.21
	5	90.17	90.17	90.16	90.14	90.10
	7	90.15	90.15	90.14	90.12	90.10
3	0	161.5	161.5	161.5	161.5	161.5
	1	143.8	143.8	143.8	143.7	143.7
	5	140.9	140.8	140.8	140.8	140.8
	7	140.8	140.8	140.8	140.8	140.8
4	0	207.9	207.9	207.9	207.9	207.9
	1	180.9	180.9	180.8	180.8	180.8
	5	154.1	154.0	153.9	153.9	153.9
	7	154.0	153.9	153.9	153.9	153.8
5	0	241.8	241.8	241.8	241.8	241.8
	1	215.3	215.3	215.3	215.3	215.2
	5	211.4	211.3	211.3	211.2	211.1
	7	211.2	211.2	211.2	211.2	211.1

表 3.6 懸臂平行四邊形厚板無因次化頻率(Ω)

$$(h/b=0.5, a/b=1, c/b=1, \rho_t/\rho_b=10)$$

m	E_t/E_b	$\beta(\text{degree})$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
5	2	0	2.025	2.850 [#]	3.758	6.492 [#]	7.776
		30	1.641	2.176 [#]	3.072	4.751 [#]	5.863
		45	1.188	1.424 [#]	2.340	3.081 [#]	3.895
		60	0.617 [#]	0.658	1.376	1.486 [#]	1.864
		75	0.103 [#]	0.199	0.271	0.297 [#]	0.477
	5	0	2.381	3.515 [#]	4.273	8.207 [#]	9.215
		30	1.928	2.673 [#]	3.524	5.909 [#]	6.970
		45	1.396	1.743 [#]	2.713	3.787 [#]	4.654
		60	0.755 [#]	0.773	1.631	1.789 [#]	2.217
		75	0.125 [#]	0.234	0.336	0.341 [#]	0.603
0.5	2	0	1.405	2.111 [#]	2.567	5.014 [#]	5.529
		30	1.144	1.605 [#]	2.117	3.568 [#]	4.255
		45	0.831	1.044 [#]	1.632	2.277 [#]	2.852
		60	0.453 [#]	0.461	0.992	1.077 [#]	1.363
		75	0.075 [#]	0.140	0.204	0.208 [#]	0.364
	5	0	2.030	3.143 [#]	3.722	7.534 [#]	7.977
		30	1.656	2.389 [#]	3.070	5.320 [#]	6.211
		45	1.206	1.555 [#]	2.371	3.393 [#]	4.175
		60	0.669 [#]	0.674	1.448	1.604 [#]	1.997
		75	0.112 [#]	0.200	0.305	0.305 [#]	0.544
0	2	0	1.307	1.946*	2.343	4.669*	4.961
		30	1.061	1.476*	1.930	3.289*	3.836
		45	0.771	0.961*	1.484	2.097*	2.550
		60	0.416*	0.427	0.882	0.991*	1.218
		75	0.069*	0.129	0.178	0.188*	0.329
	5	0	2.066	3.077*	3.704	7.382*	7.845
		30	1.678	2.334*	3.052	5.201*	6.064
		45	1.219	1.520*	2.347	3.316*	4.032
		60	0.658*	0.675	1.394	1.567*	1.927
		75	0.109*	0.204	0.281	0.298*	0.519

* : 表示面內模態。 # : 表示以面內模態為主。

表 3.7 懸臂梯形厚板無因次化頻率(Ω)

$$(h/b=0.5, a/b=1, c/b=0.5, \rho_t/\rho_b=10)$$

m	E_t/E_b	$\beta(\text{degree})$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
5	2	0	2.319	3.240 [#]	5.307	7.055 [#]	8.336
		30	1.700	2.034 [#]	3.896	4.968 [#]	5.839
		45	1.173	1.190 [#]	2.670	3.215 [#]	3.856
		60	0.463 [#]	0.630	1.285	1.455 [#]	1.897
		75	0.073 [#]	0.184	0.242	0.256 [#]	0.460
	5	0	2.726	3.989 [#]	6.045	8.863 [#]	9.708
		30	1.997	2.488 [#]	4.483	6.151 [#]	6.898
		45	1.388	1.443 [#]	3.083	3.951 [#]	4.631
		60	0.563 [#]	0.741	1.476	1.800 [#]	2.356
		75	0.088 [#]	0.216	0.282	0.315 [#]	0.584
0.5	2	0	1.616	2.397 [#]	3.662	5.450 [#]	5.821
		30	1.185	1.493 [#]	2.718	3.717 [#]	4.214
		45	0.825	0.865 [#]	1.881	2.380 [#]	2.842
		60	0.338 [#]	0.441	0.914	1.085 [#]	1.449
		75	0.053 [#]	0.128	0.174	0.190 [#]	0.354
	5	0	2.337	3.566 [#]	5.321	8.211 [#]	8.393
		30	1.716	2.220 [#]	3.953	5.541 [#]	6.153
		45	1.195	1.286 [#]	2.740	3.544 [#]	4.161
		60	0.501 [#]	0.639	1.338	1.616 [#]	2.143
		75	0.079 [#]	0.187	0.256	0.283 [#]	0.523
0	2	0	1.499	2.204*	3.298	5.096*	5.206
		30	1.099	1.372*	2.437	3.426*	3.810
		45	0.765	0.794*	1.668	2.191*	2.572
		60	0.310*	0.408	0.794	0.999*	1.330
		75	0.048*	0.119	0.150	0.174*	0.308
	5	0	2.370	3.485*	5.214	8.057*	8.232
		30	1.738	2.169*	3.853	5.417*	6.024
		45	1.209	1.256*	2.638	3.464*	4.067
		60	0.490*	0.645	1.256	1.579*	2.102
		75	0.077*	0.188	0.237	0.276*	0.487

* : 表示面內模態。 # : 表示以面內模態為主。

表 3.8 懸臂三角形厚板無因次化頻率(Ω)

$$(h/b=0.2, a/b=1, c/b=0, \rho_t/\rho_b=10)$$

m	E_t/E_b	$\beta(\text{degree})$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
10	2	0	4.593	11.64 [#]	14.95	18.74	24.97 [#]
		30	3.154	6.186 [#]	10.34	13.87	14.95 [#]
		45	2.127	3.250 [#]	7.264	8.257 [#]	9.647
		60	1.098	1.144 [#]	3.070 [#]	3.978	4.553
		75	0.162 [#]	0.309	0.455 [#]	0.830	0.876 [#]
	5	0	5.279	13.26 [#]	16.85	21.11	28.16 [#]
		30	3.622	6.984 [#]	11.77	15.77	16.70 [#]
		45	2.440	3.660 [#]	8.303	9.360 [#]	10.73
		60	1.260	1.286 [#]	3.488 [#]	4.510	5.004
		75	0.182 [#]	0.356	0.514 [#]	0.901	0.995 [#]
5	2	0	4.038	10.24 [#]	13.26	16.70	22.00 [#]
		30	2.772	5.446 [#]	9.161	12.37	13.30 [#]
		45	1.869	2.862 [#]	6.433	7.267 [#]	8.849
		60	0.965	1.008 [#]	2.700 [#]	3.525	4.313
		75	0.143 [#]	0.272	0.401 [#]	0.768	0.814 [#]
	5	0	4.751	12.50 [#]	15.44	19.50	26.56 [#]
		30	3.260	6.585 [#]	10.77	14.74	15.75 [#]
		45	2.198	3.451 [#]	7.608	8.823 [#]	10.24
		60	1.135	1.212 [#]	3.290 [#]	4.143	4.977
		75	0.172 [#]	0.321	0.484 [#]	0.932	0.940 [#]
0	2	0	2.574	6.891*	8.422	10.71	14.59*
		30	1.767	3.618*	5.883	8.094	8.622*
		45	1.192	1.895*	4.168	4.858*	5.550
		60	0.616	0.665*	1.812*	2.273	2.689
		75	0.094*	0.174	0.266*	0.500	0.517*
	5	0	4.069	10.90*	13.32	16.93	23.07*
		30	2.795	5.721*	9.302	12.80	13.63*
		45	1.885	2.996*	6.590	7.681*	8.771
		60	0.974	1.052*	2.864*	3.594	4.251
		75	0.149*	0.276	0.421*	0.790	0.817*

* : 表示面內模態。# : 表示以面內模態為主。

表 3.9 具邊緣裂縫矩形厚板無因次化頻率($\bar{\Omega}$)

($h/BL=0.1$, $AL/BL=2$, $Cy/BL=0.5$, $\rho_t/\rho_b=10$)

m	E_t/E_b	DL/AL	Mode Number				
			1	2	3	4	5
10	2	0.1	39.96	63.14	100.6	129.5	150.6
		0.5	31.44	56.68	88.60	96.81	132.8
		0.7	26.53	55.41	69.62	91.40	127.5
	5	0.1	63.53	100.4	159.9	205.8	239.4
		0.5	49.98	90.10	140.8	153.9	211.1
		0.7	42.17	88.09	110.7	145.3	202.6
	20	0.1	88.88	140.4	223.7	288.0	335.0
		0.5	69.93	126.1	197.0	215.3	295.4
		0.7	59.00	123.2	154.8	203.3	283.5
5	2	0.1	31.84	50.31	80.13	103.2	120.0
		0.5	25.05	45.17	70.59	77.13	105.8
		0.7	21.14	44.15	55.47	72.83	101.6
	5	0.1	50.69	80.08	127.5	164.2	191.0
		0.5	39.88	71.89	112.4	122.8	168.5
		0.7	33.65	70.28	88.29	115.9	161.7
	20	0.1	72.16	114.0	181.6	233.8	271.9
		0.5	56.77	102.3	160.0	174.8	239.8
		0.7	47.90	100.1	125.7	165.0	230.2
2	2	0.1	28.21	44.57	70.98	91.39	106.3
		0.5	22.19	40.01	62.54	68.33	93.76
		0.7	18.73	39.12	49.14	64.52	89.99
	5	0.1	44.27	69.94	111.4	143.4	166.8
		0.5	34.82	62.79	98.13	107.2	147.1
		0.7	29.38	61.38	77.11	101.2	141.2
	20	0.1	63.56	100.4	159.9	205.9	239.5
		0.5	50.00	90.15	140.9	154.0	211.2
		0.7	42.19	88.13	110.7	145.4	202.7

表 4.1 具邊緣裂縫矩形板受面內載重的 \bar{K}_{N-I} 與 \bar{K}_{M-I} 值

($h/BL1=0.1$, $AL1/BL1=1$, $Cy1/BL1=0.5$)

