

第一章 前言

藉由現地量測資料識別結構物動態特性於工程應用是十分重要地。識別所得之模態參數將不只被用於驗證或修正於設計階段所建立之有限元素模型，也可用於各種載重（如強震）或材料的退化等對結構造成之損害評估。另外，識別之動態特性亦是目前流行之主被動控制設計之必須資料。

台灣處於地震發生頻繁之地震帶上，於建築法規中常以韌性設計來抵抗地震力，以避免地震造成結構物之破壞倒塌。於 921 大地震中，許多新舊結構物倒塌。加速隔減震裝置廣泛地用於補強或修復舊有結構物，以及新結構物之設計。許多半主動控制元件（如半主動控制磁流變消能器、電流變阻尼器、蓄壓式油壓半主動減震器、半主動摩擦阻尼器等）亦相繼被研發與應用。若將此類半主動控制元件裝置於結構物上，則該結構系統之勁度或阻尼於地震中將隨時間而改變。此即為系統識別領域中所稱之時變系統。在此類工程應用問題中，以傳統線性模型將難以完整描述結構於反應過程中所表現之非線性行為與隨時間改變之動態特性。若能透過系統識別技巧識別該結構系統隨時間改變之動態特性或建立起完整之非線性模型，將有助於檢驗半主動控制元件等非線性元件應用於結構物之設計，及評估結構系統健康情況。另外，若結構系統於地震中展現材料非線性行為；其亦可被視為一時變系統。若能透過系統識別估算該系統隨時間改變之動態特性，則有助於吾人了解該結構系統產生非線性行為對整體動態行為之影響。因此，可知發展一準確且有效率之時變系統識別技巧於土木工程應用之重要性。

以下將分別對線性系統以及時變系統所使用之分析方法做簡單之回顧，並且對研究中所使用之理論背景與應用領域做個介紹。

1.1 文獻回顧

1.1.1 線性系統

傳統之識別方法可概分為頻率域與時間域分析法。頻率域分析法，將量測反應歷時透過 FFT 轉換至頻率域，估算頻率響應函數。雖然於頻率域可很容易看出反應之頻率特性，但由於 FFT 之特性及量測歷時不夠長，常造成洩漏 (leakage) 及解析度不夠之問題，

造成於具有強烈模態干擾系統的識別困難；另外，量測資料常為非穩態 (non-stationary)，不符頻率域分析中常用之穩態假設。於時間域分析法中，時間序列法如 ARX 或 ARMAX 模式 (Safak, 1991; Loh, 1996; Satio, 1996) 和次空間法 (VanDerVeen, 1993 and Huang, 2001) 亦常被應用於結構物之地震反應，估算其動態特性。Ibrahim (1977) 時間域識別法，複數指數法 (complex exponential approach) (Brown, 1979) 和多重參照法 (polyreference method) (Vold, 1982) 則經常被使用於時間域分析自由振動反應。但當量測自由度較少時或反應具有較大雜訊時 (常見於實際工程之現地量測)，此些時間域分析方法常會因須提高識別模式階數，而導致求解過程中之數值困難，並會產生許多虛擬模態，增加精準得到系統真正動態特性之困難度。而為減少雜訊之干擾，亦常會轉換至頻率域濾波，再轉回時間域分析；如此，顯然浪費了計算時間。故尋找一時頻域分析工具乃大勢所趨。

近十年來，一個新的而且功能強大的數學工具被發展出來了，這個數學工具稱為小波轉換。小波轉換之發展史可以參考一些介紹性之文章 (Franssen, 1990 and Strang, 1993) 和參考書 (Combes, 1990; Barbara, 1998)。不同於僅能描述一組訊號在頻率域各種分量之 Fourier 轉換，小波轉換分解一組訊號，其頻率分量隨時間改變。小波轉換優於 Fourier 轉換之處已被闡述於各文獻中 (例如 Franssen, 1990; Strang, 1993; Combes, 1990 and Barbara, 1998)。小波轉換已被成功地應用於數學、物理和工程領域中，特別是訊號處理以及求解非線性問題；諸如此類的應用可參考文獻回顧之相關文章 (Jawerth, 1994; Unser, 1996; Kobayashi, 2001)。

小波轉換也吸引了系統識別這個領域中研究學者的注意。已有些學者利用此數學工具估算線性系統之動態特性。Schoenwald (1993) 應用連續小波轉換於單自由度二階常微分運動方程式，識別此運動方程式之各個參數。Ruzzene 等人 (1997) 利用連續小波轉換和 Hilbert 轉換技巧，從結構系統之自由振動反應中估算自然振動頻率和阻尼比，但未觸於振態之識別。Robertson 等人 (1998a, 1998b) 利用離散小波發展一套方法從結構之動力反應中萃取反應衝擊函數 (impulse function)，並且使用特徵系統識別演算法 (eigensystem realization algorithm) 識別結構動態特性。Gouttebroze 和 Lardies (2001) 在時頻域下發展一套小波識別方法，從自由振動反應下估算結構物之自然振動頻率和阻尼比；但這套方法不能直接估算模態振形。Lardies 和 Gouttebroze (2002) 應用他們發展出來的小波識別技巧，處理電視塔之微動量測數據；但須先用傳統的隨機遞減技巧

(random decrement method)，從微動反應中淬取自由振動訊號。Alvin 等人(2003)回顧檢討了使用小波轉換技巧淬取衝擊反應函數之方法，也回顧了識別比例阻尼和非比例阻尼參數之各種方法。Huang 等人(2005)則利用離散小波轉換，將離散化之運動方程式轉換至小波空間，識別結構系統之自然振動頻率、阻尼比以及模態。

1.1.2 時變線性系統

一般而言，識別時變系統之方法分成兩類：(I) 非參數法；(II) 參數法。非參數法將反應訊號視為一非穩態(nonstationary)訊號，利用時間-頻率表示法來識別頻率隨時間改變之特性，例如利用短時富利葉轉換法 (STFT) (Cohen, 1989)、Wigner-Ville distribution (WVD) (Cohen, 1989; Martin and Flandrin, 1985)、Choi-Williams distribution (CWD) (Choi and Williams, 1989)、adaptive optimal kernel distribution (AOKD) (Jones and Baraniuk, 1995)、Huang-Hilbert transformation (Huang et al., 1998; Yang et al., 2003)以及小波轉換 (Qian, 2002; Kijewski and Kareem, 2003)等，一般而言，此類方法大部分只能適用於結構系統無外力之反應訊號（例如自由振動反應）分析，識別結構系統隨時間改變之頻率或阻尼。但於識別模態有其困難性。另外，此類方法如同非時變系統於頻率域分析技巧，其識別頻率解析度不是很高，對互相干擾嚴重之模態不易識別。

時變參數法提供了簡潔且高解析度之方法，並被廣泛地被應用至工程問題。識別時變系統有兩種方法較普遍被採用，分別是迴歸識別技巧以及基底函數展開技巧。

(A) 迴歸識別技巧

假設一個非穩態過程，為局部穩態或者於一個有限之時間區間中變化相當緩慢；如此，則有很多種迴歸估算之技巧可以應用。這些方法包括有 RLS (Recursive Least-Squares method) (Ljung, 1987; Johansson, 1993; Parkum et al., 1992)、RPLR (Recursive PseudoLinear Regression method) (Ljung, 1987) 和 RIV (Recursive Instrumental Variable method) (Ljung, 1987) 等。這些方法可以處理平緩變化之非穩態訊號；但是，對於處理突然改變之系統，這些方法將不再有效。為了改善這樣的缺點，變數型遺忘因子 (variable forgetting factors) (Fortescue et al., 1981; Toplis and Pasupathy, 1988; Leung and So, 2005)、重新設置協方差矩陣 (covariance matrix re-setting) (Jiang and

Cook, 1992; Park and Jun, 1992)、窗函數移動技巧 (sliding window technique) (Choi and Bien, 1989; Belge and Miller, 2000) 與卡式濾波器 (Kalman filter) (Loh et al., 2000) 等參數估算技巧被提出並與遞迴最小平方差法結合。然而，遺忘因子之選擇對分析結果有決定性之影響，對此參數之決定目前尚無完整之參考依據。雖然以狀態空間模型結合 Kalman filtering algorithm (Ljung, 1987; Kalouptsidis and Theodoridis, 1993) 可以追蹤突然變化之過程。但是，這個方法常常高估參數值，而且參數估算值之變異性相當大。

(B) 基底函數展開技巧

基底函數展開技巧是一種具有發展潛力及目前備受關切之方法。其基本觀念為：對每一個時變系統參數，利用基底函數展開；再以最小平方差法，計算每一基底函數之係數。以此估算各基底函數對應之係數將不隨時間改變。利用基底函數最主要之目地，乃是考慮減少所須之資料量以獲得必須之時變係數。因此，識別快速變化之非穩態過程，以基底函數處理會比以迴歸識別技巧處理更為恰當。但是，必須注意的是，基底函數展開之方式對於波型變化過於劇烈 (須大量之基底函數) 且歷時過於短暫之資料 (建立之方程式少)，仍然無法萃取其動力行為。有幾種基底函數常被使用，包括傅利葉序列 (Marmarelis, 1987)、Legendre Polynomials (Zou et al., 2002)、Walsh function (Zou et al., 2002)、以及小波 (Tsatsanis and Giannakis, 1993)。此類方法之優劣與選擇基底函數之次元空間延伸 (使用之基底個數) 有很大的相關。Zou(2003) 透過數值模擬發線 Legendre Polynomials 可準確模擬平滑變化之時變曲線，Walsh function 則對片段穩態 (piece-wise stationary) 之時變係數有較好之模擬結果。一般而言，基底函數展開法須引入較多之基底函數，而過多之基底函數易造成數值困難，特別是多項式基底。

透過量測資料架構準確之 TVARX 模型，仍然不足以應用於結構損壞之評估。此外，TVARX 模型之時變係數本身並無物理意義。結構損壞評估目前常利用結構模態參數之改變作為參考指標。因此，本研究中將發展透過 TVARX 之模型係數以估算系統瞬時模態之方法。

為了透過 TVARX 模式直接估算系統之瞬時模態特性，須完成兩樣工作。第一，透過結構系統之反應，發展出有效率建構 TVARX 模型之方法。研究中將以無網格有限元

素法建構形狀函數之移動最小平方差法(Liu, 2003)以架構 TVARX 模型中之時變係數。第二，則是驗證透過位移速度與加速度等反應架構 TVARX 模式與運動方程式之對等關係，並證明以位移反應架構之 TVARX 模式方能準確估算系統之瞬時模態參數。若以速度或加速度反應架構 TVARX 模式將無法估算準確之瞬時模態參數。

以移動最小平方差法架構 TVARX 模式，須選擇一系列之基底函數對時變係數進行展開。跟據函數近似理論可知，任一函數均可透過具完備特性 (complete set) 之基底函數展開 Watson (1980)。多項式函數為一眾所周知於有限區間內具完備特性之函數。因此，研究中將選用多項式函數對時變係數展開。然而，多項式函數本身為一平滑變化之函數，若時變系統中包含不連續之變化特性 (如跳躍變化)，將難以準確模擬其時變曲線。因此研究中將引入小波函數為基底並比較不同基底函數之適用性。而以下為應用小波函數為基底架構 TVARX 模型之簡單回顧。

將 TVARX 模型中之時變係數進行離散小波轉換或小波包分解，亦可視為該函數對小波函數及尺度函數或小波包所構成之基底展開。Tsatsanis 和 Giannakis (1993)利用小波函數為基底展開時變 AR 模式之時變參數，並以最小平方差法估算小波函數之係數。該方法被應用於處理人造及真實語言訊號。須注意的是，理論上，小波函數並無法構成一完備之基底。Ghanem and Romeo (2001)在假設時變線性系統之運動方程結構已知下，將輸入及輸出以離散小波展開，識別其時變勁度及阻尼函數； Zheng et al. (2001a)利用正交離散小波之多辨率特性及最小平方差法，發展其所謂之多辨率最小平方差法規 (multiresolution least square)估算時變 AR 模式之時變係數。然後，該方法亦被應用於估算時變 ARX 或 ARMAX 模式之係數(Zheng et al., 2001b)；Qian (2002)以及 Kijewski et al. (2003)利用小波時間-頻率表示法識別訊號頻率隨時間改變之特性。Dorfan and Feuer (2004)使用離散小波轉換萃取週期性時變線性系統之反應衝擊函數。

1.2 研究目的及方法

本研究旨在發展利用時間序列模型識別線性系統與時變系統動態特性之方法。應用於國家地震工程研究中心所執行之振動台試驗與橋樑衝擊實驗等實測反應資料。

於線性系統之研究旨在擴展並改善 Huang 等人 (2003) 所提出之識別方法，利用連

續小波轉換替代離散小波轉換，利用連續小波轉換作用於時間序列模型，可將量測之訊號轉換至小波域中，並於小波域中架構 ARX 模型。並直接以小波域中求得之模型參數進行識別；如此，可根據不同母小波函數之頻率特性及其尺度因子對應之頻帶區間，藉由尺度因子之選擇對量測反應有系統地進行濾波。並且可利用小波轉換之平移不變性減少進行連續小波轉換之計算程序，以提高識別之效率。

時變系統中之時變係數，乃利用移動最小平方差法結合各種基底函數以架構時變係數之形狀函數，各基底對應之係數將隨時間改變；而前人所用傳統基底函數展開法所得之係數則是不隨時間改變。因此，相信本研究所研發之時變系統識別程序當比前人所提者更能準確抓住時變系統之時變特性。研究中將分別利用多項式函數、離散小波轉換之小波函數及尺度函數以及小波包為基底函數，將時變係數展開；並結合各種架構時變模型之技巧建構 TVARX 模型，從中發展另一套識別時變系統動態特性之演算流程。以移動最小平方差法結合各種基底函數架構 TVARX 模型，當引入少量基底函數個數時亦能獲得準確之結果。以此建構時變模型並識別將可有效提高識別效率。

1.3 論文架構

本論文共有五章，其內容如下：

- 第一章 前言。主要內容為研究動機與背景；前人研究方法與成果之相關文獻介紹；並闡述本論文之研究方法與架構。
- 第二章 利用連續小波轉換於線性系統識別。其主要內容為連續小波轉換之簡介；於小波域中建構 ARX 之方法；以六層樓剪力構架之模擬反應驗證此識別方法；再分別將此識別方法應用於三層樓鋼構之振動台試驗與橋樑現地衝擊試驗等量測數據。
- 第三章 以多項式基底架構 TVARX 模型暨識別瞬時模態參數。其內容包括架構 TVARX 之方法；TVARX 與運動方程式對等關係之推導；探討不同物理反應量架構 TVARX 對模態識別之影響；以單自由度時變系統之模擬反應驗證所提方法之適用性；最後將此識別方法應用於 RC 構架之振動台試驗數據分析。
- 第四章 以小波基底架構 TVARX 模型暨識別瞬時模態參數。其內容主要有離散小波

轉換與小波包分解之簡介；以小波基底架構 TVARX 模型之方法；以單自由度時變系統之模擬反應驗證所提方法之適用性；最後亦將此識別方法應用於 RC 構架之振動台試驗數據分析。

第五章 結論與建議。主要總結此研究工作中線性系統與時變系統之分析結果



第二章 利用連續小波轉換於線性系統識別

2.1 前言

本章主要是發展線性系統之模態識別方法。此方法主要是透過連續小波轉換，將量測之訊號轉換至小波域中，在小波域中架構所量測系統之 ARX 模型，並利用反算求得之 ARX 模型參數進一步識別系統模態。2.2 節介紹連續小波轉換之數學基礎。2.3 節則介紹識別流程，將 ARX 模型轉換至小波域，並於小波域中架構 ARX 模型，然後利用 ARX 模型參數估算動態參數。2.4 節利用數值模擬之地震反應，驗證所提方法之可行性；並進一步探討各種參數(尺度因子，不同小波函數與噪訊)對識別結果之影響。2.5 節與 2.6 節應用所提識別方法於三層樓鋼構振動台試驗反應及一拱橋之現地衝擊試驗反應，並與有限元素模型分析所得之模態參數比較。2.7 節則對此章之研究內容做個小總結。

2.2 連續小波轉換之簡介

小波轉換在近 20 年，被廣泛地應用於各領域(如信號處理、醫學工程、非線性問題...等)；儼然取代了傳統之 Fourier 轉換。小波轉換可視為短時傅利葉轉換之擴展及改良。一屬於 $L^2(R)$ 空間之函數 $f(t)$ ，均可做小波轉換，其定義為(參考 Chui, 1992)

$$W_f(a,b) = \langle f, \Psi_{(a,b)} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (2.1)$$

逆轉換為

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a,b) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db, \quad (2.2)$$

其中

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \quad (2.3)$$

$\Psi(t)$ 稱為母小波函數 (mother wavelet)； $\Psi_{(a,b)}(t) = \Psi((t-b)/a)/\sqrt{a}$ 為母小波函數 $\Psi(t)$ 經伸縮和平移所得之基底函數； a 與 b 分別為尺度因子與平移因子； $\hat{\Psi}(\omega)$ 與 $\overline{\Psi}(t)$ 分別為

$\Psi(t)$ 之富利葉轉換及共軛函數。

有別於富利葉轉換中之基底函數固定為 $e^{i\omega t}$ ，小波轉換之母小波函數則有多種選擇。但選擇之母小波必須滿足：

【1】 $\Psi(t)$ 與它的各階導數均屬於 $L^\infty(R)$ 。

【2】 $\Psi(t)$ 及它的各階導數在 $t \rightarrow \infty$ 處速降，即為有限之支撐長度。

依式(2.1)之定義，若將 $\Psi(t)$ 視為一中心為 t^* ，半徑為 Δ 之窗函數，則 $\Psi_{(a,b)}$ 之中心在 $b+at^*$ 且半徑為 $a\Delta$ 。因此，式(2.1)表示之小波轉換，只取時間窗

$$[b+at^* - a\Delta, b+at^* + a\Delta], \quad (2.4)$$

內 $f(t)$ 之局部訊息。此窗對於較小之 a 值變窄，而對於較大之 a 值變寬。式(2.4)之窗中心及半徑定義分別為：

$$t^* = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt, \quad (2.5)$$

$$\Delta = \frac{1}{\|f\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t-t^*)^2 |f(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

其中 $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ 。

由於

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\Psi}_{(a,b)}(\omega) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{ib\omega} \hat{\Psi}(a\omega), \quad (2.7)$$

若對式(2.1)進行傅利葉轉換。可得

$$|\hat{W}_f(a, \omega)| = \sqrt{a} |\hat{\Psi}(a\omega)| |\hat{f}(\omega)|, \quad (2.8)$$

其中 $\hat{W}_f(a, \omega)$ 代表 $W_f(a, b)$ 之傅利葉轉換，根據上式可定義 f 之頻率窗 (Chui, 1992)

$$\left[\frac{\omega^* - \hat{\Delta}}{a}, \frac{\omega^* + \hat{\Delta}}{a} \right], \quad (2.9)$$

其中 ω^* 與 $\hat{\Delta}$ 為在頻率域計算 $\hat{\Psi}$ 之中心與半徑。其表示式分別為

$$\omega^* = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.10)$$

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

式 (2.9) 表示之窗具有中心頻率 ω^*/a 且帶寬為 $2\hat{\Delta}/a$ 。因此，利用式 (2.1) 做小波轉換，其提供一時間頻率窗：

$$\left[b + at^* - a\Delta, b + at^* + a\Delta \right] \times \left[\frac{\omega^* - \hat{\Delta}}{a}, \frac{\omega^* + \hat{\Delta}}{a} \right], \quad (2.12)$$

綜上可見， $\Psi_{a,b}(t)$ 所定義之時頻窗口之矩形形狀，隨伸縮因子 a 之改變而改變。當 a 值小時，為一時寬窄而頻寬大之高頻窗，適合描述高頻信號；而當 a 值大時，為一時寬大而頻寬窄之低頻窗，適合描述低頻信號。由於小波函數 $\Psi(t)$ 是一個帶通函數，透過前述分析，可以得知伸縮因子 a 之改變， $\Psi_{a,b}(t)$ 對應著一系列帶寬和中心頻率各亦之帶通系統。

依小波轉換之定義，可證明連續小波轉換具有以下之重要數學性質：

1. 線性：一個多分量信號之小波轉換等於各分量小波轉換之和。
2. 平移不變性：若 $f(t)$ 之小波轉換為 $W_f(a, b)$ ，則 $f(t - \tau)$ 之小波轉換為 $W_f(a, b - \tau)$ 。
3. 伸縮共變性：若 $f(t)$ 之小波轉換為 $W_f(a, b)$ ，則 $f(ct)$ 之小波轉換為 $W_f(ca, cb)/\sqrt{c}$ ，其中 $c > 0$ 。

4. 自相似性：對應不同尺度參數 a 和不同平移參數 b 之連續小波轉換之間是自相似。

2.3 動態特性之識別程序

2.3.1 建構 ARX 模式

量測結構物之動態反應，常由於結構系統過於龐大，且量測經費之限制，吾人所能量測到反應之自由度遠小於該系統者。故在線性系統中，可將量測自由度（或測站）間之反應表示成（黃，1999）

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I \Phi_i \mathbf{y}(t - i\Delta t) + \sum_{j=0}^J \Theta_j \mathbf{f}(t - j\Delta t), \quad (2.13)$$

其中 $\mathbf{y}(t)$ 為量測動力反應歷時向量（其可為位移、速度、或加速度；以下假設該向量亦有 n 個分量）； $\mathbf{f}(t)$ 為系統外力向量歷時， Φ_i 與 Θ_j 為待定係數矩陣， Δt 為量測反應之取樣時間間隔。以上之離散化運動方程式與多變數 ARX 之時間序列模型十分相似，式(2.13) 為不考慮雜訊(或誤差)之 ARX 模式。

依 Huang (2001)及林 (2000)之經驗，當量測自由度比系統自由度少很多或有雜訊時，需用很大之 I 及 J 方能得到較準確之離散化運動方程。但當採用很大之 I 及 J ，於利用最小平方差估算式 (2.13) 中之 Φ_i 與 Θ_j 時，常會造成數值困難。另外，採用越大之 I 及 J 會造成越多之虛假模態，增加判斷真正系統模態之困難度。因此，吾人對式(2.13) 做小波轉換至小波空間，再估算 Φ_i 與 Θ_j 。如此，可某種程度地抒解該數值困難；且另一好處是可順便進行濾波，可以較少之 I 及 J 進行估算。

式 (2.13) 依式 (2.1) 做小波轉換，可將式 (2.13) 表示成

$$\bar{W}_y(a, b) = \sum_{i=1}^I \Phi_i \bar{W}_y(a, b - i\Delta t) + \sum_{j=1}^J \Theta_j \bar{W}_f(a, b - j\Delta t), \quad (2.14)$$

式(2.14)即為小波域中之 ARX 模式。傳統時域下之 ARX 模式僅可藉由調整模型項數 (I, J) 以求得最適當之模型；而小波域下之 ARX 模式除了透過模型項數之外，可藉由選擇適當之小波函數與調整伸縮因子 a 和平移因子 b 以獲得適當之模型。

在建立式 (2.14) 時，可利用連續小波轉換之平移不變性；計算 $\mathbf{y}(t)$ 與 $\mathbf{f}(t)$ 之小波轉換，可同時得 $\mathbf{y}(t-i\Delta t)$ 與 $\mathbf{f}(t-j\Delta t)$ 之小波轉換函數。以下將依小波轉換之特性，式 (2.14) 中取不同之 a 值，代表取某一頻率窗內之反應建立 ARX 模式，即同時對反應或輸入力進行適當濾波。

另外，為了簡化表示式； $\bar{W}_y(a, b-i\Delta t)$ 與 $\bar{W}_f(a, b-j\Delta t)$ 分別記為 $\mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \bar{b}-i)$ 與 $\mathbf{f}_{\bar{w}}(a, \bar{b}-j)$ 取特定之 a 與不同之 \bar{b} 。利用式 (2.14)，吾人可得

$$[Y^{(0)}] = [C] \begin{bmatrix} [Y] \\ [F] \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

其中， $[Y] = \begin{bmatrix} [Y^{(1)}]^T & [Y^{(2)}]^T & \dots & [Y^{(I)}]^T \end{bmatrix}^T$ ； $[F] = \begin{bmatrix} [F^{(0)}]^T & [F^{(1)}]^T & \dots & [F^{(J)}]^T \end{bmatrix}^T$ ，

$$[Y^{(i)}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \max-i) & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \max-i+1) & \dots & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \max-i+M) \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_I & \Theta_0 & \Theta_1 & \dots & \Theta_J \end{bmatrix},$$

$$\max = \max(I, J),$$

$[F^{(i)}]$ 之定義類似 $[Y^{(i)}]$ 。

若欲分析較廣頻率區域內之量測反應，可同時取數個 a 值，則 Y 矩陣則可改寫為：

$$[Y^{(i)}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_1, \max-i) & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_1, \max-i+1) & \dots & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_1, \max-i+M) \\ \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_2, \max-i) & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_2, \max-i+1) & \dots & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_2, \max-i+M) \\ \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_3, \max-i) & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_3, \max-i+1) & \dots & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_3, \max-i+M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_N, \max-i) & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_N, \max-i+1) & \dots & \mathbf{y}_{\bar{w}}(a_N, \max-i+M) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

而 $[F^{(i)}]$ 之定義亦類似 $[Y^{(i)}]$ ；式 (2.15) 中 $[C]$ 之最小二乘方解為

$$[C] = [Y^{(0)}] \begin{bmatrix} [Y] \\ [F] \end{bmatrix}^+, \quad (2.17)$$

其中“+”代表廣義逆矩陣。

小波轉換有連續小波轉換與離散小波轉換之分別，其主要差別為連續小波轉換之伸縮因子 a 與平移因子 b 具有連續性，而離散小波轉換則針對伸縮因子 a 與平移因子 b 進行離散化。最為常見的為二進制離散方式，其伸縮因子之定義可為 $a = 2^n$ ($n \in 1, 2, \dots$)；其中， n 代表離散小波之分解層數；而平移因子 b 則由分析資料之範圍決定。當分析資料為一離散信號，則平移因子 b 之變化量將由離散信號之取樣點間隔決定 $b = am$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M/a$)。其中， M 代表離散訊號之資料長度。

對信號進行離散小波轉換時，將可避免掉複雜之伸縮因子之選擇，而同時將完整保留原始信號之特性；但是，使用上同時亦減少許多彈性。例如，信號經離散小波轉換之後，原始信號之特性將分散於不同分解層中，而每一分解所對應之主要頻率區間均為固定，將無法隨意挑選特定頻慮區間之分量進行分析，如此將無法發揮預期之濾波功能。此外，於每一分解層數中之分量長度為 $M/2^n$ 。換言之，不同分解層數之分量，其長度並不相同。因此，應用於式(2.14)中之 $y(t - i\Delta t)$ 與 $f(t - j\Delta t)$ 之小波轉換，將無法透過平移不變性直接獲得，如此勢必會因為多次之轉換運算而增加分析時間。

隨著應用領域之不同，連續小波轉換中之伸縮因子之選擇並無定論。但是，應用於結構系統之模態識別上仍然有其脈絡可尋。以連續小波轉換進行分析，將可針對吾人感興趣之頻率區間選擇伸縮因子。若 $\|\hat{\Psi}(\omega)\|$ 代表小波函數 $\Psi(t - b/a)$ (取 $a = 1$) 傅利葉轉換之振幅，可根據此函數定義出小波函數於 $a = 1$ 時之集中頻帶 ($f_L \leq f \leq f_U$)；同理，對任意 a 值小波函數之傅利葉轉換之振幅為 $\|a\hat{\Psi}(a\omega)\|$ ，而其頻率集中區間則為 $f_L \leq af \leq f_U$ 。由此可知， a 值同時也決定了小波函數能量集中之頻率區間，則可由吾人感興趣之頻帶決定出適當之 a 值。此外，平移因子 b 亦具有連續性，處理離散資料時，可取 $b = \bar{b}\Delta t$ ($\bar{b} = 0, 1, 2, \dots, M$)。因此，應用於式(2.14)中之 $y(t - i\Delta t)$ 與 $f(t - j\Delta t)$ 之小波轉換將可利用平移不變性獲得。

2.3.2 結構系統動態特性估算

若預估算結構系統之動態特性(自然振動頻率、模態阻尼比以及振形)，依式(2.13)知其決定於係數矩陣 Φ_i ($i = 1, 2, \dots, I$)。依黃(1999)之推導知，若從 Φ_i 建構矩陣

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{I}] \\ \Phi_I & \Phi_{I-1} & \Phi_{I-2} & \Phi_{I-3} & \cdots & \Phi_1 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

其中， $[\mathbf{0}]$ 與 $[\mathbf{I}]$ 分別代表維度為 $N_d \times N_d$ 之零矩陣與單位矩陣， N_d 為量測自由度。則 $[\mathbf{G}]$ 之特徵值及特徵向量相關於該結構系統之動態特性。令 $\lambda_k = a_k + ib_k$ 為 $[\mathbf{G}]$ 之第 k 特徵值，則該結構系統之第 k 模態自然振動頻率 ω_k 及模態阻尼比 ξ_k 為

$$\omega_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}; \quad \xi_k = -\alpha_k / \beta_k, \quad (2.19)$$

$$\text{其中 } \alpha_k = \frac{1}{2\Delta t} \ln(a_k^2 + b_k^2); \quad \beta_k = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)。$$

令 \mathbf{g}_k 為 $[\mathbf{G}]$ 之第 k 振形，將 \mathbf{g}_k 表示成

$$\mathbf{g}_k = \begin{Bmatrix} \{\psi\}_1 \\ \{\psi\}_2 \\ \vdots \\ \{\psi\}_I \end{Bmatrix}_k, \quad (2.20)$$

其中 $\{\psi\}_i$ 含 N_d 個分量，由於 $[\mathbf{G}]$ 之特殊結構，可證明

$$\{\psi\}_i = \lambda_k \{\psi\}_{i-1}, \quad (2.21)$$

即不同之 i ， $\{\psi\}_i$ 彼此間互相平行，故任一 $\{\psi\}_i$ 均對應於結構系統之第 k 模態之振形。

2.4 系統識別程序驗證

為驗證本研究所建構系統識別程序之可行性及電腦程式之正確性；本研究首先分析一六層樓剪力建築物(如圖 2.1 所示)之數值模擬地震反應，並刻意加入雜訊。本節亦將探討式(2.13)中之模型階數(I,J)、不同母小波函數 $\Psi(t)$ 、式(2.14)中 a 與 b 之取法以及雜訊，對識別結構系統動態特性之影響。

2.4.1 數值模擬

假設結構系統 5% 之模態阻尼且零初始條件。考慮地表加速度輸入歷時如圖 2.2 所示，該歷時為 921 地震台中地區某自由場測站所得資料。利用 Laplace 轉換技巧，求取各自由度之反應（位移、速度和加速度）。該建築物第一、三和五樓層之絕對加速度反應與頻譜圖如圖 2.3 所示。此六層樓剪力建築之理論動態特性如表 2.1 所示，其最小和最大之自然振動頻率分別為 0.679 與 7.08Hz。此結構系統之第四、五模態自然振動頻率相當接近，從圖 2.3 之頻譜圖中是無法分辨出此兩模態。

對於現地地震或微動量測而言，通常利用速度計或加速度計量測速度或加速度之反應。通常速度計之價格遠高於加速度計；故從經濟上考量，現地量測大多以量測加速度為主。以下之分析，取圖 2.3 中 $t=8\sim 16$ 秒之加速度反應進行識別；取樣頻率為 250Hz。

2.4.2 利用 Haar 小波進行識別

Haar 小波函數為小波分析中最早被使用，也是最簡單之函數，為一個具有緊支撐之正交小波函數。該函數於時間域之定義為（如圖 2.4 所示）

$$\Psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \quad (2.22)$$

其傅利葉轉換為：

$$\hat{\Psi}_H(\omega) = \frac{1}{i\omega} (1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i\omega/2}), \quad (2.23)$$

式 (2.23) 之振幅 ($\|\hat{\Psi}_H(\omega)\|$) (如圖 2.5 所示) 為

$$\|\hat{\Psi}_H(\omega)\| = \frac{2(1 - \cos(\omega/2))}{\omega}, \quad (2.24)$$

為求得振幅最大值所對應之頻率，對式 (2.24) 取一次及二次微分得：

$$\frac{d}{d\omega} \|\hat{\Psi}_H(\omega)\| = \frac{(\omega \sin(\omega/2) - 2 + 2 \cos(\omega/2))}{\omega^2}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \|\hat{\Psi}_H(\omega)\| = \frac{(\omega^2 \cos(\omega/2) - 4\omega \sin(\omega/2) + 8 - 8 \cos(\omega/2))}{2\omega^3}, \quad (2.26)$$

當 $\frac{d}{d\omega} \|\hat{\Psi}_H(\omega)\| = 0$ 時，最小之三組根分別為 $\omega = 4569/980$ 、 $\omega = 4\pi$ 以及 $\omega = 827/48$ 。分別代入式 (2.26) 可得：

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left\| \hat{\Psi}_H\left(\frac{4569}{980}\right) \right\| = -\frac{479}{6481} < 0, \quad (2.27a)$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left\| \hat{\Psi}_H(4\pi) \right\| = \frac{113}{2840} > 0, \quad (2.27b)$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left\| \hat{\Psi}_H\left(\frac{827}{48}\right) \right\| = -\frac{101}{4286} < 0, \quad (2.27c)$$

當 $\omega = 4569/980$ 時有極大值，為第一波峰；當 $\omega = 4\pi$ 時有極小值，為第一波谷；當 $\omega = 827/48$ 時有極大值，為第二波峰。第二波峰與第一波峰之峰值比約為 0.27。

於小波分析中，對於不同之分析資料往往會選用不同之 a 值。所以，有必要探討對於不同 a 值其對應之峰值關係。任意尺度因子 a 值與平移因子 b 值下之 Haar 小波函數之傅利葉轉換為：

$$\mathfrak{F}\left\{\Psi_H\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_H\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-i\omega t} dt = a e^{i\omega b} \hat{\Psi}_H(a\omega), \quad (2.28)$$

而其振幅表示式則為：

$$\left\| \mathfrak{F}\left\{\Psi_H\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\} \right\| = \frac{2(1 - \cos(a\omega/2))}{\omega}, \quad (2.29)$$

在任意 a 值下，其各個峰值所對應之頻率位置可表示為 $\omega_{i,a} = \omega_i/a$ ；其中 ω_i 代表 $a=1$ 時第 i 個峰值之位置。代入 (2.29) 式，各峰值大小為：

$$\frac{2(1 - \cos(a\omega_{i,a}/2))}{\omega_{i,a}} = \frac{2(1 - \cos(\omega_i/2))}{a\omega_i}, \quad (2.30)$$

於任意 a 值下，其頻率域之振幅與原始函數之頻率域振幅函數相差 a 倍。由此可推算，第二峰值與第一峰值之比值必為常數（約為 0.27）。也就是說，當一反應經某一 a 值 Haar 小波函數轉換至小波域後，該反應頻率大於該 Haar 小波函數傅氏譜之第一波谷所對應頻率者至少被濾掉 70% 以上。此將導致增加吾人識別該等高頻振動頻率之困難。但相反地，經過如此之小波轉換，將有利於吾人識別該 Haar 小波函數振幅第一峰值附近之自然振動頻率。依此觀念，吾人取對應各不同 a 值 Haar 小波函數傅氏譜最大峰值 80% 以上區間之頻率，視為濾波後之”主要頻率保留區間”。意即，當一反應經某一 a 值 Haar 函數小波轉換後，將有助於識別位於該 Haar 函數主要頻率保留區間內之自然振動頻率。

對其不同 a 值，定義該 Haar 小波函數振幅最大峰值 80% 以上之頻率區間，為”主要頻率保留區間”。因此，Haar 小波函數在 $a=1$ 之情況下，其頻率分布集中之上界與下界，可由以下之關係式求得：

$$\|\hat{\Psi}_H(\omega)\| = \frac{2(1 - \cos(\omega/2))}{\omega} = 0.8 \times \frac{792}{1093}, \quad (2.31)$$

此函數無法求得解析解；故以圖解法對此方程式兩邊之函數作圖，以找出兩函數之交點，此交點即為此方程式之解。所得之結果約為 $[2745/1012, 1392/205]$ ，將此結果之單位以 (Hz) 表示，則定義出濾波後之”主要頻率保留區間”為 $[0.4313, 1.0807]$ 。由上述之對任意 a 值之小波函數經由傅利葉轉換至頻率域之特性可知，而對所有 a 值而言，最大峰值 80% 以上之區間則為 $[0.4313/a, 1.0807/a]$ 。

因此，若欲以 Haar 小波函數識別本章數值模擬結構模型第一模態，很顯然，吾人可取 $a=0.9$ 。同理，若欲識別第二模態與第三模態者，吾人則取 $a=0.22$ 者。而要識別第四模態以上者，可取 $a=0.08$ 。如此即可獲得所有模態之自然振動頻率、阻尼比以及振形。此種選擇 a 值之前提是事先知道欲識別自然振動頻率之區間，此區間通常可以由反應之傅氏譜得知。相反地，若此類信息無法事先預知，那任選一 a 值，在該 a 值 Harr

函數”主要頻率保留區間”內，隨 (I, J) 階數增加，振動頻率穩定被識別者，則吾人可很有信心認定該振動頻率即為結構系統之自然振動頻率。

為比較識別模態及理論模態之吻合程度，可利用 MAC (modal assurance criterion) 值為指標(Allemang 與 Brown, 1983)，其定義為：

$$MAC(\psi_{iI}, \psi_{iT}) = \frac{|\{\psi_{iI}\}^T \{\psi_{iT}\}|^2}{\{\psi_{iI}\}^T \{\psi_{iI}\} \{\psi_{iT}\}^T \{\psi_{iT}\}}, \quad (2.32)$$

其中 $\{\psi_{iI}\}$ 與 $\{\psi_{iT}\}$ 分別為識別與理論之第 i 模態。由以上之定義式可看出，當兩模態完全一致時， $MAC=1$ 。但當兩模態差異甚大時，則 MAC 值越接近於零。

當識別之振動頻率與阻尼比分別與理論值相差小於 2% 和 20%，且 MAC 值 ≥ 0.9 時，可認定此識別結果為“準確”。

以 Haar 小波函數識別本章數值模擬結構模型，可選取之 $a=0.9$ 、 $a=0.22$ 以及 $a=0.08$ 。其對應之”主要頻率保留區間”分別為 $[0.479, 1.201]$ (涵蓋模型之第一振態)、 $[1.961, 4.912]$ (涵蓋模型之第二振態與第三振態) 以及 $[5.391, 13.509]$ (涵蓋模型第四以上之振態)。針對數值模型所得之相對加速度訊號進行識別，訊號中將不含任何雜訊。所得結果分別示於表 2.2~表 2.4。表 2.5 為同時考慮以上三組 a 值之識別結果 (即於式 (2.13) 中同時引入 3 個不同 a 值)。在識別過程取 ARX 模型階數 $(I, J) = (2, 2) \sim (16, 16)$ 之識別結果，以觀察此識別方法之穩定性。

由此些結果顯示，對於處理無雜訊之反應，取不同 a 值對識別結果並無明顯之影響。取不同 a 值，不僅有效識別出”主要頻率保留區間”內之模態，甚至連保留區間以外之模態皆能準確識別。若同時考慮以上三組 a 值之進行識別，其識別結果亦無明顯差別。且考慮不同之模型階數 (I, J) 進行估算所得之自然振動頻率、阻尼比與振態均相當穩定。

2.4.3 雜訊之影響

量測資料難免會含有雜訊，尤其是現地量測資料。通常，隨著雜訊之增加，識別之品質即隨之降低。雜訊之多寡可以噪訊比 (noise-signal ratio, NSR) 來定量。一般而言，

NSR 可定義為雜訊均方根與真正訊號（不含雜訊）均方根之比值。為瞭解雜訊對識別品質之影響，於數值分析所得之相對加速度反應及輸入反應中加入白色雜訊，使得 NSR=10% 或 NSR=20%。然後，分別對此兩組含有雜訊之訊號，依此分析流程進行識別，並與未含雜訊之分析結果比較。

圖 2.6 為分別以 $a=0.9$ 、 $a=0.22$ 以及 $a=0.08$ 於各階數下之識別結果。由該結果可發現，當訊號受到污染時，嚴重影響識別之品質，須要較高階之 I 及 J （相對於無雜訊者）方能得到精確之結果。相對於“主要頻率保留區間”外之模態識別，於“主要頻率保留區間”內之模態均能以相對較低之階數得到準確之答案。以 $a=0.9$ 識別第一模態時，當階數為 $I=J=3$ 時即可或得準確之結果；以 $a=0.22$ 識別第二模態與第三模態時，當階數為 $I=J=5$ 時即可或得準確之結果；以 $a=0.08$ 識別第四以上之模態時，當階數為 $I=J=8$ 時即可或得準確之結果。由圖 2.6，可看出隨著階數增加，其識別結果相當穩定。

圖 2.7 為同時考慮此三組尺度因子之識別結果。相較於無雜訊反應之識別可發現，其所須之階數須提高為 $I=J=23$ 時方可得到準確之結果，該階數亦遠高於用不同 a 值識別各相應“主要頻率保留區間”內模態者。由圖 2.7 可看出雖然雜訊會使識別品質受到影響，但是隨著階數之提升其識別結果亦將趨於穩定。

若考慮含有 20% 噪訊比之輸入資料與輸出反應（其輸入之地震訊號與頻譜圖如圖 2.8 所示；圖 2.9 則分別為第二、四和六樓層加入 20% 噪訊比之反應加速度反應與頻譜圖）。圖 2.10 為分別利用 $a=0.9$ 、 $a=0.22$ 以及 $a=0.08$ 所識別之結果。該結果顯示要精確地識別“主要頻率保留區間”內之模態須要更大之 I 與 J （相對於 10% 雜訊者）。以 $a=0.9$ 識別模型之第一振態時，其收斂之階數為 $I=J=9$ ；以 $a=0.22$ 識別模型之第二振態與第三振態時，其收斂之階數為 $I=J=14$ ；以 $a=0.08$ 識別模型第四以上之振態時，其收斂之階數亦為 $I=J=20$ 。當階數逐漸提升時，尚能穩定識別出準確之答案。

圖 2.11 為同時以三組 a 值之係數以識別此模型之全部模態之結果，當 $I=J=56$ 方能得到準確答案。隨著階數之提升其識別結果亦趨於穩定。

從以上數值模擬分析中，可歸納結論：

1. 當雜訊越多時（即 NSR 越大），須以越高階之 (I, J) ，方能得到準確之結果。
2. 配合選擇適當之 a 值，可用較低階之 (I, J) 準確得到該 a 值對應“主要頻率保留區間”內之模態特性。
3. 若欲同時取用數個 a 值以便同時可識別較多之模態，則須以較高階數（相對於單一 a 值者）方得準確解。

2.4.4 小波函數之影響

小波分析相較於傳統傅利葉轉換更為優越，除了藉由選擇適當之尺度因子以對有興趣之頻帶進行分析之外，其基底函數之選擇更為多樣化。此節將選用 Haar 以外之小波函數，以探討不同小波函數對分析結果之影響。縱觀現有小波函數，可發現 Meyer 小波函數具有頻率轉換函數之數學表示式，且具有很類似帶通濾波器之特性。因此，以下探討利用 Meyer 函數處理含有雜訊反應。

Meyer 小波之小波函數 Ψ_M 如圖 2.12 所示，但無數學表示式。該小波函數定義於頻率域：

$$\hat{\Psi}_M(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} e^{i\omega/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-1/2} e^{i\omega/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{4\pi}|\omega|-1\right)\right) & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & |\omega| \notin \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \end{cases}, \quad (2.33)$$

其中， $v(s)$ 為構造 Meyer 小波之輔助函數：

$$v(s) = s^4(35 - 84s + 70s^2 - 20s^3) \quad s \in [0, 1], \quad (2.34)$$

$\hat{\Psi}_M(\omega)$ 之各頻率分量如圖 2.13 所示，為有限支撐長度之正交小波。因此，配合此小波函數之“主要頻率保留區間”，即可決定出適當之 a 值。

圖 2.13 顯示 Meyer 小波函數當 $a=1$ 時之傅氏譜，相較於 Haar 小波函數其頻率之“主要頻率保留區間”較為單純。由式 (2.32) 顯示， $\hat{\Psi}_M(\omega)$ 在 $2\pi/3 \leq \omega \leq 8\pi/3$ 之區間才有值。若定義頻率分量為最大者之 90% 以上之頻率區間為“主要頻率保留區間”，由式 (2.32)

可得此區間為 $[0.5348, 0.9311]$ 。因此，對尺度因子 a 之 Meyer 小波函數的”主要頻率保留區間”範圍為 $[0.5348/a, 0.9311/a]$ 。此小波函數之頻率域中，除了定義之區間外，其餘部份均為 0。由此可知，除非選擇 a 值所對應之”主要頻率保留區間”含蓋欲識別之振動頻率，否則將難以獲取準確之結果。

若欲以 Meyer 小波函數識別本章數值模擬結構模型第一模態，很顯然，吾人可取 $a=1$ 。同理，若欲識別第二模態與第三模態者，吾人則可取 $a=0.26$ 者。而要識別第四模態以上者，可取 $a=0.1$ 。如此方可獲得所有模態之自然振動頻率、阻尼比以及振形。

由以上之闡述中，已充份掌握 Meyer 小波函數之基本特性及其與 Haar 小波函數之差異。為瞭解不同小波函數對雜訊處理之能力與識別結果之影響，以下將以 Meyer 小波函數處理含有 20%雜訊之反應；並與前一節 Haar 小波函數分析之結果相比。

以 Meyer 小波函數識別本章數值模擬結構模型，所選取之 a 值分別為 $a=1$ 、 $a=0.26$ 以及 $a=0.1$ 。其對應之”主要頻率保留區間”分別為 $[0.5348, 0.9311]$ （含蓋模型之第一振態）、 $[2.0568, 3.5810]$ （含蓋模型之第二振態與第三振態）以及 $[5.3476, 9.3106]$ （含蓋模型第四以上之振態）。其識別結果示於圖 2.14。欲得準確之識別結果，以 $a=1$ 識別模型之第一振態時，須以階數為 $I=J \geq 10$ ；以 $a=0.26$ 識別模型之第二振態與第三振態時，則須階數為 $I=J \geq 6$ ；以 $a=0.1$ 識別模型第四以上之振態時，須 $I=J \geq 14$ 。與 Harr 小波函數相較之下，整體上所使用之模型階數 (I, J) 有些微減少。另外，值得注意的是，在”主要頻率保留區間”外之模態是無法被識別。

若嘗試同時以三組 a 值之係數以識別此模型之全部模態（圖 2.15），其所須之模型階數為 $(I, J)=35$ 。由圖 2.14 顯示之結果可知，發現以 Meyer 小波函數所須之階數亦比 Harr 小波函數小很多。

2.5 應用於處理振動台試驗反應

經探討各種參數對識別結果之影響。本節將所建構之識別程序應用至分析三層樓鋼構之振動台試驗數據。藉此驗證本分析流程推廣至實測動態反應之可行性，並了解此些結構系統之自然振動頻率、阻尼比與振態。並與有限元套裝軟體分析依設計圖架構模型

所得動態特性相比。

2.5.1 待測結構物

國家地震工程研究中心(Nation Center for Research on Earthquake Engineering, NCREE)對一長 $3m$ 、寬 $2m$ 之鋼構架進行一連串之震動台試驗(參看圖 2.16 及 2.17)。此結構每一樓層樓版部分為許多小樑所組成,並於每個樓版組上配置 14 組重鉛塊。每組配重鉛塊包含四塊鉛塊與夾具,重 $250kg$ 。14 組配重鉛塊組共重 $3500kg$ 。圖 2.18 所示為試驗中所設加速度反應量測點位。圖 2.16 所示為 Benchmark C1 之模型為標準模型, Benchmark C2 為一勁度不對稱之結構。Benchmark C2 模型乃以標準模型為基礎沿著短軸方向兩側邊均加裝斜撐以提高勁度;而沿長軸方向則僅於其中一側邊加裝斜撐。為方便表示,以下定義 X 軸為長軸向;Y 軸為短軸向。

因 Benchmark C1 之模型為一對稱系統,其水平反應彼此獨立且不與扭轉運動耦合。從分析角度而言, Benchmark C1 為一很單純之系統。以下藉由 Benchmark C1 進行之線性實驗資料進行識別,並與 Benchmark C1 之有限元素模型相互比對以確認此識別程序之可靠性。

Benchmark C2 模型為一勁度不對稱之結構,其質量中心與勁度中心並不重疊,於長軸方向勁度中心明顯偏離質量中心。因此,當輸入 X 軸方向加速度時,X 軸方向之輸出訊號將包含轉動與平移運動之合成;而加裝於 X 軸向之斜撐以右上左下之形式安裝於側邊,此架設方式多少會影響 Y 軸向之勁度中心,其扭動與平移方向之運動耦合程度將由分析結果做進一步之研判。研究中將對此模型之動態反應資料進行識別工作。

於試驗中,各樓層之絕對位移和絕對加速度反應於均有記錄下來。另外,一些應變計亦被設置於第一樓層間之柱上。原始資料之取樣率為 $200Hz$,其與實際應用之典型取樣率相稱。分析反應相對較大之 5 秒區間,以減少雜訊(含微動)之影響。當輸入訊號為白噪或 EL centro 地震時,取 10~15 秒區間內之反應進行分析;當輸入訊號為集集地震時,則取 30~35 秒區間內之反應進行分析(參看林, 2006 及黃, 2005)。

2.5.2 Benchmark C1 之識別結果

Benchmark C1 模型以有限元素分析套裝軟體 SAP2000 建模分析，所得之 X 向與 Y 向之振動頻率與每一樓層之模態反應示於表 2.6。X 向之參考自然振動頻率分別為 1.45、4.66 以及 7.79Hz；Y 向之參考自然振動頻率分別為 1.05、3.23 以及 5.10Hz。

為較易準確地識別 Benchmark C1 模型之動態特性，分析以白噪訊號輸入之反應。因為白噪輸入之頻寬較一般地震輸入者為寬，其輸入歷時及頻譜反應示於圖 2.19。圖 2.20 為第二樓頂 X 向各量測點之反應及頻譜圖，完整資料收錄於林(2006)與黃(2005)之報告中。由圖 2.20 所示量測點之頻譜圖可看出實際結構之自然振動頻率與有限元素模型所得者大致吻合。

理論上，Benchmark C1 為一對稱系統，因此 X 向與 Y 向之模態識別可獨立進行。另外，於 X 向兩側或 Y 向兩側所量之反應理論上應該會有很大的相似性，為避免扭轉反應之影響，於分析時取各樓層 a 柱與 b 柱(參看圖 2.18)之平均反應。但是，於 X 向之反應中，第一樓層 a 柱之量測訊號並不合理；因此，該樓層只取 b 柱之量測反應。於 Y 向之反應中，第一樓層 b 柱之量測訊號亦為不正常因此，分析 Y 向時除了第一樓層之量測反應僅取 a 柱之量測結果。利用 Harr 小波函數進行分析 X 向反應時，取 $a = 0.5$ 識別第一模態； $a = 0.12$ 識別第二模態與第三模態。分析 Y 向反應時，取 $a = 0.5$ 識別第一模態；取 $a = 0.15$ 識別第二模態與第三模態。其 X 向與 Y 向之識別結果示於表 2.7，其中 MAC 值之計算乃以有限元素分析套裝軟體 SAP2000 所得之模態為參考模態。MAC 值顯示有限元素模式與識別所得之模態振形非常一致。除最高模態之頻率，有限元素模式與識別所得者非常一致。

2.5.3 Benchmark C2 之識別結果

識別 Benchmark C2 模型動態特性時，吾人將考慮白噪訊號、El Centro 以及集集地震等資料輸入時之反應，以瞭解不同頻寬之輸入對本研究所提識別方法分析能力之影響。

一般地震資料之能譜階集中於 10Hz 以內非對稱結構 Benchmark C2 由於加裝了許多斜撐，其勁度大幅提升。以一般之地震記錄輸入而得之反應進行分析恐將忽略部份高頻之模態。因此，除了以一般地震反應進行分析外，更考慮以白噪為輸入並對其動態反應

進行識別，並比較此識別程序對於高頻模態之處理效果。

白噪輸入及頻譜示於圖 2.21 中。圖 2.22 分別為第二樓層各量測點之輸出歷時及頻譜反應。從頻譜中可發現 3(Hz)、10~13(Hz)、16~17(Hz)、22(Hz)、29~31(Hz) 以及 37(Hz) 附近等頻率區間有明顯之峰值。因此，可初步判斷結構系統之模態必定落於此些頻率區間內。而以 EL centro 地震與集集地震輸入時，其歷時圖與頻譜圖分別示於圖 2.23 與圖 2.25 中。圖 2.24 與圖 2.26 分別為此兩組地震作用時第二樓層各量測點之輸出歷時及頻譜反應。由其頻譜圖可發現，30Hz 以上高模態之振動頻率僅能於第一樓層之頻譜反應發現峰值。

以 Harr 小波函數或以 Meyer 小波函數進行識別所須之 a 值，可由頻率圖之初步分析結果決定。以 Harr 小波函數進行識別時，取 $a = 0.15$ 識別 [2.8780, 7.2047] 區間內之模態；取 $a = 0.06$ 識別 [7.1950, 18.0117] 區間內之模態；再取 $a = 0.025$ 識別 [17.2680, 43.2280] 區間內之模態。表 2.8 所示為白噪輸入，以 Harr 小波函數進行識別所得之自然振動頻率、阻尼比與每個自由度之模態反應。圖 2.27 所示為將以上識別出之模態振形以圖形表示。若輸入訊號改以 EL centro 與集集等地震資料，則其識別結果如表 2.9 所示。表中之 MAC 值為相對於以白噪輸入所獲得之模態。