E_t/E_b	m	$DL1/AL1$	\bar{K}_{N-I}	\bar{K}_{M-I}	
2	0	0.3	0.185	0.000000	
		0.5	0.298	0.000000	
		0.7	0.645	0.000000	
	5	0	0.3	0.187	0.000122
			0.5	0.299	0.000180
			0.7	0.634	0.000439
	10	0	0.3	0.186	0.000082
			0.5	0.297	0.000121
			0.7	0.628	0.000294
	20	0	0.3	0.185	0.000049
			0.5	0.295	0.000071
			0.7	0.623	0.000172
5	0	0.3	0.185	0.000000	
		0.5	0.298	0.000000	
		0.7	0.645	0.000000	
	5	0	0.3	0.209	0.000385
			0.5	0.325	0.000561
			0.7	0.720	0.001413
	10	0	0.3	0.200	0.000291
			0.5	0.313	0.000419
			0.7	0.679	0.001046
	20	0	0.3	0.191	0.000184
			0.5	0.303	0.000263
			0.7	0.647	0.000652

表 4.2 具邊緣裂縫矩形板受面外載重的 \bar{K}_{N-I} 與 \bar{K}_{M-I} 值

($h/BL2 = 0.1$, $AL2/BL2 = 1$, $Cy2/BL2 = 0.5$)

E_t / E_b	m	$DL2 / AL2$	\bar{K}_{N-I}	\bar{K}_{M-I}
2	0	0.5	0.000	0.883
		0.7	0.000	1.419
	5	0.5	1.396	1.072
		0.7	1.795	1.642
	10	0.5	1.080	1.054
		0.7	1.363	1.617
	20	0.5	0.734	1.014
		0.7	0.913	1.568
5	0	0.5	0.000	0.883
		0.7	0.000	1.419
	5	0.5	4.050	1.736
		0.7	5.152	2.439
	10	0.5	3.285	1.591
		0.7	4.126	2.259
	20	0.5	2.373	1.397
		0.7	2.948	2.019

表 4.2 (續上頁)

E_t / E_b	m	$DL2 / AL2$	\bar{K}_{N-I}	\bar{K}_{M-I}
10	0	0.5	0.000	0.883
		0.7	0.000	1.419
	5	0.5	7.126	2.797
		0.7	8.923	3.694
	10	0.5	5.912	2.482
		0.7	7.352	3.321
	20	0.5	4.336	2.007
		0.7	5.364	2.747
20	0	0.5	0.000	0.883
		0.7	0.000	1.419
	5	0.5	11.71	4.578
		0.7	14.38	5.767
	10	0.5	10.16	4.179
		0.7	12.44	5.315
	20	0.5	7.408	3.184
		0.7	9.083	4.146

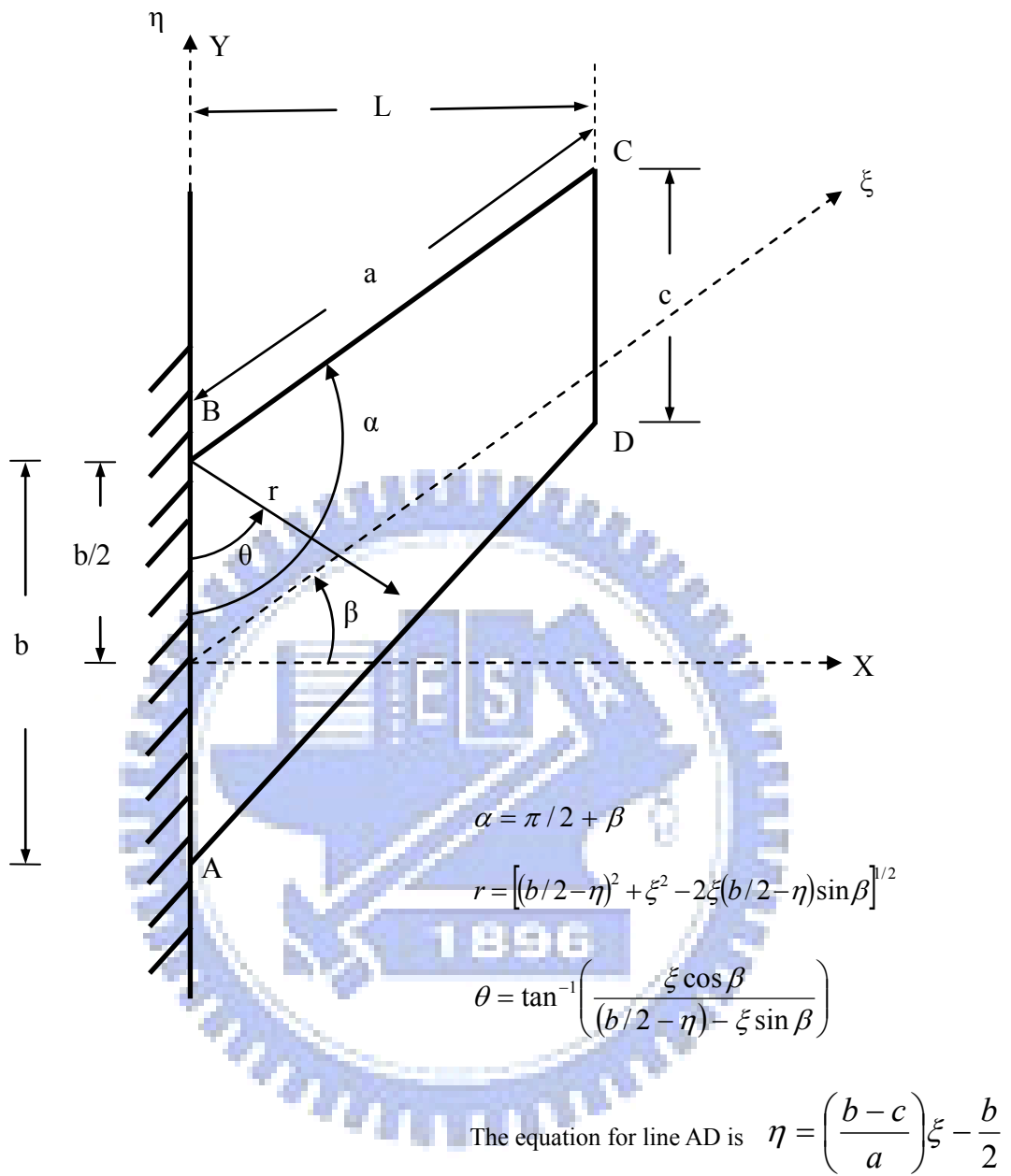


圖 1.1 懸臂斜形板幾何圖形及座標系標

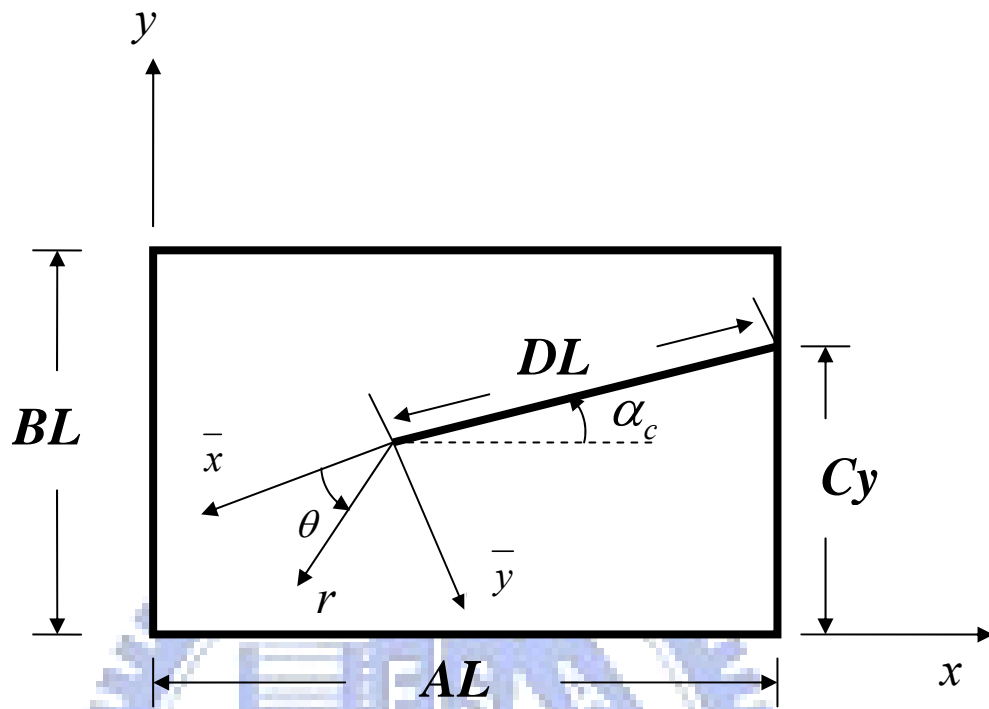


圖 1.2 具邊緣裂縫之矩形板幾何圖形

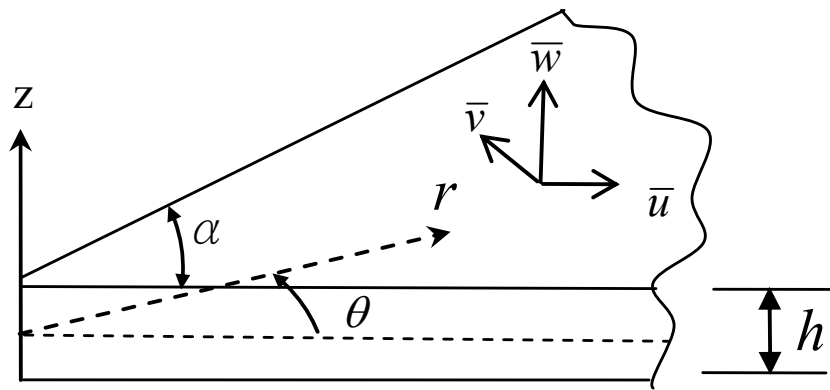


圖 2.1 座標系統與扇形板之正位移分量



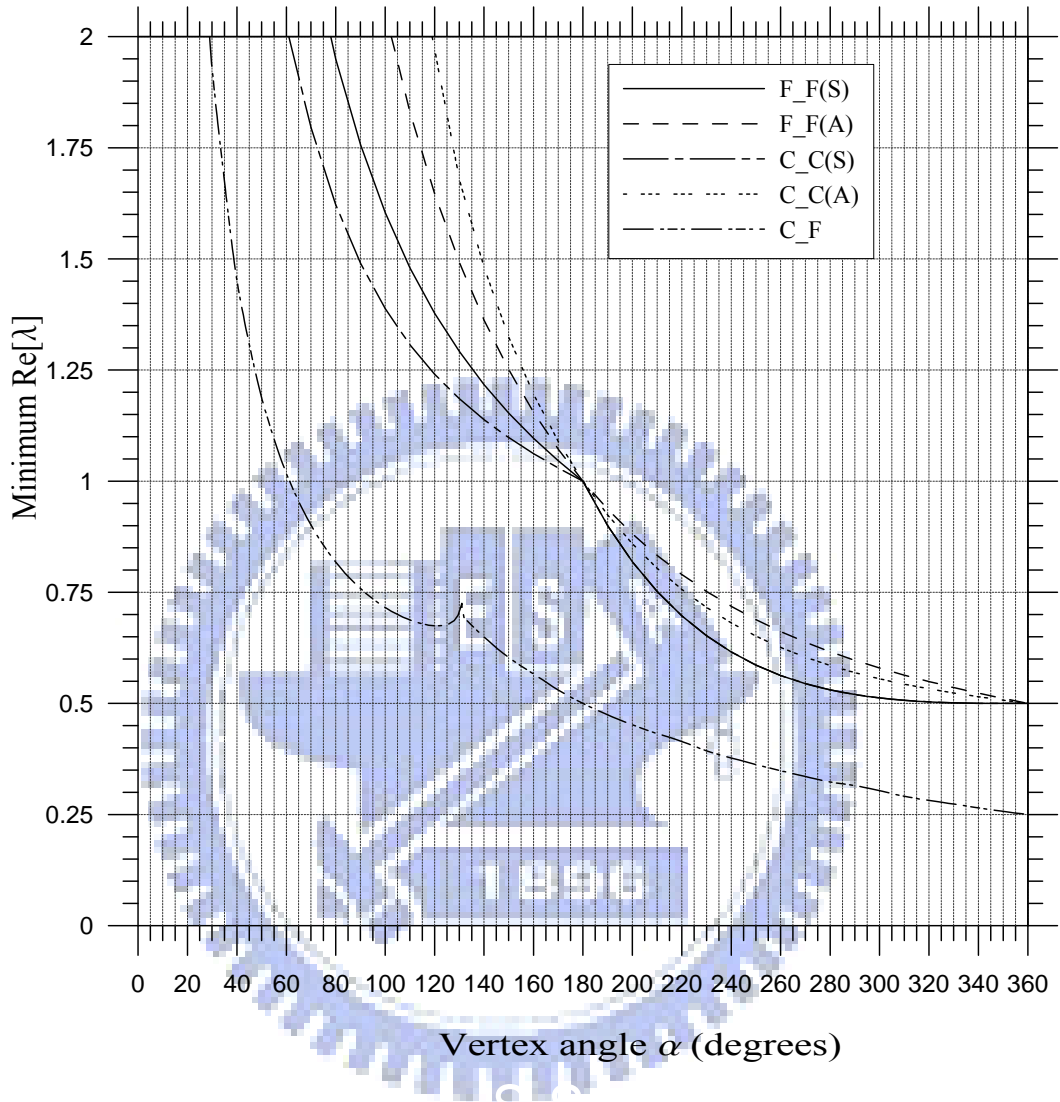


圖 2.2 CF-CC-FF 特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化

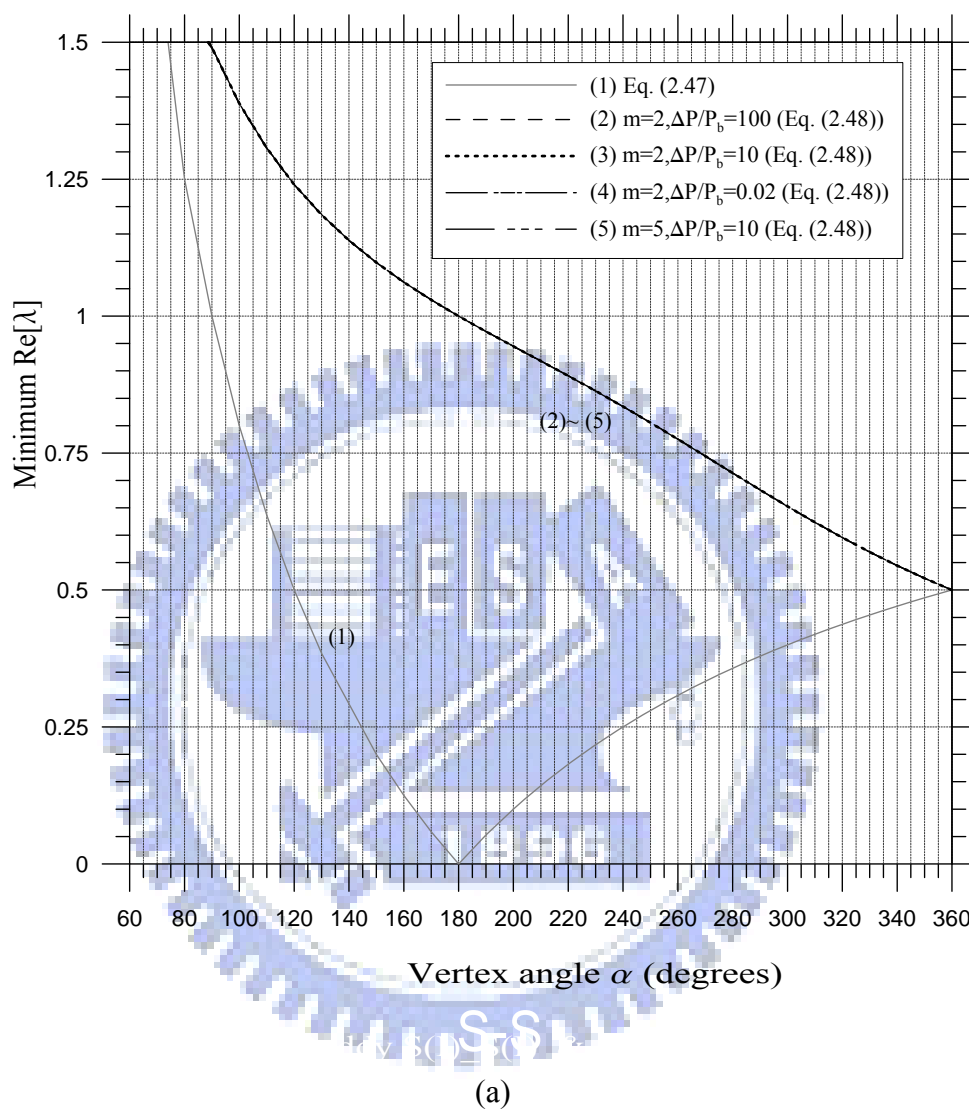
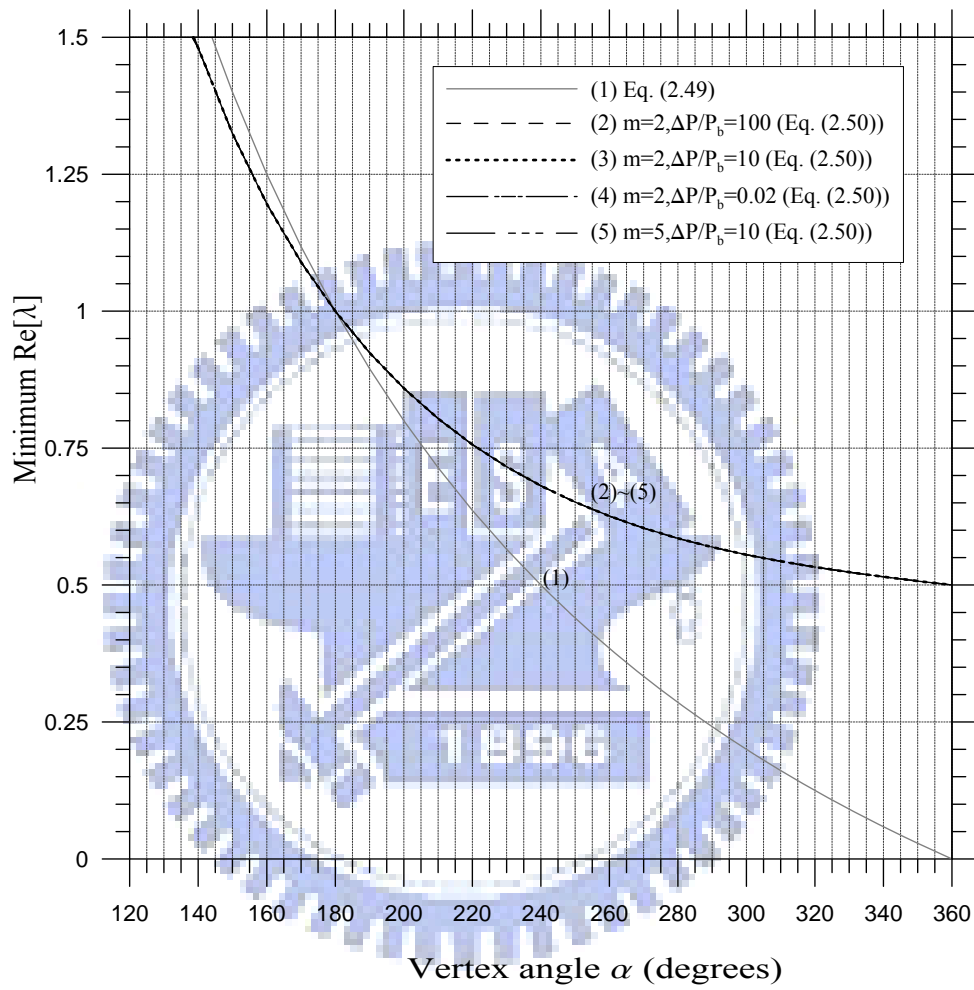


圖 2.3 S(I)- S(I)特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化

(a) 對稱解 (b) 反對稱解



(b)