以 Meyer 小波函數進行識別時，取 $a = 0.18$ 識別 [2.9711, 5.1728] 區間內之模態；取 $a = 0.07$ 識別 [7.6400, 13.3014] 區間內之模態；取 $a = 0.04$ 識別 [13.3700, 23.2775] 區間內之模態；最後以 $a = 0.023$ 識別 [23.2522, 40.4826] 區間內之模態。表 2.10 所示為白噪輸入，小波函數進行識別所得之自然振動頻率、阻尼比與模態振形。圖 2.28 所示為將以上識別出之模態振形以圖形表示。若輸入訊號改以 EL centro 與集集等地震資料，則其識別結果如表 2.11 所示。表中之 MAC 值為相對於以白噪輸入所獲得之模態。

由圖 2.27 和 2.28 與表 2.8 及 2.10 等模態圖可看出，第一個模態為 X 向為主之振態；第二個模態為 Y 向為主之振態；而第三個模態應為為轉動為主之振態；而第四個以上之模態為轉動與平移藕合，難以確認其主要運動方向。

分析過程由於 Meyer 小波函數所涵蓋之”保留區間”相對於 Harr 小波函數來的較窄，而且此勁度不對稱之結構其主要振頻分部之範圍較廣；因此，以 Meyer 小波函數進

行分析時須要用到 4 組 a 值，而以 Harr 小波函數進行分析，僅須 3 組 a 值。而對於做用於此勁度不對稱系統之各種輸入及其輸出反應進行系統識別，其所識別之自然振動頻率、阻尼比以及振態相當雷同。藉由此進行一連串之比對，可確認此識別結果之可靠性。

以 SAP2000 建立 Benchmark C2 之模型，其模型之參考自然振動頻率與對應之振態示於表 2.12。由量測所得之輸入資料與輸出反應識別此勁度非對稱結構 (Benchmark C2)，所得之識別結果與有限元素分析值並不全然一致。此差異顯示利用設計資料建立有限元素模型與實際鋼構有所差異。雖然，在對稱結構 (Benchmark C1) 之結果顯示，有限元素模型能順利展現實際鋼構之行為；但於非對稱結構系則不然。將來實有必要再進一步探討 Benchmark C2 有限元素模型之問題。

2.6 應用於處理橋樑衝擊實驗反應

於 2.5 節之實驗室鋼構反應訊號分析中，已能充份驗證本分析流程推廣至實測動態反應之可行性。本節將所建構之識別程序應用至垂直向 (Z 向) 橋樑衝擊載重試驗。藉此了解此些橋樑系統之自然振動頻率、阻尼比與振態。

本節所分析之橋樑為跨越基隆河，聯絡台北萬華與板橋之萬板大橋。萬板大橋為一多跨連續變斷面預力箱型拱橋(如圖 2.29 所示)，分為五跨，全長 440 公尺，除了 $P17$ 與 $P22$ 為滾輪支承外，其餘皆為固接方式與上部結構銜接。跨長分別為 55 公尺、110 公尺、110 公尺、110 公尺、及 55 公尺。

本文分析之資料為由楊等人(2000)所進行之全線衝擊試驗。因受限於集錄系統之頻道數，在整個測站擺設方面，以每 20 公尺之距離擺設一個速度感應子，每一段量測總長為 140 公尺為原則，共分四段量測。每相鄰段之間有兩個重複測站，以做為連結各段模態振形之用 (參看圖 2.29)。量測時均將感應子置於橋樑斷面中心。於每一段每個方向之量測時間皆為 1.5 分鐘，取樣頻率為 100HZ，取樣點共 9000 點。取衝擊後 5 秒長之速度反應進行分析。

2.6.1 動態資料初判

圖 2.30 為萬板大橋在受衝擊後，於四段量測資料中各挑一測點之垂直向 (Z 向) 所

繪製之歷時反應圖與頻譜圖，此些測點對應之位置分別為橋面版上 80m、180m、280m 與 380m 之位置。在各量測段之歷時反應中，可觀察到皆有一個特別大之峰值出現，此反應是因為衝擊力所造成之結構反應。如同一結構承受一個脈衝荷重一樣，當衝擊力作用時，結構反應瞬間放大；其後，結構反應則以自由振動之方式衰減，因為結構體本身具有阻尼所造成，約於 30 秒後已衰減至一般之微動反應。量測之垂直向反應中，於到達最大峰值反應前，有一個較微動反應為大之反應，此乃卡車啟動所造成之擾動。由於分析過程假定實驗之衝擊力量為一脈衝荷重，而卡車之啟動效應可能會影響分析之結果。因此分析時此部分之資料將不予考慮。由頻譜圖中表現最高峰振幅所對應之頻率可初步判定為結構之基本自然振動頻率。由各量測點之頻譜反應可約略看出 1~2Hz、2.5Hz、3.5Hz 左右、4.5Hz 以及 5.5Hz 左右各有明顯之峰值。

2.6.2 動態特性之識別結果

利用 Harr 小波函數進行分析；考慮以 $a = 0.4$ 與 $a = 0.2$ 分別識別 $[1.0792, 2.7017]$ 與 $[2.1585, 5.4035]$ 區間內之模態。其結果示於表 2.14 與圖 2.30。分析所得第一模態之自然振動頻率為 1.49Hz，阻尼比為 3.39%。識別出低於 5Hz 之模態總共有六組，全部模態之阻尼比介於 1.5%~5%之間。表 2.14 亦列出前人之識別結果（林,2000），兩種方法所得結果一致，惟林（2000）於 5Hz 內之結果漏掉 3.03Hz 之模態。

所識別得之模態振形圖示於圖 2.31。此橋樑基本上無明顯之不對稱，故所得之模態振形應亦接近對稱或反對稱。而由所得之振形可看出，所識別之第二模態、第三模態、第四模態、第六模態與第七模態之振形為近似對稱；所識別之第一模態與第五模態之振形為近似反對稱。

2.6.3 有限元素模擬結果

由於萬板大橋為一對稱橋體，因此可預期該橋體於垂直向、橫向及縱向之振動行為可能互相獨立。前人(黃, 2000)利用有限元素分析軟體 SAP2000，分別以 278 個樑元素模擬整個結構，並且利用等值彈簧勁度模擬橋樁基礎與土壤互制行為，另外，為考慮完工之真實情形，於橋樑兩端加上臨跨質量的一半，以模擬臨跨效應。所得之垂直向模態如表 2.14 所示，而振形如圖 2.31 中之虛線條所示。

將實驗結果與有限元素分析之結果進行比對其結果亦示於表 2.13，由分析結果可發現識別所得之第一模態可對應有限元素模型之第八個模態；第二模態可對應有限元素模型之第十個模態；第三模態與有限元素模擬所得之第十一個模態，雖然於中間跨處有些微之差異，但整體振形仍大致相仿；第四模態則近似於有限元素模擬所得之第十四個模態；第五模態相仿於有限元素模擬所得之第十五個模態振形；第六模態與有限元素分析所得之第二十二個模態振形相似；第七模態則與有限元素分析所得之第十四個模態振形相似。

以有限元素模型所得之數值模態雖能於識別所得之結果中找到對應或相仿之模態，但其對應頻率並不一致。由此可知，依設計圖所建立之有限元素模型尚無法完全符合興建完成後之結構行為。施工中混凝土及鋼材之材料性質與設計者之相異性及有限元素模型中邊界條件之模態是否與實際者符合，均會影響有限元模型及試驗資料識別結果之一致性。依設計圖所建立之有限元素模型將有必要進一步修正。

另外值得注意的是，與識別所得對應之有限元振態，其自然振動頻率大部份較識別所得者明顯低許多；此代表有限元模式之勁度遠比實際結構小許多。即是設計分析中所用之勁度過於保守。

2.7 小結

本章提出了一套基於連續小波轉換之線性系統識別模式。根據小波函數之頻帶決定出“頻率保留區間”，並由此決定出合適之尺度因子，透過連續小波轉換將量測之系統反應轉換至小波域中，於轉換過程可對量測反應進行濾波。利用連續小波轉換之平移不變性於小波域中架構 ARX 模型，估算出模型中之待定係數矩陣，接著經由系統識別程序，可有效率地獲得系統之模態參數(如自然振動頻率、阻尼比、以及振動模態)。研究中亦藉由數值模擬探討各種參數以及雜訊之影響，並應用於振動台試驗與橋樑現地衝擊試驗資料，以識別結構之模態特性。值得一提的是，連續小波轉換應用於系統識別之結果除可做為有限元素分析模型之修正參考外，亦可對訊號進行濾波以降低識別參數所須之模型階數。

本文首先針對六層樓剪力建築物之地震反應數值模擬，進行系統識別。並對模型階

數、雜訊之影響、以及改變基底小波函數之尺度因子等問題進行參數探討。以利使用者能更容易地掌握此識別方法之準確性。此外，雜訊對於系統識別之結果而言具有相當大之影響，本研究中對於以連續小波理論出發之濾波原理做一深入探討，並以不同小波函數之“頻率保留區間”挑選適當之尺度因子，以提升識別之結果。

接著，以國家地震工程研究中心之三層樓鋼構，於各種輸入下之振動台實驗記錄，對標準構架與非對稱鋼構架進行識別工作。特別是非對稱結構之識別，可觀察其平移與扭轉偶合之模態反應。另外，以 SAP2000 建立此些模型以獲得其理論解，逐步驗證各個主要之振動模態，驗證本文所提之連續小波轉換應用於系統識別之方式。

進一步將此識別方式應用於橋樑結構之模態識別，研究中對於萬版大橋之垂直向衝擊載重實驗所得之數據進行分析，以識別萬版大橋之垂直向動力特性。結果共識別了七個模態，其所得之頻率與阻尼比絕大部分與前人所得之結果相合，且能識別出前人忽略之模態；另外與有限元素分析所得之結果相比較，亦能找到對應之模態振形。



第三章 以多項式基底架構 TVARX 模式暨識別瞬時模態參數

3.1 前言

本章主要是發展基於多項式基底架構 TVARX (time varying autoregressive with exogenous input) 模型以識別線性時變系統之瞬時模態特性。此方法主要是透過量測之輸入與輸出反應架構 TVARX 模型；TVARX 模型之時變係數將以多項式基底展開，並利用不同技巧求得 TVARX 模型之參數，再進一步估算時變系統瞬時模態參數。3.2 節主要介紹利用加權基底函數法 (Weighted Basis Function approach, WBF) 以及移動最小平方差法 (Moving Least Square method, MLS) 架構 TVARX 模式，並介紹瞬時模態特性之識別方法。3.3 節利用中央差分法將時變運動方程式展開，以推導 TVARX 與運動方程式之對應關係。3.4 節將由前節所得對應關係式驗證瞬時模態之估算方法，並將探討不同反應資料所架構之 TVARX 模型對識別結果之影響。3.5 節則是將 3.2 節中所提出之識別流程應用於四組不同時變曲線之時變系統，比較此兩種架構 TVARX 模型方法之分析結果，並進一步探討多項式基底冪次、選用權重函數之支撐範圍以及移動最小平方差法之節點數等各項參數對識別結果之影響。3.6 節則是將 TVARX 模型結合移動最小平方差法之識別流程應用於混凝土門型架構之震動台試驗反應。3.7 節則對此章之研究內容做個總結。

3.2 理論背景

本節將介紹兩種架構 TVARX 模型之方法，分別為加權基底函數法 (WBF) (Niedwiecki, 2001) 以及移動最小平方差法 (MLS) (Liu, 2003)。加權基底函數法乃將時變係數以基底函數展開，再透過加權最小平方差法逐點計算每個時刻之模態特性。此方法之特性為可以較少之基底數量獲得準確之結果；但逐點計算導致運算過程耗時。移動最小平方差法則是時變係數以基底函數展開後，先結合權重函數估算各個節點(nodal points)之形狀函數，接著再以最小平方差法反算每個形狀函數對應之係數。此方法不僅能以較少之基底展開，而且計算過程較為省時。

值得一提的是，以加權基底函數法進行估算，每次反算涵蓋之資料數與權重函數支撐範圍相關。若是分析資料含有雜訊，將較難在計算過程中降低雜訊之影響。而以移動

最小平方差法進行估算，於計算時每組形狀函數涵蓋之資料數將與分析資料長度一致，則可透過再次之最小平方差降低雜訊之影響。

3.2.1 以 WBF 架構 TVARX 模型

時變 ARX (TVARX(I,J)) 模式定義為

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I \Phi_i(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \Theta_j(t) \mathbf{f}(t-j) + \mathbf{a}_n(t), \quad (3.1)$$

其中， $\mathbf{y}(t-i)$ 是在 $t-i\Delta t$ 時刻下量得之反應向量； $\mathbf{f}(t-i)$ 是在 $t-i\Delta t$ 量得之外力輸入向量； $\Phi_i(t)$ 和 $\Theta_j(t)$ 為待測之時變係數矩陣； $\mathbf{a}_n(t)$ 為誤差向量，由於量測噪訊或模型誤差所造成。TVARX 通常被應用於架構時變線性系統或非線性系統之輸入與輸出關係。當利用 TVARX 模式建構一非線性系統之輸入及輸出時；即是將與位移或速度反應相關之系統特性(勁度或阻尼，為時間之隱函數)以一等價之時間顯函數替代。

以加權基底函數技巧建立 TVARX 模式時，將 TVARX 之係數函數以選定基底函數展開。在傳統之基底函數展開法(即為本節中權重函數為定值之特例)常用之基底函數之種類包括有 Walsh 函數 (Zou, 2003)，富利葉級數 (Marmarelis, 1987)，Legendre polynomials (Niedwiecki, 1988)，小波函數 (Tsatsanis, 1993) 等。本章則利用多項式函數，並配合加權最小平方差法，以求取函數展開之係數。對式(3.1)中之係數函數以多項式函數展開，即令：

$$\Phi_i(t) = \sum_{\hat{n}=0}^{N_i} \mathbf{A}_{i\hat{n}} t^{\hat{n}}, \quad \Theta_j(t) = \sum_{\hat{n}=0}^{N_j} \mathbf{B}_{j\hat{n}} t^{\hat{n}}, \quad (3.2)$$

其中， $\mathbf{A}_{i\hat{n}}$ 和 $\mathbf{B}_{j\hat{n}}$ 為待測之係數矩陣。可利用加權最小平方差法求解 $\mathbf{A}_{i\hat{n}}$ 和 $\mathbf{B}_{j\hat{n}}$ 。定義誤差估計函數為

$$\mathbf{E}(t_{\tilde{n}}) = \sum_{\tilde{m}=0}^{\tilde{M}} w(t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{m}}) [\mathbf{a}_n(t_{\tilde{m}})]^T \mathbf{a}_n(t_{\tilde{m}}), \quad (3.3)$$

其中， \tilde{M} 為估算 $t_{\tilde{n}}$ 時刻係數時，權重函數支撐長度(support)內之資料點數。此權重函數亦可視為一窗函數。權重函數須為一正定函數(positive definite function)，本研究中選用指數型權重函數：

$$w(t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{m}}) = \begin{cases} e^{-(\bar{d}/\alpha)^2} & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases}, \quad (3.4)$$

其中， $\bar{d} = |t_{\tilde{n}} - t_{\tilde{m}}|/d_m$ ； d_m 代表 w 支撐長度。此函數圖形如圖 3.1 所示；其中 $\alpha = 0.3$ 。

式(3.2)代入(3.1)則可得：

$$\mathbf{a}_n(t_{\tilde{m}}) = \mathbf{y}_{t_{\tilde{m}}} - \sum_{i=1}^I \left(\sum_{\hat{n}=0}^{N_i} \mathbf{A}_{i\hat{n}} t_{\tilde{m}}^{\hat{n}} \right) \mathbf{y}_{t_{\tilde{m}}-i} - \sum_{j=1}^J \left(\sum_{\hat{n}=0}^{\bar{N}_j} \mathbf{B}_{j\hat{n}} t_{\tilde{m}}^{\hat{n}} \right) \mathbf{f}_{t_{\tilde{m}}-j}, \quad (3.5)$$

再代入式(3.3)；當誤差估計值最小時，誤差估計函數對各個係數取導數須為零：

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{A}_{i\hat{n}}} = [\mathbf{0}]; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{B}_{j\hat{n}}} = [\mathbf{0}], \quad (3.6)$$

依上式整理可得：

$$\sum_{\tilde{m}=0}^{\tilde{M}} w(t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{m}}) \left[\sum_{i=1}^I \left(\sum_{\hat{n}=0}^{N_i} \mathbf{A}_{i\hat{n}} t_{\tilde{m}}^{\hat{n}} \right) \mathbf{y}_{t_{\tilde{m}}-i} + \sum_{j=1}^J \left(\sum_{\hat{n}=0}^{\bar{N}_j} \mathbf{B}_{j\hat{n}} t_{\tilde{m}}^{\hat{n}} \right) \mathbf{f}_{t_{\tilde{m}}-j} - \mathbf{y}_{t_{\tilde{m}}} \right] t_{\tilde{m}}^{\hat{n}} \mathbf{y}_{t_{\tilde{m}}-i}^T = [\mathbf{0}], \quad (3.7a)$$

$$\sum_{m=0}^{\tilde{M}} w(t_n, t_m) \left[\sum_{i=1}^I \left(\sum_{\hat{n}=0}^{N_i} \mathbf{A}_{i\hat{n}} t_m^{\hat{n}} \right) \mathbf{y}_{t_m-i} + \sum_{j=1}^J \left(\sum_{\hat{n}=0}^{\bar{N}_j} \mathbf{B}_{j\hat{n}} t_m^{\hat{n}} \right) \mathbf{f}_{t_m-j} - \mathbf{y}_{t_m} \right] t_m^{\hat{n}} \mathbf{f}_{t_m-j}^T = [\mathbf{0}], \quad (3.7b)$$

式 (3.7) 可以矩陣形式簡化表示為：

$$\mathbf{V}_w^T \mathbf{W} \mathbf{V}_w \mathbf{C}_w = \mathbf{V}_w^T \mathbf{W} \mathbf{F}, \quad (3.8)$$

其中，

$$\mathbf{C}_w = [\tilde{\mathbf{A}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{A}}_2^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{A}}_I^T \quad \tilde{\mathbf{B}}_0^T \quad \tilde{\mathbf{B}}_1^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{B}}_J^T]^T,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = [\mathbf{A}_{i0} \quad \mathbf{A}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{iN_i}], \quad \tilde{\mathbf{B}}_j = [\mathbf{B}_{j0} \quad \mathbf{B}_{j1} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{j\bar{N}_j}],$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{y}_{t_0} \quad \mathbf{y}_{t_1} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{t_{\tilde{M}}}]^T,$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{\tilde{M}}), \quad w_{\tilde{m}} = w(t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{m}}),$$

$$\mathbf{V}_w = \begin{bmatrix} [\mathbf{\Pi}_{N_1}(t) \mathbf{y}_{t-1}] & [\mathbf{\Pi}_{N_2}(t) \mathbf{y}_{t-2}] & \cdots & [\mathbf{\Pi}_{N_I}(t) \mathbf{y}_{t-I}] \\ [\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_0}(t) \mathbf{f}_{t-0}] & [\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_1}(t) \mathbf{f}_{t-1}] & \cdots & [\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_J}(t) \mathbf{f}_{t-J}] \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Pi}_{N_i}(t)\mathbf{y}_{t-i}] &= \left[[\mathbf{\Pi}_{N_i}(t_0)\mathbf{y}_{t_0-i}]^T \quad [\mathbf{\Pi}_{N_i}(t_1)\mathbf{y}_{t_1-i}]^T \quad \cdots \quad [\mathbf{\Pi}_{N_i}(t_{\tilde{M}})\mathbf{y}_{t_{\tilde{M}}-i}]^T \right]^T, \\ [\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_j}(t)\mathbf{f}_{t-j}] &= \left[[\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_j}(t_0)\mathbf{f}_{t_0-j}]^T \quad [\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_j}(t_1)\mathbf{f}_{t_1-j}]^T \quad \cdots \quad [\mathbf{\Pi}_{\bar{N}_j}(t_{\tilde{M}})\mathbf{f}_{t_{\tilde{M}}-j}]^T \right]^T, \\ \mathbf{\Pi}_{N_i}(t_{\tilde{m}}) &= \left[[\mathbf{I}] \quad [\mathbf{I}]t_{\tilde{m}} \quad \cdots \quad [\mathbf{I}]t_{\tilde{m}}^{N_i} \right]^T, \end{aligned}$$

$[\mathbf{I}]$ 為維度與係數矩陣一致之單位矩陣。

對(3.8)式求解即可得到每一時刻下時變係數以多項式基底展開所對應之係數。由此即可得到此 TVARX 模型於某個時刻 $t = t_n$ 下之時變係數 $\Phi_i(t_n)$ ($i=1,2,\dots,I$)。

由式(3.3)可知『加權最小平方差法』可視為在欲分析之時間點周圍取一窗函數，且此窗函數在靠近欲分析之時間點時有較大之權值。如此，所架構之矩陣 \mathbf{C}_w 為隨 t 而改變之係數矩陣；此外，分析過程不須太多之基底函數，即可得相當好之結果。然而，每計算一個時間點之模態則須重新以加權最小平方差法計算係數矩陣 \mathbf{C}_w ，此分析過程相當耗時。當所選用之權重函數為一常數（如， $w(t_n, t_m) = 1$ ），則每一時刻下，各基底函數所對應之係數即為常數；則其所得之結果與傳統基底函數展開法一致。

3.2.2 以 MLS 架構 TVARX 模型

多自由度時變線性系統之反應，利用時變 ARX (TVARX) 模式已示於式(3.1)。以下將以移動最小平方差法架構 TVARX 模式。TVARX 模型中之係數函數以多項式基底函數展開。將式(3.2)以矩陣形式表式得

$$\Phi_i(t) = \sum_{\hat{n}=0}^{N_i} \mathbf{A}_{i\hat{n}} t^{\hat{n}} = \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{P}_i, \quad (3.9a)$$

$$\Theta_j(t) = \sum_{\hat{n}=0}^{\bar{N}_j} \mathbf{B}_{j\hat{n}} t^{\hat{n}} = \tilde{\mathbf{B}}_j \mathbf{T}_j, \quad (3.9b)$$

其中：

$$\mathbf{P}_i = \left[[\mathbf{I}] \quad [\mathbf{I}]t \quad [\mathbf{I}]t^2 \quad \cdots \quad [\mathbf{I}]t^{N_i} \right]^T, \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{T}_j = \left[[\mathbf{I}] \quad [\mathbf{I}]t \quad [\mathbf{I}]t^2 \quad \cdots \quad [\mathbf{I}]t^{\bar{N}_j} \right]^T, \quad (3.10b)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = [\mathbf{A}_{i0} \quad \mathbf{A}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{iN_i}], \quad (3.10c)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_j = [\mathbf{B}_{j0} \quad \mathbf{B}_{j1} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{jN_j}], \quad (3.10d)$$

\mathbf{A}_{in} 與 \mathbf{B}_{jn} 為待定係數矩陣， $[\mathbf{I}]$ 為維度與係數矩陣一致之單位矩陣。

式(3.10)中之待定係數 \mathbf{A}_{in} 與 \mathbf{B}_{jn} 可以權重最小平方差法 (weighted least square) 進行求解。令 $\Phi_i(t_k)$ 與 $\Theta_j(t_k)$ 之真值分別為 $\bar{\Phi}_{ik}$ 與 $\bar{\Theta}_{jk}$ 。待定係數可透過誤差函數最小化求得。以式(3.9a)為例，將 $\tilde{\mathbf{A}}_i$ 之誤差函數定義為

$$\bar{\mathbf{E}}(t_n) = \sum_{l=1}^{\bar{i}_i} (\tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{P}_i - \bar{\Phi}_{il})^T \mathbf{W}(t_n, t_l) (\tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{P}_i - \bar{\Phi}_{il}), \quad (3.11)$$

其中：

$\mathbf{W}(t_{\bar{n}}, t_l) = w(t_{\bar{n}}, t_l) [\mathbf{I}]$ ； \bar{i}_i 為描述 $\Phi_i(t)$ 上所取之節點總數，其值遠小於反應總取樣點數。

對函數 $\bar{\mathbf{E}}$ 最小化可得

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \tilde{\mathbf{A}}_i} = [\mathbf{0}], \quad (3.12)$$

將誤差函數代入上式；整理可得

$$\tilde{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{A}}_i(t) = \bar{\Phi}_i \mathbf{Q}_i(t), \quad (3.13)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}}_i(t) = \sum_{l=1}^{\bar{i}_i} \mathbf{P}_i(t_l)^T \mathbf{W}(t_n, t_l) \mathbf{P}_i(t_l), \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{Q}_i(t) = [\mathbf{Q}_{i1} \quad \mathbf{Q}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_{i\bar{i}_i}]^T, \quad (3.14b)$$

$$\mathbf{Q}_{il} = \mathbf{P}_i(t_l) \mathbf{W}(t_n, t_l), \quad (3.14c)$$

$$\bar{\Phi}_i = [\bar{\Phi}_{i1} \quad \bar{\Phi}_{i2} \quad \cdots \quad \bar{\Phi}_{i\bar{i}_i}], \quad (3.14d)$$

則式中 $\tilde{\mathbf{A}}_i$ 之解為

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \overline{\mathbf{\Phi}}_i \mathbf{Q}_i(t) \overline{\mathbf{A}}_i^{-1}(t), \quad (3.15)$$

上式所求之 $\tilde{\mathbf{A}}_i$ 為時間 t 之函數，將之代入式(3.13)

$$\mathbf{\Phi}_i(t) = \overline{\mathbf{\Phi}}_i \tilde{\mathbf{\Phi}}_{p,i}(t), \quad (3.16)$$

$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{p,i}(t)$ 為有限元素中所稱之形狀函數 (shape function) 矩陣

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{p,i}(t) = \mathbf{Q}_i(t) \overline{\mathbf{A}}_i^{-1}(t) \mathbf{P}_i(t)^T, \quad (3.17)$$

同理， $\mathbf{\Theta}_j(t)$ 可用相同方式展開

$$\mathbf{\Theta}_j(t) = \overline{\mathbf{\Theta}}_j \tilde{\mathbf{\Theta}}_{p,j}(t), \quad (3.18)$$

其中：

$$\overline{\mathbf{\Theta}}_j = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{\Theta}}_{j1} & \overline{\mathbf{\Theta}}_{j2} & \cdots & \overline{\mathbf{\Theta}}_{j\hat{i}_j} \end{bmatrix}, \quad (3.19a)$$

$$\tilde{\mathbf{\Theta}}_{p,j}(t) = \mathbf{U}_j(t) \overline{\mathbf{B}}_j^{-1}(t) \mathbf{T}_j(t)^T, \quad (3.19b)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_j(t) = \sum_{l=1}^{\hat{i}_j} \mathbf{T}_j(t_l)^T \mathbf{W}(t_n, t_l) \mathbf{T}_j(t_l), \quad (3.19c)$$

$$\mathbf{U}_j(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{j1} & \mathbf{U}_{j2} & \cdots & \mathbf{U}_{j\hat{i}_j} \end{bmatrix}^T, \quad (3.19d)$$

$$\mathbf{U}_{jl} = \mathbf{T}_j(t_l) \mathbf{W}(t_n, t_l), \quad (3.19e)$$

而 \hat{i}_j 為描述 $\mathbf{\Theta}_j(t)$ 上所取之節點總數。如果對 TVARX 模型中之各個時變係數取相同之結點數與相同之多項式基底，則簡化以上表示式。在式 (3.16) 與式 (3.18) 中未知數為 $\overline{\mathbf{\Phi}}_i$ 和 $\overline{\mathbf{\Theta}}_j$ 。

接著以最小平方差法對 $\overline{\mathbf{\Phi}}_i$ 和 $\overline{\mathbf{\Theta}}_j$ 求解。其誤差函數之定義為

$$\mathbf{E} = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} (\mathbf{a}_n(t_{\bar{n}}))^T (\mathbf{a}_n(t_{\bar{n}})), \quad (3.20)$$

其中， \bar{N} 為資料點數。由式(3.1)可知誤差可由下式表示

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_n(t) &= \mathbf{y}(t) - \left(\sum_{i=1}^I \Phi_i(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \Theta_j(t) \mathbf{f}(t-j) \right) \\
&= \mathbf{y}(t) - \left(\sum_{i=1}^I \bar{\Phi}_i \tilde{\Phi}_{p,i}(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \bar{\Theta}_j \tilde{\Theta}_{p,j}(t) \mathbf{f}(t-j) \right), \\
&= \mathbf{y}(t) - \left(\sum_{i=1}^I \bar{\Phi}_i \Gamma_{t,i} + \sum_{j=0}^J \bar{\Theta}_j \Omega_{t,j} \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中

$$\Gamma_{t,i} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{p,i,1} \mathbf{y}(t-i) & \tilde{\Phi}_{p,i,2} \mathbf{y}(t-i) & \cdots & \tilde{\Phi}_{p,i,\hat{l}_i} \mathbf{y}(t-i) \end{bmatrix}, \tag{3.22a}$$

$$\Omega_{t,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{p,j,1} \mathbf{f}(t-j) & \tilde{\Theta}_{p,j,2} \mathbf{f}(t-j) & \cdots & \tilde{\Theta}_{p,j,\hat{l}_j} \mathbf{f}(t-j) \end{bmatrix}, \tag{3.22b}$$

對未知數取導數可得：

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\Phi}_i} = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} 2 \tilde{\Phi}_i \mathbf{y}(t_{\bar{n}} - i) \left(\mathbf{y}(t_{\bar{n}}) - \left(\sum_{i=1}^I \bar{\Phi}_i \Gamma_{t,i} + \sum_{j=0}^J \bar{\Theta}_j \Omega_{t,j} \right) \right) = [\mathbf{0}], \tag{3.23a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\Theta}_j} = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} 2 \tilde{\Theta}_j \mathbf{f}(t_{\bar{n}} - j) \left(\mathbf{y}(t_{\bar{n}}) - \left(\sum_{i=1}^I \bar{\Phi}_i \Gamma_{t,i} + \sum_{j=0}^J \bar{\Theta}_j \Omega_{t,j} \right) \right) = [\mathbf{0}], \tag{3.23b}$$

將以上之聯立方程組以矩陣形式表式可得

$$\Rightarrow \mathbf{V}_m^T \mathbf{F} = \mathbf{V}_m^T \mathbf{V}_m \mathbf{C}_m, \tag{3.24}$$

其中

$$\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} \Gamma_{t_1,1} & \Gamma_{t_1,2} & \cdots & \Gamma_{t_1,I} & \Omega_{t_1,0} & \Omega_{t_1,1} & \cdots & \Omega_{t_1,J} \\ \Gamma_{t_2,1} & \Gamma_{t_2,2} & \cdots & \Gamma_{t_2,I} & \Omega_{t_2,0} & \Omega_{t_2,1} & \cdots & \Omega_{t_2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{t_{\bar{n}},1} & \Gamma_{t_{\bar{n}},2} & \cdots & \Gamma_{t_{\bar{n}},I} & \Omega_{t_{\bar{n}},0} & \Omega_{t_{\bar{n}},1} & \cdots & \Omega_{t_{\bar{n}},J} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{y}(t_1) \quad \mathbf{y}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}(t_{\bar{n}})]^T,$$

$$\mathbf{C}_m = [\bar{\Phi}_1^T \quad \bar{\Phi}_2^T \quad \cdots \quad \bar{\Phi}_I^T \quad \bar{\Theta}_0^T \quad \bar{\Theta}_1^T \quad \cdots \quad \bar{\Theta}_J^T]^T,$$

對 (3.24) 式求解即可得到每個節點之真值，由此即可得到此系統於某個時刻 $t = t_n$ 下之時變係數 $\Phi_i(t_n)$ ($i = 1, 2, \dots, I$)。

架構 TVARX 之各個時變係數時，可考慮不同之多項式階數 N_i 與 \bar{N}_j 以及不同之節點數 l_i 與 \hat{l}_j 。於實際應用時若取相同之多項式階數以及相同之節點數，令 $N_1 = N_2 \dots = N_I = \bar{N}_0 = \bar{N}_1 = \dots = \bar{N}_J = N_p$ ； $l_1 = l_2 \dots = l_I = \hat{l}_0 = \hat{l}_1 = \dots = \hat{l}_J = l_n$ 。每個時變係數可使用相同之形狀函數，將可使運算過程更有效率。

從量測反應建構適當之 TVARX 模式，通常吾人欲瞭解該時變線性結構系統之動態特性隨時間變化之行為。此等信息有助於判斷結構系統之損傷情形。在瞬時 t 下， $\Phi_i(t)$ 與 $\Theta_j(t)$ 均為常數矩陣，故在瞬時 t 下，TVARX 模式，即對等於非時變之 ARX 模式。依非時變 ARX 模式估算動態特性之方法，令

$$[G(t)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [I] & [0] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & [0] & \dots & [I] \\ \Phi_i(t) & \Phi_{i-1}(t) & \Phi_{i-2}(t) & \Phi_{i-3}(t) & \dots & \Phi_1(t) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

在時變系統 $[G]$ 將隨時間而改變。透過 2.3 節中之系統動態特性估算方法，即可獲得系統之瞬時模態參數。瞬時模態參數之定義將於下節闡述。

3.3 TVARX 與運動方程式之對等關係

一結構系統之真實反應大抵滿足該系統之運動方程。若能找到運動方程與 TVARX 模式之對等關係，將有助於從結構動態反應建構適當的 TVARX 模式。本章首先推導單自由度時變線性系統，再推廣致多自由度系統。

3.3.1 單自由度系統

單自由度時變線性系統之運動方程式為：

$$m(t)\ddot{x}(t) + c(t)\dot{x}(t) + k(t)x(t) = f(t), \quad (3.26)$$

其中， m ， c ， k 分別為該系統之質量，阻尼係數及勁度，假設均為時間之函數； $f(t)$ 為外力； $x(t)$ ， $\dot{x}(t)$ 及 $\ddot{x}(t)$ 分別為位移，速度及加速度反應。

一時變系統之瞬時模態參數可透過式(3.26)表示，其定義方法類似於線性非時變系統之模態參數

$$\omega_n(t) = 2\pi f_n(t) = \sqrt{\frac{k(t)}{m(t)}}; \quad \xi(t) = \frac{c(t)}{2m(t)\omega_n(t)}, \quad (3.27)$$

其中， $\omega_n(t)$ 與 $\xi(t)$ 分別為瞬時自然振動頻率與阻尼比，為時間函數。

單自由度系統 TVARX 模式為

$$y(t) = \sum_{i=1}^I \phi_i(t)y(t-i) + \sum_{j=0}^J \theta_j(t)f(t-j) + a_n(t), \quad (3.28)$$

在以下討論 TVARX 與運動方程式對等關係時，不考慮 TVARX 中之量測誤差項。

吾人可利用中央差分法 (central difference approach) 將式(3.26)離散化得

$$\left[\frac{m(t)}{(\Delta t)^2} + \frac{c(t)}{2\Delta t} \right] x(t + \Delta t) = f(t) - \left[k(t) - \frac{2m(t)}{(\Delta t)^2} \right] x(t) - \left[\frac{m(t)}{(\Delta t)^2} - \frac{c(t)}{2\Delta t} \right] x(t - \Delta t), \quad (3.29)$$

其中， Δt 為時間增量。為對等式(3.29)與式(3.26)將式(3.29)表示成：

$$x(t) = \phi_1(t)x(t-1) + \phi_2(t)x(t-2) + \theta_1(t)f(t-1), \quad (3.30)$$

其中， $x(t-i)$ 即代表 $x(t-i\Delta t)$ ；

$$\phi_1(t) = -\frac{k(t-\Delta t) - 2m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2}{\alpha(t-\Delta t)},$$

$$\phi_2(t) = -\frac{m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2 - c(t-\Delta t)/(2\Delta t)}{\alpha(t-\Delta t)},$$

$$\theta_1(t) = \frac{1}{\alpha(t-\Delta t)},$$

$$\alpha(t - \Delta t) = \frac{m(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + \frac{c(t - \Delta t)}{(2\Delta t)},$$

由於現地量測時，通常只量測速度或加速度反應，故若利用速度或加速度直接建立 TVARX 模式。將式(3.26)分別對 t 微分一次及二次得：

$$m(t)\ddot{v}(t) + [\dot{m}(t) + c(t)]\dot{v}(t) + [\dot{c}(t) + k(t)]v(t) + \dot{k}(t)x(t) = \dot{f}(t), \quad (3.31a)$$

$$m(t)\ddot{a}(t) + [2\dot{m}(t) + c(t)]\dot{a}(t) + [\dot{m}(t) + 2\dot{c}(t) + k(t)]a(t) + [\dot{c}(t) + 2\dot{k}(t)]v(t) + \dot{k}(t)x(t) = \ddot{f}(t), \quad (3.31b)$$

其中， $v(t)$ 與 $a(t)$ 分別代表速度與加速度反應。當欲用速度反應架構 TVARX 時，由式(3.26)得

$$x(t) = \frac{1}{k(t)} [f(t) - m(t)\dot{v}(t) - c(t)v(t)], \quad (3.32)$$

代入式 (3.31a) 得

$$m(t)\dot{v}(t) + \bar{c}(t)v(t) + \bar{k}(t)v(t) = \bar{f}(t), \quad (3.33)$$

其中

$$\bar{c}(t) = \dot{m}(t) + c(t) - \frac{m(t)\dot{k}(t)}{k(t)},$$

$$\bar{k}(t) = k(t) + \dot{c}(t) - \frac{c(t)\dot{k}(t)}{k(t)},$$

$$\bar{f}(t) = \dot{f}(t) - \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}f(t),$$

式(3.33)可應用中央差分法表示為

$$v(t) = \bar{\phi}_1(t)v(t-1) + \bar{\phi}_2(t)v(t-2) + \bar{\theta}_0(t)f(t) + \bar{\theta}_1(t)f(t-1) + \bar{\theta}_2(t)f(t-2), \quad (3.34)$$

其中

$$\bar{\phi}_1(t) = -\frac{\bar{k}(t - \Delta t) - 2m(t - \Delta t)/(\Delta t)^2}{\bar{\alpha}(t - \Delta t)},$$

$$\bar{\phi}_2(t) = -\frac{m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2 - \bar{c}(t-\Delta t)/(2\Delta t)}{\bar{\alpha}(t-\Delta t)},$$

$$\bar{\theta}_0(t) = \frac{1}{(2\Delta t)\bar{\alpha}(t-\Delta t)},$$

$$\bar{\theta}_1(t) = -\frac{\dot{k}(t-\Delta t)}{k(t-\Delta t)\bar{\alpha}(t-\Delta t)},$$

$$\bar{\theta}_2(t) = \frac{-1}{(2\Delta t)\bar{\alpha}(t-\Delta t)},$$

$$\bar{\alpha}(t-\Delta t) = \frac{m(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} + \frac{\bar{c}(t-\Delta t)}{(2\Delta t)},$$

當欲用加速度反應架構 TVARX 時，由式(3.33)得

$$v(t) = \frac{1}{k(t)}(\bar{f}(t) - m(t)\dot{a}(t) - \bar{c}(t)a(t)), \quad (3.35)$$

將式(3.32)與(3.35)代入式(3.34)，整理得

$$m(t)\ddot{a}(t) + \tilde{c}(t)\dot{a}(t) + \tilde{k}(t)a(t) = \tilde{f}(t), \quad (3.36)$$

其中

$$\tilde{c}(t) = \dot{m}(t) + \bar{c}(t) - \frac{m(t)\dot{k}(t)}{k(t)},$$

$$\tilde{k}(t) = \bar{k}(t) + \dot{\bar{c}}(t) - \frac{\bar{c}(t)\dot{k}(t)}{k(t)},$$

$$\tilde{f}(t) = \dot{\bar{f}}(t) - \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\bar{f}(t),$$

同樣地，應用中央差分法至式(3.36)可得

$$a(t) = \tilde{\phi}_1(t)a(t-1) + \tilde{\phi}_2(t)a(t-2) + \tilde{\theta}_0(t)f(t) + \tilde{\theta}_1(t)f(t-1) + \tilde{\theta}_2(t)f(t-2), \quad (3.37)$$

其中，

$$\tilde{\phi}_1(t) = -\frac{\tilde{k}(t-\Delta t) - 2m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2}{\tilde{\alpha}(t-\Delta t)},$$

$$\tilde{\phi}_2(t) = -\frac{m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2 - \tilde{c}(t-\Delta t)/(2\Delta t)}{\tilde{\alpha}(t-\Delta t)},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_0(t) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}(t-\Delta t)} \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{\dot{k}(t-\Delta t)}{(2\Delta t)k(t-\Delta t)} - \frac{\dot{\bar{k}}(t-\Delta t)}{(2\Delta t)\bar{k}(t-\Delta t)} \right), \\ \bar{\theta}_1(t) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}(t-\Delta t)} \left(\frac{-2}{(\Delta t)^2} - \frac{k(t-\Delta t)\ddot{k}(t-\Delta t) - (\dot{k}(t-\Delta t))^2}{(k(t-\Delta t))^2} + \frac{\dot{k}(t-\Delta t)\dot{\bar{k}}(t-\Delta t)}{k(t-\Delta t)\bar{k}(t-\Delta t)} \right), \\ \tilde{\theta}_2(t) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}(t-\Delta t)} \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{\dot{k}(t-\Delta t)}{(2\Delta t)k(t-\Delta t)} + \frac{\dot{\bar{k}}(t-\Delta t)}{(2\Delta t)\bar{k}(t-\Delta t)} \right), \\ \tilde{\alpha}(t-\Delta t) &= \frac{m(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} + \frac{\tilde{c}(t-\Delta t)}{(2\Delta t)},\end{aligned}$$

因此，單自由度之線性時變結構系統，若以位移反應來建構 TVARX 模式；則其理論階數 $(I, J) = (2, 1)$ ，且 $\theta_0(t) = 0$ 。若以速度或加速度反應來建構 TVARX 模式，則其理論階數 $(I, J) = (2, 2)$ 。

3.3.2 多自由度系統

多自由度時變線性系統之運動方程式為：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (3.38)$$

其中， \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 為結構系統質量、阻尼及勁度矩陣； \mathbf{f} 為外力向量；而多自由度 TVARX 模式則可以式(3.1)表示當多自由度系統之所有自由度均被量測時，則推導運動方程式與 TVARX 模式之對等關係與上節所述者類似，只需將 m ， c 及 k 分別以 \mathbf{M} ， \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 替代；另外， x ， \dot{x} 和 \ddot{x} 分別由 \mathbf{x} ， $\dot{\mathbf{x}}$ 和 $\ddot{\mathbf{x}}$ 替代。因此，可得：

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_1 \mathbf{x}(t-1) + \Phi_2 \mathbf{x}(t-2) + \Theta_1 \mathbf{f}(t-1), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\Phi}_1 \mathbf{v}(t-1) + \hat{\Phi}_2 \mathbf{v}(t-2) + \hat{\Theta}_0 \mathbf{f}(t) + \hat{\Theta}_1 \mathbf{f}(t-1) + \hat{\Theta}_2 \mathbf{f}(t-2), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{a}(t) = \check{\Phi}_1 \mathbf{a}(t-1) + \check{\Phi}_2 \mathbf{a}(t-2) + \check{\Theta}_0 \mathbf{f}(t) + \check{\Theta}_1 \mathbf{f}(t-1) + \check{\Theta}_2 \mathbf{f}(t-2), \quad (3.41)$$

其中，

$$\Phi_1 = -\mathbf{A}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\mathbf{K}_{t-\Delta t} - \frac{2\mathbf{M}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \right),$$

$$\Phi_2 = -\mathbf{A}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{\mathbf{M}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} - \frac{\mathbf{C}_{t-\Delta t}}{(2\Delta t)} \right),$$

$$\Theta_1 = -\mathbf{A}_{t-\Delta t}^{-1},$$

$$\mathbf{A}_{t-\Delta t} = \frac{\mathbf{M}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} + \frac{\mathbf{C}_{t-\Delta t}}{2\Delta t},$$

$$\hat{\Phi}_1 = -\hat{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\bar{\mathbf{K}}_{t-\Delta t} - \frac{2\bar{\mathbf{M}}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \right),$$

$$\hat{\Phi}_2 = -\hat{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{\bar{\mathbf{M}}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} - \frac{\bar{\mathbf{C}}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right),$$

$$\hat{\Theta}_0 = \hat{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{1}{2\Delta t} \right),$$

$$\hat{\Theta}_1 = -\hat{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \frac{\dot{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}}{\mathbf{K}_{t-\Delta t}},$$

$$\hat{\Theta}_2 = \hat{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{-1}{2\Delta t} \right),$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{t-\Delta t} = \frac{\bar{\mathbf{M}}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} + \frac{\bar{\mathbf{C}}_{t-\Delta t}}{2\Delta t},$$

$$\tilde{\Phi}_1 = -\tilde{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{K}}_{t-\Delta t} - \frac{2\tilde{\mathbf{M}}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \right),$$

$$\tilde{\Phi}_2 = -\tilde{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{M}}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} - \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right),$$

$$\tilde{\Theta}_0 = \tilde{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{\dot{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}}{(2\Delta t)\mathbf{K}_{t-\Delta t}} - \frac{\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_{t-\Delta t}}{(2\Delta t)\tilde{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}} \right),$$

$$\tilde{\Theta}_1 = \tilde{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{-2}{(\Delta t)^2} - \frac{\mathbf{K}_{t-\Delta t}\ddot{\mathbf{K}}_{t-\Delta t} - (\dot{\mathbf{K}}_{t-\Delta t})^2}{(\mathbf{K}_{t-\Delta t})^2} + \frac{\dot{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_{t-\Delta t}}{\mathbf{K}_{t-\Delta t}\tilde{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}} \right),$$

$$\tilde{\Theta}_2 = \tilde{\mathbf{A}}_{t-\Delta t}^{-1} \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{\dot{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}}{(2\Delta t)\mathbf{K}_{t-\Delta t}} + \frac{\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_{t-\Delta t}}{(2\Delta t)\tilde{\mathbf{K}}_{t-\Delta t}} \right),$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{t-\Delta t} = \frac{\tilde{\mathbf{M}}_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{t-\Delta t}}{2\Delta t},$$

矩陣下標 $t - \Delta t$ 代表該矩陣於 $t - \Delta t$ 時刻之矩陣。

3.3.3 不完全量測自由度

當量測自由度較系統總自由度少時(即為非完全量測(incomplete measurement)時)，TVARX 模式階數之推導如下：

由前面所述，當所有自由度均有量測時(以位移量測為例)，對應之 TVARX 模式可

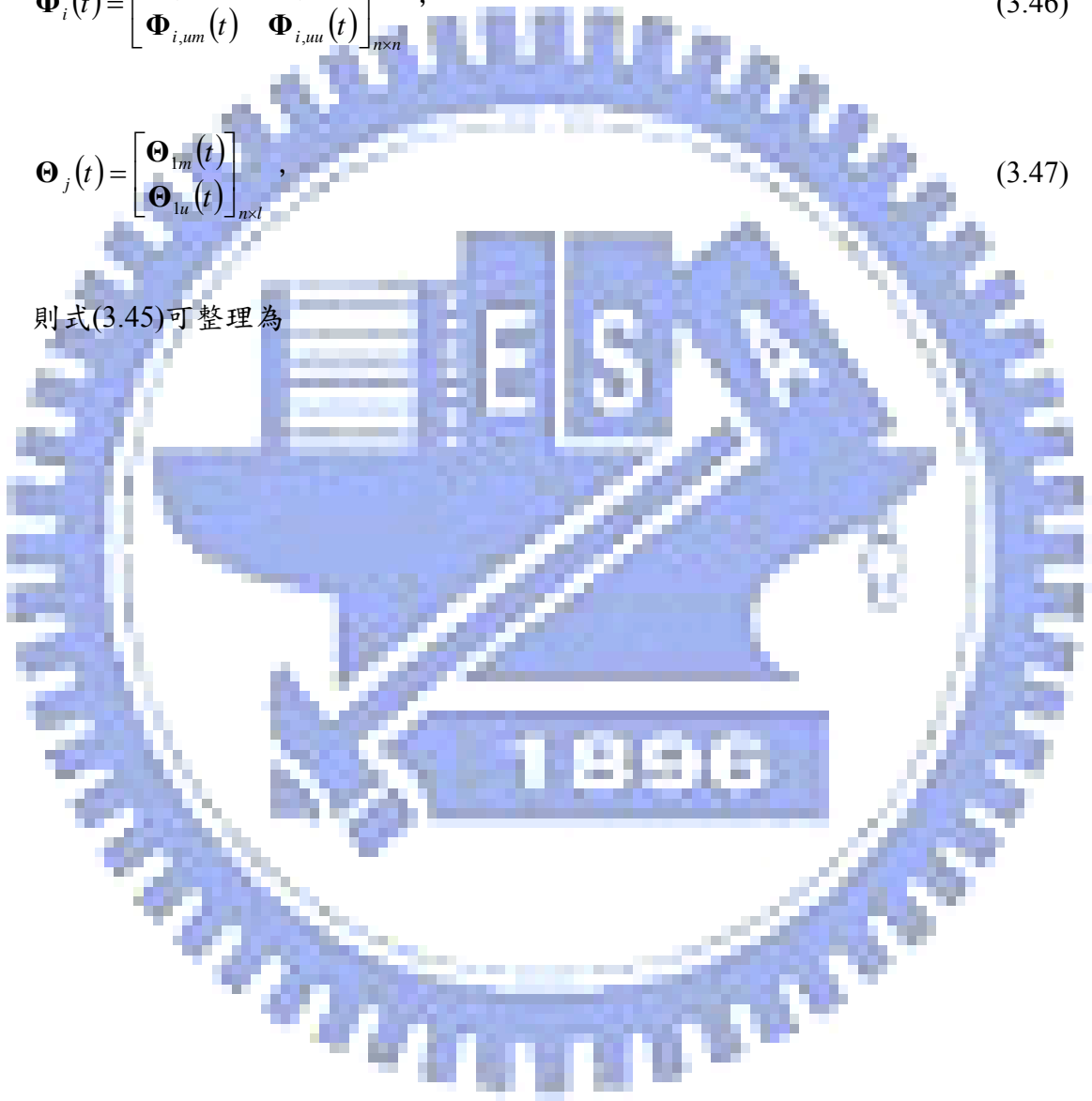
$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}}_m \\ \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}}_u \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

量測與未知之待測係數矩陣可以下式表示：

$$\Phi_i(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{i,mm}(t) & \Phi_{i,mu}(t) \\ \Phi_{i,um}(t) & \Phi_{i,uu}(t) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (3.46)$$

$$\Theta_j(t) = \begin{bmatrix} \Theta_{jm}(t) \\ \Theta_{ju}(t) \end{bmatrix}_{n \times l}, \quad (3.47)$$

則式(3.45)可整理為



$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{I} & \Phi_{1,mm}(t-1) & \Phi_{2,mm}(t-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{1,mu}(t-1) & \Phi_{2,mu}(t-1) & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{I} & \Phi_{2,mm}(t-2) & \Phi_{3,mm}(t-2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,mu}(t-2) & \Phi_{3,mu}(t-2) \\
 \mathbf{0} & \Phi_{1,um}(t-1) & \Phi_{2,um}(t-1) & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \Phi_{1,uu}(t-1) & \Phi_{2,uu}(t-1) & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,um}(t-2) & \Phi_{3,um}(t-2) & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \Phi_{2,uu}(t-2) & \Phi_{3,uu}(t-2)
 \end{bmatrix}_{2n \times 4n}
 \begin{bmatrix}
 \tilde{\mathbf{x}}_m(t) \\
 \mathbf{x}_m(t-1) \\
 \tilde{\mathbf{x}}_m(t-2) \\
 \tilde{\mathbf{x}}_m(t-3) \\
 \mathbf{x}_u(t) \\
 \tilde{\mathbf{x}}_u(t-1) \\
 \mathbf{x}_u(t-2) \\
 \tilde{\mathbf{x}}_u(t-3)
 \end{bmatrix}_{2n \times 1}
 \quad , \tag{3.48}$$

$$= \begin{bmatrix}
 \Theta_{1m}(t-1)\tilde{\mathbf{f}}(t-1) \\
 \Theta_{1m}(t-2)\tilde{\mathbf{f}}(t-2) \\
 \Theta_{1u}(t-1)\tilde{\mathbf{f}}(t-1) \\
 \Theta_{1u}(t-2)\tilde{\mathbf{f}}(t-2)
 \end{bmatrix}_{2n \times 1}$$

將式(3.48)中量測與未知反應向量分開，並移項整理可得：

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{1,\mu}(t-1) & \Phi_{2,\mu}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,\mu}(t-2) & \Phi_{3,\mu}(t-2) \\ \mathbf{0} & \Phi_{1,\mu}(t-1) & \Phi_{2,\mu}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,\mu}(t-2) & \Phi_{3,\mu}(t-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_u(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_u(t-1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_u(t-2) \\ \tilde{\mathbf{x}}_u(t-3) \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \Theta_{1m}(t-1)\tilde{\mathbf{f}}(t-1) \\ \Theta_{1m}(t-2)\tilde{\mathbf{f}}(t-2) \\ \Theta_{1u}(t-1)\tilde{\mathbf{f}}(t-1) \\ \Theta_{1u}(t-2)\tilde{\mathbf{f}}(t-2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{1,m}(t-1) & \Phi_{2,m}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,m}(t-2) & \Phi_{3,m}(t-2) \\ \mathbf{0} & \Phi_{1,um}(t-1) & \Phi_{2,um}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,um}(t-2) & \Phi_{3,um}(t-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_m(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_m(t-1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_m(t-2) \\ \tilde{\mathbf{x}}_m(t-3) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