接續圖 2.3

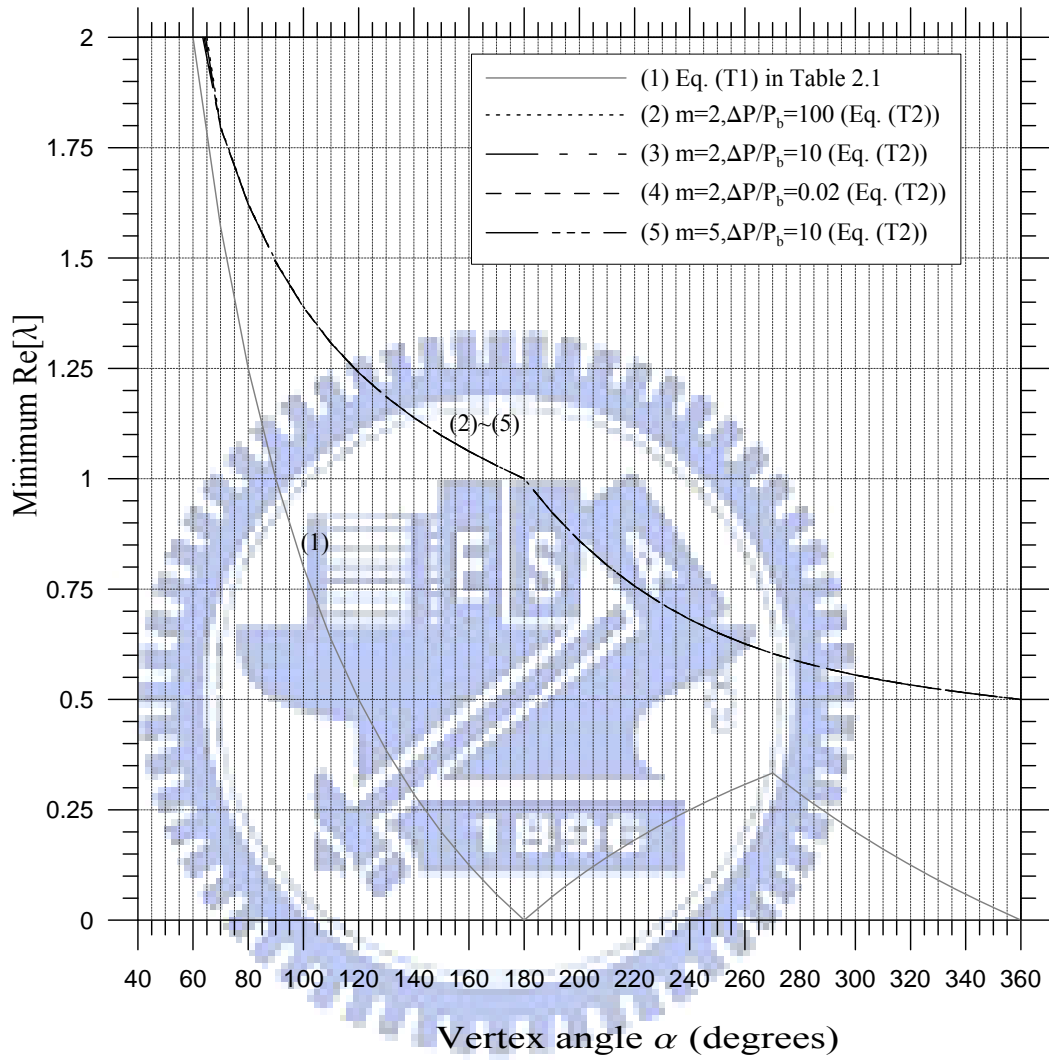


圖 2.4 S(I)- S(II)特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化

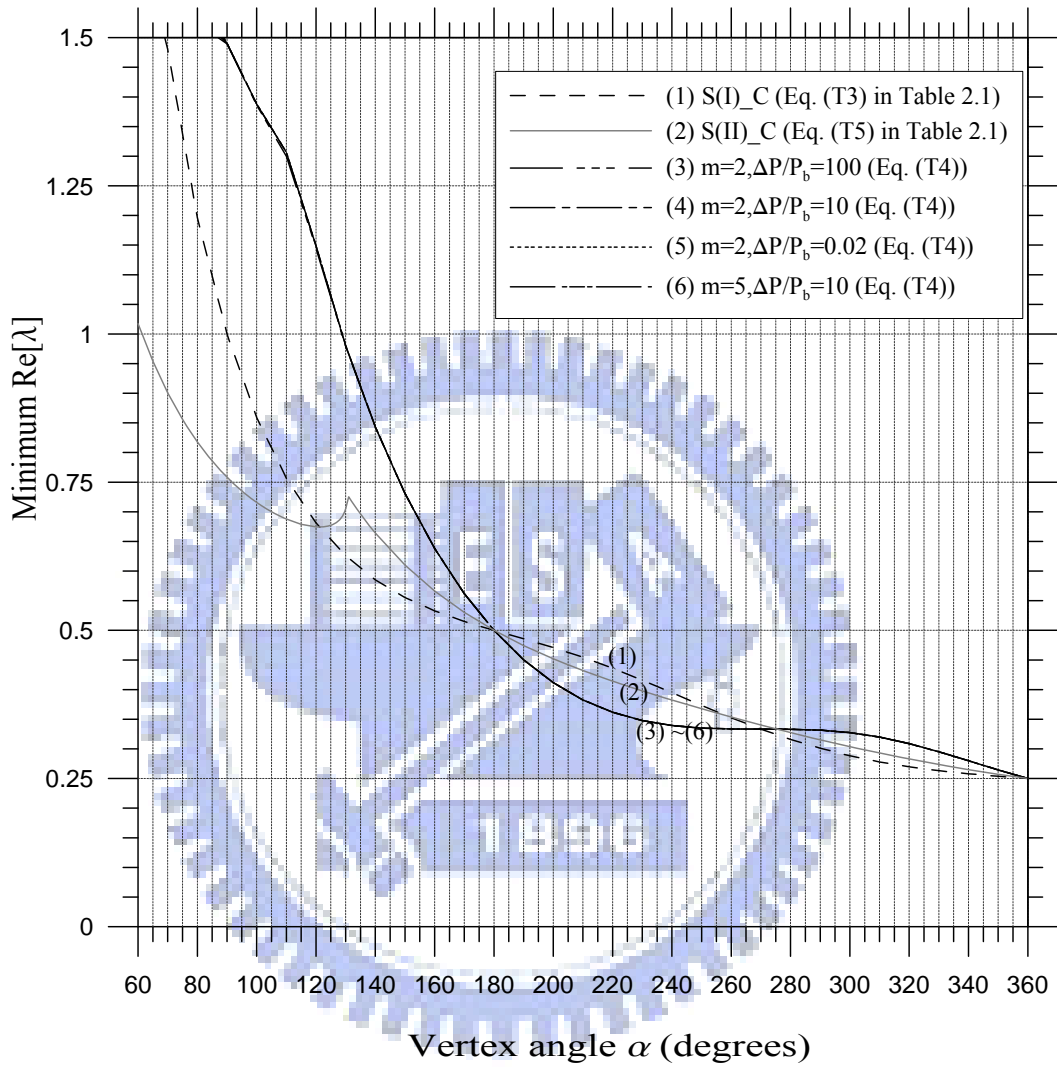


圖 2.5 S(I)-C 特徵值取實部之最小值隨扇形角之變化

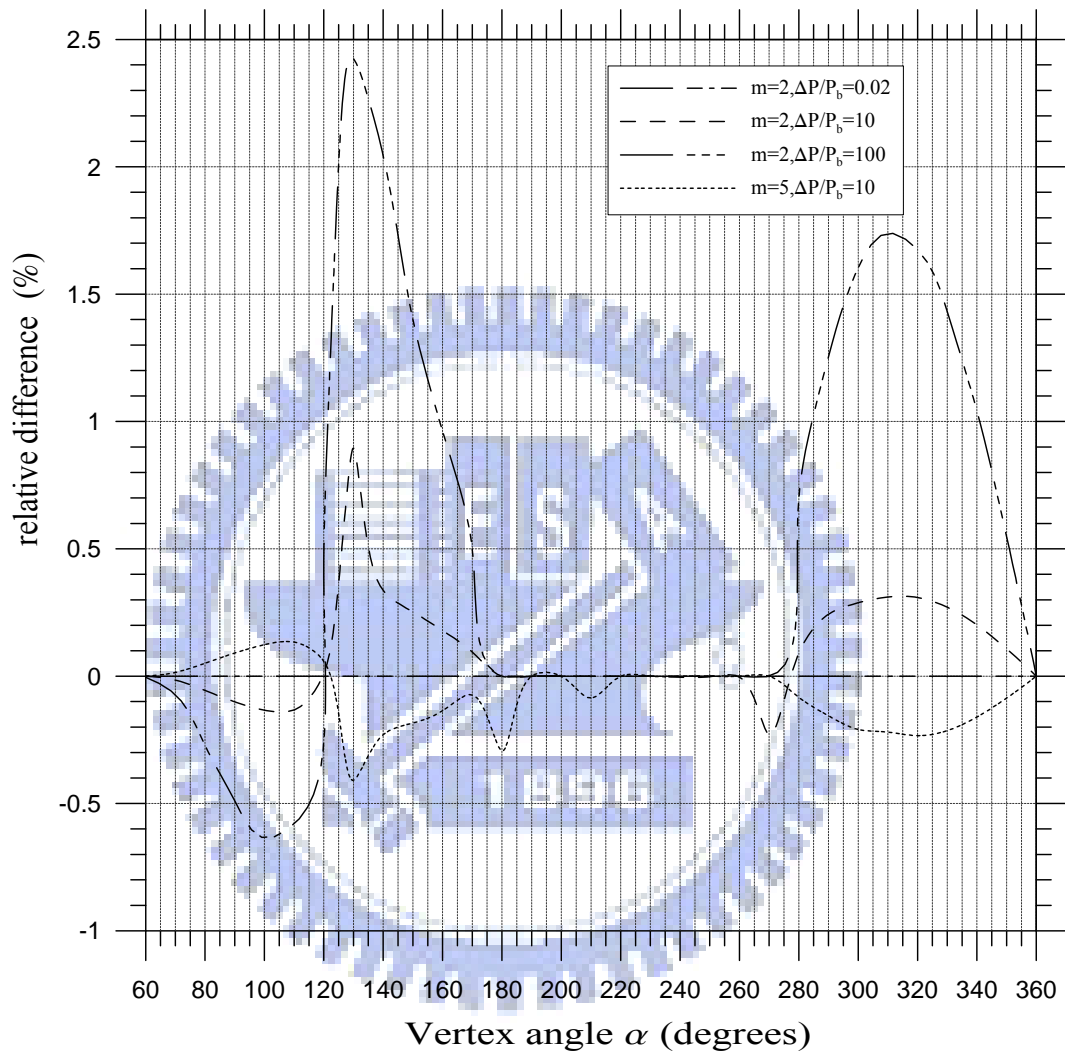


圖 2.6 S(I)-F 特徵值取實部之最小值誤差隨扇形角之變化

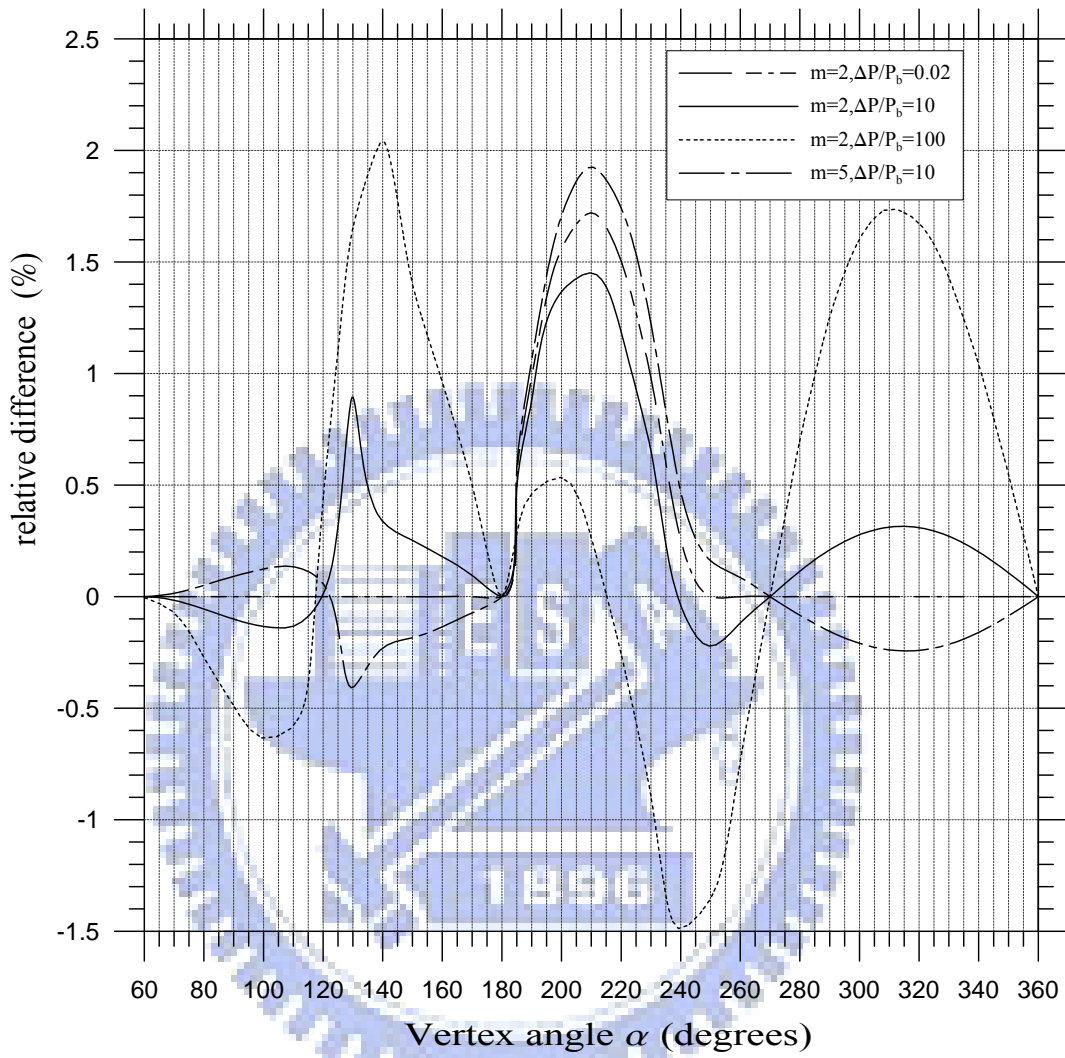


圖 2.7 S(II)-F 特徵值取實部之最小值誤差隨扇形角之變化

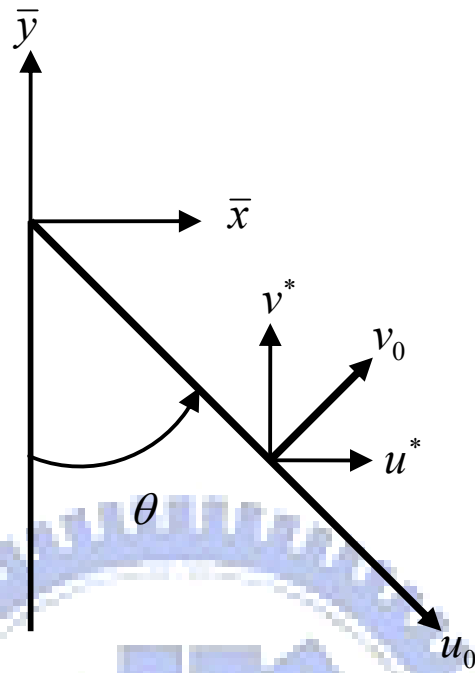
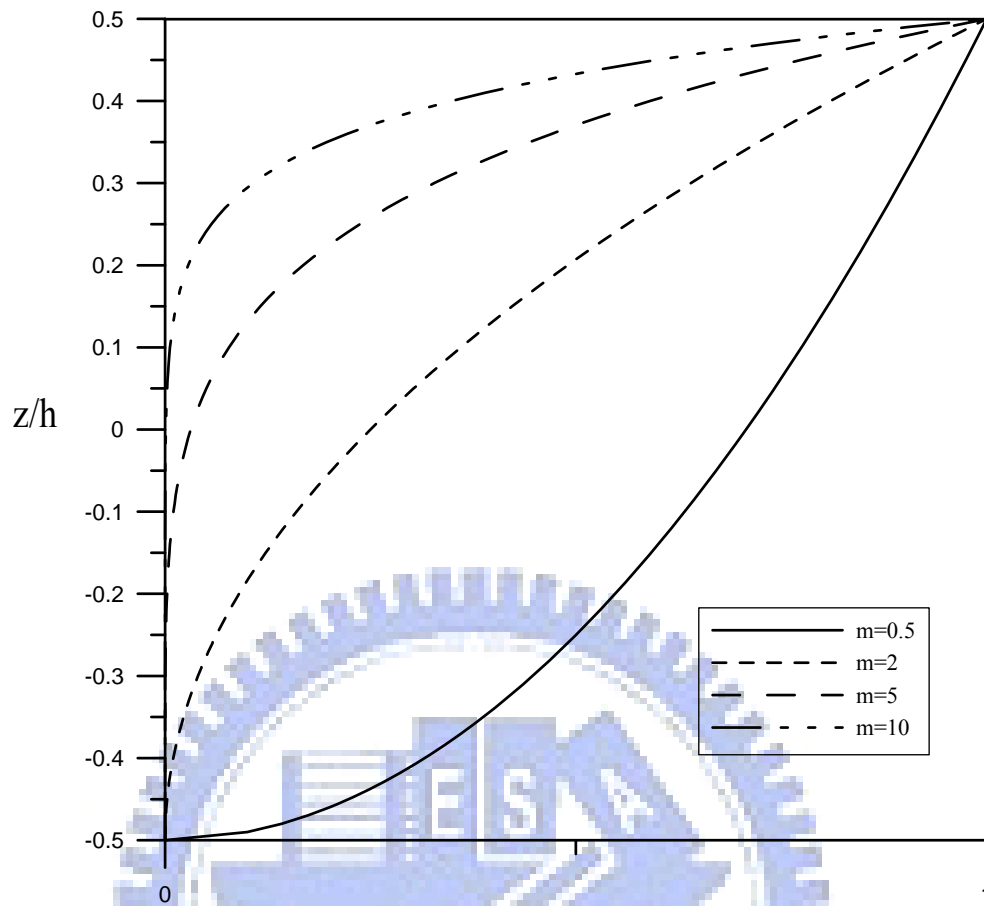