從式(3.49)可得：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_u(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_u(t-1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_u(t-2) \\ \tilde{\mathbf{x}}_u(t-3) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}_u^{-1} \left(\begin{bmatrix} \Theta_{1m}(t-1)\tilde{\mathbf{f}}(t-1) \\ \Theta_{1m}(t-2)\tilde{\mathbf{f}}(t-2) \\ \Theta_{1u}(t-1)\tilde{\mathbf{f}}(t-1) \\ \Theta_{1u}(t-2)\tilde{\mathbf{f}}(t-2) \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{A}}_m \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_m(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_m(t-1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_m(t-2) \\ \tilde{\mathbf{x}}_m(t-3) \end{bmatrix} \right), \tag{3.50}$$

其中：

$$\tilde{\mathbf{A}}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{1,\mu}(t-1) & \Phi_{2,\mu}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,\mu}(t-2) & \Phi_{3,\mu}(t-2) \\ \mathbf{0} & \Phi_{1,\mu}(t-1) & \Phi_{2,\mu}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,\mu}(t-2) & \Phi_{3,\mu}(t-2) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{1,m}(t-1) & \Phi_{2,m}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,m}(t-2) & \Phi_{3,m}(t-2) \\ \mathbf{0} & \Phi_{1,um}(t-1) & \Phi_{2,um}(t-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{2,um}(t-2) & \Phi_{3,um}(t-2) \end{bmatrix},$$

帶回式(3.44)可整理得

$$\tilde{\mathbf{x}}_m(t) = \sum_{i=1}^3 [\tilde{\Phi}_i] \tilde{\mathbf{x}}_m(t-i) + \sum_{j=1}^2 [\tilde{\Theta}_j] \mathbf{f}(t-j), \quad (3.51)$$

若 p 非為一整數時，即若 $\bar{n} < p < \bar{n} + 1$ ，其中 \bar{n} 為一整數，則依上述之說明，可知 TVARX 之 $I = 2\bar{n} + 1$ ， $J = 2\bar{n}$ 。

3.4 以不同物理反應量架構 TVARX 對模態識別之影響

依 3.2 節所述程序所得瞬時擬自然振動頻率及阻尼比之正確性，本節以一單自由度系統透過嚴謹數學證明之。此證明將是首現於文獻。

由 3.3 節所得 TVARX 與運動方程式之對等關係，當用位移反應建立 TVARX 模式時，得

$$x(t) = \phi_1(t)x(t-1) + \phi_2(t)x(t-2) + \theta_1(t)f(t-1), \quad (3.30)$$

其中

$$\phi_1(t) = -\frac{k(t-\Delta t) - 2m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2}{\alpha(t-\Delta t)},$$

$$\phi_2(t) = -\frac{m(t-\Delta t)/(\Delta t)^2 - c(t-\Delta t)/(2\Delta t)}{\alpha(t-\Delta t)},$$

$$\theta_1(t) = \frac{1}{\alpha(t-\Delta t)},$$

$$\alpha(t-\Delta t) = \frac{m(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} + \frac{c(t-\Delta t)}{2\Delta t},$$

如此，代入式(3.25)可得 $[\mathbf{G}]$ 為

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

令其特徵值為 $\lambda_{1,2} = a_1 \pm ib_1$ 。其中

$$a_1 = \frac{2m - (\Delta t)^2 k}{2m + c\Delta t}; \quad b_1 = \frac{\Delta t [4mk - (\Delta t)^2 k^2 + c^2]^{1/2}}{2m + c\Delta t}, \quad (3.53)$$

上式及以下各方程式之推導，為了簡化該表示式，省略 m, c, k 函數中之 $(t-\Delta t)$ 。代入式 (2.16)，可得

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta t} \ln\left(\frac{2m - c\Delta t}{2m + c\Delta t}\right), \quad (3.54a)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1}\left[\frac{\Delta t[4mk - k^2(\Delta t)^2 + c^2]^{1/2}}{2m - k(\Delta t)^2}\right], \quad (3.54b)$$

利用 Taylor's expansion，將上式之 \ln 項及 \tan^{-1} 項展開可得

$$\alpha_1 = \left\{ -\frac{2\pi\xi}{T} + O\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 \right\}, \quad (3.55a)$$

$$\beta_1 = \left\{ \left(\frac{(2\pi)[1-\xi^2]^{1/2}}{T} \right) + \frac{1}{3!T} \left(\frac{3\pi T^2}{2[1-\xi^2]^{1/2}} + 24\pi^3[1-\xi^2]^{1/2} - 16\pi^3[1-\xi^2]^{3/2} \right) \left(\frac{\Delta t}{T} \right)^2 + O\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^4 \right\}, \quad (3.55b)$$

其中

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

$$\xi = \frac{T}{4\pi} \frac{c}{m},$$

$O\left[\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^n\right]$ 代表含 $\Delta t/T$ 階數大於（或等於） n 之項

因為在利用有限差分法離散化運動方程式時，要求 $\Delta t/T \ll 1$ ；因此，上式之 α_1 及 β_1 可簡化成

$$\alpha_1 \approx -\frac{2\pi\xi}{T}, \beta_1 \approx \frac{2\pi}{T}(1-\xi^2)^{1/2}, \quad (3.56)$$

故，依式(2.16)所得瞬時擬自然振動頻率及阻尼比為

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \xi_1 = \xi, \quad (3.57)$$

因此，依式前節所得之瞬時模態估算結果即為系統在 $t - \Delta t$ 時刻之瞬時自然振動頻率及阻尼比。

若是利用速度或加速度建立 TVARX 模式，再依上節所述估算瞬時擬自然振動頻率及阻尼比，則分別得速度反應建模之估算結果

$$\omega_{1v} = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}} ; \xi_{1v} = \frac{T}{4\pi} \sqrt{\frac{\bar{c}}{m}} , \quad (3.58)$$

其中：

$$\bar{c}(t) = c(t) - \frac{m(t)\dot{k}(t)}{k(t)} , \quad \bar{k}(t) = k(t) + \dot{c}(t) - \frac{c(t)\dot{k}(t)}{k(t)} ,$$

以及加速度反應建模之估算結果

$$\omega_{1a} = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}} ; \xi_{1a} = \frac{T}{4\pi} \sqrt{\frac{\tilde{c}}{m}} , \quad (3.59)$$

其中

$$\tilde{c}(t) = \bar{c}(t) - \frac{m(t)\dot{\bar{k}}(t)}{\bar{k}(t)} , \quad \tilde{k}(t) = \bar{k}(t) + \dot{\bar{c}}(t) - \frac{\bar{c}(t)\dot{\bar{k}}(t)}{\bar{k}(t)} ,$$

由以上關係式可明顯看出，由位移、速度與加速度反應估算結構系統之瞬時模態反應，此三組反應所得之估算結果並不一致。由位移反應所得之瞬時模態與理論值完全一致；而由速度反應估算之結果將包含 $\dot{c}(t)$ 與 $\dot{k}(t)$ 所構成之誤差項；由加速度反應估算之結果將包含 $\dot{c}(t)$ 、 $\ddot{c}(t)$ 、 $\dot{k}(t)$ 與 $\ddot{k}(t)$ 所構成之誤差項。

3.5 數值驗證

為驗證此識別方法對時變系統之識別效果，將透過一系列之數值模擬反應對此識別流程進行驗證，並且進行各種參數之探討以掌握此識別方法之特性。考慮一單自由度時變運動方程式：

$$\ddot{x}(t) + 2\xi(t)\omega_n(t)\dot{x}(t) + \omega_n(t)^2 x(t) = -a_g(t) \quad (3.60)$$

其中探討四種不同型式之瞬時模態參數定義如下：

Case 1：平緩變化系統：

$$\omega_n(t) = 2\pi \left(1.5 - 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right) \right); \quad \xi(t) = 4 + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right), \quad (3.61)$$

Case 2：週期變化系統：

$$\omega_n(t) = 2\pi \left(1.0 - 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \right); \quad \xi(t) = 5 + 2.5 \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right), \quad (3.62)$$

Case 3：跳躍變化系統：

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 15 \\ 0.5 & 15 < t \leq 30 \end{cases} \quad \xi(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t \leq 15 \\ 7.5 & 15 < t \leq 30 \end{cases}, \quad (3.63)$$

Case 4：折線變化系統：

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{0.5}{4}(-t+3)+1 & 3 \leq t \leq 7 \\ 0.5 & 7 \leq t \leq 11 \\ \frac{0.5}{4}(t-11)+0.5 & 11 \leq t \leq 19 \\ 1.5 & 19 \leq t \leq 23 \\ \frac{0.5}{4}(-t+19)+1.5 & 23 \leq t \leq 27 \\ 1 & 27 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad \xi(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{2.5}{4}(t-3)+5 & 3 \leq t \leq 7 \\ 7.5 & 7 \leq t \leq 11 \\ \frac{2.5}{4}(-t+11)+7.5 & 11 \leq t \leq 19 \\ 2.5 & 19 \leq t \leq 23 \\ \frac{2.5}{4}(t-19)+2.5 & 23 \leq t \leq 27 \\ 5 & 27 \leq t \leq 30 \end{cases}, \quad (3.64)$$

相較於平緩變化系統，週期變化系統之瞬時模態參數變化較為劇烈；而跳躍變化系統則於某一時刻下為不連續之變化，其瞬時模態變化劇烈程度更甚於週期變化系統；雖然折線變化系統之瞬時模態參數為連續變化，但是其變化曲線為一次微分不連續。

以 Runge-Kutta 求出此時變系統受地震輸入($a_g(t)$)之動態反應，取時間增量(Δt)為 0.001 秒。輸入之地震反應及其頻譜圖如圖 3.2 所示。以下將利用位移反應進行識別。而平緩變化、週期變化、跳躍變化以及折線變化系統之時間歷時反

應及其頻譜分別示於圖 3.3。

3.5.1 以傳統基底函數展開法架構 TVARX 模型

將 TVARX 之時變係數透過多項式基底函數展開，並以最小平方差法估算展開基底對應之係數。於 TVARX 模式與運動方程之對應關係之推導中得知，TVARX 之理論階數為 $(I, J) = (2, 1)$ ；故對無雜訊干擾系統進行分析時模型階數將取 $(I, J) = (2, 1)$ 。以下將探討多項式階數對各組時變系統識別之影響，而識別結果與實際時變特性之相對誤差定義如下：

$$\frac{|\rho_{id}(t_i) - \rho_{true}(t_i)|}{\rho_{true}(t_i)} \times 100\% , \quad (3.65)$$

其中 ρ_{true} 與 ρ_{id} 分別代表瞬時自然振動頻率或阻尼比之實際值與識別所得之結果。而相對誤差之平均值與標準差分別記為 μ 與 σ 。圖 3.4 為各組時變系統在考慮不同多項式階數下識別所得之相對誤差平均值以及標準差。

對平緩變化系統而言，多項式階數增加至 6 左右即可獲得準確之結果；此後多項式階數的增加其識別結果並無明顯差異。但是，當多項式階數增加至 20 以上，識別所得之瞬時模態有較明顯之誤差。對週期變化系統而言，多項式階數須增加至 20 左右方可獲得較準確之結果；此後隨著多項式階數之增加，所得之結果其誤差量並無明顯改善之趨勢。對跳躍變化系統而言，多項式階數之改變對於識別所得之結果並無明顯改善。對折線變化系統而言，多項式階數須增加至 20 左右方可獲得較準確之結果；此後隨著多項式階數之增加，所得之結果其誤差量並無明顯改善之趨勢。此結果與週期變化系統類似。由各組時變系統之結果顯示，多項式階次大於 20 之後，所得之識別結果普遍不佳。此現象有可能是由於所使用基底函數階數過高易於造成病態矩陣。圖 3.5 所示為取多項式階數為 20 所得之識別結果。

3.5.2 以加權基底函數展開法架構 TVARX 模型

本小節將以 3.2.1 節所述之方法透過位移反應建構 TVARX 模型，並將探討

此方法之各項參數（如多項式基底階數 N_p 與加權函數之支撐長度 d_m ）對識別結果之影響。

圖 3.6 為各組時變系統在考慮不同多項式階數下識別所得之相對誤差平均值以及標準差。由圖 3.6 可發現：

(a) 在識別平緩變化時變系統之瞬時模態時，當多項式階數增加至 $N_p = 2$ 時，即可獲得準確之結果。當 N_p 持續增加時，識別結果之誤差量並未明顯改變。於使用低階之多項式基底時，取較小之 d_m 值 ($d_m = 2$) 之結果較佳；但當取較高階之多項式基底時，取不同之 d_m 值並未明顯影響識別結果。且加權函數之支撐長度改變時，雖然 $d_m = 2$ 所獲得之結果較佳，但亦與 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 之結果相差不大。

(b) 識別週期變化時變系統之瞬時模態時，當多項式階數增加 $N_p = 2$ 時，亦可獲得準確之結果。當 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 時，多項式階數增加雖然能稍微改善識別結果之誤差，但是其改善效果相當有限。隨著加權函數之支撐長度變小，對週期變化系統是識別結果越佳。

(c) 識別跳躍變化時變系統之瞬時自然振動頻率，在多項式階數 $N_p \geq 2$ 之後其識別誤差逐漸遞增，特別是權函數之支撐長度越小，誤差遞增量越大；而對瞬時阻尼比之識別也有隨著多項式階數 $N_p \geq 2$ 其識別結果之誤差逐漸變大之現象。

(d) 識別折線變化時變系統之瞬時自然振動頻率時，支撐參數 $d_m = 2$ 在多項式階數 $N_p = 2$ 時最小識別誤差，支撐參數 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 在多項式階數為 $N_p = 3$ 時最小識別誤差；而對瞬時阻尼比之識別則是於多項式階數 $N_p = 2$ 時有最佳之識別結果。且隨著加權函數之支撐長度變小，對折線變化系統是識別結果越佳。圖 3.7 所示為選擇多項式階數 $N_p = 2$ 與加權函數之支撐長度 $d_m = 2$ ，所得之識別結果。

3.5.3 以移動最小平方差法架構 TVARX 模型

本小節將以 3.2.2 節所述之方法透過位移反應建構 TVARX 模型，將 TVARX 之時變係數以移動最小平方差法建構各個節點之形狀函數展開，再求得各形狀函數所對應之節點值。分析中主要探討此方法之各項參數（如多項式基底階數 N_p 、加權函數之支撐長度 d_m 與節點數 l_n ）對識別結果之影響。

以多項式基底函數對時變係數展開時，選用固定之多項式階數 $N_p = 2$ ，圖 3.8 為各組時變系統比較不同支撐參數在考慮不同結點數下識別所得之相對誤差平均值以及標準差。分析中選用之加權函數支撐長度分別為 $d_m = 2$ 、 $d_m = 4$ 以及 $d_m = 6$ 。由圖 3.8 可發現：

(a) 識別平緩變化系統之瞬時自然振動頻率時，當 $d_m = 2$ 時，取節點數 $l_n \geq 35$ 將有較好之結果，當 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時，於圖中選用之節點數範圍內其識別之平均誤差均遠小於 1%；在瞬時阻尼比之識別時，當 $d_m = 2$ 時，取節點數 $l_n \geq 35$ 將有較好之結果，當 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時，於圖中選用之結點數範圍內其識別之平均誤差均遠小於 20%。

(b) 識別週期變化系統之瞬時模態時，其識別之平均誤差之趨勢與平緩變化系統相似，唯有在 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時當節點數 $l_n \leq 30$ 時，其識別之平均誤差略高。

(c) 識別對跳躍變化系統之瞬時模態時，當 $d_m = 2$ 時，節點數 $l_n \geq 35$ 其頻率誤差之平均介於 1%~2% 之間，而阻尼比誤差之平均介於 10%~20% 之間；當 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時，其頻率與阻尼比之識別誤差分別無法穩定控制於 2% 與 20% 以下。

(d) 識別折線變化系統之瞬時模態時，其識別結果之平均誤差趨勢與平緩變化及週期變化系統相似。

當取 $d_m = 2$ 時，圖 3.9 為各組時變系統比較不同多項式階數在考慮不同結點數下識別所得之相對誤差平均值以及標準差；分析中選用之多項式階數分別為 $N_p = 1$ 、 $N_p = 2$ 以及 $N_p = 3$ 。由圖 3.9 可看出：

(a) 識別平緩變化系統之瞬時模態時，當 $N_p = 1$ 以及 $N_p = 2$ 時，於節點數 $l_n \geq 35$ 有較小之識別誤差；當 $N_p = 3$ 時，於選用之節點數範圍內其頻率與阻尼比識別之平均誤差分別遠小於 1% 與 20%。

(b) 識別週期變化系統之瞬時模態時，其識別誤差之趨勢與平緩變化系統相似，唯在 $N_p = 3$ 且當節點數為 $l_n = 20$ 時，其頻率識別之平均誤差略高於 1%。

(c) 識別對跳躍變化系統之瞬時模態時，此三組多項式階數於節點 $l_n \geq 35$ 時，其識別頻率之平均誤差介於 1%~2% 之間，而識別阻尼比之平均誤差介於 10%~20% 之間。

(d) 識別折線變化系統之瞬時模態時，其識別之平均誤差趨勢與平緩變化及週期變化系統相似。圖 3.10 所示為取 $N_p = 2$ 以及 $l_n = 40$ 所得之識別結果。

以傳統多項式基底函數展開法架構 TVARX 模式並識別系統之瞬時模態特性，須引入較高階基底函數方可能得到較好之識別結果；但使用高階之多項式基底時，易造成病態矩陣並導致數值困難。以加權基底函數法建模並進行瞬時模態之識別，雖然可使用較少之基底函數以獲得不錯之結果，但須於每一時刻計算基底展開之係數，分析過程相當耗時。以移動最小平方差法建模並識別，不僅可以少量之基底函數對時變係數展開，且計算形狀函數對應之係數僅須進行一次反算，其識別效率優於傳統基底函數展開法與加權基底函數法。最後，值得一提的是，利用多項式基底函數描述不連續函數（如 case 3），其效果如所預期地不理想。

3.5.4 雜訊之影響

為瞭解雜訊對識別品質之影響，於數值分析所得 case 2 之相對位移反應及輸入反應中加入白色雜訊，使得 $NSR=5\%$ 。然後，對此含有雜訊之訊號，進行識別，並與未含雜訊之分析結果比較。以下將選用固定之多項式 $N_p = 2$ 與節點數 $l_n = 40$ ，探討當權重函數之支撐參數分別為 $d_m = 2$ 、 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 時，對應不同 TVARX 模型階數 (I, J) 之識別結果。

在求得模型中之係數後，欲進一步評估此模型是否能準確描述結構系統之輸入與輸出關係，以下引入 AIC (Akaike's Information Criterion, Akaike, 1973) 及 FPE (Final Prediction Error, Akaike, 1970) 等兩種評估準則。通常利用前一步預測值 (one-step ahead prediction) 與實際量測值之誤差定義損失函數，即

$$V = \sum_{k=1}^N \mathbf{a}_n(t_k)^2 \quad (3.66)$$

一般而言，模型結構越複雜，其損失函數之值當然越小。因此，必須導入關於模型之複雜度 (即組成模型之參數)，此兩種評估準則分述如下：

1. AIC 是用以量測最似然推測法所得模型之不吻合度。其定義為：

$$AIC = -2 \ln(\max. \text{ probability}) + 2(\text{parameter}),$$

此時，AIC 值越小代表模型越接近真實系統。於計算 AIC 值時，或然率之計算是必要的，但是在預測誤差為正規性之情況下，其表示法可改寫為：

$$AIC = \ln \left[\left(1 + \frac{2n_u}{N} \right) \times V \right], \quad (3.67)$$

2. FPE 之定義式如下：

$$FPE = \frac{1 + n_u / \bar{N}}{1 - n_u / \bar{N}} \times \frac{1}{\bar{N}} \times V, \quad (3.68)$$

式 (3.66) ~ (3.68) 中， n_u 為待測模型中之參數總數； \bar{N} 為進行參數估算所使用之資料長度。

圖 3.11 與圖 3.12 分別為利用不同 d_m 值結合不同 (I, J) 所得之 AIC 與 FPE 值變化曲線。考慮不同 d_m 值，均在 $(I, J) = 18$ 時有最小 AIC 值。不同 d_m 值，均在 $(I, J) = 15$ 時均有最小 FPE 值。而此三組 d_m 值所得之 AIC 與 FPE 值變化相當一致。比較此兩種指標之分析結果可知，以 AIC 值做為指標所決定之模型階數略高，但基本上兩者所決定之模型階數差異不大。

接著比較支撐參數隨著 (I, J) 改變時，識別所得模態之相對誤差。藉由相對

誤差之變化曲線與 AIC 或 FPE 值相互參照，以瞭解藉由 AIC 或 FPE 值與識別誤差之關聯性。圖 3.13 為各組支撐參數於不同 (I, J) 模態識別誤差之平均值與標準差。由自然振動頻率識別誤差之平均值與標準差變化曲線可看出，其誤差平均值約在 $(I, J) = 20 \sim 25$ 有最小值；標準差約在 $(I, J) \geq 20$ 之後趨於穩定。此外，在 $(I, J) \geq 15$ 之後識別誤差之平均值與標準差均在 2% 以下。

接著觀察阻尼比識別誤差之平均值與標準差變化曲線，隨著 (I, J) 增加其阻尼比識別誤差越小，且約莫在 $(I, J) \geq 17$ 之後其阻尼比識別誤差之遞減曲線逐漸趨於平緩。此外，支撐參數為 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 時，於 $(I, J) \geq 16$ 之後其識別誤差之平均值與標準差均在 20% 以下。值得一提的是，以支撐參數 $d_m = 2$ 時有最大之識別誤差，此結果與 AIC 與 FPE 值之變化趨勢相反。但基本上，以 AIC 與 FPE 值所決定之最佳模型階數與識別誤差之分析結果相當契合。

經由以上之分析，選擇以支撐參數 $d_m = 4$ ，模型階數 $(I, J) = 20$ 進行識別。圖 3.14 為 case 2 於輸入與輸出訊號加入雜訊之識別結果。識別結果顯示，在訊號中引入雜訊仍能準確識別瞬時自然振動頻率之變化情形；雖然對於阻尼比之識別結果較不理想，但是其誤差尚在可接受範圍。

3.5.5 不同物理量反應之影響

在 3.4 節的部分，對於位移、速度與加速度反應對於模態識別之影響做嚴謹之數學推導。推導結果可知此三種反應所得之識別結果並不一致。由位移反應所得之瞬時模態與理論值完全一致；而由速度反應估算之瞬時模態將包含 $\dot{c}(t)$ 與 $\dot{k}(t)$ 所構成之系統誤差項；由加速度反應估算之瞬時模態將包含由 $\dot{c}(t)$ 、 $\ddot{c}(t)$ 、 $\dot{k}(t)$ 與 $\ddot{k}(t)$ 所構成之系統誤差項。以下將以數值模擬之形式驗證位移、速度與加速度反應對於模態識別之影響。以下之分析將利用多項式函數為基底對時變係數展開，再利用移動最小平方差法對於各個時刻下基底函數所對應之係數。以進一步識別結構系統之時變特性。

圖 3.15a 為利用速度反應識別模態參數；顯示系統誤差雖然對於自然振動頻率之影響並不明顯，卻嚴重影響阻尼比之識別結果。接著利用式(3.58)，可藉由 $\dot{c}(t)$

與 $\dot{k}(t)$ 進行校正。相較於加速度反應之識別結果，由速度反應進行模態識別所造成之誤差明顯較小。

圖 3.15b 為利用加速度反應識別模態參數之結果。對於自然振動頻率之識別，系統誤差影響並不大；但是對於阻尼比之識別，系統誤差將嚴重影響識別結果。已知 $\dot{c}(t)$ 、 $\ddot{c}(t)$ 、 $\dot{k}(t)$ 與 $\ddot{k}(t)$ 。同樣地，透過式(3.59)對識別結果進行校正，獲得之識別結果與理論值相當吻合。

從以上結果發現，利用加速度反應分析所得之瞬時模態特性之系統誤差較速度反應所得者大。另外，3.4 節所推導者乃依中央差分法離散微分方程式，但其結果依然適用於 Runge-Kutta 之數值分析法所得者。

3.6 應用於振動台試驗數據分析

本小節將以多項式函數為基底結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型並進行識別，應用於分析於國家地震工程研究中心所執行的鋼筋混凝土結構振動台試驗反應，識別此鋼筋混凝土結構之瞬時模態。以下將對實驗之混凝土結構進行介紹，接著利用實驗過程量測到之位移、加速和基底剪力回歸出每個時刻下之等效阻尼與勁度，並換算成自然振動頻率與阻尼比並取此些資料做為參考值。最後藉由量測資料架構 TVARX 模型並進行識別。

3.6.1 待測結構物介紹

透過振動台試驗可進一步了解結構系統在動態反應下之各種行為，特別是結構系統之非線性行為。國家地震工程研究中心進行了一系列以門型鋼筋混凝土結構之動態試驗，並且研究低延展性鋼筋混凝土柱的動態行為，以了解他們的損壞機制。由圖 3.16 可以看出待測結構物之質塊分佈情形，為了簡化此結構系統，視為單自由度系統來估算理論的模態；待測結構物之等效質量為 21 噸，用以模擬在台灣典型的四層樓鋼筋混凝土建築，第一層柱受到軸向外力的情況。加速度計和位移計安裝在適當的位置（圖 3.19~3.20）來量測待測結構物的加速度和位移反應，並將載重元件裝在待測結構物和振動台之間以測量基底剪力。

在此考慮待測結構物受到了一連續輸入的基底振動。首先利用微小振幅的白噪輸入來估算其模態參數。因為是在待測結構物沒有遭受損害前的情況，此試驗定義為“損害之前”(before damage)。接著待測結構物受到地震的輸入，此地震係 1999 年 9 月 21 日在台灣所發生的集集大地震。在試驗過程中我們發現了強烈的非線性行為，並且在接近連結橫樑的柱發現到損壞的情況，此試驗定義為“地震作用期間”(during earthquake)。最後，待測結構物受到一較少雜訊的白噪輸入試驗，並定義為“損害之後”(after damage)。加速度和位移計資料的取樣頻率皆為 200 Hz。以上地震輸入與結構反應示於圖 3.17，而混凝土結構反應之頻譜圖示於圖 3.18。

3.6.2 等效勁度與阻尼之迴歸

假設基底剪力與阻尼力及彈性回復力之關係為

$$F_B(t) = kx(t) + c\dot{x}(t), \quad (3.69)$$

其中位移與加速度資料是分別由位移計與加速度計量測得知。速度資料是由量測加速度，一次積分後得之。

式 (3.69) 之 $x(t)$ 要選取相對位移資料，因此選取圖 3.19 中位移計編號 *LEBW* 減去編號 *LFC2* 之值。加速度資料選取圖 3.20 中加速度計編號 *LCGC1* 和 *LCGC2* 兩者平均值減去編號 *LBC1* 和 *LBC2* 兩者平均值，再一次積分即得式 (3.69) 之速度輸入項。式 (3.69) 中之 $F_B(t)$ 由量測基底剪力之荷重計 (Load cells, 如圖 3.21 所示)。欲得式 (3.69) 中第 t 時刻之 k 及 c ，利用該時刻前後 50 取樣點反應，經最小平方差法得。然後，依定義可估算該時刻之瞬時自然振動頻率及阻尼比。其推導過程詳見附錄一。圖 3.22 和圖 3.23 分別為利用以上之迴歸方式所得到之系統瞬時自然振動頻率及阻尼比。