圖 3.1 卡氏座標與極座標之轉換關係



Volume fraction variation

圖 3.2 體積比例參數($V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^m$)隨厚度方向之變化

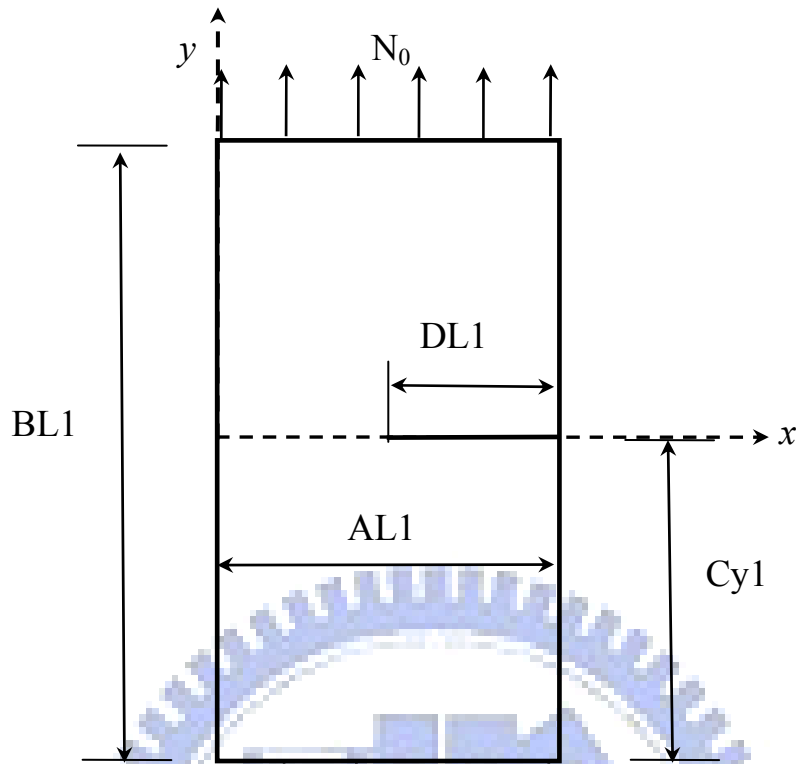


圖 4.1 受面內載重之邊緣裂縫矩形板

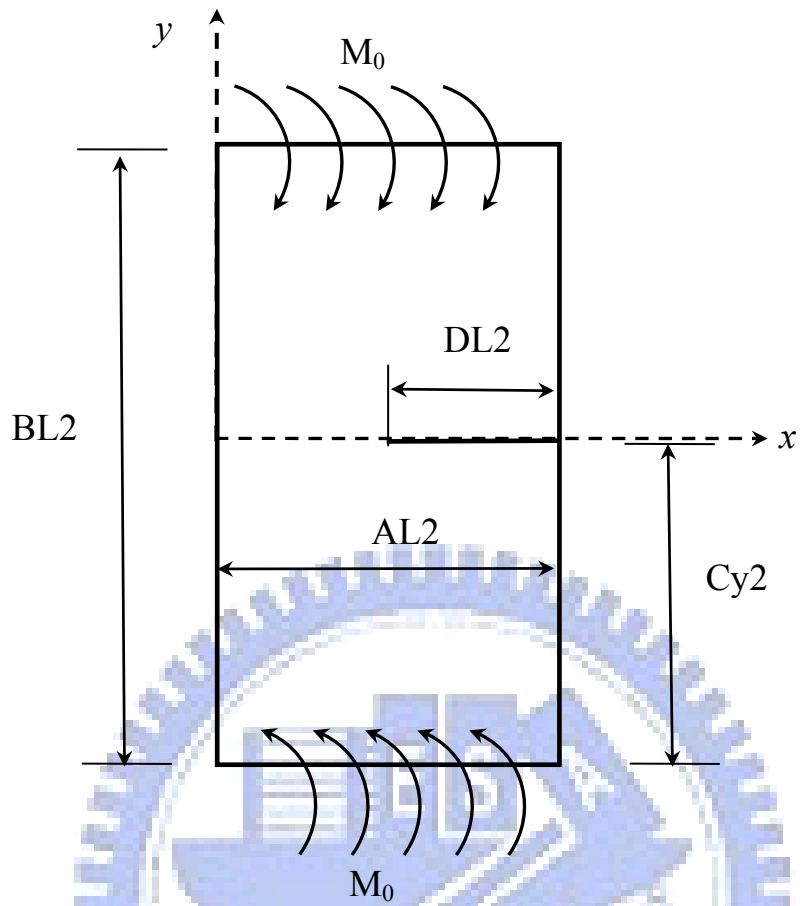


圖 4.2 受面外載重之邊緣裂縫矩形板

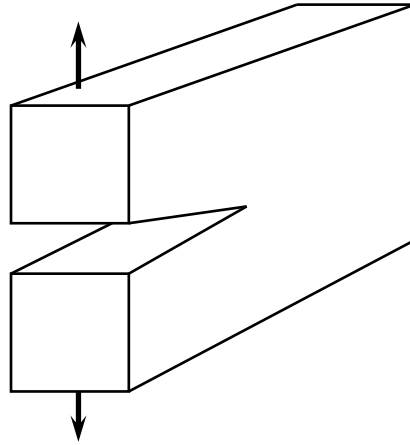


圖 4.3a 裂縫破壞型式—張開型

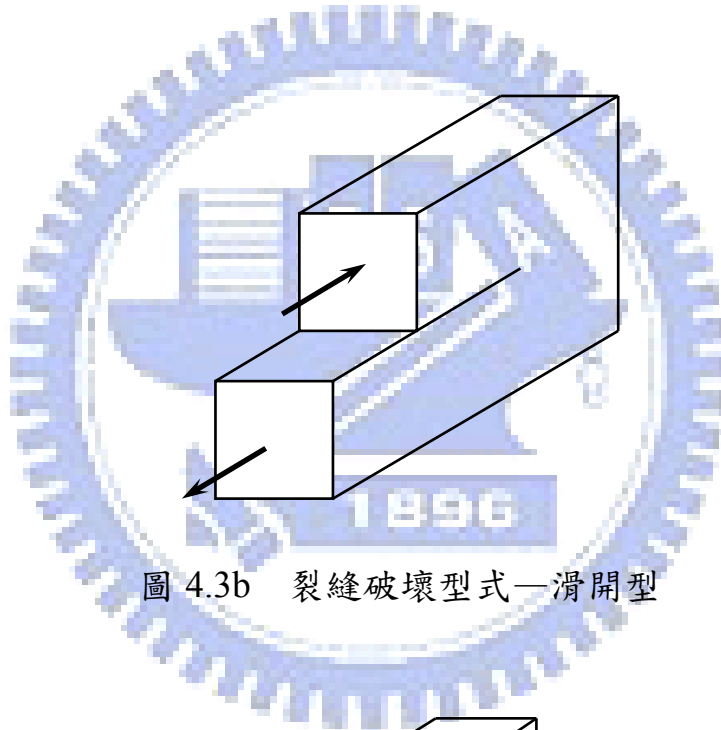


圖 4.3b 裂縫破壞型式—滑開型

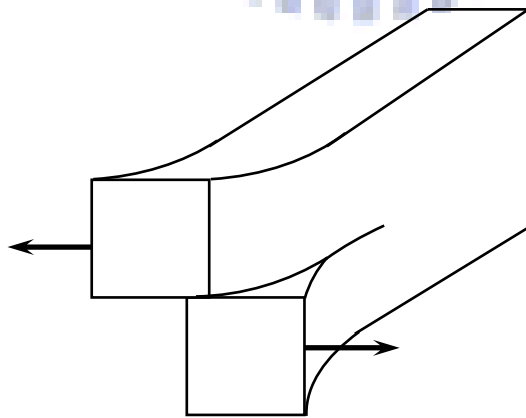


圖 4.3c 裂縫破壞型式—撕開型

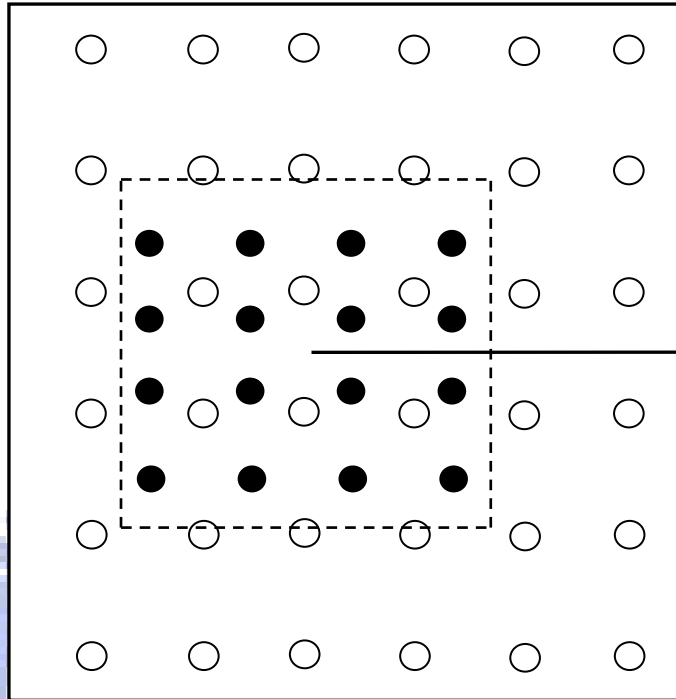


圖 4.4 節點分佈示意圖

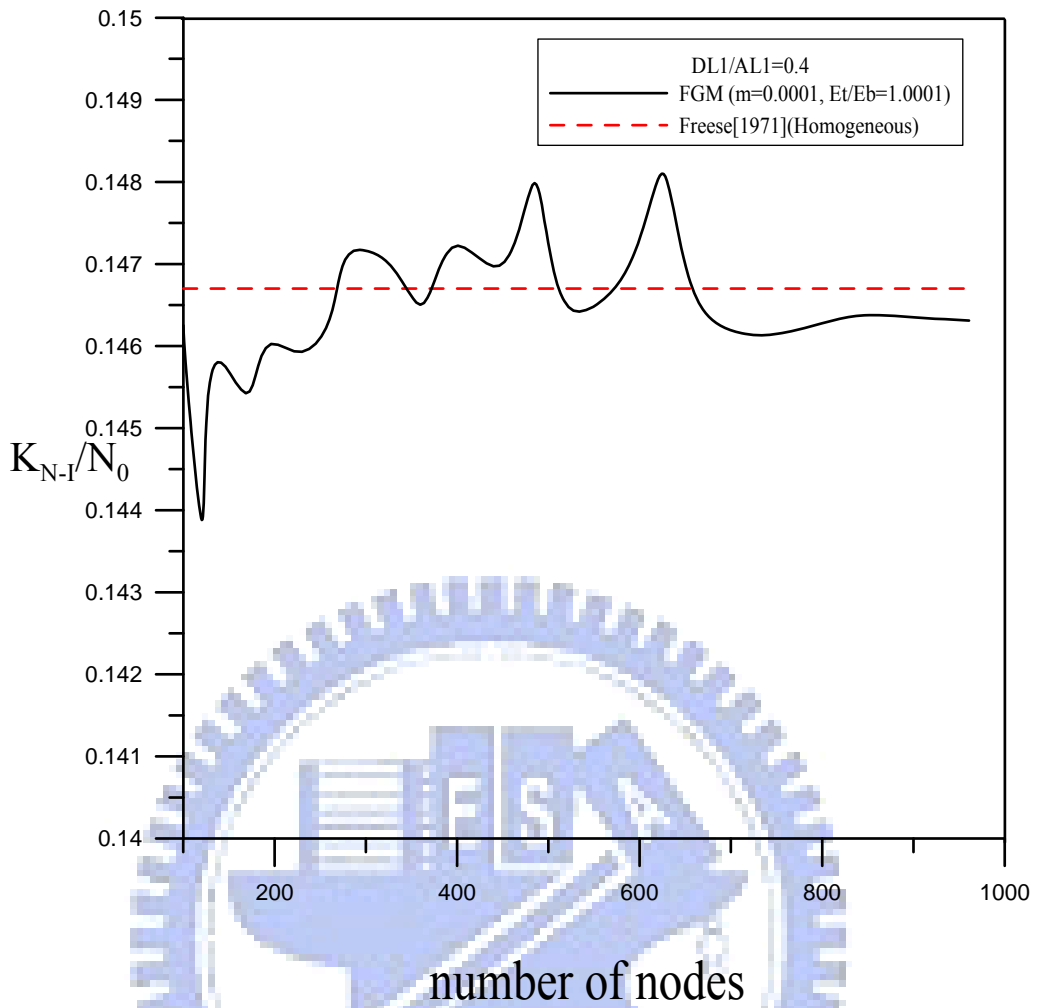


圖 4.5 $DLI/ALI=0.4$ 近似均質板受面內載重的 K_{N-I} 之收斂性分析

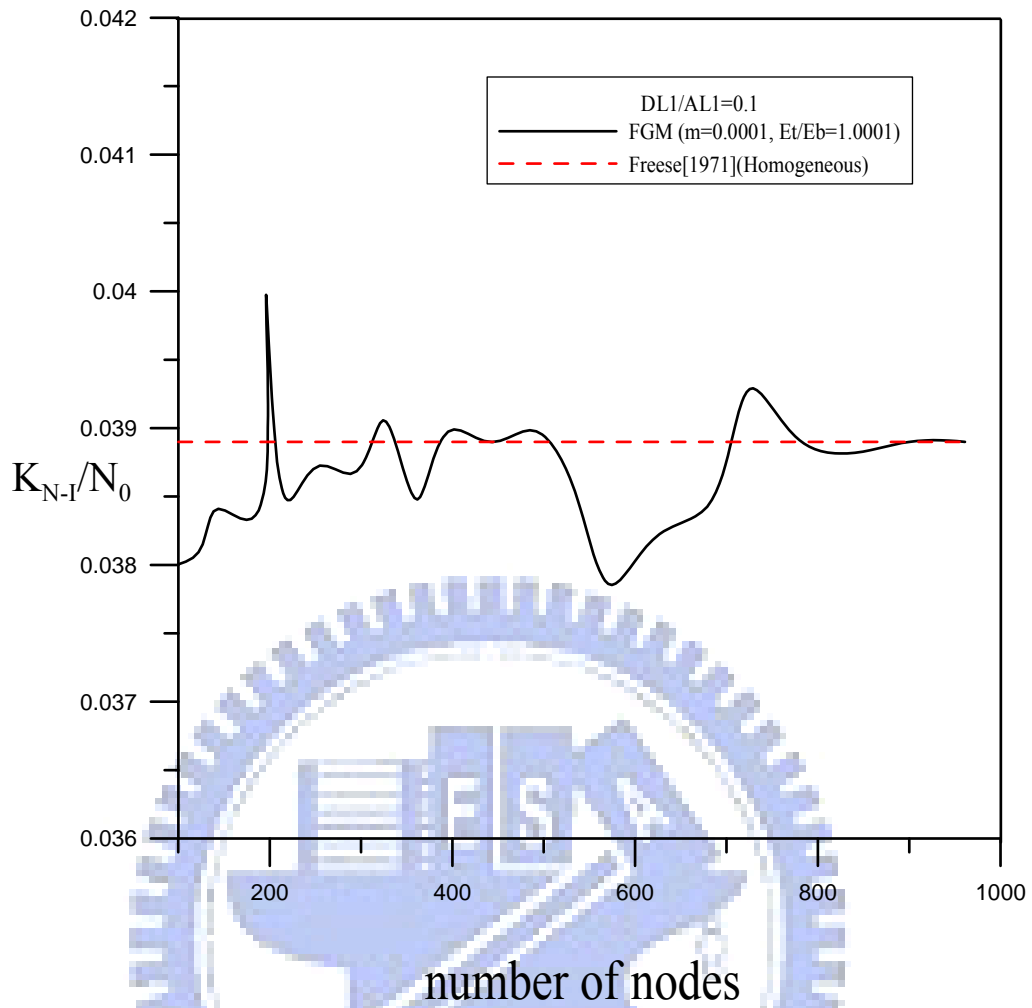


圖 4.6 $DLI/AL1=0.1$ 近似均質板受面內載重的 K_{N-1} 之收斂性分析

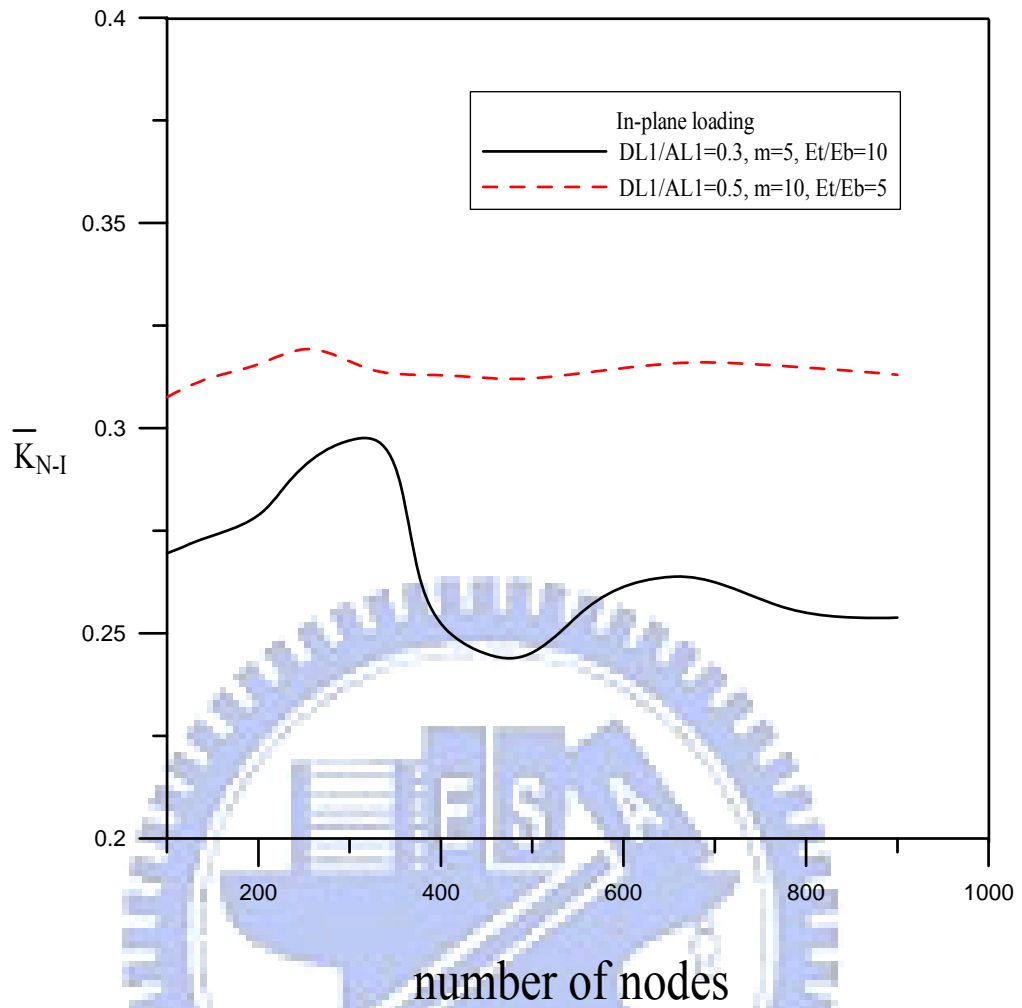