3.6.2 識別結果

將多項式函數為基底結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型，所發展之瞬

時模態識別流程，應用於此實驗之量測資料。分析過程取節點數為 40 並比較不同權重函數支撐參數之結果。圖 3.24 為不同模型參數 (I,J) 計算所得之 AIC 值。以損害前之反應資料建模，當取 $(I,J) = 7$ 得最小 AIC 值。以地震作用期間之反應資料建模，則於 $(I,J) = 7$ 時 AIC 值在時有局部極小值，而整體最小值發生於 $(I,J) = 17$ 時。以損害後之反應資料架構時變模型，其 AIC 值在 $(I,J) = 7$ 為最小值，而於 $(I,J) = 15$ 時有另一局部極小值。而各組支撐參數所得之 AIC 值變化曲線皆非常相似。

圖 3.25 為不同模型參數 (I,J) 計算所得之 FPE 值。以損害前之反應資料進行建模，可看出 FPE 值在 $(I,J) = 7$ 有最小值。以地震作用期間之反應資料架構時變模型，可看出 FPE 值在 $(I,J) = 6$ 有最小值，但於 $(I,J) = 17$ 時有一局部極小值。以損害後之反應資料建立模型，其 FPE 值在 $(I,J) = 7$ 有最小值，且於 $(I,J) = 15$ 時有一局部極小值。比較 AIC 與 FPE 值之估算結果，可發現兩者所得之結果並非完全不一致。以損害前後之反應建模，透過 AIC 與 FPE 值所決定之最佳模型階數皆為 $(I,J) = 7$ ；若以地震作用期間之反應資料建模，AIC 與 FPE 值所決定之最佳模型階數分別為 $(I,J) = 17$ 與 $(I,J) = 7$ 。由前節中雜訊影響之探討已知模型階數 (I,J) 遞增其識別結果趨於穩定，因此保守起見將參考 AIC 值選擇時變模型階數 $(I,J) = 17$ 。

圖 3.26 為根據 AIC 值決定之模型參數 (I,J) 所得之識別結果。由識別結果可看出破壞前後之識別結果在擾動過程其頻率反應變化不大，而兩者之頻率值大約相差 0.8Hz。而在地震輸入過程，其初始之頻率值約為 2.4Hz 與破壞前之識別結果相當一致；大概在 3 秒附近頻率反應開始驟降，而在 19 秒左右頻率降至最低值。此識別結果與圖 3.21 與 3.22 透過基底剪力、位移與速度資料迴歸所得之時變曲線相當一致。接著以基底剪力與相對位移反應畫出遲滯迴圈圖（圖 3.27）。由遲滯迴圈圖可看出在 $3.02 \text{ sec} < t < 3.05 \text{ sec}$ 之斜率小於 $t < 3.02 \text{ sec}$ 由此可判斷此系統於 $t = 3.02 \text{ sec}$ 開始產生破壞。而在 $t = 19.15 \text{ sec}$ 時有最大之延展變量。此時，具有較飽滿之遲滯迴圈，亦代表此過程有較大之能量消散。因此，於 $t = 19.15 \text{ sec}$ 則有較大之阻尼比。

3.7 小結

本文建立了一套時變線性系統之識別方法，以估算時變線性系統之瞬時模態參數。研究中採用了加權基底函數法與移動最小平方差法架構 TVARX 模型，透過多項式函數對模型中之時變係數進行展開。再以權重最小平方差法逐步計算每個時刻下之模態特性；或以移動最小平方差法架構形狀函數，再以最小平方差法反算各組形狀函數所對應之係數，利用基底函數及其對應之係數建立出結構之系統矩陣。最後經由系統識別程序，獲得系統之模態參數如自然振動頻率、阻尼比、以及振動模態。

首先，建立由加權基底函數法與移動最小平方差法等各種技巧所架構之 TVARX 模型，並進一步估算結構系統之瞬時模態特性。以此兩種方法可藉由較少之基底函數描述系統之時變係數。

接著，於本研究中建立 TVARX 模式與運動方程式之對應關係式。先由單自由度系統出發推導基於位移、速度與加速度反應之 TVARX 模型與運動方程式之對應關係式；接著推廣至多自由度系統；最後，考慮不完全量測自由度下 TVARX 模型之建立。並且將 TVARX 以系統參數表示之形態代入 3.2 節中所提之模態參數估算流程。

然後，將以單自由度時變線性系統之數值模擬驗證此識別流程之可行性，並從中進行各項參數探討，以確實掌握此識別方法之特性。由分析結果可知當選用基底函數為多項式函數時，此函數本身之局部化能力較差。因此直接以傳統基底函數展開法架構 TVARX 模型則須引入較高之多項式階數，但過高之多項式階數易容易於估算過程造成病態矩陣；而以加權基底函數法或者移動最小平方差法架構 TVARX 模型僅須引入較低之多項式階數即可獲得準確之結果。然而以加權基底函數方法架構 TVARX 模型，必須逐步計算每個時刻之模態特性，而識別過程較為耗時。此外，更將模擬反應加入噪訊比 5% 之雜訊，以結合移動最小平方差法架構之 TVARX 模型進行識別，並引入 AIC 與 FPE 值以輔助模型階數之決定。更進一步將此識別方法應用於不同反應物理量(如速度或加速度)，以數值方式驗

證 3.4 節所得之推導結果。

最後將此識別流程應用於國家地震工程研究中心所進行的鋼筋混凝土門型架構之振動台試驗，驗證此識別方法能應用於實測資料上。當應用於實測資料的識別中，用實驗過程量得之基底剪力、加速度與位移反應迴歸出此實驗模型之參數變化情形，以此為參考資料。相較於研究中所提方法之識別結果，亦可看出相似之變化情形，顯示在實測應用上之可行性。



第四章 以小波基底架構 TVARX 模式暨識別瞬時模態參數

4.1 前言

本章主要是發展基於小波及小波包函數架構 TVARX 模型以識別線性時變系統之瞬時模態特性。所用方法與第三章類似，惟以小波或小波包當基底函數，期能改善用多項式基底識別不連續函數之缺點。4.2 節介紹離散小波之基本理論。4.3 節為小波包分解之理論與小波包函數之構造方法。4.4 節介紹建構 TVARX 模型之方法，研究中架構模型之方法有傳統基底函數展開法以及移動最小平方差法。4.5 節則是將 4.4 節中所提出之識別流程應用於四組不同時變曲線之時變系統。並比較此各種架構 TVARX 模型方法之分析結果，此外更進一步探討小波函數之尺度因子、小波包函數不同分解層之基底、選用權重函數之支撐範圍以及移動最小平方差法之節點數等各項參數對識別結果之影響。4.6 節將 Haar 小波包基底結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型之識別流程應用於震動台試驗反應。研究中亦以 AIC 與 FPE 值輔助決定最佳之模型項數，並與前一章之識別結果比較，以進一步驗證此流程識別結果之準確性。4.7 節則為小結。

4.2 離散小波轉換之簡介

於實際運用上，特別是運用計算機處理時，連續小波必須加以離散化。Meyer(1985)根據當代關於小波理論之文獻整合小波理論之數學基礎。Daubechies, Grossman 和 Meyer(1986)研究不同尺度因子與平移因子以構成函數空間 L^2 之基底。Meyer(1986)成功構造出具有一定衰減特性之光滑小波函數，此函數之二進位尺度與平移足以表示 L^2 空間中之所有函數。對伸縮因子 a 和平移因子 b 進行二進位如下之離散取樣

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0^m, \text{ 取 } a_0 = 2, m \in Z \\ b &= nb_0 a_0^m, \text{ 取 } b_0 = 1, n \in Z \end{aligned} \right\}, \quad (4.1)$$

因此，小波函數 $\Psi_{(a,b)}(t)$ 可離散表示成

$$\Psi_{(m,n)}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \Psi(2^{-m}t - n), \quad (4.2)$$

此亦稱為二進制小波 (Dyadic Wavelet)。如此，離散小波轉換定義為：

$$DW_f(m,n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Psi_{(m,n)}(t)} dt, \quad (4.3)$$

亦可以內積形式表示為：

$$DW_f(m,n) = \langle f(t), \Psi_{(m,n)}(t) \rangle, m,n \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

式中 $m,n \in \mathbb{Z}$ 。由式(4.2)可知，離散小波轉換是從集中於某個區間上之基本函數開始，以固定之間隔向左或向右移動基本波形，並用尺度因子 a 擴張或壓縮，如此構造一函數系小波。

離散小波轉換 $DW_f(m,n)$ 實質上仍然是將信號 $f(t)$ 經過一系列帶通濾波器之輸出，只是帶通濾波器之中心頻路和帶寬由於 a 之離散取樣而成為一系列之離散值，並且濾波後之輸出也因 b 之離散取樣而成為若干離散取樣值。

若吾人取具有正交性之小波，即

$$\langle \Psi_{m,n}, \Psi_{j,k} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{when } m=j \text{ and } n=k, \\ 0 & \text{when } m \neq j \text{ or } n \neq k, \end{cases} \quad (4.5)$$

則對任一函數 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ，可透過小波轉換表示成：

$$f(t) = \sum_{n=1}^N C_V(M,n) \Phi_{M,n} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_W(m,n) \Psi_{m,n}, \quad (4.6)$$

上式中 Φ 代表尺度函數。當取用不同之 m 時，乃將 $L^2(\mathbb{R})$ 分解成不同之空間 (即如圖 4.1 所示)。各不同分解空間之關係為 (Mallat, 1989a and 1989b)：

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &= W_1 \oplus V_1 \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus V_2, \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_M \oplus V_M \end{aligned}$$

其中, $W_i \perp V_i$, 且 $V_i = V_{i+1} \oplus W_{i+1}$ 。 $\Psi_{m,n}$ 與 $\Phi_{m,n}$ 分別代表 W_m 與 V_m 之正交基底。理論上, 所選取之 M 夠大時, V_M 之空間將趨近於零空間。值得一提的是, V_i 空間之信號較 W_i 者低頻。

4.3 小波包分解(wavelet packet decomposition)之簡介

離散小波分析僅對訊號中之低頻分量做進一步分解, 其對高頻之分量則不做進一步細分。而小波包分解則能有效改善離散小波於高頻部份解析度不佳之問題 (Wickerhauser, 1991)。利用小波包分解量測反應之觀念, 基本上與離散小波者類似, 惟分解空間及各空間中之基底函數不同。主要建立於將量測反應之信號空間 (假設為 $U_j^{(0)}$) 分解成互為正交之子空間如圖 4.2 所示, 其中

$$U_j^{(\bar{m})} = U_{j+1}^{(2\bar{m})} \oplus U_{j+1}^{(2\bar{m}+1)}, \quad (4.7)$$

於 $U_j^{(\bar{m})}$ 子空間, 其標準正交基為 $\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \mu_{\bar{m}}(2^{-j}t - l) ; l \in Z \right\}$, 即

$$U_j^{(\bar{m})} = \text{closespan} \left\{ \mu_{\bar{m},j,l}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \mu_{\bar{m}}(2^{-j}t - l) ; l \in Z \right\}, \quad (4.8)$$

其中 $\{\mu_{\bar{m}}(t); \bar{m} = 0, 1, 2 \dots\}$ 稱為小波包函數。

小波包函數之建構, 可利用濾波之觀念。首先如同小波轉換中決定尺度函數 (scaling function), $\Phi(t)$; 利用

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_n \Phi(2t - n). \quad (4.9)$$

決定低通濾波器係數 h_n 。然後取高通濾波係數 $g_n = (-1)^{n-1} h_{1-n}$, 則對應之正交母小波為:

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} g_n \Phi(2t - n), \quad (4.10)$$

取 $\mu_0(t) = \Phi(t)$, $\mu_1(t) = \Psi(t)$, 則其他小波包函數可依下式構造:

$$\begin{aligned}\mu_{2\bar{m}}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_n \mu_{\bar{m}}(2t-n) \\ \mu_{2\bar{m}+1}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n \in Z} g_n \mu_{\bar{m}}(2t-n)\end{aligned}, \quad (4.11)$$

此小波包函數滿足以下之正交條件：

$$\begin{aligned}\langle \mu_{\bar{m},j,l}, \mu_{\bar{m},j,k} \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{when } k=l \\ 0 & \text{when } k \neq l \end{cases}, \\ \langle \mu_{\bar{m},j,l}, \mu_{n,i,k} \rangle &= 0 \quad \text{when } n \neq \bar{m}\end{aligned}, \quad (4.12)$$

因此，若欲將量測信號 $x(t)$ 分解至圖 4.2 所示之第 N_l 層，即 $U_{N_l}^{(\bar{m})}$ 各子空間：

$$x(t) = \sum_{\bar{m}} \sum_l a(\bar{m}, N_l, l) \mu_{\bar{m}, N_l, l}(t), \quad (4.13)$$

實際應用上，若平移因子 l 使得小波包函數之自變數平移至定義域外，則該小波包函數將可省略。換言之，當考慮分析資料定義之時間域為 $[0, T]$ ，且取小波包函數 $\mu_{\bar{m}, N_l, l}(t)$ 之消失矩價數為 \hat{N} (即其定義之支撐區間為 $[2^{N_l} l, 2^{N_l} (2\hat{N} - 1 + l)]$)；當 $2^{N_l} l > T$ 時，該平移因子 l 對應之小波包函數因其支撐區間在分析所考慮之時間區間外而省略。因此，當取 $2^{N_l} > T$ 成立時，小波包分解將可省略平移因子之考慮；式(4.13)可改寫為

$$x(t) = \sum_{\bar{m}} a(\bar{m}, N_l, 0) \mu_{\bar{m}, N_l, 0}(t) \quad (4.14)$$

式(4.11)提供了小波包函數之架構方法，以下將以建構 Haar 小波包函數為例。Haar 小波函數為小波分析中最早被使用，也是最簡單之函數，為一個具有緊支撐之正交小波函數。該函數之尺度函數 (Φ_H) 及其本身 (Ψ_H) 於時間域定義分別為 (參考圖 4.3 所示)

$$\Phi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \quad (4.14)$$

$$\Psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \quad (2.19)$$

架構 Haar 小波函數時，式(4.11)中低通濾波器 h_n 與高通濾波器 g_n 表示為：

$$\begin{aligned} h_0 = h_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_0 = -g_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

且 $\hat{N} = 1$ 。式(4.11)可改寫成：

$$\begin{aligned} \mu_{2\bar{m}}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^1 h_n \mu_{\bar{m}}(2t-n) \\ \mu_{2\bar{m}+1}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^1 g_n \mu_{\bar{m}}(2t-n) \end{aligned}, \quad (4.17)$$

式(4.17)可簡化表示成下式：

$$\begin{aligned} \mu_{2\bar{m}}(t) &= \mu_{\bar{m}}(2t) + \mu_{\bar{m}}(2t-1) \\ \mu_{2\bar{m}+1}(t) &= \mu_{\bar{m}}(2t) - \mu_{\bar{m}}(2t-1) \end{aligned}, \quad (4.18)$$

而 $\mu_0(t) = \Phi_H(t)$ ， $\mu_1(t) = \Psi_H(t)$ ，此兩組函數之支撐區間為 $[0,1]$ 。將函數 $\mu_{\bar{m}}$ 轉換至 $[0,1/2]$ 與 $[1/2,1]$ 之支撐區間內再將壓縮後之函數以線性疊加之方式獲得函數 $\mu_{2\bar{m}}$ ；並將兩函數相減以獲得 $\mu_{2\bar{m}+1}$ 。由此可知，構造所得知小波包函數與原函數有相同之支撐區間。取 $\bar{m} = 0 \sim 7$ ，函數 $\mu_{\bar{m}}$ 示於圖 4.4。

仔細觀察小波包函數之圖型(圖 4.4)， $\mu_{\bar{m}}$ 之排列順序並非全然與函數本身之頻率高底相關。以 Haar 小波函數為例，其每組小波包函數與零軸相交之點數示於表 4.1。表中同時針對每個小波包函數之頻率高底從新排序。因此在識別過程，若為了提升計算速度必須考慮以較少之基底展開時，可根據每組小波包函數之頻率特性，挑選適合之小波包函數。

4.4 建構 TVARX 模型

本節將介紹架構 TVARX 模式之方法。架構模型之方法包括有傳統基底函數展開技巧與移動最小平方差法。以傳統基底函數展開技巧建模時，分別考慮小波函數與小波包函數為基底。以移動最小平方差法建模，則只考慮以小波包函數為

基底。

4.4.1 以傳統基底函數展開法建構 TVARX 模型

時變 ARX (TVARX) 模式為

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I \Phi_i(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \Theta_j(t) \mathbf{f}(t-j) + \mathbf{a}_n(t), \quad (3.1)$$

將上式中之時變係數 $\Phi_i(t)$ 與 $\Theta_j(t)$ 以小波包函數進行展開。透過式(4.14)可得

$$\begin{aligned} \Phi_i(t) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\bar{K}_i-1} \mathbf{G}_{\bar{m}} \mu_{\bar{m}, N_{i1}, 0}(t) \\ \Theta_j(t) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\bar{L}_j-1} \mathbf{H}_{\bar{m}} \mu_{\bar{m}, \bar{N}_{j1}, 0}(t) \end{aligned}, \quad (4.19)$$

分析過程若能以少量之基底函數獲得準確之識別結果，將可有效提升識別效率。式(4.19)中， \bar{K}_i 與 \bar{L}_j 分別代表展開時變係數 $\Phi_i(t)$ 與 $\Theta_j(t)$ 所考慮之小波包個數，其最大值分別為 $2^{N_{i1}}$ 與 $2^{\bar{N}_{j1}}$ ，分別代表分解至第 N_{i1} 層及第 \bar{N}_{j1} 層之小波包函數總數。 N_{i1} 及 \bar{N}_{j1} 分別滿足 $2^{N_{i1}} > T$ 與 $2^{\bar{N}_{j1}} > T$ 之條件，其中 T 為分析反應數據之時間延時。重複 3.2 節中以加權基底函數技巧架構 TVARX 模式之步驟，取權重函數為 $w(t_n, t_m) = 1$ ，但選用之基底函數為小波包函數，可得：

$$\bar{\mathbf{V}}_b^T \bar{\mathbf{V}}_b \bar{\mathbf{C}}_b = \bar{\mathbf{V}}_b^T \mathbf{F}, \quad (4.20)$$

其中，

$$\bar{\mathbf{C}}_b = [\tilde{\mathbf{G}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{G}}_2^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{G}}_I^T \quad \tilde{\mathbf{H}}_0^T \quad \tilde{\mathbf{H}}_1^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{H}}_J^T]^T,$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_i = [\mathbf{G}_{i0} \quad \mathbf{G}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{G}_{i\bar{K}_i-1}], \quad \tilde{\mathbf{H}}_j = [\mathbf{H}_{j0} \quad \mathbf{H}_{j1} \quad \cdots \quad \mathbf{H}_{j\bar{L}_j-1}],$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{y}_{t_0} \quad \mathbf{y}_{t_1} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{t_{\bar{M}}}]^T,$$

$$\bar{\mathbf{V}}_b = \begin{bmatrix} [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t) \mathbf{y}_{t-1}] & [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t) \mathbf{y}_{t-2}] & \cdots & [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t) \mathbf{y}_{t-I}] \\ [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_0-1}(t) \mathbf{f}_{t-0}] & [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_0-1}(t) \mathbf{f}_{t-1}] & \cdots & [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_0-1}(t) \mathbf{f}_{t-J}] \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t)\mathbf{y}_{t-i}] &= [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t_0)\mathbf{y}_{t_0-i}]^T \quad [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t_1)\mathbf{y}_{t_1-i}]^T \quad \cdots \quad [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t_{\tilde{M}})\mathbf{y}_{t_{\tilde{M}}-i}]^T]^T, \\ [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_j-1}(t)\mathbf{f}_{t-j}] &= [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_j-1}(t_0)\mathbf{f}_{t_0-j}]^T \quad [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_j-1}(t_1)\mathbf{f}_{t_1-j}]^T \quad \cdots \quad [\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{L}_j-1}(t_{\tilde{M}})\mathbf{f}_{t_{\tilde{M}}-j}]^T]^T, \\ \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\bar{K}_i-1}(t_m) &= [\mathbf{I}]\boldsymbol{\mu}_{0,N_{ii},0}(t_m) \quad [\mathbf{I}]\boldsymbol{\mu}_{1,N_{ii},0}(t_m) \quad \cdots \quad [\mathbf{I}]\boldsymbol{\mu}_{\bar{K}_i-1,N_{ii},0}(t_m)]^T, \end{aligned}$$

對 (4.20) 式求解即可得到時變係數以小波包基底展開所對應之係數，由此即可得到此 TVARX 模型於某個時刻 $t = t_m$ 下之時變係數 $\boldsymbol{\Phi}_i(t_m)$ ($i = 1, 2, \dots, I$)。

以上架構之 TVARX 中各個時變係數，可考慮不同之小波包個數 \bar{K}_i 與 \bar{L}_j 對應之基底函數。於實際應用時若取相同之小波包個數，令 $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \cdots = \bar{K}_I = \bar{L}_0 = \bar{L}_1 = \cdots = \bar{L}_J = M_I$ 。每個時變係數可使用相同之基底函數，將可使運算過程更有效率。

同理，若利用離散小波函數為基底，則：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_i(t) &= \sum_{\hat{m} \in \mathbb{Z}} \bar{\mathbf{R}}_{iK_i, \hat{m}}(t) \Phi_{iK_i, \hat{m}}(t) + \sum_{k=0}^{K_i} \sum_{\hat{m} \in \mathbb{Z}} \mathbf{R}_{ik, \hat{m}}(t) \Psi_{ik, \hat{m}}(t), \\ \boldsymbol{\Theta}_j(t) &= \sum_{\hat{m} \in \mathbb{Z}} \bar{\mathbf{S}}_{jL_j, \hat{m}}(t) \Phi_{jL_j, \hat{m}}(t) + \sum_{l=0}^{L_j} \sum_{\hat{m} \in \mathbb{Z}} \mathbf{S}_{jl, \hat{m}}(t) \Psi_{jl, \hat{m}}(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

其中， $\Phi_{iK_i, \hat{m}}(t)$ 為第 K_i 層平移 \hat{m} 之尺度函數； $\Psi_{ik, \hat{m}}(t)$ 為第 k 層平移 \hat{m} 之小波函數。將式 (4.21) 代入式 (3.1)，重覆式 (3.3)~(3.7) 之推導過程並考慮權重函數 $w(t_n, t_m) = 1$ ，即可得：

$$\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b \tilde{\mathbf{C}}_b = \tilde{\mathbf{V}}_b^T \mathbf{F}, \quad (4.22)$$

其中，

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_b &= [\tilde{\mathbf{R}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{R}}_2^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{R}}_I^T \quad \tilde{\mathbf{S}}_0^T \quad \tilde{\mathbf{S}}_1^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{S}}_J^T]^T, \\ \tilde{\mathbf{R}}_i &= [\bar{\mathbf{R}}_{iK_i, 1} \quad \bar{\mathbf{R}}_{iK_i, 2} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{R}}_{iK_i, M} \quad \mathbf{R}_{i1, 1} \quad \mathbf{R}_{i1, 2} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{i1, M} \\ &\quad \mathbf{R}_{i2, 1} \quad \mathbf{R}_{i2, 2} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{i2, M} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{iK_i, 1} \quad \mathbf{R}_{iK_i, 2} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{iK_i, M}]^T, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_j = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{jL_j,1} & \bar{\mathbf{S}}_{jL_j,2} & \cdots & \bar{\mathbf{S}}_{jL_j,M} & \mathbf{S}_{j1,1} & \mathbf{S}_{j1,2} & \cdots & \mathbf{S}_{j1,M} \\ \mathbf{S}_{j2,1} & \mathbf{S}_{j2,2} & \cdots & \mathbf{S}_{j2,M} & \cdots & \mathbf{S}_{jL_j,1} & \mathbf{S}_{jL_j,2} & \cdots & \mathbf{S}_{jL_j,M} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{y}_{t_0} \quad \mathbf{y}_{t_1} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{t_{\tilde{M}}}]^T,$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_b = \begin{bmatrix} [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_1}(t)\mathbf{y}_{t-1}] & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_2}(t)\mathbf{y}_{t-2}] & \cdots & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_I}(t)\mathbf{y}_{t-I}] \\ [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_0}(t)\mathbf{f}_{t-0}] & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_1}(t)\mathbf{f}_{t-1}] & \cdots & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_J}(t)\mathbf{f}_{t-J}] \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_i}(t)\mathbf{y}_{t-i}] = \begin{bmatrix} [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_i}(t_0)\mathbf{y}_{t_0-i}]^T & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_i}(t_1)\mathbf{y}_{t_1-i}]^T & \cdots & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_i}(t_{\tilde{M}})\mathbf{y}_{t_{\tilde{M}}-i}]^T \end{bmatrix}^T,$$

$$[\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_j}(t)\mathbf{f}_{t-j}] = \begin{bmatrix} [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_j}(t_0)\mathbf{f}_{t_0-j}]^T & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_j}(t_1)\mathbf{f}_{t_1-j}]^T & \cdots & [\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{L_j}(t_{\tilde{M}})\mathbf{f}_{t_{\tilde{M}}-j}]^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{K_i}(t_m) = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}\Phi(t_m)_{K_i,1}] & [\mathbf{I}\Phi(t_m)_{K_i,2}] & \cdots & [\mathbf{I}\Phi(t_m)_{K_i,M}] \\ [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{1,1}] & [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{1,2}] & \cdots & [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{1,M}] \\ [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{2,1}] & [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{2,2}] & \cdots & [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{2,M}] \\ \vdots \\ [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{K_i,1}] & [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{K_i,2}] & \cdots & [\mathbf{I}\Psi(t_m)_{K_i,M}] \end{bmatrix}^T,$$

對 (4.22) 式求解即可得到時變係數以離散小波基底展開所對應之係數，由此即可得到此 TVARX 模型於某個時刻 $t = t_m$ 下之時變係數 $\boldsymbol{\Phi}_i(t_m)$ ($i = 1, 2, \dots, I$)。

以離散小波基底展開時，欲完整描述其函數曲線，須同時考慮每一分解層所對應之基底函數，如此勢必引入大量之基底函數易導致數值困難以及計算耗時。由離散小波分解之理論可知，每一分解層均包含底頻項與高頻項，而分解至下一層時僅針對低頻項進行分解。因此，為提升運算速度可考慮省略該分解層以上各層之高頻項。以上架構之 TVARX 中各個時變係數，可同時考慮不同之離散小波分解層 K_i 與 L_j 其對應之尺度因子分別為 2^{K_i} 與 2^{L_j} ，於實際應用時若取相同之離散小波分解層，令 $2^{K_1} = 2^{K_2} \dots = 2^{K_I} = 2^{L_0} = 2^{L_1} = \dots = 2^{L_J} = a$ ，每個時變係數可使用相同之基底函數，將可使運算過程更有效率。