圖 4.7 具邊緣裂縫矩形板受面內載重的 \bar{K}_{N-I} 之收斂性分析

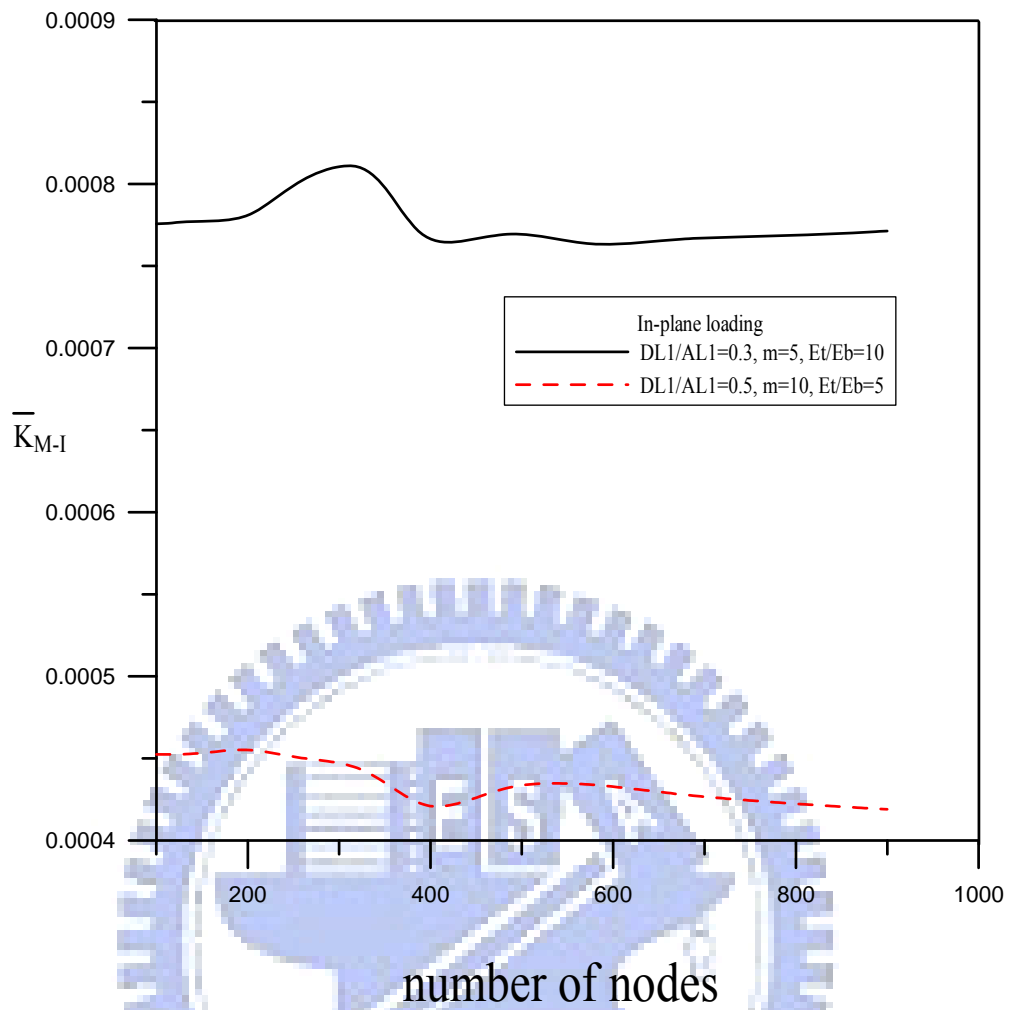


圖 4.8 具邊緣裂縫矩形板受面內載重的 \bar{K}_{M-I} 之收斂性分析

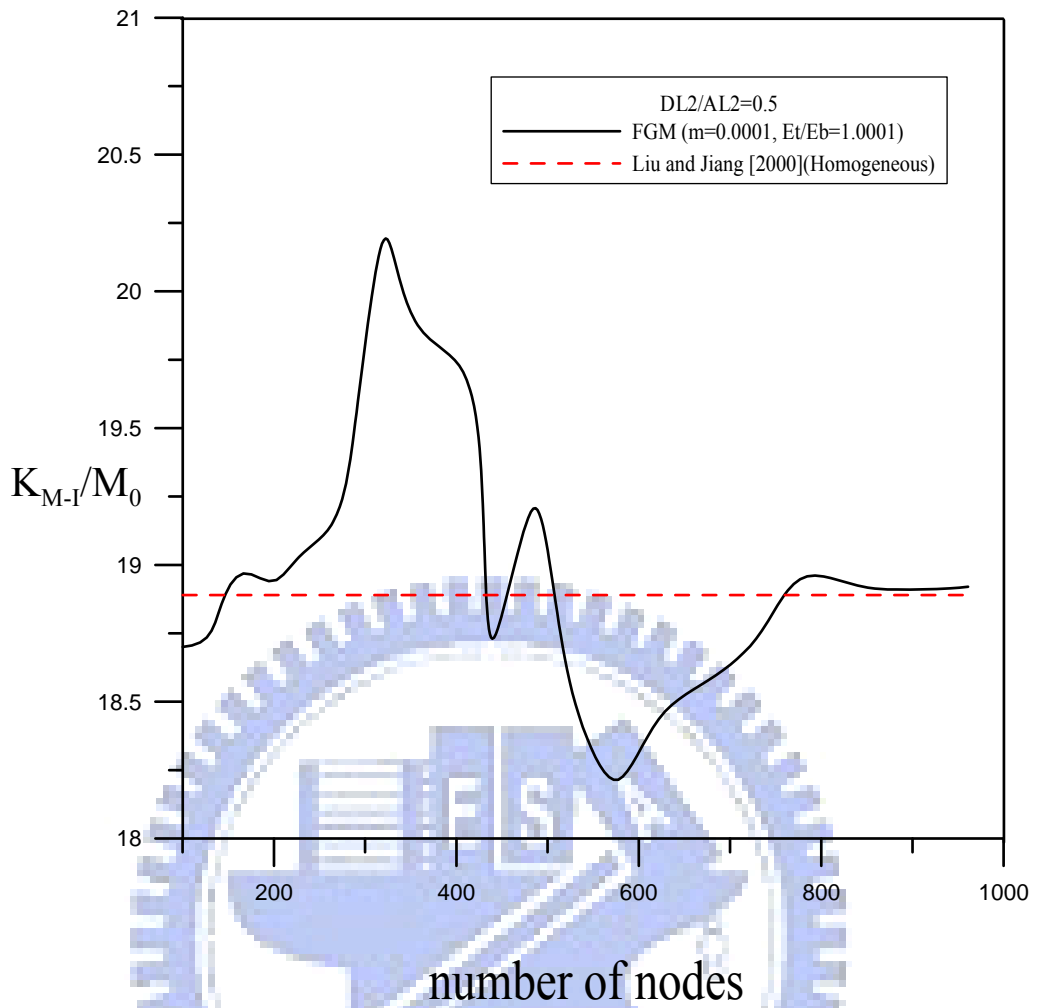


圖 4.9 $DL2/AL2=0.5$ 近似均質板受面外載重的 K_{M-I} 之收斂性分析

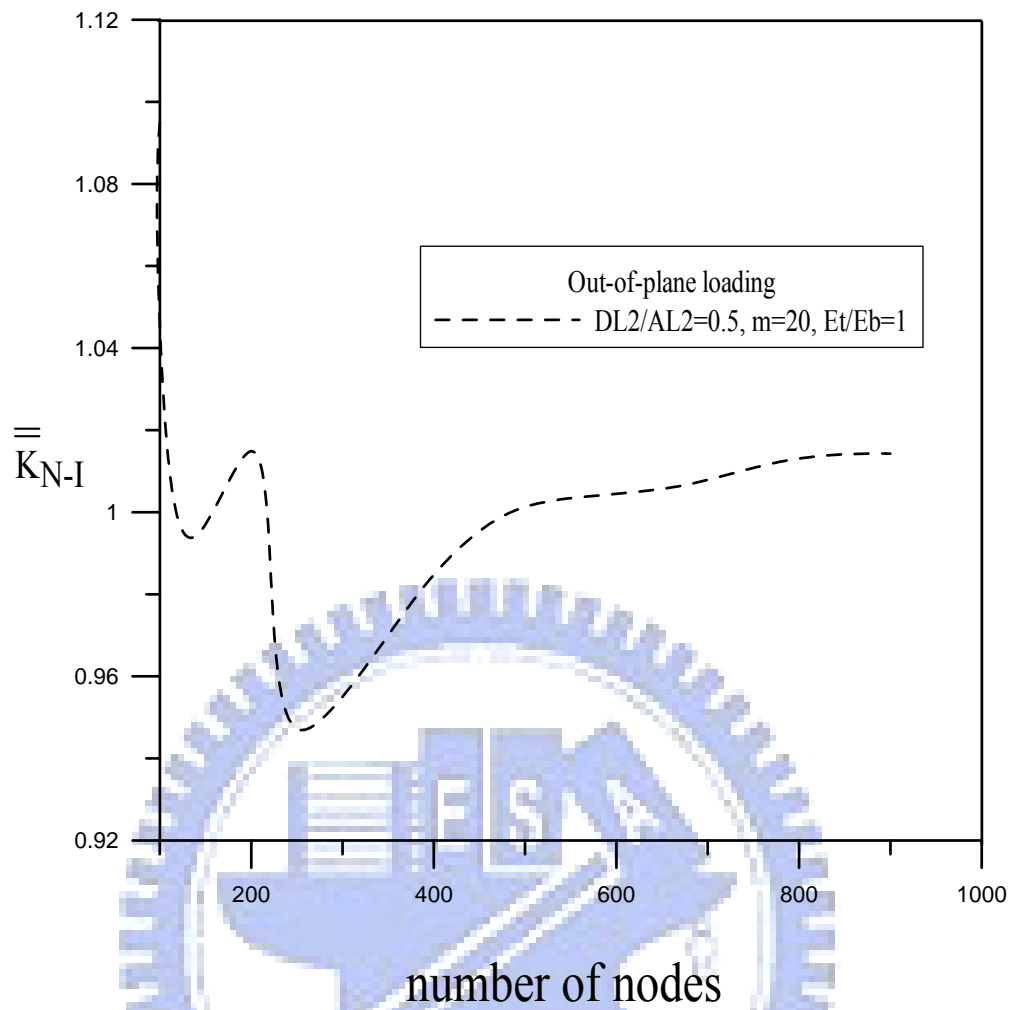


圖 4.10 具邊緣裂縫矩形板受面外載重的 \bar{K}_{N-I} 之收斂性分析

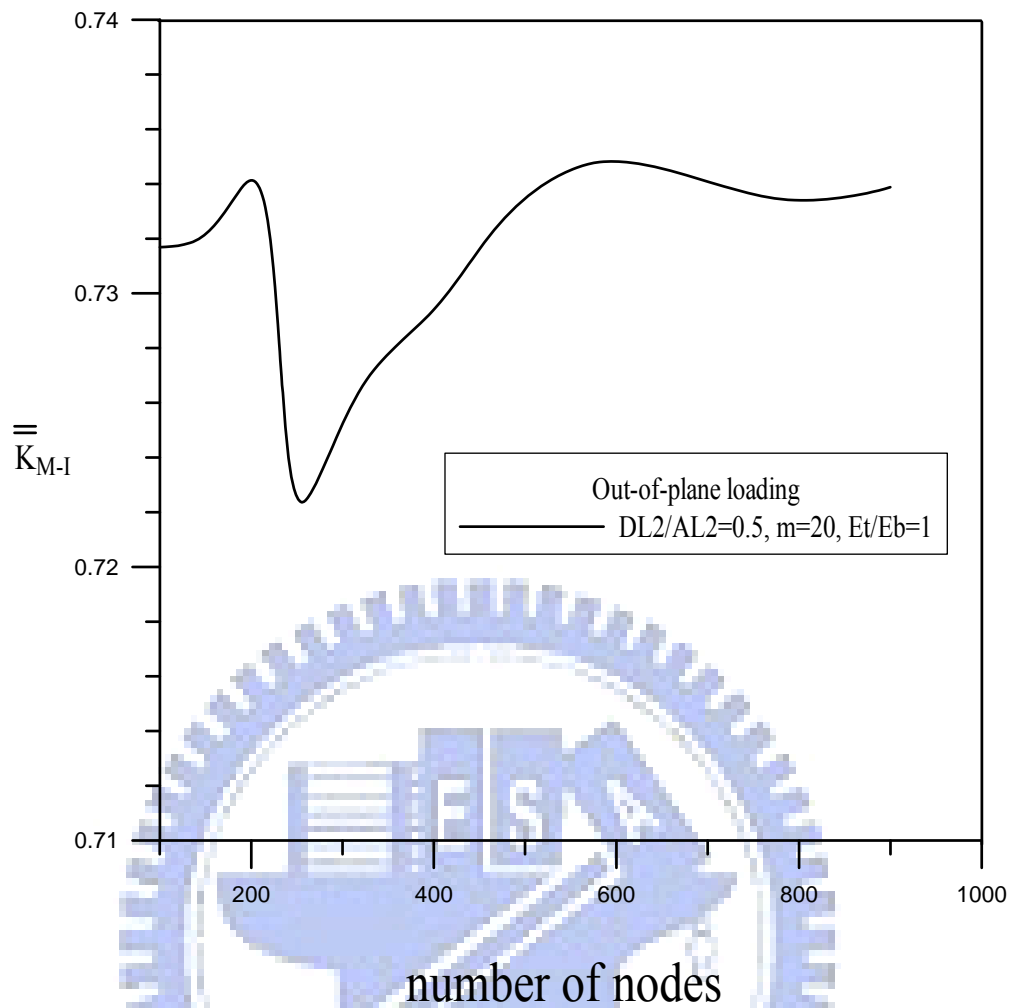


圖 4.11 具邊緣裂縫矩形板受面外載重的 \bar{K}_{M-I} 之收斂性分析