4.4.2 以移動最小平方差法建構 TVARX 模型

3.2 節已述利用移動最小平方差法結合多項式基底建構 TVARX 模型，此節將用小波包函數為基底，以期改善用多項式基底模擬不平滑函數之缺點。將 TVARX 模型中之係數以一小波包基底函數展開如下：

$$\begin{aligned}\Phi_i(t) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\bar{K}_i-1} \mathbf{G}_{i\bar{m}} \mu_{\bar{m}, N_{i1}, 0}(t) = \tilde{\mathbf{G}}_i \bar{\mathbf{P}}_i, \\ \Theta_j(t) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\bar{L}_j-1} \mathbf{H}_{j\bar{m}} \mu_{\bar{m}, N_{j1}, 0}(t) = \tilde{\mathbf{H}}_j \bar{\mathbf{T}}_j\end{aligned}\quad (4.23)$$

其中：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}_i &= \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] \mu_{0, N_{i1}, 0} & [\mathbf{I}] \mu_{1, N_{i1}, 0} & \cdots & [\mathbf{I}] \mu_{\bar{K}_i-1, N_{i1}, 0} \end{bmatrix}^T, \\ \bar{\mathbf{T}}_j &= \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] \mu_{0, N_{j1}, 0} & [\mathbf{I}] \mu_{1, N_{j1}, 0} & \cdots & [\mathbf{I}] \mu_{\bar{L}_j-1, N_{j1}, 0} \end{bmatrix}^T, \\ \tilde{\mathbf{G}}_i &= [\mathbf{G}_{i0} \quad \mathbf{G}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{G}_{i\bar{K}_i-1}], \quad \tilde{\mathbf{H}}_j = [\mathbf{H}_{j0} \quad \mathbf{H}_{j1} \quad \cdots \quad \mathbf{H}_{j\bar{L}_j-1}],\end{aligned}$$

$\mathbf{G}_{i\bar{m}}$ 與 $\mathbf{H}_{j\bar{m}}$ 為待定係數矩陣； $[\mathbf{I}]$ 為維度與係數矩陣一致之單位矩陣。接著重複 (3.11) ~ (3.17) 之推導步驟，即可

$$\Phi_i(t) = \bar{\mathbf{\Phi}}_i \tilde{\mathbf{\Phi}}_{w,i}(t), \quad \Theta_j(t) = \bar{\mathbf{\Theta}}_j \tilde{\mathbf{\Theta}}_{w,j}(t), \quad (4.24)$$

其中， $\bar{\mathbf{\Phi}}_i$ 與 $\bar{\mathbf{\Theta}}_j$ 之定義與 3.2.2 節相同

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{w,i}(t) = \bar{\mathbf{Q}}_i(t) \bar{\mathbf{G}}_i^{-1}(t) \bar{\mathbf{P}}_i(t)^T, \quad \tilde{\mathbf{\Theta}}_{w,j}(t) = \bar{\mathbf{U}}_j(t) \bar{\mathbf{H}}_j^{-1}(t) \bar{\mathbf{T}}_j(t)^T,$$

$$\bar{\mathbf{G}}_i(t) = \sum_{l=1}^{\hat{l}_i} \bar{\mathbf{P}}_i(t_l)^T \mathbf{W}(t_n, t_l) \bar{\mathbf{P}}_i(t_l), \quad \bar{\mathbf{H}}_j(t) = \sum_{l=1}^{\hat{l}_j} \bar{\mathbf{T}}_j(t_l)^T \mathbf{W}(t_n, t_l) \bar{\mathbf{T}}_j(t_l),$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i(t) = [\bar{\mathbf{Q}}_{i1} \quad \bar{\mathbf{Q}}_{i2} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{Q}}_{i\hat{l}_i}]^T, \quad \bar{\mathbf{U}}_j(t) = [\bar{\mathbf{U}}_{j1} \quad \bar{\mathbf{U}}_{j2} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{U}}_{j\hat{l}_j}]^T,$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{il} = \bar{\mathbf{P}}_i(t_l) \mathbf{W}(t_n, t_l), \quad \bar{\mathbf{U}}_{jl} = \bar{\mathbf{T}}_j(t_l) \mathbf{W}(t_n, t_l),$$

將式(4.24)代入式(3.1)中，重複式(3.20)~(3.23)之推導步驟，即可獲得藉由小波包

函數為基底結合移動最小平方差法所架構之 TVARX，以矩陣形式表式可得

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{V}}_m^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{V}}_m^T \bar{\mathbf{V}}_m \mathbf{C}_m, \quad (4.25)$$

其中

$$\bar{\mathbf{V}}_m = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{t_1,1} & \bar{\Gamma}_{t_1,2} & \cdots & \bar{\Gamma}_{t_1,I} & \bar{\Omega}_{t_1,0} & \bar{\Omega}_{t_1,1} & \cdots & \bar{\Omega}_{t_1,J} \\ \bar{\Gamma}_{t_2,1} & \bar{\Gamma}_{t_2,2} & \cdots & \bar{\Gamma}_{t_2,I} & \bar{\Omega}_{t_2,0} & \bar{\Omega}_{t_2,1} & \cdots & \bar{\Omega}_{t_2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Gamma}_{t_n,1} & \bar{\Gamma}_{t_n,2} & \cdots & \bar{\Gamma}_{t_n,I} & \bar{\Omega}_{t_n,0} & \bar{\Omega}_{t_n,1} & \cdots & \bar{\Omega}_{t_n,J} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}_{t,i} = [\tilde{\Phi}_{w,i,1} \mathbf{y}(t-i) \quad \tilde{\Phi}_{w,i,2} \mathbf{y}(t-i) \quad \cdots \quad \tilde{\Phi}_{w,i,\bar{L}_i} \mathbf{y}(t-i)],$$

$$\bar{\Omega}_{t,j} = [\tilde{\Theta}_{w,j,1} \mathbf{f}(t-j) \quad \tilde{\Theta}_{w,j,2} \mathbf{f}(t-j) \quad \cdots \quad \tilde{\Theta}_{w,j,\bar{L}_j} \mathbf{f}(t-j)],$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{y}(t_1) \quad \mathbf{y}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}(t_n)]^T,$$

$$\mathbf{C}_m = [\bar{\Phi}_1^T \quad \bar{\Phi}_2^T \quad \cdots \quad \bar{\Phi}_I^T \quad \bar{\Theta}_0^T \quad \bar{\Theta}_1^T \quad \cdots \quad \bar{\Theta}_J^T]^T,$$

將所求得之時變係數 $\Phi_i(t)$ 代入(3.25)式中求取 $[\mathbf{G}]$ 之特徵值及向量，再透過式(2.16)與(2.17)即可求取估算系統之瞬時模態參數。

以上架構之 TVARX 中各個時變係數，可考慮不同之小波包個數 \bar{K}_i 與 \bar{L}_j 對應之基底函數。於實際應用時若取相同之小波包個數 M_i 與相同之節點數 l_n ，將可提升運算效率。

4.5 數值驗證

為驗證此識別方法對時變系統之識別效果，將以 3.5 節中之數值模擬案例。驗證此識別流程，並且進行各種參數之探討以掌握此識別方法之特性。

4.5.1 以小波函數結合傳統基底函數展開法之識別結果

選用 Haar 與 Symlets 函數系中之 sym4 小波函數為基底結合基底函數展開法

架構 TVARX 模式。Haar 小波函數與 Symlets 函數系之小波函數為有限支撐長度之緊支撐小波函數。

由 Haar 之尺度函數與小波函數之頻譜圖（如圖 4.5 所示）可看出，若僅以小波函數為基底對時變係數展開，為了涵蓋時變係數之低頻特性，需引入大量之尺度因子。如此，所使用之基底函數數量暴增，亦使得計算時間增加許多，以致無效率可言。

圖 4.6 為各組時變系統以 Haar 小波函數為基底在利用不同尺度因子下識別所得之相對誤差平均值以及標準差。由於 Haar 小波函數為階梯狀函數，用來模擬平滑變化函數或線性變化函數很顯然無法獲得較佳之結果。在識別平緩變化、週期變化以及折線變化系統之瞬時自然振動頻率時，當選用尺度因子 $a = 2^{-1}$ 時有較小之識別誤差；在識別平緩變化、週期變化以及折線變化系統之阻尼比時，當選用尺度因子分別為 $a = 2$ 、 $a = 2^3$ 和 $a = 2^2$ 對有較佳之識別結果。在識別跳躍變化系統之瞬時模態，當選用尺度因子 $a = 2^0$ 即可獲得準確之識別結果。參考以上之參數探討結果，為兼顧瞬時自然振動頻率與瞬時阻尼比之準確性，將選擇以 $a = 2^0$ 識別平緩變化、週期變化以及折線變化系統；以 $a = 2^3$ 識別跳躍變化系統。所使用之基底總數分別與分析之時間長度 T 及尺度因子 a 相關，可以下式求得

$$N_b = 2 \times T/a$$

其中， N_b 為基底個數。當取 $a = 2^0$ 以及 $a = 2^3$ 所使用之基底各數分別為 $N_b = 60$ 以及 $N_b = 8$ 。所得之識別結果如圖 4.7 所示。

Symlets 小波函數系是由 Daubechies (1994) 提出具有近似對稱性質之小波函數，Symlets 小波函數系通常表示為 $\text{sym}\hat{N}$ ($\hat{N} = 2, 3, \dots, 8$) 之形式。此類之函數乃由 Daubechies(db) 小波函數系改良所得，因此具有與 db 小波函數系相似之特性，Symlets 小波函數具有以下之特性：

1. 小波函數與尺度函數之有效支撐長度為 $2\hat{N} - 1$ ；
2. 小波函數之消失矩價數為 \hat{N} ；

3. 函數具有正交性；
4. 函數為近似對稱。

研究中將選用 sym4 小波函數為基底，其小波函數與尺度函數如圖 4.8 所示

圖 4.9 為各組時變系統以 sym4 小波函數為基底在利用不同尺度因子下識別所得之相對誤差平均值以及標準差。以相對誤差之變化曲線來看，此函數為基底對平緩變化系統之瞬時模態識別結果較為理想，所識別之自然振動頻率與阻尼比在尺度因子 $a = 2^1$ 時所得之識別結果有較小之識別誤差；在識別週期變化系統之瞬時模態時，選擇尺度因子 $a = 2^1$ 時方有最佳之結果；在識別跳躍變化系統之瞬時模態特性時，當尺度因子為 $a = 2^2$ 時所得之識別結果有較小之識別誤差；在識別折線變化系統之瞬時模態時，選擇尺度因子 $a = 2^1$ 時有較佳之結果。但是整體識別結果來看，以 sym4 小波函數不易模擬跳躍變化之曲線，因此所得之結果較不理想。參考以上之參數探討結果，選擇尺度因子 $a = 2^1$ 以識別平緩變化、週期變化與折線變化之時變系統，所使用之基底總數為 30 組；另選擇以尺度因子 $a = 2^2$ 識別週期變化之時變系統，所使用之基底總數為 16 組，所得之識別結果如圖 3.10 所示。

4.5.2 以小波包結合傳統基底函數展開法之識別結果

接著探討以小波包函數結合基底函數展開法架構 TVARX 模式之識別結果。已知分析資料之時間長度為 $T = 30 \text{ sec}$ 為滿足 $2^{N_l} > T$ 之條件至少須取至第 5 層之小波包基底。於此將取 $N_l = 8$ ，可選用之小波包基底總數最多可達 2^8 。以下將探討選用不同基底個數對識別結果之影響。

選用 Haar 小波包函數為展開基底時，圖 4.11 為各組時變系統以不同小波包基底個數 M_l 識別所得之相對誤差平均值以及標準差。識別平緩變化系統之瞬時模態，以 $M_l = 2^5$ 對應之函數為基底可獲得較佳之識別結果。識別週期變化系統之瞬時模態，分別以 $M_l = 2^7$ 及 $M_l = 2^3$ 對應之函數可獲得最佳頻率與阻尼比之識別結果。識別跳躍變化系統之瞬時模態特性，以 $M_l = 2$ 對應之函數即可獲得最佳之識別結果。識別折線變化系統之瞬時模態特性，分別以 $M_l = 2^6$ 及 $M_l = 2^4$ 之函

數可獲得最佳頻率與阻尼比之識別結果。參考以上之參數探討結果，為兼顧瞬時自然振動頻率與瞬時阻尼比之準確性，將選擇以 $M_l = 2^5$ 識別平緩變化、週期變化及折線變化等時變系統，所使用之基底總數為 32 組；取 $M_l = 2$ 識別跳躍變化之時變系統，所使用之基底總數為 2 組，其識別結果示於圖 4.12。

當選用 sym4 小波包函數為展開基底時，圖 4.13 為各組時變系統以不同小波包基底個數 M_l 識別所得之相對誤差平均值以及標準差。識別平緩變化與週期變化系統之瞬時模態，皆以 $M_l = 2^5$ 對應之函數可獲得較佳頻率與阻尼比之識別結果。識別跳躍變化系統之瞬時模態，以 $M_l = 2^4$ 對應之函數可獲得最佳頻率與阻尼比之識別結果。識別折線變化系統之瞬時模態，取 $M_l = 2^5$ 對應之函數可獲得較佳頻率與阻尼比之識別結果。識別平緩變化、週期變化及折線變化等時變系統取 $M_l = 2^5$ 對應之函數進行分析，所使用之基底總數為 32 組；識別跳躍變化時變系統則取 $M_l = 2^4$ 對應之函數進行分析，所使用之基底總數為 16 組，所得識別結果示於圖 4.14。

由以上之分析結果可知，基底函數之選擇對識別結果有決定性之影響。對平滑變化之時變系統須以較平滑之基底函數方能獲得較佳之結果，而跳躍變化之時變系統則須選用跳躍變化之基底函數方能獲得較佳之結果。相較選用 Haar 離散小波為基底，若選用之基底函數為 Haar 小波包可以較少之基底個數獲得較佳之結果。透過 sym4 小波包與 sym4 離散小波進行建模並識別，欲獲得準確之結果兩者所須之基底數量相差不大。

4.5.3 以小波包函數結合 MLS 之識別結果

接下來以本章發展之小波包函數結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型，透過數值驗證以瞭解此方法之適用性。選用之小波包函數亦為 Haar 和 sym4，探討之參數包括小波包基底個數 M_l 、權重函數之支撐參數 d_m 與結點數 l_n 以瞭解此些參數對識別結果之影響。

進行參數探討之前，可從不同基底之形狀函數概略判斷其適用之時變曲線。圖 4.15 為分別選用 Haar 與 sym4 小波包時，取 $d_m = 6$ 且第 14.2 秒之節點，以移

動最小平方差法所製造出之形狀函數。當以 Haar 小波包為基底時，所產生之形狀函數相對於小波包函數之跳躍處亦具有不連續現象，於跳躍點之外其形狀函數為平滑變化。因此，可預期以 Haar 小波包為基底結合移動最小平方差法架構之 TVARX 模式將會有較廣之適用範圍。反觀以 sym4 小波包函數為基底所製造之形狀函數，由於基底函數本身為一近似平滑之曲線，因此透過移動最小平方差法所得之形狀函數將為一平滑曲線。因此，將使 sym4 小波包為基底結合移動最小平方差法架構之 TVARX 模式之適用範圍受限於連續變化之時變系統。

在前一章之數值探討中已知，透過移動最小平方差法架構 TVARX 僅須較少之基底函數對時變係數展開即可獲得準確之結果。於此將分別選用 $M_l = 2$ 、 $M_l = 2^2$ 以及 $M_l = 2^3$ 等小波包個數進行探討。選用 Haar 小波包函數為基底，圖 4.16 為考慮權重函數之支撐參數 $d_m = 2$ ，各組分解層函數隨著節點數增加識別結果之誤差變化曲線。在各組時變系統之瞬時模態特性時，可發現當節點數增加至 $l_n = 40$ 以上，其識別誤差之變化漸漸趨於穩定。特別是在識別平緩變化、週期變化與折線變化之時變系統時， $M_l = 2$ 與 $M_l = 2^2$ 之函數所得之結果穩定性較佳。

圖 4.17 為選擇 $M_l = 2^2$ 對應之函數於考慮不同權重函數之支撐參數 $d_m = 2$ 、 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 下，隨著節點數增加識別結果之誤差變化曲線。識別平緩變化系統之瞬時模態時，在支撐參數 $d_m = 2$ 時，節點數在 $l_n \geq 50$ 識別誤差逐漸趨於穩定；支撐參數 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時，節點數在 $l_n \geq 40$ 識別誤差逐漸趨於穩定。識別週期變化系統之瞬時模態時，在支撐參數 $d_m = 2$ 節點數為 $l_n \geq 30$ 識別結果之誤差趨於穩定支撐參數 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時，節點數在 $l_n \geq 50$ 識別誤差逐漸趨於穩定。識別跳躍變化與折線變化系統之瞬時模態時，在各組支撐參數下，節點數皆在 $l_n \geq 30$ 識別誤差逐漸趨於穩定。由以上之參數分析結果可看出，相較於以其他支撐參數之結果，選用支撐參數 $d_m = 2$ 應用於各組時變模型之識別，所得之結果較不理想。由以上之識別結果可看出，透過 Haar 小波包函數結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型，所得之識別結果不僅可以對跳躍變化之時變系統有很好之識別結果，對平緩變化、週期變化與折線變化之系統亦能獲的極佳之識別結果。圖 4.18 為識別平緩變化、週期變化、跳躍變化與折線變化等時變系統時，以支

撐參數 $d_m = 4$ 分別節點數 $l_n = 50$ 所得之識別結果。

當選用之小波包函數為 sym4 時，圖 4.19 為考慮權重函數之支撐參數 $d_m = 2$ ，各組分解層函數隨著節點數增加識別結果之誤差變化曲線。在各組時變系統之瞬時模態特性時，可發現當節點數增加至 $l_n \geq 40$ ，其識別誤差之變化漸漸趨於穩定。特別是在識別平緩變化、週期變化與折線變化之時變系統時，各分解層函數所得之結果穩定性皆不錯。識別跳躍變化系統時，於所選用之分解層函數皆難以獲得較佳之結果。

圖 4.20 為選擇 $M_l = 2^2$ 對應之函數於考慮不同權重函數之支撐參數 $d_m = 2$ 、 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 下，隨著節點數增加識別結果之誤差變化曲線。識別平緩變化系統之瞬時模態參數時，支撐參數 $d_m = 2$ 當節點數 $l_n \geq 40$ 時其識別結果之誤差趨於穩定；支撐參數 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 於節點數於 $20 \geq l_n \geq 70$ 之範圍內其頻率及阻尼比之識別誤差分別控制於 0.2% 以下及 1% 以下。識別週期變化系統之瞬時模態參數時，其識別誤差之變化趨勢與平緩變化系統相似，支撐參數 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 於節點數於 $20 \geq l_n \geq 70$ 之範圍內其頻率及阻尼比之識別誤差分別控制於 1% 以下及 3% 以下。識別跳躍變化系統之瞬時模態參數時，於支撐參數 $d_m = 2$ 與 $d_m = 4$ 時其識別誤差明顯偏高；支撐參數 $d_m = 6$ 時，當節點數 $l_n \geq 40$ 其識別誤差漸趨於穩定。識別折線變化系統之瞬時模態參數時，其識別誤差之變化趨勢與平緩變化及週期變化系統相似，支撐參數 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 於節點數於 $20 \geq l_n \geq 70$ 之範圍內其頻率及阻尼比之識別誤差分別控制於 1% 以下及 3% 以下。參考以上之參數分析結果，於識別各組時變系統之瞬時模態時，將選用基底函數個數 $M_l = 2^2$ 、支撐參數 $d_m = 6$ 以及節點數取 $l_n = 60$ ，其識別結果示於圖 4.21。與 Haar 為基底函數所得之結果相比，以 sym4 小波包為基底其適用範圍僅限於平緩變化、週期變化以及折線變化等時變系統。

相較於以 Haar 小波包為基底，以 Haar 離散小波結合基底函數法架構 TVARX 模式，其識別過程須引入較多之基底函數，且此兩種建模方式之識別結果僅對跳躍變化系統有較佳之識別結果。以 sym4 離散小波或小波包為基底結合基底函數法架構 TVARX 模式，兩者所使用之基底個數差不多，且能於識別平緩變化、週

期變化以及折線變化等時變系統獲得良好之結果，但是於識別跳躍變化系統則難以描述其時變特性。以 Haar 小波包為基底結合移動最小平方差法架構 TVARX 模式，應用於平緩變化、週期變化、跳躍變化以及折線變化等時變系統均能描述其時變特性。

4.5.3 雜訊之影響

為瞭解雜訊對識別品質之影響，於數值分析所得 case 2 與 case3 之相對位移反應及輸入反應中加入白色雜訊，使得 NSR=5%。然後，以此含有雜訊之訊號，應用於 Haar 小波包結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型以識別其瞬時模態特性，並與未含雜訊之分析結果比較。以下將選用固定之小波包基底個數 $M_l = 2$ 與節點數 $l_n = 50$ ，探討當權重函數之支撐參數分別為 $d_m = 2$ 、 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 時，對應不同 TVARX 模型階數 (I, J) 之識別結果。

當對 case 2 之模擬反應進行分析時，圖 4.22 與圖 4.23 分別為各組支撐參數於不同 (I, J) 計算所得之 AIC 與 FPE 值變化曲線。由 AIC 值之變化可看出各組支撐參數均在 $(I, J) = 18$ 時有最小值。而以 FPE 值之變化來看，此三組支撐參數在 $(I, J) = 15$ 時均有最小值。而此三組支撐參數雖然一致，但是以支撐參數 $d_m = 2$ 時有最小之 AIC 與 FPE 值。比較此兩種指標之分析結果可知，以 AIC 值做為指標所決定之模型階數略高，但基本上兩者所決定之模型階數差異不大。

接著比較支撐參數隨著 (I, J) 改變時，識別所得模態之相對誤差。藉由相對誤差之變化曲線與 AIC 或 FPE 值相互參照，以瞭解藉由 AIC 或 FPE 值與識別誤差之關聯性。圖 4.24 為各組支撐參數於不同 (I, J) 模態識別誤差之平均值與標準差。由自然振動頻率識別誤差之平均值與標準差變化曲線可看出，於模型階數借於 10~30 之間，其瞬時自然振動頻率之識別誤差平均值約在 3% 以下；其瞬時阻尼比之識別誤差於 $(I, J) \geq 20$ 之後趨於穩定。此外，在 $(I, J) \geq 20$ 之後識別阻尼比誤差之平均值與標準差均在 20% 以下。

經由以上之分析，選擇以支撐參數 $d_m = 4$ ，模型階數 $(I, J) = 20$ 進行識別。圖 4.25 為 case 2 於輸入與輸出訊號加入雜訊之識別結果。識別結果顯示，於訊

號中引入雜訊仍能準確識別瞬時自然振動頻率之變化情形；雖然對於阻尼比之識別結果較不理想甚至於某些時間點產生不連續之跳躍現象，但是仍能看出其變化輪廓。

將此識別方法應用於 case 3 時，圖 4.26 與圖 4.27 分別為各組支撐參數於不同 (I, J) 計算所得之 AIC 與 FPE 值變化曲線。由 AIC 值之變化可看出，支撐參數 $d_m = 2$ 時在 $(I, J) = 18$ 時有最小值；支撐參數 $d_m = 4$ 與 $d_m = 6$ 時在 $(I, J) = 17$ 時有最小值。而以 FPE 值之變化來看，此三組支撐參數在 $(I, J) = 14$ 時均有最小值。而此三組支撐參數雖然相似，但是以支撐參數 $d_m = 2$ 時有最小之 AIC 與 FPE 值。以 AIC 值做為指標所決定之模型階數略高，相較 FPE 所決定者，兩者之模型階數差異不大。

接著比較支撐參數隨著 (I, J) 改變時，識別所得模態之相對誤差。進一步探討藉由 AIC 或 FPE 值與識別誤差之關聯性。圖 4.28 為各組支撐參數於不同 (I, J) 模態識別誤差之平均值與標準差。其識別瞬時自然振動頻率之誤差於 $(I, J) \geq 15$ 之後趨於穩定。此外，在 $(I, J) \geq 20$ 之後識別頻率誤差之平均值與標準差均在 2% 以下；其瞬時阻尼比之識別誤差於 $(I, J) \geq 25$ 之後趨於穩定。此外，在 $(I, J) \geq 30$ 之後識別阻尼比誤差之平均值與標準差均在 20% 以下。

經由以上之分析，選擇以支撐參數 $d_m = 4$ ，模型階數 $(I, J) = 30$ 進行識別。圖 4.29 為 case 3 於輸入與輸出訊號加入雜訊之識別結果。識別結果顯示，於訊號中引入雜訊仍能準確識別瞬時自然振動頻率之變化情形；雖然對於阻尼比之識別結果較不理想甚至於某些時間點產生不連續之跳躍現象，但是於時變系統之跳躍變化出仍能準確描述，整體而言亦能看出其變化輪廓。

4.6 應用於振動台試驗數據分析

本小節將以 Haar 小波包函數為基底架構結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型之瞬時模態識別流程，應用於分析於國家地震工程研究中心所執行的鋼筋混凝土結構振動台試驗，針對其量測之動態反應進行識別。對實驗之混凝土結構進行介紹以及利用實驗過程量測到之位移、加速和基底剪力回歸出每個時

刻下之參考值，已於 3.6 節做了詳細之介紹。

以 Haar 小波包函數為基底架構結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型以估算瞬時模態特性之識別流程，此分析方法應用於振動台實驗之量測資料。分析過程取分解層 $M_l = 2^2$ 與節點數 $l_n = 40$ 以及權重函數之支撐長度分別為 $d_m = 2$ 、 $d_m = 4$ 及 $d_m = 6$ 。圖 4.30 為不同模型參數 (I,J) 計算所得之 AIC 值。以損害前之反應資料進行分析，三組權重函數之支撐長度其 AIC 值隨模型參數 (I,J) 之變化曲線非常相似，其 AIC 值在 (I,J) = 7 時有最小值。以地震作用期間之反應資料進行分析，各組支撐參數所得之 AIC 值變化曲線亦非常相似，於 (I,J) = 17 時有最小之 AIC 值。以損害後之反應資料進行分析，可看出 AIC 值在 (I,J) = 7 有局部極小值，於 (I,J) = 15 有極小值，此三組支撐參數所得之結果相當一致。

圖 4.31 為各組權重函數之支撐長度於不同模型參數 (I,J) 計算所得之 FPE 值。以損害前之反應資料進行分析，可看出 FPE 值在 (I,J) = 6 有極小值，三組權重函數之支撐長度所得之變化曲線亦相似，此結果與 AIC 值變化曲線中極小值發生之位置相似。以地震作用期間之反應資料進行分析，其 FPE 值分別在 (I,J) = 5 ~ 7 與 (I,J) = 17 有局部極小值。以損害後之反應資料進行分析，可看出 FPE 值在 (I,J) = 7 有最小值，於 (I,J) = 15 有極小值，此三組支撐參數所得之結果相當一致。參照 AIC 與 FPE 之分析結果對此三組反應以下將分別選用 (I,J) = 7、(I,J) = 7 以及 (I,J) = 17 之結果進行識別。

圖 4.32 為參考 AIC 值與 FPE 值決定之模型參數 (I,J) 所得之識別結果。由識別結果可看出破壞前後之識別結果在擾動過程其頻率反應變化不大，而兩者之頻率值大約相差 0.8Hz。而在地震輸入過程，其初始之頻率值約為 2.4Hz 與破壞前之識別結果相當一致；大概在 3 秒附近頻率反應開始驟降，而在 20 秒左右頻率降至最低值。此識別結果不僅與圖 3.35 與 3.36 透過基底剪力、位移與速度資料迴歸所得之時變曲線相當一致，亦與利用 TVARX 模型所得之識別結果(圖 3.26) 相近。

於第三章完成了以不同物理反應量建構 TVARX 模型，並透過嚴謹之數學推

導與數值驗證證明以位移反應架構之 TVARX 模式方能準確識別結構之瞬時模態特性。但實際量測往往僅能獲得速度或加速度等反應資料。因此，為讓此識別方法有效應用於實際量測資料，將考慮對加速度反應積分兩次轉換成位移反應。並比較積分後之位移反應與原始加速度反應之識別結果。圖 4.33 為積分後之位移反應與原始加速度反應之瞬時模態識別結果。此兩組資料之瞬時頻率識別結果相當類似，且於第 3 秒附近均能識別頻率驟降之時變現象。且於 20 秒附近均為其識別瞬時頻率之最小值。但於第三秒後之識別結果，以原始加速度反應所得之識別其整體頻率較積分後之反應所得略高。於瞬時阻尼比之識別結果，以原始加速度反應所得之識別結果較積分後之反應所得為高。

4.7 小結

本章建立了另一套時變線性系統之識別方法，以估算時變線性系統之瞬時模態參數。研究中採用了小波函數為基底配合基底函數展開法與移動最小平方差法架構 TVARX 模型，透過小波函數對模型中之時變係數進行展開。再以最小平方差法計算每個時刻下之模態特性；或以移動最小平方差法架構形狀函數，再以最小平方差法反算各組形狀函數所對應之係數，利用基底函數及其對應之係數建立出結構之系統矩陣。最後經由系統識別程序，獲得系統之模態參數如自然振動頻率、阻尼比、以及振動模態。

首先，建立由小波函數為基底配合基底函數法與移動最小平方差法等各種技巧所架構之 TVARX 模型，並以反算所得之模型係數進一步估算結構系統之瞬時模態特性。其中以移動最小平方差可藉由較少之基底函數描述系統之時變係數。

然後，將以單自由度時變線性系統之數值模擬驗證此識別流程之可行性，並從中進行各項參數探討，以確實掌握此識別方法之特性。由分析結果可知當選用離散小波函數或小波包函數架構 TVARX 模型，其選用之基底函數對識別結果有決定性之影響。對平緩變化、週期變化與折線變化系統可以 sym4 之小波包(或離散小波)函數獲得準確之結果，但以 Haar 小波包(或離散小波)函數獲得之結果較不理想；然而跳躍變化系統可以 Haar 小波包(或離散小波)函數獲得理想之識別

結果，但以 sym4 之小波包(或離散小波)函數則難以獲得準確之結果。若是以 Haar 小波包函數結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型，則對平緩變化、週期變化、跳躍變化與線性變化等系統均能獲得準確之結果；而以 sym4 小波包函數結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型對跳躍系統所獲得之識別結果較不理想。

於第三章時曾透過多項式基底結合移動最小平方差法建構 TVARX 模型，並應用於平緩變化、週期變化、跳躍變化與線性變化等時變系統之瞬時模態識別。此方法雖然能準確識別平緩變化、週期變化與線性變化等時變系統之瞬時模態，但對於跳躍變化之時變系統於不連續處無法準確識別。以 Haar 小波包函數結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型，則對平緩變化、週期變化、跳躍變化與線性變化等系統均能獲得準確之結果。很明顯，該方法之適用範圍較廣。

最後將 Haar 小波包函數結合移動最小平方差法架構 TVARX 模型所建立之識別流程，應用於國家地震工程研究中心所進行的鋼筋混凝土門型架構之振動台試驗，驗證此識別方法能應用於實測資料上。當應用於實測資料的識別中，用實驗過程量得之基底剪力、加速度與位移反應迴歸出此實驗模型之參數變化情形，以此為參考資料。相較於研究中所提方法之識別結果，亦可看出相似之變化情形，顯示在實測應用上之可行性。

第五章 結論與建議

5.1 結論

5.1.1 線性系統

本文提出了一套基於連續小波轉換之線性系統識別模式，識別其模態參數。連續小波轉換應用於離散化運動方程式（為一 ARX 時間序列）之量測自由度。於轉換過程選擇恰當之尺度因子，以便達到濾波效果，以提升模態參數之識別能力。並利用連續小波轉換之平移不變性，有效率地由量測反應或輸入估算離散化運動方程中各函數之小波轉換。最後利用最小平方差法估算離散化運動方程各函數前之係數矩陣，再透過係數矩陣直接估算系統之動態特性（自然振動頻率、阻尼比與振態）。

研究中利用六層樓剪力建築物之數值模擬地震反應，進行系統識別，驗證線性系統識別方法之可行性。並且探討 ARX 時間序列階數、雜訊、不同小波函數及其尺度因子對識別結果之影響，以利使用者能更容易地掌握此識別方法之準確性。本分析中利用了 Harr 小波函數及 Meyer 小波函數。從此兩函數之 Fourier 轉換知，選擇不同之尺度因子可達到類似帶寬濾波之效果，尤其是 Meyer 小波。當決定欲識別之頻率區間，可選擇適當之尺度因子，將反應及輸入資料轉換至小波空間達到濾波之效果，並於小波空間識別 ARX 時間序列之係數矩陣，識別動態特性。隨著 ARX 模式階數之增加，落於識別頻率區間內之模態特性將穩定出現。即使在含 20% 噪訊比雜訊之反應及輸入數據之情況下，亦能得到準確之識別結果。

線性系統之識別方法亦成功應用於分析國家地震工程研究中心之三層樓鋼構之動態反應與三跨連續萬版大橋（總長 440 公尺）之垂直向衝擊載重實驗數據。以各種實測資料進行分析，吾人均能輕易識別其模態反應。所得之結果可透過有限元素模型與前人之分析結果相比較均可獲得一致之結果。

5.1.2 線性時變系統

於時變系統方面，本文則分別考慮以多項式函數以及小波函數為基底對時變系統中之時變係數以基底函數展開，並以傳統基底函數展開法、加權基底函數技巧或移動最小平方差法架構 TVARX 模型，再透過最小平方差法估算各組基底函數或形狀函數所對應之係數。利用時變係數建構出結構之系統矩陣，接著經由系統識別程序，獲得系統之瞬時模態參數。

為了透過 TVARX 模式直接估算系統之瞬時模態特性，於研究中建立 TVARX 模式與運動方程式之對應關係式。先由單自由度系統出發推導基於位移、速度與加速度反應之 TVARX 模型與運動方程式之對應關係式；接著推廣至多自由度系統；最後，考慮不完全量測自由度下 TVARX 模型之建立，探討量測反應所架構之 TVARX 模式估算結構系統之動態特性。並且探討位移、速度與加速度反應對模態識別之影響，吾人經嚴謹數學證明當以位移反應架構 TVARX 模型時，則估算所得之瞬時模態參數是正確的；但若改用速度或加速度反應架構 TVARX 模型時，則所估算之瞬時模態參數是不正確的，將導致系統誤差產生。

藉由單自由度之時變線性系統之數值模擬反應驗證時變系統之識別方法。考慮之數值模型具有平緩變化、週期變化、跳躍變化與折線變化等時變特性。並且探討基底函數種類（如多項式與小波函數）、各種基底函數之參數（如多項式階數與小波函數之尺度因子）、分析方法之控制參數（如權重函數之支撐參數、移動最小平方差法之結節數）、TVARX 之模型階數與雜訊等參數對識別結果之影響。藉此些參數之探討更能掌握此分析方法之特性。

分析結果可歸納出幾項結論：

1. 以傳統基底函數展開法架構 TVARX 模型，若能選擇恰當之基底函數，則能準確識別系統之瞬時模態特性，但此方法須引入較多基底，易造成數值困難。
2. 以權重基底函數展開法架構 TVARX 模型，雖然能較少之基底函數準確識別平緩變化、週期變化與折線變化等時系統，但計算過程相當耗時。
3. 以移動最小平方差法架構 TVARX 模型，若選用多項式函數為基底，不僅能

較少之基底函數準確識別平緩變化、週期變化與折線變化等時系統，其所需之計算時間亦較少。但其適用範圍仍僅侷限於平緩變化、週期變化與折線變化等時系統。

4. 以移動最小平方差法架構 TVARX 模型，若選用 Haar 小波包為基底，不僅能準確識別平緩變化、週期變化與折線變化等時系統，對於跳躍變化之時變系統亦能準確識別。
5. 以移動最小平方差法架構 TVARX 模型，若選用 Sym4 小波包為基底，由於其函數不具有不連續之跳躍特性，因此其適用範圍亦侷限於平緩變化、週期變化與折線變化等時系統。

分別選用多項式函數與 Haar 小波包為基底，並透過移動最小平方差建構 TVARX 模式，將此識別流程應用於國家地震工程研究中心所進行的鋼筋混凝土門型架構之振動台試驗，驗證此識別方法確實能應用於實測資料上。當應用於實測資料的識別中，用實驗過程量得之基底剪力、加速度與位移反應迴歸出此實驗模型之參數變化情形，以此為參考資料。相較於研究中所提方法之識別結果，亦可看出相似之變化情形，顯示在實測應用上之可行性。

5.2 建議

線性系統之識別上，選擇各種小波函數，配合不同之尺度因子可達到類似帶寬濾波之效果。當決定欲識別之頻率區間，可選擇適當之尺度因子，將反應及輸入資料轉換至小波空間達到濾波之效果。而不同小波函數所決定之頻率區間與頻帶分佈並不相同。因此未來研究可考慮選用不同之小波函數如 Shannon（矩型變化之頻帶）或 Morlet（鐘型變化之頻帶），藉由其頻帶特性進一步探討其識別結果。

時變系統之識別上，以移動最小平方差法建模所使用之權重函數為指數型權重函數，未來研究可進一步探討不同權重函數對識別結果之影響。研究中所應用之案例為振動台破壞試驗，往後可嘗試將此識別方法應用於加裝非線性消能元件之結構反應，以進一步檢驗此些非線性元件應用於結構物之設計。此外，實驗中

受測模型受地震力作用而造成破壞導致勁度降低，於識別過程可看出其瞬時模態之變化情形。因此，往後之研究可根據瞬時模態參數發展一套結構損壞評估之準則。雖然理論之推導已推廣至多自由度。但數值驗證之模型與實測反應均為單自由度系統。未來可以考慮將此些方法推廣至多自由度系統之量測反應。



參考文獻

- Allemang, R. L. and Brown, D. L. A correlation coefficient for modal vector analysis, *Proceeding of the first International Modal Analysis Conference, Bethel, Connecticut, U.S.A.* 1983.
- Alvin, K. F. Structural system identification: From reality to models, *Computers and Structures* 2003; 81(12): 1149-1176
- Asato, H., Yamashita, K. and Miyagi, H. A method for parameter estimation in the NARMAX model with ARCH errors by RBF networks, *IEEE SMC '99 Conference Proceedings. IEEE International Conference on 1999*; 5: 425-428.
- Barbara, B. H. *The World According to Wavelets.* A. K. Peters Ltd. 1998.
- Bartlett, M. S. The theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time Series, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* 1946; 8:27-41
- Belge, M. and Miller, E. L. A sliding window RLS-like adaptive algorithm for filtering alpha-stable noise. *IEEE Signal Process Letter* 2000; 7(4): 86-89.
- Brown D, Allemang R, Zimmerman R. and, Mergeay, M. Parameter estimation techniques for modal analysis. *SAE Transaction* 1979; 88(1):828-846.
- Charbonnier, R., Barlaud, M., Alengrin, G. and, Menez, J. Results on AR-modeling of nonstationary signals, *Signal processing* 1987; 12(2): 143-151.
- Chen, S., Billings, S. A. and, Luo, W. Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification, *International journal of control* 1989; 50(5): 1873-1896.
- Chen, S. and, Billings, S. A. Representation of nonlinear systems—The NARMAX model, *International Journal of Control* 49 1989; 1013-1032.
- Chiras, N., Evans, C. and Rees, D. Nonlinear gas turbine computer modeling using NARMAX structures, *IEEE, Instrumentation and Measurement Technology Conference, Proceedings of the 17th IEEE* 2000; Vol.3.1278-1284.
- Choi, B. Y. and Bien, Z. Sliding-windowed weighted recursive least-squares method for parameter estimation. *Electron Letter* 1989; 25(20): 1381-1382.
- Choi, H. I. and Williams, W. J. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernel. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989; 17(6): 862-871.

- Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Inc. 1992.
- Cohen, L. Time-frequency distributions—A review. *Proceedings of the IEEE*, 1989; 77(7): 941-981.
- Combes, J. M., Grossmann, A. and, Tchamitchian Ph. Eds. *Wavelet: Time-Frequency Methods and Phase Space* Springer-Verlag, Berlin. 1990.
- Daubechies, I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. *Communication for Pure & Applied Mathematics* 1988; 41:909-996.
- Daubechies, I., Grossmann, A. and Meyer, Y. Painless Nonorthogonal Expansions. *Journal of mathematical physics*.1986; 27: 1271-1283.
- Dorfan, Y., Feuer, A. and Porat, B. Modeling and identification of LPTV systems by wavelets, *Signal Processing*, 2004; 84(8): 1285-1297
- Frandrín, P. Wavelets and related time-scale transforms. *SPIE Advanced Signal-Processing Algorithms, Architectures and Implementation* 1990; 1348:2-13.
- Fortescue, T. R., Kershenbaum, L. S. and Ydstie, B. E. Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors. *Automatica* 1981; 17(6):831-835.
- Ghanem, R. and Romeo, F. A wavelet-based approach for model and parameter identification of non-linear systems., *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2001; 36:835-859.
- Glass, J. W. and Franchek, M. W. NARMAX modeling and robust control of internal combustion engines, *International journal of control* 1999; 72(4): 289-304.
- Goel, R. K. and Chopra, A. K. Vibration properties of buildings determined from recorded earthquake motions. *Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, Report No. UCB/EERC-97/14*. 1997
- Gouttebroze, S. and Lardies, J. On using the wavelet transform in modal analysis. *Mechanics Research Communications* 2001; 28(5):561-569.
- Huang, C. S. Structural identification from ambient vibration measurement using the multivariate AR model. *Journal of Sound and Vibration* 2001; 241(3): 337-359.
- Huang, C. S. and Lin H. L. Modal identification of structures from ambient vibration, free vibration and seismic response data via a subspace approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 2001; 30:1857-1878.

- Huang, C. S., Hung, S. L., Lin, C. I. and Su, W. C. A wavelet-based approach to identifying structure modal parameters from seismic response and free vibration data. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2005; 20:408-423.
- Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C. and Shin, H. H. The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis, *Proceedings of the Royal Society of London* 1998; A454: 903-995.
- Ibrahim, S. R. and, Mikulcik, E. C. A method for direct identification of vibration parameters from the free responses. *Bulletin of Shock and Vibration* 1977; 47(4): 183-198.
- Jawerth, B. and Sweldens, W. Overview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM Review* 1994; 36(3): 377-412.
- Jiang, J. and Cook, R. Fast parameter tracking RLS algorithm with high noise immunity. *Electron Letter* 1992; 28(22): 2042-2045.
- Johansson, R. *System Modeling and Identification*, Prentice-Hall, NJ 1993.
- Jones, D. L. and Baraniuk, R. G. An adaptive optimal-kernel time-frequency representation. *IEEE Transactions on Signal Processing* 1995; 43 (10): 2361-2371.
- Joseph, L. and Minh-Nghi, T. A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators, *International Journal of Mechanical Sciences* 2005; 47:1292-1281.
- Kalouptsidis, N. and Theodoridis, S. *Adaptive System Identification and Signal Processing Algorithm*, Prentice-Hall, UK, 1993.
- Kijewski, T. and Kareem, A. Wavelet transforms for system identification in civil engineering, *Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering* 2003; 18(5): 339-355.
- Kobayashi, M. Wavelets and their applications in industry. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 2001; 47(3):1749-1760.
- Lancaster, P. and Salkauskas, K. *Curve and Surface Fitting : An Introduction*, Academic Press, 1986.
- Lardies, J. and Gouttebroze, S. Identification of modal parameters using the wavelet transform. *International Journal of Mechanical Sciences* 2002; 44: 2263-2283.
- Leung, S. H. and So, C. F. Gradient-based variable forgetting factor RLS algorithm in

time-varying environments. *IEEE Transactions on Signal Processing* 2005; 53(8): 3141-3150.

Lind, R., Snyder, K. and Brenner, M., Wavelet analysis to characteristic non-linearities and predict limit cycle of an aeroelastic system., *Mechanical System and Signal Processing* 2001; 15(2):337-356

Liu, G. R. *Mesh Free Methods- Moving beyond the Finite Element Method*, CRC Press, NY. 2003.

Ljung, L. *System Identification, Theory for the User*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

Ljung, L. and Soderstrom, T. *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

Loh, C. H. and Lin, H. M. Application of off-line and on-line identification techniques to building seismic response data, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 1996; 25:269-290.

Loh, C. H., Lin, C. Y. and Huang, C. C. Time domain identification of frames under earthquake loadings. *Journal of Engineering Mechanics* 2000; ASCE 126(7): 693-703.

Loh, C. H., Yang, Y. S., Wu, C. L., Lin, C. H. and Chao, S. H. Numerical simulation of a dynamic gravity load collapse test of a non-Ductile RC frame. NCREC Research Programs and Accomplishments, 2005;45-48.

Luo, W. and Billings, S. A. Adaptive model selection and estimation for nonlinear systems using a sliding data window, *Signal Processing* 1995; 46(2): 179-202.

Mallat, S. Multiresolution approach to wavelets in computer vision. in: *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space* 1989a; 313-327.

Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transaction. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 1989b; 11: 674-693.

Martin, W. and Flandrin, P. Wigner-Ville spectral analysis of non-stationary processes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 1985; ASSP-33: 1461-1470.

Marmarelis, V. Z. Nonlinear and nonstationary modeling of physiological system: an overview in advanced methods of physiological system modeling, edited by V. Z.

- Marmarelis. Los Angeles: *Biomedical Simulations Resource*, Univ. Southern California, 1987; 1: 1-24.
- Nordsjö , A. E. Identification of certain time-varying nonlinear Wiener and Hammerstein Systems, *IEEE Transaction on Signal Processing* 2001; 49(3): 577-592.
- Parkum, J. E., Poulsen, N. K. and Holst, J. Recursive forgetting algorithm, *International Journal of Control* 1992; 55(1): 109-128.
- Park, D. J. and Jun, B. E. Self-perturbing recursive least squares algorithm with fast tracking capability. *Electron Letter* 1992; 28(6): 558-559.
- Pschogios, C. D. and Ungar, L. H. Direct and Indirect Model Based Control Using Artificial Neural Network, *Industrial and engineering chemistry research* 1991; (30): 2546-2573
- Qian, S. *Introduction to Time-frequency and Wavelet Transforms*, Prentice-Hall PTR, NJ, 2002.
- Ralston, J. C., Zoubir, A. M. and Boashash, B. Identification of a class of time-varying nonlinear systems using basis sequences, *Signal Processing Research Centre* 1996; 161-164.
- Robertson, A. N., Park, K. C. and Alvin, K. F. Extraction of impulse response data via wavelet transform for structural system identification. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 1998; 120: 252-260.
- Robertson, A. N., Park, K. C. and Alvin, K. F. Identification of structural dynamics models using wavelet-generated impulse response data. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 1998; 120: 261-266.
- Ruzzene, M., Fasana, A., Garibaldi, L. and, Piombo, B. Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: application to real data. *Mechanical System and Signal Processing* 1997; 11(2): 207-218.
- Safak, E. Adaptive modeling, identification and control of dynamic structural systems. I: Theory. *ASCE-Journal of Engineering Mechanics* 1989a;115: 2386-2405.
- Safak, E. Adaptive modeling, identification and control of dynamic structural systems. II: Applications. *ASCE-Journal of Engineering Mechanics* 1989b;115: 2406-2426.
- Safak, E. and Celebi, M. Seismic response of Transamerica building, II: system identification, *Journal of Structural Engineering, ASCE* 1991; 117:2405-2425.

- Satio, T. and Yokota, H. Evaluation of dynamic characteristics of high-rise buildings using system identification, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 1996; 59:299-307
- Sargantanis, I. G. and Karim, M. N. Variable Structure NARX Models: Application to Dissolved-Oxygen Bioprocess, *Bioengineering, Food and Natural Products* 1999; 45(9): 2034-2045
- Shapard, D. A two-dimension interpolation function for irregularly spaced points, in : *Proc. ACM Natl. Conf.* 1968; 517-524.
- Schoenwald, D. A. System identification using a wavelet-based approach. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, 1993; 3064-3065.
- Spliid, H. A fast estimation method for the vector autoregressive moving average model with exogenous variables. *Journal of the American Statistical Association* 1983; 48(384): 843-849.
- Staszewski, W. J. and Tomlinson, R. G. Application of the wavelet transform to fault detection in a spur gear. *Mechanical Systems and Signal Processing* 1994; 8: 289-307.
- Strang, G. Wavelet transforms versus Fourier transforms. *Bulletin of the American Mathematical Society* 1993; 28(2):288-305.
- Taylor, R., Zienkiewicz, O. C., Oñate, E. and Idelsohn, S., Moving least square approximations for the solution of differential equation, *Technical Report*, Cimne, 1995.
- Toplis, B. and Pasupathy, S. Tracking improvements in fast RLS algorithm using a variable forgetting factor. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process* 1988; ASSP-36(2): 206-227.
- Tsatsanis, M. K. and Giannakis, G. B. Time-varying system identification and model validation using wavelets. *IEEE Trans. Signal Process* 1993; 41:3512-3523.
- Unser, M. and Aldroubi, A. Review of wavelet transforms for pattern recognitions. *Proceedings of SPIE, The International Society for Optical Engineering*, 1996; 2762:2-22.
- VanDerVeen, A., Deprettere E. F. and Swindlehurst, A. L. Subspace-based signal analysis using singular value decomposition. *Proceedings of the IEEE* 1993; 81(9):1277-1308.

Vazquez, K. R. Genetic programming in time series modeling: an application to metrological data, *IEEE, Evolutionary Computation*, 2001. *Proceedings of the 2001 Congress on*, 2001; 1: 261-266.

Vold, H., Kundrat, J., Rocklin, G. T. and Russell, R. A multiple-input modal estimation algorithm for mini-computer. *SAE Transaction* 1982; 91(1):815-821.

Watson, G. A. *Approximation Theory and Numerical Methods*, John Willey & Sons, NY. 1980

Wong, L. A. and Chen, J. C. Nonlinear and chaotic behavior of structural system investigated by wavelet transform techniques, *International Journal of Non-linear Mechanics* 2001; 36: 221-235.

Wu, C. L., Yang, Y. S. and Loh, C. H. Dynamic gravity load collapse of non-ductile RC frames I: experimental approach. *Proceedings of the 8th U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, paper no. 750. 2006

Yang, J. N., Lei, Y., Pan, S. W. and Huang, N. System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis, part I : normal modes, *Earthquake Engineering structure* 2003; 32(10): 1533-1554.

Zheng, Y., Lin, Z. and Tay, D. B. H. Time-varying parametric system multiresolution identification by wavelets, *International Journal of System Science* 2001a; 32(6): 775-793.

Zheng, Y., Tay, D. B. H. and Lin, Z. Modeling general distributed nonstationary process and identification time-varying autoregressive system by wavelets: theory and application, *Signal Processing* 2001b; 81: 1823-1848.

Zou, R., Cupples, W. A., Yip, K. P., Holstein-Rathlou, N. H. and Chon, K. H. Time-varying properties of renal autoregulatory mechanisms. *IEEE transactions on bio-medical engineering*. 2002; 49: 1112-1120

Zou, R., Wang, H. and Chon, K. H. A robust Time-Varying Identification Algorithm Using Basis Function. *Annals of Biomedical Engineering* 2003; 31: 840-853.

林志嘉,「橋梁現地實驗與動力特性系統識別」,國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文,2000。

黃炯憲、洪士林、蘇威智、陳承俊,「利用小波包識別橋樑動態特性」,中央氣象局報告,2003。

黃炯憲,「微動量測分析工具探討(二)—時間序列法」,國家地震工程研究中心報

告 NCREE-99-018，1999。

黃炯憲，「西藏大橋衝擊試驗與動力特性識別」，西藏大橋動力及靜力特性之監測及分析期末報告，3-1-3-84，2000。



附錄

假設基底剪力與阻尼力及彈性回復力之關係為 $F_B(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$ ，定義誤差估計函數：

$$E = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N (F_{B,m}(t_n) - F_B(t_n))^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N [F_{B,m}(t_n) - (kx(t_n) + c\dot{x}(t_n))]^2 \quad (\text{A.1})$$

其中 $F_{B,m}$ 為量測所得之基底剪力。對式 (3.79) 中之未知數 k 與 c 取導數並令其為零可得：

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{2}{T} \sum_{n=1}^N x[F - (kx + c\dot{x})] = 0 \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = -\frac{2}{T} \sum_{n=1}^N \dot{x}[F - (kx + c\dot{x})] = 0 \quad (\text{A.2b})$$

將式(A1.2)以矩陣型式表示，可改寫為

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial k} \\ \frac{\partial E}{\partial c} \end{bmatrix} = -\frac{2}{T} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x[F - (kx + c\dot{x})] \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}[F - (kx + c\dot{x})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

將式(A1.3)移項整理後可得

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N xF \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N kx^2 + \sum_{n=1}^N cx\dot{x} \\ \sum_{n=1}^N kx\dot{x} + \sum_{n=1}^N c\dot{x}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

接著將式(A1.4)中之未知數 k 與 c 提出以另一向量表示

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N xF \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x^2 & \sum_{n=1}^N x\dot{x} \\ \sum_{n=1}^N x\dot{x} & \sum_{n=1}^N \dot{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

進一步以矩陣逆運算之方法求得未知數 k 與 c

$$\begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x^2 & \sum_{n=1}^N x\dot{x} \\ \sum_{n=1}^N x\dot{x} & \sum_{n=1}^N \dot{x}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N xF \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}F \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

最後根據下列關係式，即可算出結構系統的瞬時自然振動頻率及阻尼比。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M_e}}, \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (\text{A.7})$$

$$c = 2\xi_n \omega_n \cdot M_e, \quad \xi_n = \frac{c}{2\omega_n \cdot M_e} \quad (\text{A.8})$$

